TD1 – MATRICES ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Polycopié de cours rempli et calculatrice en état de marche obligatoires

Objectifs : à la fin de ces séances **vous devriez être capable** :

1) d'**effectuer** les opérations usuelles sur les matrices ;
2) de **résoudre** des systèmes d'équations linéaires ;
3) de **formaliser** une problématique d'économie ou de gestion avec des matrices et des systèmes d'équations et de la **résoudre**.

Sommaire

1 Matrices

1.1 QUIZZ COURS

a) Donner la dimension des matrices ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Parmi ces matrices, donner :
- la matrice ligne :
- la matrice colonne :
- la matrice carrée :

c) La somme de deux matrices est possible ssi :

d) Quand cela est possible donner la dimension puis calculer les matrices $A+A=?$; $A+B=?$

e) Le produit de deux matrices est possible ssi :

f) Quand cela est possible donner la dimension puis calculer les matrices $A\,B=?$; $B\,A=?$

g) Indiquer les matrices pouvant être utilisées dans les calculs : $A\times ?$ et $? \times A$

Matrices	$A\times ?$	$? \times A$
A	oui/non car	oui/non car
C	oui/non car	oui/non car
D	oui/non car	oui/non car

h) Soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad V = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.$$

Écrire les matrices $A\,X = ?$; $E\,V^t = ?$

i) Soit

$$J = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer et commenter $E\,J=?$; $E\,K=?$; $E\,I=?$; $I\,E=?$

2 Systèmes d'équations linéaires

2.1 Méthodologie pour résoudre un système d'équations linéaires

a) Si système de deux équations à deux inconnues alors méthode de CRAMER.

b) Si système de trois équations et plus :
- **si système triangulaire supérieur : méthode de substitutions ;**
- **sinon méthode du pivot de GAUSS pour se ramener à un système triangulaire supérieur.**

2.2 Méthode de CRAMER :

Résoudre le système :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2 + b_2y = c_2 \end{cases}$$

On calcule le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

Critère= ?	Nb de solutions= ?	$\mathcal{S}$ =?
	une seule solution	$S = \left\{ \begin{array}{lcl} x & = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = & \dfrac{\qquad}{\Delta} \\ y & = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = & \dfrac{\qquad}{\Delta} \end{array} \right\}$
	pas de solution	$S = \emptyset$
	une infinité de solutions	$S = \{(x, y) : \ a_1\,x \ + \ b_1\,y = c_1\}$

Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y=2 \\ x+y=5 \end{array}\right.$$

2.3 Méthode par substitutions

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y-3z=2 \\ y+z=5 \\ -2z=-6 \end{array}\right.$$

2.4 Méthode du pivot de GAUSS

Résoudre le système :

$$(S) = \begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ x + 2y - z = 4 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

Écrire le système sous forme matricielle, choisir un pivot et placer sa ligne en L_1 :

Par combinaisons linéaires avec la ligne pivot, éliminer l'inconnue dans les autres lignes :

- *en indiquant les opérations à faire sur les lignes ;*
- *en utilisant votre calculatrice pour faire les calculs.*

Recommencer jusqu'à obtenir un système triangulaire :

Une fois que le système est triangulaire, ré-introduire les variables et résoudre par substitution :

Exercice 1 (Pivot de GAUSS).
Pour les matrices ci-dessous mettre des zéros sous le pivot :

- en indiquant les opérations à faire sur les lignes ;
- en utilisant votre calculatrice pour faire les calculs.

$$(S) = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ \\ L_2 \leftarrow \\ \\ L_3 \leftarrow \end{array}$$

2.5 Exercices à travailler

Exercice 2.
Résoudre les systèmes :

$$(S_1) = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \qquad (S_2) = \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 8 \end{cases} \qquad (S_3) = \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$

$$(S_4) = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases} \qquad (S_5) = \begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 10x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad (S_6) = \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2z = 8 \\ y + z = 10 \end{cases}$$

$$(S_7) = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \qquad (S_8) = \begin{cases} 2u + v + 2w = 5 \\ 3u + 2v + w = 8 \\ 2u + v + 2w = 10 \end{cases} \qquad (S_9) = \begin{cases} 2x + y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 8 \\ 4x + 2y + 4z = 10 \end{cases}$$

$$(S_{10}) = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases} \qquad (S_{11}) = \begin{cases} 2p_1 + p_2 + 3p_3 = 7 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 3 \\ 2p_1 + 3p_2 + 4p_3 = 8 \end{cases} \qquad (S_{12}) = \begin{cases} 2x + y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

3 Cas pratiques

Pour chaque exercice suivant, il vous est demandé de :

a) Formaliser l'énoncé : matrices de constantes, variables et fonctions

b) Formaliser l'énoncé la problématique : on cherche ...

c) Faire l'application numérique

Pour la méthode de CRAMER :
- **expliciter les déterminants avant les calculs**

Pour le pivot de Gauss :
- **entourer le pivot**
- **expliciter les opérations sur les lignes** (*e.g.* $L_2 \leftarrow aL_1 + L_2$)
- **utiliser la calculatrice pour les opérations sur les lignes**

d) Conclure

Exercice corrigé

Un chocolatier peut fabriquer deux types de truffes au chocolat, l'une « d'entrée de gamme » et l'autre « de haut de gamme ». Pour produire un sachet de truffes d'entrée de gamme, il faut 1,5 kg de matière première et 1 heure de main d'œuvre ; pour produire un sachet de truffes haut de gamme, il faut 2 kg de matière première et 2 heures de main d'œuvre. Le coût est de 2€ le kg de matière première et 12€ l'heure de main d'œuvre. Le prix de vente est de 7€ pour un sachet de truffes d'entrée de gamme et de 15€ pour un sachet de truffes de haut de gamme. Le chocolatier a utilisé 290 kg de matière première et 240 heure de main d'œuvre : quel est alors le chiffre d'affaires ?

a) Formaliser l'énoncé

Les variables :

Les fonctions :

b) Formaliser la problématique

c) Résoudre :

d) Conclure :

Exercice 3 (Gestion).
Une usine fabrique différents types de pièces en alliage pour l'industrie aéronautique. Chaque pièce passe dans 3 ateliers différents :
– Elaboration : fabrication de l'alliage ;
– Formage : l'alliage est coulé dans un moule ;
– Usinage : la pièce est dégrossie et finalisée.
Pour fabriquer la pièce de type 1, il faut 2 heures d'Élaboration, 5 heures de Formage et 3 heures d'Usinage. Pour fabriquer la pièce de type 2, il faut 1 heure d'Élaboration, 3 heures de Formage et 2 heures d'Usinage. Pour fabriquer la pièce de type 3, il faut 1 heure d'Élaboration, 2 heures de Formage et 2 heures d'Usinage. Au cours d'un programme de fabrication, la charge horaire de chacun des ateliers a été de 450 heures d'élaboration, de 1 100 heures de Formage et de 750 heures d'Usinage. Combien de pièces ont été fabriquées ?

Exercice 4 (Économie).
Une entreprise produit deux modèles. Lorsque leurs prix unitaires sont p_1 et p_2, les quantités demandées pour chaque produit, D_1 et D_2, et les quantités disponibles de chaque produit (l'offre), O_1 et O_2, sont reliées par les équations :

$$\begin{array}{llll} D_1 & = 70 - 2p_1 + p_2 \qquad & O_1 & = -14 + 3p_1 \\ D_2 & = 105 + p_1 - p2 \qquad & O_2 & = -7 + 2p_2 \end{array}$$

Quels sont les prix d'équilibre de chaque produit (c-à-d ceux pour lesquels l'offre est égale à la demande) ?

Exercice 5 (Gestion).
Un grossiste veut écouler des stocks de linges de maison : 410 douzaines de draps de bain, 325 douzaines de serviettes de toilette et 310 douzaines de gants de toilette. Pour cela, le grossiste propose trois types de lots :
Lot A : 3 douzaines de draps de bain, 2 douzaines de serviettes de toilette et 2 douzaines de gants de toilette.
Lot B : 5 douzaines de draps de bain, 4 douzaines de serviettes de toilette et 3 douzaines de gants de toilette.
Lot C : 1 douzaine de draps de bain, 1 douzaine de serviettes de toilette et 1 douzaine de gants de toilette.
Le prix de vente est de 109€ sur chaque lot A, de 191€ sur chaque lot B et de 47€ sur chaque lot C. Combien de lots de chaque sorte doit-il constituer faire écouler son stock de draps de bain, de serviettes de toilette et de gants de toilette ? Quel est alors le chiffre d'affaires ?

Exercice 6.
On dispose de la teneur en vitamine (en mg de vitamine pour 100 g de fruits) de trois fruits :

Fruits	Vitamine A	Vitamine B	Vitamine C
Citron	100	300	400
Fraise	200	300	500
Pamplemousse	300	100	300

Combien de kilogramme de fruits faut-il pour obtenir 1,1 g de vitamine A ; 9 g de vitamine B et 20 g de vitamine C.

Exercice 7.
On propose à un batelier de transporter, en un seul voyage de 250 km, deux produits A et B pour lesquels il sera payé selon les modalités suivantes : 30€ la tonne de A et 20€ pour B. Un m^3 de A pèse une tonne et un m^3 de B pèse 0,5 tonne. Le coût en carburant est estimé à 0,02 € pour transporter une tonne sur un km. Le batelier a transporté 250 tonnes de charge utile, pour une capacité de 350 m^3 : quel est son profit ?