TD2 – PROGRAMMATION LINÉAIRE

Polycopié de cours rempli et calculatrice en état de marche obligatoires

Objectifs : à la fin de ces séances **vous devriez être capable de** :

1) **formaliser** une problématique de programmation linéaire ;
2) **résoudre** une programmation linéaire par une méthode graphique ;
3) **résoudre** une programmation linéaire avec l'algorithme du simplexe ;
4) **faire** une analyse de sensibilité de la fonction-objectif et des contraintes.

Sommaire

1 Formalisation d'un problème de programmation linéaire **2**

2 Méthode graphique **4**

3 Algorithme du simplexe **7**

4 Cas pratiques **14**

1 Formalisation d'un problème de programmation linéaire

Exercice 1 (Plan de production maximisant les marges).
Une entreprise spécialisée dans la fabrication de pièces détachées en acier, propose dans son catalogue des centaines de référence. On ne s'intéresse ici qu'aux deux modèles de poutrelles pour l'industrie du bâtiment : des poutrelles en I et des poutrelles en U. Les caractéristiques de production sont données dans le tableau suivant :

	pour 1 000 poutrelles	
	en I	en U
Énergie (en kWh)	100	100
Acier (en kg)	200	600
Main d'œuvre (en h)	3	1

Les coûts sont de 0,15€ le kWh, 7€ le kg d'acier et 11€ par heure de main d'œuvre. Les poutres sont fabriquées et vendues à la demande par lot de 1 000. Le prix de vente est de 1 848€ le lot de 1 000 poutrelles en I et 5 026€ le lot de 1 000 poutrelles en U. Écrire le programme de production (en nombre de lots de poutres I et U) maximisant le total des marges, si l'entreprise dispose de 1 000 kWh, de 4 800 kg d'acier et 24 h de main d'œuvre.

a) **Variables de décision ?**

b) **Contraintes ?**

Contraintes logiques : on produit des quantités positives,

Contraintes économiques :

$$\begin{cases} \text{Énergie} & \\ \text{Acier} & \Rightarrow \\ \text{Main d'œuvre} & \end{cases}$$

On obtient donc les contraintes :

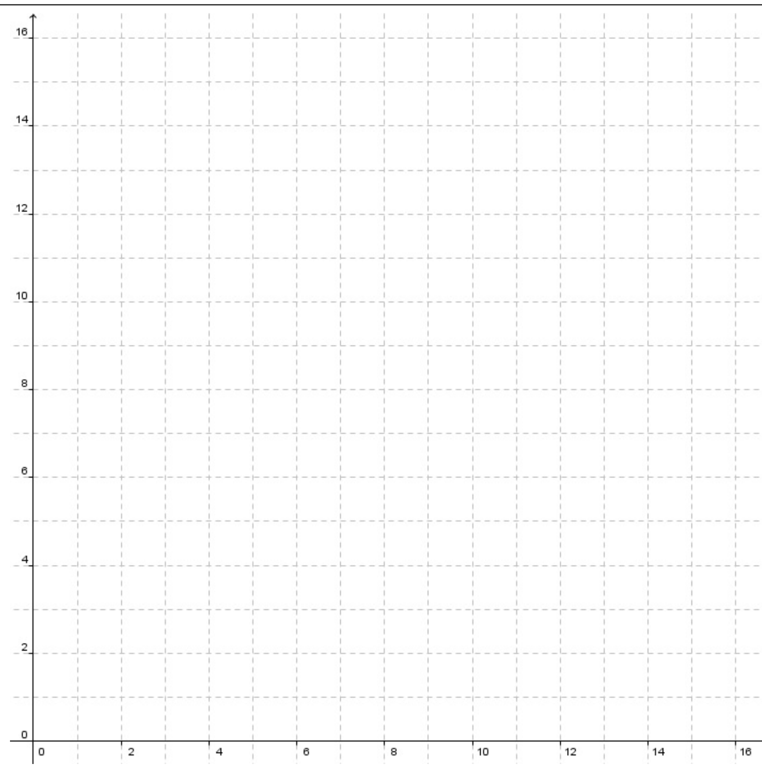
c) **Fonction-objectif ?**

On cherche à

2 Méthode graphique

Exercice 2.
Reprenons l'exercice 1.

a) Faire une **représentation graphique des contraintes**



Rappel : pour construire la droite $ax + by = c \Leftrightarrow y = (-a/b)x + c/b$, on utilise
– soit les points $(x = 0\,;\, y = c/b)$ et $(x = c/a\,;\, y = 0)$
– soit un des points $(x = 0\,;\, y = c/b)$ ou $(x = c/a\,;\, y = 0)$ et la pente $-a/b$

– D_1 : $x + y = 10$ passe par les points :

– D_2 : $x + 3y = 24$ passe par les points :

– D_3 : $3x + y = 24$ passe par les points :

b) Identifier le **simplexe des solutions admissibles**

Le simplexe des solutions admissibles est déterminé par les points

c) Rechercher le **programme optimal**

On sait que la programmation optimale est un des sommets du simplexe :

$Z(0) =$

$Z(A) =$

$Z(B) =$

$Z(C) =$

$Z(D) =$

Le programme optimal est donc

$x =$

et $y =$

pour un profit de

d) Peut-on augmenter les marges des poutres sans changer le programme optimal ?

3 Algorithme du simplexe

Exercice 3.
Reprenons l'exercice 1.

a) Écrire le programme sous **forme canonique**

Les variables de décision :
- soit $x =$
- soit $y =$

Les contraintes :

$$\begin{cases} \text{Énergie} \\ \text{Acier} \\ \text{Main d'œuvre} \\ \end{cases} \Rightarrow$$

On cherche à

b) Écrire le programme sous **forme standard**

On introduit les variables d'écart :

$$\begin{cases} x+y \qquad\qquad\qquad 10 \\ x+3y \qquad\qquad\qquad 24 \\ 3x+y \qquad\qquad\qquad 24 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ \end{cases}$$

c) Faire tourner l'**algorithme du simplexe**.

Étape 1 – i) Solution initiale

Étape 1 – ii) Tableau initial (Tableau 1)

	Base	x	y	e_1	e_2	e_3	Résultat	
L_1	e_1							
L_2	e_2							
L_3	e_3							
L_4	$-Z$							

Remarques :

- La dernière ligne du tableau se lit :
- Variables dans la base :
- Variables hors-base :

Étape 2 – i) Variable entrant dans la base (quelle variable va-t-on augmenter ?)

Étape 2 – ii) Variable sortant de la base (quelle variable va-t-on mettre à 0 ?)

Étape 2 – iii) Nouveau tableau (Tableau 2)

on choisit comme pivot

	Base	x	y	e_1	e_2	e_3	Résultat	Rapport
$L_1 \leftarrow$								
$L_2 \leftarrow$								
$L_3 \leftarrow$								
$L_4 \leftarrow$	$-Z$							

Remarque : La dernière ligne du tableau se lit :

Étape 3 – i) Variable entrant dans la base (quelle variable va-t-on augmenter ?)

Étape 3 – ii) Variable sortant de la base (quelle variable va-t-on mettre à 0 ?)

Étape 3 – iii) Nouveau tableau (Tableau 3)

on choisit comme pivot

	Base	x	y	e_1	e_2	e_3	Resultat
$L_1 \leftarrow$							
$L_2 \leftarrow$							
$L_3 \leftarrow$							
$L_4 \leftarrow$	$-Z$						

À présent, $Z =$

Étape 4 – i) Variable entrant dans la base.

d) **Résultats**

Variables de décision : On lit alors dans le tableau que le programme optimal est

Variables d'écart : Contraintes non-saturées, contraintes saturées et prix-cachés.

.

Exercice 4.
Voici un tableau de l'algorithme du simplexe associé à un problème d'optimisation linéaire.

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	Resultat	Rapport
	4	-7	0	1	-1	0	0	0	5	
	6/11	17/11	1	0	1/11	0	0	0	10/11	
	131/11	$-177/11$	0	0	$-13/11$	1	0	0	5 150/11	
	92/11	$-161/11$	0	0	$-14/11$	0	1	0	4 480/11	
	111/11	$-21/11$	0	0	$-9/11$	0	0	1	4 035/11	
	20/11	$-805/11$	0	0	$-48/11$	0	0	0	$-480/11$	

a) Quelles sont les **variables dans la base** ?

b) Quelles sont les **variables hors-base** ?

c) Donner les valeurs des variables x_1, x_2, x_3 et de la fonction-objectif Z.

d) Y-a-t-il des contraintes saturées ?

e) Peut-on continuer ? (Si oui, donner les variables entrant et sortant de la base, puis entourer le pivot.)

Exercice 5.
Pour x_1, x_2 et x_3 quantités de produits fabriqués on dégage une marge $Z(x_1, x_2, x_3)$. On cherche alors à maximiser Z sous des contraintes 1) de matières premières (en kg), 2) de main d'œuvre (en h), 3) d'énergie (en kWh). Voici un tableau de l'algorithme du simplexe associé à ce problème d'optimisation linéaire :

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Resultat
e_1	0	$-15/4$	$1/2$	1	0	$-5/4$	410
e_2	0	$-211/8$	$-69/4$	0	1	$-17/8$	$145/2$
x_1	1	$19/8$	$5/4$	0	0	$1/8$	$15/2$
$-Z$	0	$-635/8$	$-161/4$	0	0	$-41/8$	$-615/2$

où e_i est la variable d'écart de la contrainte n°i.

a) Pourquoi peut-on s'arrêter ?

b) Donner le programme optimal et la valeur de la fonction-objectif.

c) Y-a-t-il des **contraintes non-saturées** ?

d) Y-a-t-il des **contraintes saturées** ? (Si oui, donner leur prix caché.)

4 Cas pratiques

Pour chacun des exercices suivants, il vous est demandé de :

1 – Formaliser l'énoncé :

- **Variables de décision ?**
- **Contraintes ?**
- **Fonction-objectif ?**

2 – Résoudre : méthode graphique ou algorithme du simplexe.

3 – Conclure : programme optimal et valeur de la fonction-objectif.

4 – Faire une analyse de sensibilité.

Exercice 6 (Raffinerie de pétrole).
Une raffinerie de pétrole traite deux sortes de brut pour donner des produits finis avec les rendements suivants :

	Essence	Diesel	Fuel	Total
Brut 1	25%	30%	45%	100%
Brut 2	35%	30%	35%	100%

Les quotas de production imposent de fabriquer au plus 8,25 millions de m^3 d'essence ; 7,5 millions de m^3 de diesel et 10,65 millions de m^3 de fuel. La marge bénéficiaire laissée par le traitement du brut 1 est de 30 € par m^3, et celle du brut 2 est de 40 € par m^3. Quelles quantités de chaque brut faut-il traiter pour obtenir une marge maximale ?

Exercice 7 (Élevage de chevaux).
Un éleveur de chevaux dispose de trois types de foin séché pour alimenter ses chevaux. Il souhaite déterminer les quantités de chaque type de foin séché qui doivent être données aux chevaux afin de satisfaire leur besoin en composants nutritifs et ceci pour un coût minimum. Les unités de chacun des ingrédients nutritionnels de base contenus dans un kilogramme de foin séché figurent dans le tableau suivant, qui indique également les besoins nutritionnels quotidiens (*a minima*).

Composants nutritifs (g/kg)	foin de Grau	foin de prairie	foin de luzerne	Quantité requise (g par j)
Valeur énergétique	9	2	4	20
Acide aminé	3	8	6	18
Matière azoté	1	2	6	15

Les coûts des foins séchés sont respectivement de 7€ le kg de foin de Grau ; 6€ le kg de foin de prairie et 5€ le kg de foin de luzerne. Quel est alors le régime journalier des chevaux minimisant les coûts ?

Exercice 8 (Brasseur de bière).
Un brasseur dispose d'ingrédients en quantités limitées : 240 kg de maïs ; 5 kg de houblon et 595 kg de malt. À partir de ces ingrédients, il peut brasser différents types de bière. Pour produire
– un décalitre de bière blonde, il utilise 2,5 kg de maïs ; 125 g de houblon et 17,5 kg de malt ;
– un décalitre de bière brune, il utilise 7,5 kg de maïs ; 125 g de houblon et 10 kg de malt ;
– un décalitre de bière spéciale, il utilise 4 kg de maïs ; 80 g de houblon et 14 kg de malt ;
– un décalitre de bière extra, il utilise 10 kg de maïs ; 140 g de houblon et 15 kg de malt.
La marge résultant de la vente d'un décalitre est de 39€ pour la bière blonde ; de 69€ pour la bière brune ; de 42€ pour la bière spéciale et de 75€ pour la bière extra.

a) Combien doit-il brasser de décalitres de chaque type de bière pour maximiser ses marges ?

b) Est-il profitable d'augmenter les capacités de production ?

c) De combien peut-il augmenter ses marges sans modifier le programme optimal ?