

---

# Info112

## Rappels de mathématiques

Pour l'informatique graphique à deux dimensions

Orsay - 1 octobre 2020

---

---

## Introduction

### Trigonométrie (cos, sin, atan)

Les fonctions *cos* et *sin* permettent de calculer les coordonnées cartésiennes(x,y) à partir des coordonnées polaires(r, alpha) grâce à la formule générale :

$$x = x_0 + r \cdot \cos(\alpha)$$

$$y = y_0 + r \cdot \sin(\alpha)$$

La fonction  $\text{atan}(y/x)$  et « Pythagore » ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) permettent de calculer les coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes mais on préférera utiliser **alpha=atan2(y,x)** qui évite de s'occuper des cas où  $x=0$ . Par ailleurs Pythagore sert aussi à calculer la distance entre deux points  $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ . On peut donc s'en servir pour calculer la distance au centre d'un repère polaire qu'on a choisi. De même on peut utiliser  $\text{atan2}((y_1-y_2), (x_1-x_2))$  pour calculer l'angle par rapport à un point / centre  $x_2, y_2$  quelconque (enfin l'angle par rapport à l'horizontale qui passe par ce point)

### Changement de repère

En remplaçant dans un calcul ou une formule  $x_a$  par  $x_b = x_a - dx$  et  $y_a$  par  $y_b = y_a - dy$  on peut dire que  $x_b, y_b$  sont les coordonnées du même point que  $x_a, y_a$  mais dans un autre repère.

**ATTENTION** : *cos*, *sin* et *atan2* manipulent des radians. Une règle de trois permet d'afficher des degrés si nécessaire ... Processing a même des fonction *radians()* et *degrees()* pour convertir plus facilement.

**ATTENTION** : La plupart des langages de programmation ont une variable constante *PI*.

**CONSEIL** : Faites toujours un schéma

**CONSEIL 2** (pour les plus forts) : On a le droit de faire la moyenne de 2 points (pour obtenir le milieu) mais pas la moyenne de 2 angles car ça ne marche que dans certains cas. Pour la faire la moyenne de 2 angles, on fait la moyenne des sinus, la moyenne des cosinus et avec l'arc-tangente des deux on retrouve un angle !

## Règle de trois / proportionnalité

Lorsqu'on a deux éléments qui varient proportionnellement l'un à l'autre et qu'on connaît un point de correspondance entre les 2 éléments.

Par exemple

H1 : le prix des pommes varie en fonction du poids **proportionnellement**.

H2 : 3 kilos coutent 7 euros (1 correspondance)

Alors on peut calculer la valeur d'un éléments si on connaît l'autre avec la règle de trois.

Par exemple :

« Combien coutent 5 kilos de pomme ? =>  $5 \cdot 7 / 3$

« Combien pèsent 25 euros de pomme ? =>  $25 \cdot 3 / 7$

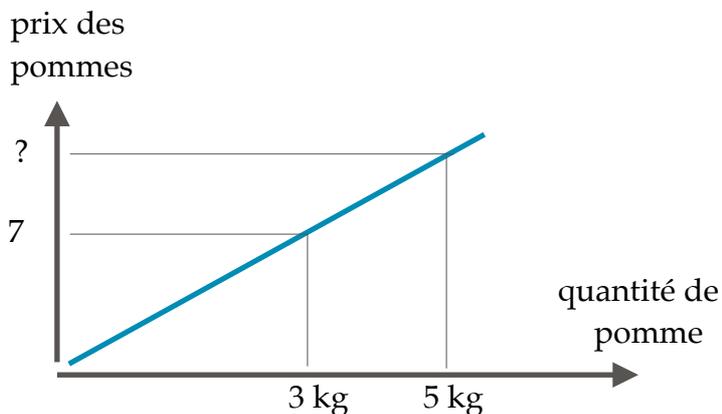
« Combien coutent x kilos de pomme ? =>  $x \cdot 7 / 3$

« Combien pèsent y kilos de pomme ? =>  $y \cdot 3 / 7$

height	100
width	?

$$? = 100 \cdot \text{width} / \text{height}$$

En géométrie la règle de trois s'appelle aussi Thalès



Règle de trois sur le graphique d'une fonction linéaire

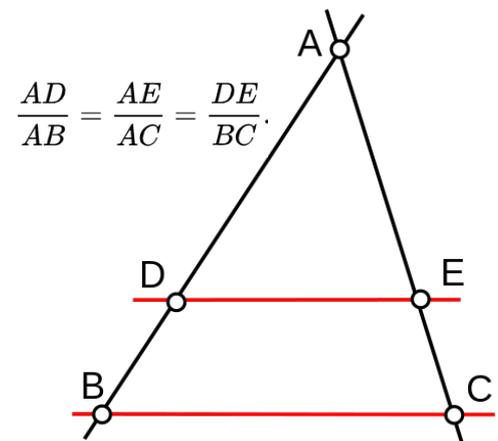


Illustration du Théorème de Thalès sur Wikipedia

**ATTENTION** : En informatique on ne calculera par forcément le résultat. On peut très bien écrire dans un code **int prix = 7\*5/3;** et on laisse l'ordinateur faire le calcul !

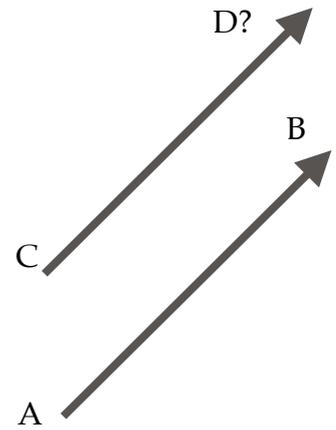
**ATTENTION 2** : En informatique quand tous les composants d'un calcul sont des entiers le langage de programmation peut choisir de faire une division entière (sans virgule).  $7 \cdot 5 / 3 \neq 7 / 3 \cdot 5$  car  $7 / 3 \cdot 5$  calcule d'abord  $7 / 3$  et donne comme résultat 2 et  $2 \cdot 5 = 10$  alors que  $7 \cdot 5 / 3$  calcule d'abord  $7 \cdot 5 = 35$  et  $35 / 3 = 11$ .

On préférera donc sans doute écrire **float prix = 7\*5.0/3**

---

## Points et Vecteurs

La plupart des fonctions de dessin attendent des coordonnées de **POINT** en paramètre. Pour calculer les coordonnées des points on peut être amené à calculer des coordonnées de **VECTEUR** mais on ne peut pas donner des coordonnées de vecteur à une fonction qui attend des coordonnées de point. Lorsqu'on réfléchit au point qu'on veut donner en paramètre d'une fonction il peut s'agir d'un point qui est au bout d'un vecteur mais ce vecteur part toujours d'un autre point.



Si on connaît les coordonnées des points A et B, le vecteur AB a pour coordonnées  $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ . Si on cherche les coordonnées du point D au bout du vecteur AB mais qui part du point C on calcule deux additions :  $x_D = x_C + (x_B - x_A)$  et  $y_D = y_C + (y_B - y_A)$ . On dit qu'on ajoute un point ET un vecteur. Quand on ajoute un point et un vecteur on obtient toujours un autre point. Pour obtenir un vecteur à partir de deux points on fait deux soustractions (point d'arrivée MOINS point de départ).

On peut multiplier les deux coordonnées d'un vecteur par un même scalaire (\*0.5 pour le diminuer de moitié, \*3 pour le rendre 3 fois plus long) MAIS on ne multiplie généralement pas les coordonnées d'un point. On peut diviser les coordonnées d'un vecteur par sa norme(longueur) «  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  » avant de le multiplier par un autre scalaire (\*18.5) pour obtenir un vecteur dont la longueur est exactement de 18,5.

Si on connaît les coordonnées d'un vecteur  $V(dx, dy)$  on peut très facilement obtenir deux vecteurs orthogonaux en **INVERSANT** les x et les y et en rajoutant un signe moins à l'une des coordonnées. On trouve facilement que les coordonnées des vecteurs orthogonaux sont  $(dy, -dx)$  et  $(-dy, dx)$ .

**ATTENTION** : Pour savoir lequel des vecteurs orthogonaux « tourne vers la droite » on peut faire un schéma avec un vecteur V où dx et dy sont positifs et dessiner les vecteurs orthogonaux MAIS en informatique graphique, l'axe des y est presque toujours orienté vers le bas ce qui inverse tout !

La somme de deux vecteurs (les sommes des coordonnées de deux vecteurs) forme un autre vecteur

**CONSEIL** : Faites un schéma pour bien comprendre quel point doit être ajouté à quel(S) vecteur(S) pour obtenir le point désiré.

**CONSEIL** : Ecrivez consciencieusement la formule pour l'axe des x, faites un copier-coller et dans la formule collée remplacez tous les x par des y et les y par des x.

---

## Principe des complémentaires

Le complémentaire d'une valeur est la valeur maximale que peut prendre cette valeur MOINS la valeur.

Par exemple une coordonnées  $x$  à l'écran a pour complémentaire «  $\text{width}-x$  » car  $\text{width}$  est la largeur de l'écran ou de la fenêtre.

Par exemple une valeur de vert  $g$  a pour complémentaire «  $255-g$  » car 255 est la quantité de vert maximal d'un pixel.

Par exemple un angle  $\alpha$  a pour complémentaire «  $2*\text{PI}-\alpha$  » car  $2*\text{PI}$  est l'angle maximal qui fait un tour complet.

Par exemple une note  $no$  a pour complémentaire «  $20-no$  » car 20 est la note maximale que vous pouvez obtenir.

Un complémentaire est une valeur très similaire à l'original et on peut souvent lui appliquer les mêmes mathématiques (addition, soustraction, multiplication, racine carrée, etc.) mais avec un effet « inversé »

**ATTENTION** : une fois le complémentaire « modifié » par ces mathématiques il faut TRES SOUVENT en reprendre le complémentaire pour utiliser le résultat de la même façon que la valeur initiale.

Par exemple, le complémentaire d'une note est le nombre de points qu'il manque pour obtenir 20/20. Une note de 12/20 a pour complémentaire 8. Diviser une note par deux est une sanction très lourde ( $12/20 \Rightarrow 6/20$ ). Diviser le complémentaire par deux est une récompense énorme ( $12/20 = \text{manque } 8 \text{ points}$  devient  $\text{manque } 4 \text{ points} = 16/20$ ) mais il faut reprendre le complémentaire ( $20-4$ ) pour calculer à quelle note correspond cette récompense ( $16/20$ ). La formule pour une note quelconque est donc  $20 - ((20-no)/2)$  où vous reconnaitrez deux fois le symbole 20- car il y a bien deux fois la formule du complémentaire.

**CONSEIL** : En informatique toute variable a un maximum mais il faut réfléchir pour savoir si le complémentaire signifie vraiment quelque chose.

**CONSEIL** : On est pas forcé de faire le complémentaire au maximum. Comme le complémentaire a un effet miroir on peut vouloir faire le complémentaire à  $\text{width}/2$  pour que l'effet miroir soit autour de l'axe vertical  $\text{width}/4$

---

## Moyennes Pondérées

La moyenne pondérée de plusieurs valeurs est le calcul de la somme des valeurs, chacune multipliée par son poids respectif, le tout divisé par la somme des poids.

On fait généralement la moyenne pondérée de plusieurs valeurs ayant la même signification (moyennes de plusieurs longueurs, moyenne de plusieurs luminosités, etc.). On obtient une valeur intermédiaire entre les valeurs utilisées avec toujours la même signification (une moyenne de longueurs est une longueur, ...).

Dans un algorithme, les poids peuvent être constants mais les valeurs peuvent être des variables. Par exemple les poids peuvent permettre une moyenne pondérée entre la position de la souris et le centre de l'écran où le centre de l'écran a trois fois plus de poids :  $(\text{mouseX} * 1 + \text{width} / 2 * 3) / 4$ . Si on fait une moyenne pondérée sur les x on a sûrement envie de faire la même sur les y. Dans d'autres algorithmes les valeurs peuvent être constantes mais les poids variables. Pour une valeur de t (du temps) entre 0 et 10 on pourra afficher quelque chose en  $(\text{posX2} * t + \text{posX1} * (10-t)) / 10$ . Cette moyenne pondérée entre posX1 et posX2 offrira un grand nombre de valeurs intermédiaires entre posX1 et posX2 au cours du temps. Si on fait une moyenne pondérée avec les poids i et (10-i) on trouvera 11 positions intermédiaires entre la position de la souris et le centre de l'écran.

```
for (int i=0; i<=10; i++){  
    x = (mouseX*i + width/2*(10-i)) / 10  
    y = (mouseY*i + height/2*(10-i)) / 10  
}
```

**CONSEIL** : Il est même possible de faire une moyenne pondérée avec des poids négatifs ... tant que la somme des poids ne fait pas 0 bien sûr.

**CONSEIL** : Si on a que 2 valeurs et qu'on prend comme poids une variable et son complémentaire, la somme des poids est facile et constante.

**CONSEIL** : On dit qu'on normalise une moyenne pondérée lorsqu'on choisit les poids pour que leur somme fassent 1 (ce qui évite la division finale).

**CONSEIL** : On ne peut pas faire la moyenne d'angles. On est obligé de passer en « coordonnées cartésiennes » et prendre  $\text{atan2}(\text{somme des sinus}, \text{somme des cosinus})$