Phys103a Mécanique 2 (2019-20)

Exercices pour Contrôle Continu: FEUILLE 1

Coordonnées polaires, coordonnées intrinsèques, Energie, Travail

Pendant l'interrogation, le matériel électronique (dont calculatrice) ne sera pas autorisé.

1 Lien entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes

1. Des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes
   (a) Soit un point A dont les coordonnées polaires sont ρ=1 (en cm) et θ=30°. Calculez ses coordonnées cartésiennes.
   (b) Soit un point A dont les coordonnées polaires sont ρ=20 (en mm) et θ=-30°. Calculez ses coordonnées cartésiennes
   (c) Soit un point A dont les coordonnées polaires sont ρ=8 (en mm) et θ=120°. Calculez ses coordonnées cartésiennes
   (d) Soit un point A dont les coordonnées polaires sont ρ=3 (en cm) et θ=-120°. Calculez ses coordonnées cartésiennes
2. Des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires
   (a) Soit un point A dont les coordonnées cartésiennes sont x=3 (en cm) et y=5 (en cm). Calculez ses coordonnées polaires (ρ,θ), θ étant exprimé en degrés. Donnée: $TAN(31) \approx 0.6 = 3/5$
   (b) Soit un point A dont les coordonnées cartésiennes sont x=-3 (en mm) et y=5 (en mm). Calculez ses coordonnées polaires (ρ,θ), θ étant exprimé en degrés. Donnée: $TAN(31) \approx 0.6 = 3/5$
   (c) Soit un point A dont les coordonnées cartésiennes sont x=5 (en m) et y=-3 (en m). Calculez ses coordonnées polaires (ρ,θ), θ étant exprimé en degrés. Donnée: $TAN(31) \approx 0.6 = 3/5$
   (d) Soit un point A dont les coordonnées cartésiennes sont x=-3 (en cm) et y=-5 (en cm). Calculez ses coordonnées polaires (ρ,θ), θ étant exprimé en degrés. Donnée: $TAN(31) \approx 0.6 = 3/5$
   (e) Soit un point A dont les coordonnées cartésiennes sont x=-5 (en mm) et y=-3 (en mm). Calculez ses coordonnées polaires (ρ,θ), θ étant exprimé en degrés. Donnée: $TAN(31) \approx 0.6 = 3/5$

2 Repère en coordonnées polaires

Dessinez sur un schéma le repère ($\vec{u_\rho}$,$\vec{u_\theta}$) aux points suivants repérés par leur coordonnées polaires (ρ,θ), θ étant exprimé en degré:
A(1, 30°), B(5, 90°), C(2,120°), D(4,180°), D'(2,180°), E(3, -120°), F(5, -90°), G(1, -30°).
Donnez pour chacun des points considérés les composantes des vecteurs $\vec{u_\rho}$ et $\vec{u_\theta}$) dans la base ($\vec{i}$,$\vec{j}$).

3 Vitesse en coordonnées polaires

1. Un point A se déplace dans le plan. Son mouvement est décrit en coordonnées polaires: $\rho(t) = \rho_0$, $\theta(t) = \omega t$, où ρ_0 et ω sont des constantes.
   - Dessinez la trajectoire du point A.
   - Exprimez $\dot{\rho}(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.
   - Déterminez la vitesse $\vec{v}$ du point A en utilisant le repère lié aux coordonnées polaires. La représentez sur le dessin.
   - En déduire la vitesse $\vec{v}$ dans le repère lié aux coordonnées cartésiennes.

2. Un point A se déplace dans le plan. Son mouvement est décrit en coordonnées polaires:
$\rho(t) = \rho_0$, $\theta(t) = \alpha t^2$, où ρ_0 et α sont des constantes
- Dessinez la trajectoire du point A.
- Exprimez $\dot{\rho}(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.
- Déterminez la vitesse $\vec{v}$ du point A en utilisant le repère lié aux coordonnées polaires. La représentez sur le dessin.
- En déduire la vitesse $\vec{v}$ dans le repère lié aux coordonnées cartésiennes.

3. Un point A se déplace dans le plan. Son mouvement est décrit en coordonnées polaires:
$\rho(t) = \alpha t$, $\theta(t) = \omega t$. où α et ω sont des constantes.
- Représentez sur un dessin le mouvement du point A.
- Exprimez $\dot{\rho}(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.
- En déduire la vitesse $\vec{v}$ dans le repère lié aux coordonnées cartésiennes.

4. Un point A se déplace dans le plan. Son mouvement est décrit en coordonnées polaires:
$\rho(t) = \alpha t$, $\theta(\mathrm{t})=45^{\mathrm{o}}$ où α est une constante.
- Dessinez le mouvement du point A.
- Exprimez $\dot{\rho}(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.
- Déterminez la vitesse $\vec{v}$ du point A en utilisant le repère lié aux coordonnées polaires. La représentez sur le dessin pour un temps quelconque.
- En déduire la vitesse $\vec{v}$ dans le repère lié aux coordonnées cartésiennes.

5. Un point A se déplace dans le plan. Son mouvement est décrit en coordonnées polaires:
$\rho(t) = \mathrm{v}_0 t$, $\theta(t) = \omega t$, où v_0 et ω sont des constantes.
- Dessinez le mouvement du point A.
- Exprimez $\dot{\rho}(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.
- Déterminez la vitesse $\vec{v}$ du point A en utilisant le repère lié aux coordonnées polaires. La représentez sur le dessin en θ=90^0, θ=180^0, θ=-90^0 au premier passage par ces angles quand t est positif.
- En déduire la vitesse $\vec{v}$ dans le repère lié aux coordonnées cartésiennes.

4 Vitesse et accélération en coordonnées polaires

1. Un point A se déplace dans le plan. Son mouvement est décrit en coordonnées polaires:
$\rho(t) = \rho_0$, $\theta(t) = \omega t$, où ρ_0 et ω sont des constantes.
- Dessinez le mouvement du point A.
- Exprimez $\dot{\rho}(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.
- Exprimez $\ddot{\rho}(t)$ et $\ddot{\theta}(t)$.
- Déterminez la vitesse $\vec{v}$ du point A dans le repère lié aux coordonnées polaires. La représentez sur le dessin.
- Déterminez l'accélération $\vec{a}$ du point A dans le repère lié aux coordonnées polaires. La représentez sur le dessin.

2. Un point A se déplace dans le plan. Son mouvement est décrit en coordonnées polaires:
$\rho(t) = \alpha t$, $\theta(t) = \omega t$, où α et ω sont des constantes.
- Représentez sur un dessin le mouvement du point A.
- Exprimez $\dot{\rho}(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.
- Exprimez $\ddot{\rho}(t)$ et $\ddot{\theta}(t)$.
- Déterminez l'accélération $\vec{a}$ du point A dans le repère lié aux coordonnées polaires. - Déterminez l'accélération et la représentez sur le dessin quand le point passe pour la première fois après t=0 à des points tels θ=90^{o}, θ=180^{o}, θ=-90^{o}.

5 Coordonnées intrinsèques

1. Un point A se déplace dans le plan. Son mouvement est décrit en coordonnées polaires:
   $\rho(t) = \rho_0$, $\theta(t) = \omega t$, où ρ_0 et ω sont des constantes.
   - Dessinez le mouvement du point A.
   - Que vaut l'abcisse s(t) du point A sur la trajectoire au cours du temps?
   - Représentez le repère intrinsèque sur la courbe.
   - Exprimez les vecteurs de base du repère intrinsèque en fonction des vecteurs de base du repère lié aux coordonnées polaires. - Déterminez le rayon de courbure de la trajectoire en utilisant une ou plusieurs données (ρ_0, ω)?
   - Exprimez la vitesse tangentielle en fonction de ρ et de ω en prenant comme sens positif les angles θ croissants.
   - Exprimez l'accélération tangentielle
   - Exprimez l'accélération normale.
   - Comparez avec l'accélération exprimée en coordonnées polaires.
2. Un point A se déplace dans le plan. Son mouvement est décrit en coordonnées polaires:
   $\rho(t) = \rho_0$, $\theta(t) = \alpha t^2$, où ρ_0 et α sont des constantes.
   - Dessinez le mouvement du point A.
   - Que vaut l'abcisse s(t) du point A sur la trajectoire au cours du temps?
   - Représentez le repère intrinsèque sur la courbe.
   - Exprimez le repère intrinsèque en fonction du repère lié aux coordonnées polaires.
   - Quel est le rayon de courbure de la trajectoire?
   - Exprimez la vitesse tangentielle en fonction de ρ et de ω en prenant comme sens positif les angles θ croissants.
   - Exprimez l'accélération tangentielle
   - Exprimez l'accélération normale
   - Comparez avec l'accélération exprimée en ccordonnées polaires.
3. Un point A se déplace dans le plan sur une parabole d'équation $y = \frac{1}{2}\alpha x^2$, où α est une constante. L'abcisse x est donnée par $v_0 t$. Le sens positif du déplacement est choisi vers les x croissants.
   - Dessiner la trajectoire.
   - Déterminer les composantes de la vitesse $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes.
   - Déterminer $\vec{v}$ à t=0.
   - Dessinez $\vec{u_t}$ et $\vec{u_N}$ à t=0.
   - Déterminez les composantes de l'accélération $\vec{a}$ en coordonnées cartésiennes.
   - Déterminez l'accélération $\vec{a}$ en coordonnées cartésiennes à t=0.
   - En déduire le rayon de courbure de la parabole en $x = 0$.
   - Pourquoi ne dépend-il pas de v_0?

6 Energie

1. La force suivante dérive-t-elle d'une énergie potentielle? Si oui laquelle?
   $F_x = -2x, F_y = 2y$
2. La force suivante dérive-t-elle d'une énergie potentielle? Si oui laquelle?
   $F_x = -2y, F_y = -2x$
3. La force suivante dérive-t-elle d'une énergie potentielle? Si oui laquelle?
   $F_\rho = sin\theta, F_\theta = cos\theta$
4. La force suivante dérive-t-elle d'une énergie potentielle? Si oui laquelle?
   $F_\rho = sin\theta, F_\theta = -cos\theta$
5. La force suivante dépend-elle d'une énergie potentielle? Si oui laquelle?
   $F_\rho = \rho sin\theta, F_\theta = \rho cos\theta$.

6. La force suivante dérive-t-elle d'une énergie potentielle? Si oui laquelle?
   $F_\rho = 2\rho sin\theta$,$F_\theta = -\rho cos\theta$.

7 Travail

1. On considère la force suivante:
   $F_\rho = A\rho sin\theta$,$F_\theta = A\rho cos\theta$, où A est une constante.
   a) Calculer le travail de cette force quand on se déplace de l'origine 0 au point A (R_0,$\theta = 0$) en ligne droite.
   b) Calculer le travail de cette force quand on se déplace du point A (R_0,$\theta = 0$) au point B (R_0,$\theta = \pi/2$) en se déplaçant sur le cercle de rayon R_0.
   c) Calculer le travail de cette force quand on se déplace de l'origine 0 au point B (R_0,$\theta = \pi/2$).
   d) Comparer le travail quand on va directement de 0 à B au travail quand on va de 0 à B en passant par A.
2. On considère la force suivante:
   $F_\rho = A\rho cos\theta$,$F_\theta = -A\rho sin\theta$, où A est une constante.
   a) Calculer le travail de cette force quand on se déplace de l'origine 0 au point A (R_0,$\theta = 0$).
   b) Calculer le travail de cette force quand on se déplace du point A (R_0,$\theta = 0$) au point B (R_0,$\theta = \pi/2$) en se déplaçant sur le cercle de rayon R_0.
   c) Calculer le travail de cette force quand on se déplace de l'origine 0 au point B (R_0,$\theta = \pi/2$).
   d) Comparer le travail quand on va directement de 0 à B au travail quand on va de 0 à B en passant par A.