

Turbulence

TD 1 : Equations de Reynolds

1. Gradients de vitesse, dissipation

On rappelle la décomposition du tenseur de gradient de vitesse en tenseur de déformation s_{ij} et tenseur de rotation ω_{ij} :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = s_{ij} + \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

1. Donner la trace des tenseurs s_{ij} et ω_{ij} , et rappeler leurs propriétés de symétrie.
2. Montrer que la vorticité est donnée par $\omega_i = -\epsilon_{ijk} \partial u_j / \partial x_k = -\epsilon_{ijk} \omega_{jk}$.
3. Montrer que $s_{ij} \omega_{ij} = 0$.
4. Pour chacun des écoulements suivants, dessiner l'allure des lignes de courant, exprimer les tenseurs s_{ij} et ω_{ij} , et calculer le taux de dissipation d'énergie par unité de masse $\epsilon = 2\nu s_{ij} s_{ij}$:
 - (a)  coulement uniforme $\vec{u} = U_0 \vec{e}_x$.
 - (b)  coulement hyperbolique $\vec{u} = (\gamma x, -\gamma y, 0)$
 - (c) Rotation solide autour de l'axe z , $\vec{u}(\vec{r}) = (\Omega \vec{e}_z) \wedge \vec{r}$.
 - (d) Cisaillement constant ( coulement de Couette) $\vec{u}(y) = Sy \vec{e}_x$?
5. En prenant la divergence de l'équation de Navier-Stokes, montrez que le champ de pression satisfait à l'équation de Poisson

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = S^2 - \Omega^2$$

où $S^2 = s_{ij} s_{ij}$ et $\Omega^2 = \omega_{ij} \omega_{ij} = \frac{1}{2} \omega_k \omega_k$.

6. Que vaut le champ de pression pour les 4 écoulements précédents ?

2. Equations de Reynolds

On rappelle l'équation de Reynolds (RANS) :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \overline{u_i} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right),$$

où $\overline{u_i}$ désigne la vitesse moyenne et u'_i la fluctuation (avec $u_i = \overline{u_i} + u'_i$ et $\overline{u'_i} = 0$).

a) Equation de la chaleur

En introduisant la décomposition de Reynolds pour le champ de vitesse ($u_i = \bar{u}_i + u'_i$) et de température ($T = \bar{T} + T'$) dans l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}.$$

(où κ est la diffusivité thermique, en m^2s^{-1}), obtenir l'équation de Reynolds pour la température :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\overline{T' u'_i} + \kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right).$$

b) Equation de Reynolds pour la pression

En prenant la divergence de l'équation de Reynolds, montrez que le Laplacien du champ de pression moyen vérifie la relation :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1)$$

c) Equation de Reynolds pour la vorticité

L'équation d'évolution de la vorticité (qui s'obtient en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes) s'écrit :

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2}. \quad (2)$$

Le membre de gauche est la dérivée totale de la vorticité. Le premier terme du membre de droite est un terme d'amplification ou de réduction de la vorticité d e aux variations spatiales du champ de vitesse, et le dernier terme est la diffusion de la vorticité par la viscosité.

1. Monter que le champ de vorticité est de divergence nulle.
2. En introduisant dans l'équation (2) la décomposition de Reynolds pour les champs de vitesse et de vorticité, montrer que l'équation pour la vorticité moyenne s'écrit

$$\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_j} = \bar{\omega}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^\omega}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\omega}_i}{\partial x_j^2}.$$

On donnera l'expression du tenseur τ_{ij}^ω , et on discutera ses propriétés de symétrie.

3. Que devient ce tenseur pour un écoulement moyen uniformément cisailé, $\bar{u}_x = Sy$?

Turbulence

TD 2 : Modèles de longueur de mélange

Rappels

On rappelle l'équation de Reynolds (RANS) :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \bar{u}_i = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^R),$$

avec $\bar{\tau}_{ij} = 2\eta\bar{s}_{ij}$ et $\tau_{ij}^R = -\rho\overline{u'_i u'_j}$. L'hypothèse de viscosité turbulente permet d'écrire le tenseur de Reynolds sous la forme

$$\tau_{ij}^R = 2\rho\nu_t\bar{s}_{ij} - \frac{2}{3}\rho\bar{k}\delta_{ij}.$$

A partir de cette hypothèse, le modèle de longueur de mélange (Prandtl, 1925) postule une viscosité turbulente de la forme

$$\nu_t(\vec{r}, t) = l_m u^*$$

avec l_m et u^* les échelles de longueur et de vitesse des plus grosses structures turbulentes responsables du transfert de quantité de mouvement.

1. Profils de contrainte turbulente

a) Jet turbulent

On s'intéresse à un jet turbulent plan, statistiquement stationnaire, issu d'une fente de largeur D et de vitesse U_0 . On note x la direction du jet, et z la direction perpendiculaire au plan de la figure. On introduit la décomposition de Reynolds $(u_x, u_y, u_z) = (\bar{u}_x, \bar{u}_y, 0) + (u'_x, u'_y, u'_z)$. On réalise des mesures par PIV (vélocimétrie par images de particules) des fluctuations turbulentes, afin de calculer les différentes composantes du tenseur de Reynolds. Les mesures de $\overline{u_x'^2}$, $\overline{u_y'^2}$ et $\overline{u_x' u_y'}$ sont représentées en Fig. 1.

1. Parmi les 9 composantes de $\overline{u'_i u'_j}$, lesquelles sont nulles, et pourquoi ? Combien de composantes non nulles indépendantes définissent ce tenseur ?
2. Que vaut l'énergie cinétique turbulente normalisée k/U_0^2 en $x = 8D$, $y = 0$?
3. Tracer les profils de $\overline{u_x'^2}$, de $\overline{u_y'^2}$ et de $\overline{u_x' u_y'}$ en fonction de y pour $x = 8D$, et expliquer physiquement le signe de $\overline{u_x' u_y'}$ en $y = 0$ et en $y \simeq D$.

b) Autres écoulements quasi-unidimensionnels

On considère d'autres écoulements quasi-unidimensionnels tels que $\bar{u}_x \gg \bar{u}_y$. Dans chacune des situations suivantes, dessinez l'allure des profils de vitesse, ainsi que l'allure de la composante $\tau_{xy}^R(y)$ du tenseur de Reynolds :

1. Le sillage d'un cylindre
2. Une couche de mélange

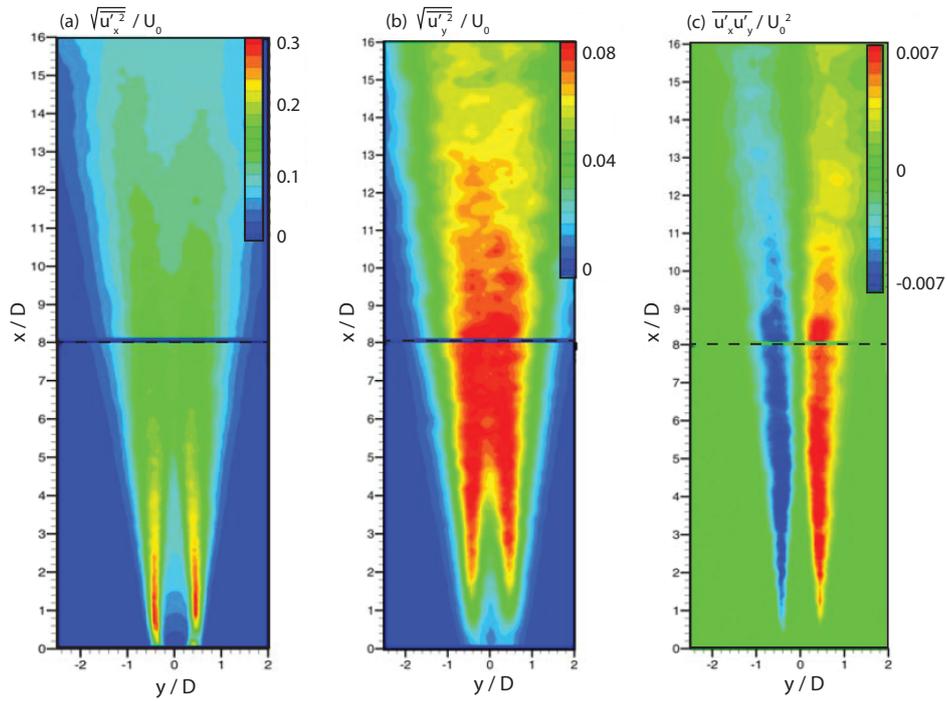


Figure 1: Cartographie, mesurée par PIV, de 3 composantes du tenseur de contrainte de Reynolds dans un jet turbulent (D'après Mi, Kalt, Nathan et Wong, Experiments in Fluids 2007).

3. Une couche limite sur une plaque plane
4. Un écoulement dans un canal plan
5. Un jet pariétal.

Concernant le dernier exemple du jet pariétal, commentez les résultats de la figure 2. Un modèle de longueur de mélange peut-il marcher dans ce cas ?

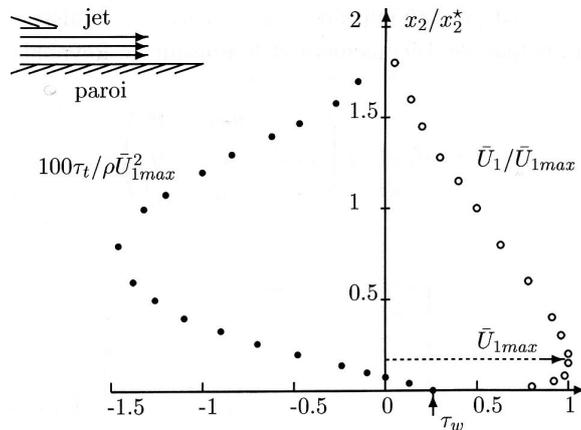


Figure 2: Profils de vitesse moyenne $\bar{U}_1(x_2)$ et de contrainte totale $\tau_t(x_2) = \eta \partial \bar{U}_1 / \partial x_2 - \rho \overline{u'_1 u'_2}$ en fonction de la distance à la paroi x_2/x_2^* , où x_2^* est la distance à laquelle $U_1 = U_{1max}/2$. Figure extraite du livre “Turbulence”, Bailly et Comte-Bellot.

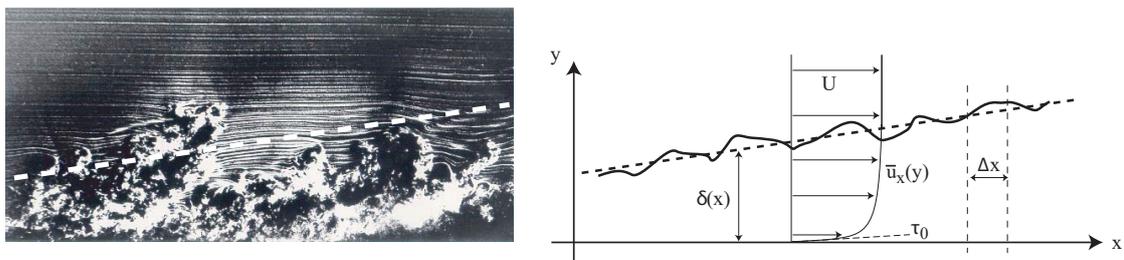


Figure 3: Visualisation par lignes de colorant d’une couche limite turbulente, et schéma du profil de vitesse moyen et de l’épaisseur $\delta(x)$.

2. Couche limite turbulente

On considère un écoulement uniforme et stationnaire de vitesse U au-dessus d’une plaque plane horizontale semi-infinie, dont le bord d’attaque est en $x = 0$ (fig. 3).

1. Suffisamment loin du bord d’attaque, on néglige la variation de l’écoulement selon x , et l’on prend $\bar{p} \simeq \text{cste}$. Ecrire l’équation RANS pour la composante \bar{u}_x , et justifiez les approximations permettant de réduire cette équation à

$$\eta \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \tau_{xy}^R = \tau_0,$$

où $\tau_0 = \eta(\partial \bar{u}_x / \partial y)_{y=0}$ est la contrainte à la paroi. Dans la suite, on introduit la “vitesse de friction” u_τ , telle que $\tau_0 = \rho u_\tau^2$.

2. Très près de la paroi, on suppose que la contrainte visqueuse domine la contrainte turbulente : c’est la “sous-couche visqueuse” (SCV). Déterminer le profil de vitesse $\bar{u}_x(y)$ dans cette région.
3. En supposant que ce profil reste valide jusqu’à l’épaisseur de SCV, $y = \delta_v$, définie telle que le nombre de Reynolds local $Re = \bar{u}_x(\delta_v) \delta_v / \nu = 1$, en déduire l’expression de cette épaisseur δ_v .
4. Loin de la paroi, on suppose au contraire que la contrainte visqueuse est négligeable devant la contrainte turbulente : c’est la “sous-couche inertielle” (SCI). On modélise la contrainte turbulente avec un modèle de viscosité turbulente $\nu_t(y) = u^*(y) l_m(y)$, en choisissant $u^*(y) = u_\tau$ et $l_m(y) = \kappa y$,

où κ est une constante sans dimension (constante de von Kármán). En déduire le profil de vitesse $\bar{u}(y)$ dans cette région.

5. On introduit l'adimensionnement suivant : $u^+ = \bar{u}_x / u_\tau$, $y^+ = y / \delta_v$. Ré-exprimez les deux lois précédentes sous la forme $u^+(y^+)$, et montrer qu'elles sont en bon accord avec les données expérimentales reproduites en figure 4.

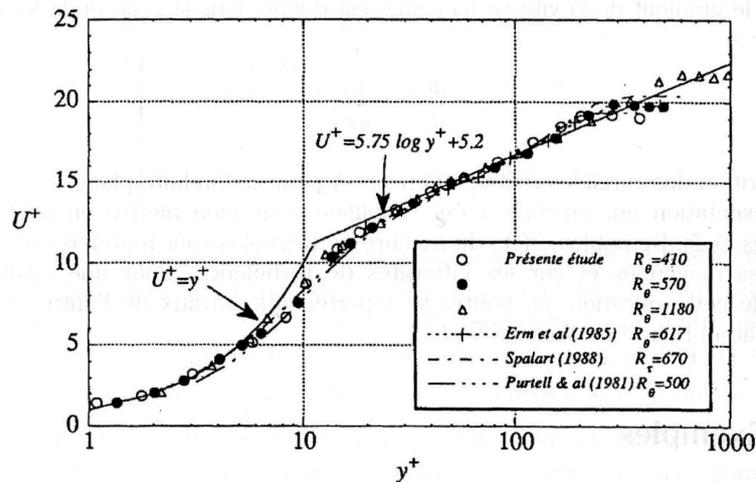


Figure 4: Profils de vitesse moyenne en fonction de la distance à la paroi dans une couche limite turbulente (document Laadhari, d'après Bailly et Comte-Bellot).

6. Afin de regrouper ces deux lois en une seule, van Driest (1956) propose d'introduire une longueur de mélange modifiée,

$$l_m(y) = \kappa y (1 - e^{-y/A\delta_v}),$$

où A est une constante sans dimension. Que pensez-vous de ce modèle ?

Turbulence

TD 2 bis : Modèles de longueur de mélange

Exercice supplémentaire : Couche de mélange turbulente

Deux régions d'un fluide s'écoulant à des vitesses différentes U_1 (en $y > 0$) et U_2 (en $y < 0$) se retrouvent à l'issue d'une plaque séparatrice en $x = 0$ (figure 5). Il se forme à l'interface entre ces deux régions une *couche de cisaillement* (ou *couche de mélange*). A mesure que l'on s'éloigne en aval, le saut de vitesse $U_1 - U_2$ tend à s'étaler dans la direction transverse. On note (u, v) les composantes de la vitesse selon (x, y) (l'écoulement est considéré comme bidimensionnel), et l'on pose :

$$U_m = \frac{1}{2} (U_1 + U_2), \quad \text{vitesse moyenne} \quad (3)$$

$$\Delta U = U_1 - U_2 \quad \text{saut de vitesse.} \quad (4)$$

On se restreint à la situation d'une petite discontinuité de vitesse ($U_m \gg \Delta U$). On note L l'échelle de longueur caractéristique selon x et δ celle selon y , avec $\delta \ll L$. Le nombre de Reynolds $Re_\delta = U_m \delta / \nu$ est supposé $\gg 1$. Enfin, on suppose que l'ordre de grandeur des fluctuations turbulentes est donné par ΔU (soit $\overline{u'^2} \simeq \overline{v'^2} \simeq \overline{u'v'} \simeq \Delta U^2$).

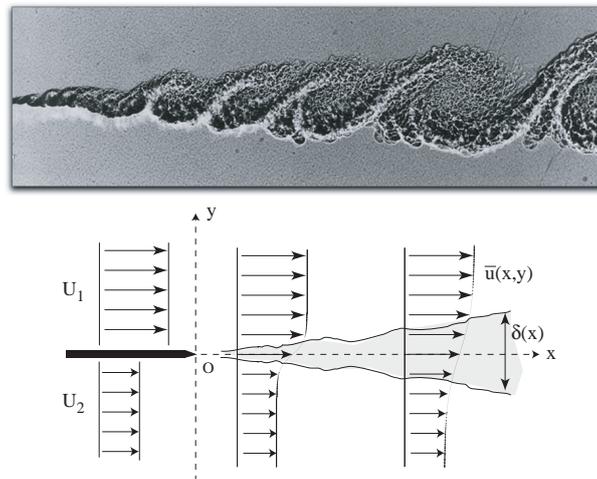


Figure 5: Image par ombroscopie d'une couche de cisaillement turbulente, et définition de l'épaisseur de la couche de cisaillement.

1. Exprimer l'ordre de grandeur de la vitesse latérale V en fonction de ΔU , L et δ . Écrire les équations de Reynolds en régime statistiquement stationnaire pour u et v , en négligeant le terme de contrainte visqueuse.
2. Exprimer la pression moyenne \bar{p} en fonction de la pression à l'infini $\bar{p}(x, y = \pm\infty) = p_0 = \text{cste}$ et des fluctuations de vitesse. En déduire que l'équation de Reynolds selon x se réduit à :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}. \quad (5)$$

A une distance x en aval de la plaque séparatrice, on définit la largeur $\delta(x)$ de la couche de cisaillement par la relation :

$$\bar{u}\left(x, y = \pm \frac{1}{2}\delta(x)\right) = U_m \pm 0,4\Delta U.$$

Suffisamment loin en aval, le profil de vitesse $\bar{u}(x, y)$ est supposé auto-similaire :

$$\bar{u}(x, y) = U_m + \Delta U f(Y), \quad (6)$$

avec la coordonnée réduite $Y = y/\delta(x)$, et $f(Y)$ une fonction impaire (on tracera son allure, en faisant apparaître en particulier les valeurs $Y = 0, \pm 1/2, \pm\infty$).

3. A partir de la relation d'incompressibilité, montrer que la vitesse moyenne latérale peut elle aussi s'exprimer de façon autosimilaire :

$$\bar{v} = \Delta U \frac{d\delta}{dx} F(Y). \quad (7)$$

On exprimera $F(Y)$ à partir de $f(Y)$ (en prenant soin de discuter le comportement de $f(Y)$ pour $Y \rightarrow \pm\infty$). En tenant compte de la parité de f , tracer l'allure du profil $\bar{v}(x, y)$. Interpréter physiquement ce profil de vitesse (en particulier son signe).

4. Nous supposons enfin que les contraintes de Reynolds sont elles aussi autosimilaires :

$$\overline{u'v'} = \Delta U^2 g(Y). \quad (8)$$

En substituant les profils autosimilaires dans l'équation de Reynolds (5), et en utilisant $U_m \gg \Delta U$, montrer que :

$$\frac{Y f'(Y)}{g'(Y)} = \frac{\Delta U}{U_m} \left(\frac{d\delta}{dx}\right)^{-1} \quad (9)$$

(les primes désignent la dérivation par rapport à Y). En déduire que le taux d'élargissement $S = d\delta/dx$ de la couche de cisaillement est constant.

5. On introduit un modèle de viscosité turbulente, en choisissant une longueur de mélange $l_m = \delta(x)$, et une échelle de vitesse donnée par ΔU :

$$\nu_t(x, y) = c \Delta U \delta(x) \quad (10)$$

En déduire l'équation de Reynolds adimensionnée (9) sous la forme :

$$f''(Y) + \frac{1}{\sigma^2} Y f'(Y) = 0. \quad (11)$$

On identifiera la constante σ en fonction de S , c et $U_m/\Delta U$. Vérifier que la fonction

$$f(Y) = \frac{1}{2} \int_0^Y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-Y^2/2\sigma^2} dY$$

est bien solution de l'équation différentielle, compatible avec les conditions aux limites.

Turbulence

TD 3 : Le modèle $k - \epsilon$

Rappels

On rappelle que le modèle $k - \epsilon$ est construit à partir d'une viscosité turbulente,

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

et de deux équations de transport empiriques pour l'énergie cinétique turbulente $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ et le taux de dissipation d'énergie turbulente ϵ ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \epsilon,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \epsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + c_1 \frac{P\epsilon}{k} - c_2 \frac{\epsilon^2}{k}.$$

où $P = (\tau_{ij}^R / \rho) \bar{s}_{ij} > 0$ est le terme de production des fluctuations turbulentes.

Les 5 constantes du modèles, c_μ , c_1 , c_2 , σ_k et σ_ϵ , sont déterminées à partir de données expérimentales dans des expériences modèles.

Exercice 1 : Déclin d'une turbulence homogène et isotrope

Afin de déterminer la valeur du coefficient c_2 du modèle $k - \epsilon$, on considère le déclin temporel d'une turbulence homogène et isotrope. Une telle turbulence peut être obtenue expérimentalement en soufflerie, en aval d'une grille constituée de barreaux séparés d'une taille de maille M (figure 6) : l'écoulement derrière la grille est alors composé d'un écoulement uniforme U_0 selon x , et de fluctuations turbulentes $u_i(\vec{x}, t)$ approximativement isotropes.

L'énergie cinétique turbulente est évaluée à partir de deux composantes de la vitesse, $k(x) \simeq \frac{1}{2} \overline{u'_x{}^2} + \overline{u'_y{}^2}$, mesurées en différentes positions x en aval de la grille. Dans le référentiel se déplaçant à la vitesse U_0 du fluide, on peut considérer que ces mesures spatiales fournissent une mesure du déclin temporel de l'énergie cinétique turbulente $k(t)$, avec $t = x/U_0$.

1. Ecrire les équations d'évolution pour $k(t)$ et $\epsilon(t)$ dans le référentiel en translation à vitesse U_0 .
2. Intégrer ces équations, et montrer que l'énergie cinétique turbulente évolue comme

$$k(t) = k_0 (1 + t/\tau)^{-n}$$

où l'on exprimera l'exposant de déclin n en fonction de la constante c_2 .

3. Les mesures de la figure 6 donnent, pour $t \gg \tau$, une loi de déclin $k(t) \sim t^{-1.2 \pm 0.1}$. En déduire la valeur de c_2 (on retient usuellement dans les simulations la valeur $c_2 = 1.92$).

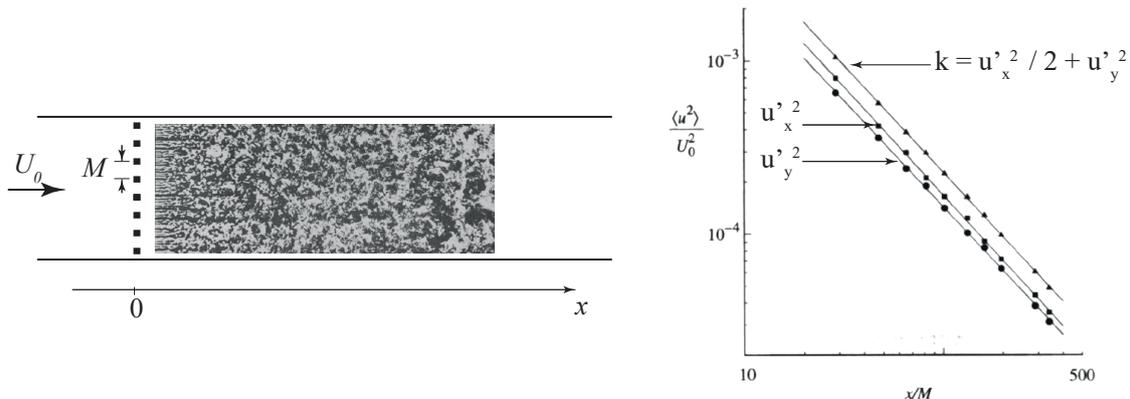


Figure 6: Déclin de l'énergie cinétique turbulente dans une soufflerie, en aval d'une grille. Seules deux composantes, u_x et u_y , sont mesurées, en différentes positions x en aval de la grille. La distance x est normalisée par la taille M de la maille.

Exercice 2 : Couche limite turbulente

On reprend le problème de la couche limite turbulente statistiquement stationnaire sur une plaque plane (TD2, Ex. 2). On considère pour simplifier l'écoulement comme invariant par translation selon x (vérifié seulement sur une gamme de x restreinte), et que la vitesse moyenne est strictement horizontale.

On introduit la vitesse de friction $u_\tau = (\tau_0/\rho)^{1/2}$ construite à partir de la contrainte pariétale τ_0 , ainsi que l'épaisseur la sous-couche visqueuse $\delta_v = \nu/u_\tau$. Le profil de vitesse dans la sous-couche inertielle ($y/\delta_v > 20$) est donné par la loi logarithmique :

$$\bar{u}_x(y) = u_\tau \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{\delta_v} \right) + A \right),$$

1. Exprimer le tenseur de gradient de vitesse $\partial \bar{u}_i / \partial x_j(y)$ sous forme matricielle, dans la base (x, y, z) . Indiquer la composante non nulle de ce tenseur, que l'on notera $S(y)$, et l'exprimer en fonction de κ , y et u_τ .
2. On décompose $\partial \bar{u}_i / \partial x_j$ en une partie symétrique, \bar{s}_{ij} , et une partie antisymétrique, $\bar{\omega}_{ij}$. Exprimer ces deux tenseurs sous forme matricielle en fonction de $S(y)$.
3. Indiquer quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres du tenseur de déformation moyen \bar{s}_{ij} , et représenter graphiquement les directions de ces vecteurs propres.
4. Réécrire l'équation pour l'énergie cinétique turbulente k compte tenu des propriétés de l'écoulement (invariances).
5. Des expériences montrent que, dans la région logarithmique, le tenseur de Reynolds est approximativement indépendant de y , et que ses composantes valent

$$\tau_{ij}^R = -\rho u_\tau^2 \begin{pmatrix} 4.4 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2 \end{pmatrix}$$

Justifier pourquoi certaines composantes de cette matrice sont nulles.

6. Exprimer k , P et ϵ , en fonction de u_τ , et éventuellement y et κ .
7. En utilisant la relation entre τ_{ij}^R et \bar{s}_{ij} faisant intervenir ν_t , en déduire l'expression de $\nu_t(y)$ en fonction de κ , u_τ et y . Si l'on écrit $\nu_t = u_\tau l_m(y)$, que vaut la longueur de mélange $l_m(y)$? Justifiez physiquement ce résultat.

8. En déduire la valeur numérique de c_μ intervenant dans l'expression de la viscosité turbulente ν_t .

Exercice 3 : Le modèle $k - \omega$

On se propose d'étudier une variante du modèle $k - \epsilon$: Plutôt que de construire la viscosité turbulente à partir des quantités k et ϵ , on souhaite formuler un modèle alternatif basé sur les quantités k et ω , où le champ scalaire $\omega(\mathbf{x}, t)$ décrit l'inverse du temps caractéristique des structures turbulentes.

1. Exprimer ω en fonction de k et ϵ et, par analogie avec l'expression de ν_t du modèle $k - \epsilon$, proposez une expression pour ν_t dans ce modèle $k - \omega$.
2. On se place dans le cas d'un écoulement homogène mais non isotrope, c'est-à-dire tel que les champs k et ϵ sont indépendants de la position. Donner un exemple d'un tel écoulement. Que deviennent les équations de transport pour k et ϵ dans ce cas ?
3. Ecrire l'équation de transport pour ω , et montrer que l'on peut la mettre sous la forme

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = c'_1 \frac{P\omega}{k} - c'_2 \omega^2. \quad (12)$$

Identifier les constantes c'_1 et c'_2 en fonction de c_1 et c_2 .

4. Justifier physiquement quels doivent être les signes de c'_1 et c'_2 , et en déduire une contrainte sur les valeurs possibles des constantes c_1 et c_2 du modèle $k - \epsilon$.
5. Que devient l'équation (12) dans le cas homogène et isotrope ? Intégrer cette équation et en déduire que, à temps long, ω décroît comme $1/t$.

Exercice 4 : Equation pour la variance d'un champ scalaire

On considère un champ scalaire $\theta(\mathbf{x}, t)$ passivement advecté par un écoulement turbulent. Il peut s'agir par exemple du champ de concentration d'un colorant, ou bien du champ de température dans la limite de forces de flottaison négligeables (densité du fluide constante).

On rappelle l'équation de diffusion-advection :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2},$$

où κ est la diffusivité associée au champ θ . On introduit la décomposition de Reynolds pour chacun des champs, $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ et $\theta = \bar{\theta} + \theta'$.

1. Ecrire l'équation d'évolution pour le champ moyen $\bar{\theta}$.
2. Montrer que l'équation d'évolution pour le champ fluctuant s'écrit

$$\frac{D\theta'}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-u'_j \bar{\theta} + \overline{u'_j \theta'} - u'_j \theta' \right) + \kappa \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j^2},$$

où l'on a introduit la dérivée totale associée à l'écoulement moyen, $D/Dt = \partial/\partial t + \bar{u}_j \partial/\partial x_j$.

3. En multipliant cette équation par θ' puis en moyennant, obtenir une équation pour la (demi-) variance des fluctuations $k_\theta = \overline{\theta'^2}/2$ (analogue à l'énergie cinétique turbulente) sous la forme

$$\frac{Dk_\theta}{Dt} = P_\theta - \epsilon_\theta + T_\theta,$$

avec $P_\theta = -\overline{u'_j \theta' \partial \bar{\theta} / \partial x_j}$ le terme de production de variance par couplage entre le terme de corrélation des fluctuations $-\overline{u'_j \theta'}$ avec le gradient moyen $\partial \bar{\theta} / \partial x_j$, $\epsilon_\theta = \kappa \overline{(\partial \theta' / \partial x_j)^2} > 0$ le terme de dissipation, et $T_\theta = \overline{\partial(\dots) / \partial x_j}$ un terme de transport que l'on identifiera.

4. En considérant un gradient moyen imposé $\partial\bar{\theta}/\partial x > 0$ constant selon la direction x , déterminer qualitativement le signe du terme $-\overline{u'_x\theta'}$, et en déduire que l'on doit avoir nécessairement $P_\theta > 0$.
5. En vous inspirant du modèle $k - \epsilon$, proposez un modèle $k_\theta - \epsilon_\theta$.

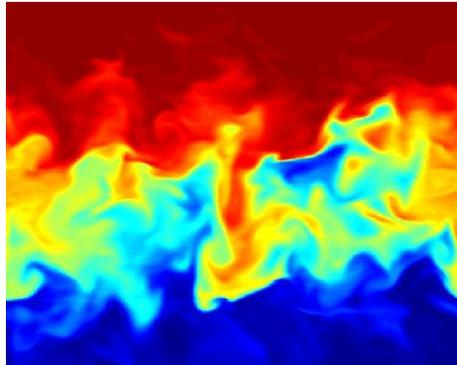


Figure 7: Simulation numérique du mélange turbulent d'un colorant par un écoulement homogène et isotrope, en présence d'un gradient moyen vertical (de Bruyn Kops and Riley, Phys Fluids 2001).

Turbulence

TD 4 : Turbulence homogène, théorie de Kolmogorov

1. Simulation numérique par DNS

On souhaite réaliser la simulation numérique directe d'un écoulement turbulent homogène et isotrope dans une boîte cubique avec conditions aux limites périodiques (code pseudo-spectral). Pour ce type de calcul, on estime que les conditions de la simulation sont réalistes si la taille du maillage est de 1.6η (η est l'échelle de Kolmogorov), et si l'échelle intégrale L vaut 1/4 du domaine de calcul.

1. A partir des estimations de Kolmogorov, montrer que le nombre de mailles N^3 nécessaire à cette simulation s'écrit $aR_\lambda^{9/2}$, où $R_\lambda = u'\lambda/\nu$ est le nombre de Reynolds micro-échelle (on a $R_\lambda = (15Re')^{1/2}$ en turbulence homogène et isotrope, avec $Re' = u'L/\nu$). Donner la valeur numérique de a .
2. En déduire le nombre de Reynolds R_λ accessible pour une résolution de $N = 512, 2048, 8192$. Le record actuel est de $N = 8192$ (Yeung et al, PNAS 2015), tandis que $N = 1024$ correspond à une simulation "standard" en 2019.
3. Quelle serait la résolution nécessaire pour simuler une turbulence analogue à celle trouvée en couche limite atmosphérique ($R_\lambda \simeq 10^4$) ?
4. Pour que la simulation soit réaliste, il faut qu'elle soit effectuée pendant au moins 4 temps de retournement, avec un pas de temps donné par le temps de Kolmogorov. Exprimer le nombre de pas de temps N_t en fonction de R_λ , puis la quantité de ressources informatiques $N^3 N_t$ requise.
5. A temps de calcul égal à la simulation $N = 8192$, dans combien d'années sera-t-il possible de simuler une turbulence homogène et isotrope comparable à une turbulence atmosphérique ? (en supposant que la loi de Moore, qui établit que la puissance des ordinateurs double tous les 18 mois, reste valable).

2. Déclin d'une turbulence homogène et isotrope

On a déjà vu que, pour une turbulence homogène à très grand nombre de Reynolds, l'énergie cinétique par unité de masse décroissait comme

$$k(t) = k_0(1 + t/\tau)^{-n},$$

avec $k(t) = \overline{u_i u_i}/2 = 3u'^2/2$, où $u'(t)$ est l'écart-type des fluctuations de vitesse selon chaque direction. A partir de l'expression de la dissipation d'énergie par unité de masse $\epsilon = u'^3/L$, où L est l'échelle intégrale, l'équation d'évolution pour l'énergie cinétique, $\partial k/\partial t = -\epsilon$, s'écrit donc

$$\frac{\partial u'^2}{\partial t} = -A \frac{u'^3}{L}, \quad (13)$$

où A une constante de l'ordre de l'unité.

1. Si l'on suppose que $L(t)$ est fixée par la taille de l'expérience, notée L_0 (par exemple la largeur de la soufflerie), intégrer cette équation différentielle et en déduire la valeur de l'exposant n .

2. Si l'on suppose maintenant que L est beaucoup plus petite que L_0 , alors $L(t)$ devient une quantité libre de croître pendant le déclin. Dans ce cas, on peut postuler que la fonction de corrélation longitudinale $f(r, t) = \overline{u_L(x)u_L(x+r)}/u_L^2$ s'exprime de façon autosimilaire en fonction de la quantité $\xi = r/L(t)$. Par un raisonnement basé sur la conservation de la quantité de mouvement, Saffman (1967) a montré que la quantité suivante,

$$I = \iiint \overline{u_L(\mathbf{x})u_L(\mathbf{x} + \mathbf{r})} d^3\mathbf{r}$$

était invariante au cours du déclin. En déduire une relation entre $u'(t)$ et $L(t)$ puis, en la reportant dans (13), en déduire la valeur de l'exposant n dans cette situation.

3. On suppose qu'à temps court, la turbulence est homogène et isotrope avec une échelle intégrale $L(t) \ll L_0$. Montrer qu'il existe un temps t_s pour lequel on a $L(t_s) = L_0$. Tracer l'allure de $k(t)$ en coordonnées logarithmiques, en faisant apparaître la transition entre les régimes $t < t_s$ et $t > t_s$.

Turbulence

TD 5 : Théorie de Kolmogorov (2/2)

1. Dispersion turbulente

On s'intéresse à la dispersion d'un nuage polluant dans l'atmosphère. Pour cela, on va étudier la loi de séparation entre 2 particules advectées par un écoulement turbulent. Pour simplifier, on considère dans ce problème que les propriétés statistiques de la turbulence atmosphérique sont comparables à celles de la turbulence isotrope tridimensionnelle. On considère une vitesse moyenne du vent de $U = 200$ km/h, un taux de turbulence de $u'/U \simeq 30\%$, une échelle caractéristique de longueur de $L = 1000$ km, et une viscosité cinématique de $\nu = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

1. Rappeler la loi de Kolmogorov exprimant l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse u'_r en fonction de l'échelle r et du taux de dissipation d'énergie ϵ . Justifier en quelques lignes les mécanismes physiques permettant d'obtenir cette loi. Rappeler la gamme d'échelle r sur laquelle cette loi est valide.
2. Estimer l'ordre de grandeur de ϵ , et de l'échelle de Kolmogorov η .

On appelle $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$ la position de deux particules 1 et 2. Chaque particule suit *passivement* l'écoulement, c'est-à-dire qu'elle est advectée à chaque instant par la valeur instantanée $\vec{v}(\vec{x}, t)$ du vecteur vitesse à l'endroit où elle se trouve :

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_n = \vec{v}(\vec{x} = \vec{r}_n(t), t), \quad n = 1, 2. \quad (14)$$

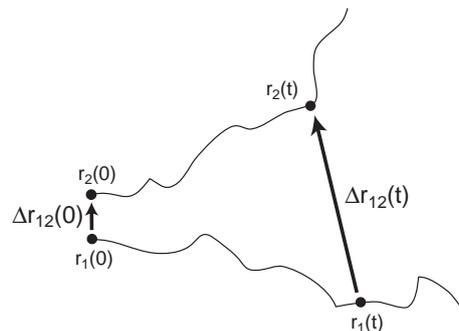


Figure 8: Distance relative entre deux particules advectées par un écoulement turbulent.

3. En combinant l'équation (14) pour $n = 1$ et 2 , écrire l'équation d'évolution pour la distance $\Delta \vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$. Que vaut la moyenne $\overline{\Delta \vec{r}_{12}(t)}$?
4. Ecrire l'équation d'évolution pour la variance de la séparation $\overline{\Delta \vec{r}_{12}(t)^2}$.
5. On fait l'hypothèse que les fluctuations de vitesse sont corrélées à la séparation $\Delta \vec{r}_{12}$ de la manière suivante :

$$\overline{\Delta \vec{r}_{12} \cdot \Delta \vec{v}_{12}} = \alpha R' u'_R,$$

où $R'(t) = \sqrt{\Delta \bar{r}_{12}(t)^2}$ est la valeur quadratique moyenne, u'_R les fluctuations de vitesse à l'échelle $r = R$ selon la relation de Kolmogorov, et $\alpha \simeq 0.4$ un coefficient de corrélation. En déduire l'équation différentielle vérifiée par R'^2 .

6. En posant $y = R'^2$, intégrer cette équation différentielle. On prendra comme séparation initiale caractéristique $R'(0) = R'_0$, supposée supérieure à η . En déduire, à temps suffisamment long, la loi de Richardson

$$R'(t) \propto t^{3/2}, \quad t \gg t_0 \quad (15)$$

Cette loi tient-elle toujours aux temps très longs ?

2. Écoulement turbulent dans une conduite plane

On considère un écoulement d'eau dans une conduite de section parallélépipédique, de largeur b et de hauteur $2h$, généré par un gradient de pression $\partial p / \partial x = \Delta p / L$ (figure 9). On considère l'écoulement comme purement bi-dimensionnel ($b \gg h$), statistiquement stationnaire et invariant par translation selon x . On note $\delta_v = \nu / u^*$ l'épaisseur de la sous-couche visqueuse et u^* la vitesse de friction à la paroi définie telle que $\tau_0 = \rho u^{*2}$ est la contrainte à la paroi (avec $\tau_0 = \Delta p (h/L)$). On rappelle le profil de vitesse moyen dans la sous-couche inertielle ($\delta_v \ll y \ll h$) :

$$\frac{\bar{u}_x(y)}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta_v} + A \quad (16)$$

et dans la sous-couche visqueuse ($y < \delta_v$) :

$$\frac{\bar{u}_x(y)}{u^*} = \frac{y}{\delta_v}. \quad (17)$$

$1/\kappa = 2,5$ est la constante de von Kármán, et A une constante sans dimension.

On s'intéresse aux statistiques des fluctuations turbulentes dans la sous-couche inertielle. A distance $\delta_v \ll y \ll h$ fixée, et pour des structures turbulentes de taille $r \ll y$, on admet que l'on peut appliquer localement la théorie de Kolmogorov de la turbulence homogène. Ainsi, on suppose qu'à chaque valeur de y , la puissance (par unité de masse) fournie par l'écoulement moyen aux fluctuations turbulentes,

$$\epsilon_i(y) = -\overline{u'_i u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}, \quad (18)$$

est équilibrée par la puissance dissipée par viscosité à cette même distance y ,

$$\epsilon_d(y) = \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2}. \quad (19)$$

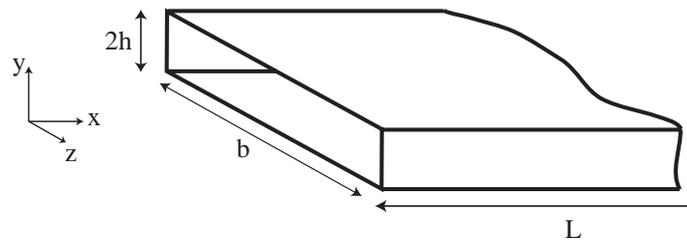


Figure 9: Géométrie de l'écoulement dans une conduite parallélépipédique.

1. Dans la sous-couche inertielle ($\delta_v \ll y \ll h$), quelle est la taille des structures turbulentes contribuant le plus aux transferts d'énergie ? En admettant que les fluctuations de vitesse dans cette région soient de l'ordre de u^* et indépendantes de y , déduire de (16) et (18) l'ordre de grandeur de $\epsilon_i(y)$ en fonction de u^* , y et κ . Où l'écoulement moyen produit-il le plus de fluctuations turbulentes ?
2. Dans la sous-couche visqueuse, la dissipation d'énergie par viscosité est simplement donnée par la loi valable pour les écoulements laminaires,

$$\epsilon_v = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2. \quad (20)$$

Calculer ϵ_v pour $y < \delta_v$, et vérifier que cette loi raccorde bien avec $\epsilon_i(y)$ obtenue précédemment pour $y \rightarrow \delta_v$. Tracer l'allure de la dissipation en fonction de y , en faisant bien apparaître cette transition entre SCI et SCV.

3. En supposant les fluctuations de vitesse v'_r à une échelle r (avec $r \ll y$) données par la loi de Kolmogorov $v'_r \simeq C(\epsilon_i r)^{1/3}$, en déduire v'_r/u^* en fonction de r/y .
4. Montrer que l'échelle de Kolmogorov locale $\eta(y)$ s'écrit comme

$$\eta(y) \propto h Re^{*-3/4} \left(\frac{y}{h} \right)^{1/4}.$$

Que devient $\eta(y)$ pour $y \rightarrow \delta_v$? Commentez ce résultat.