TD2 – PROGRAMMATION LINÉAIRE

Polycopié de cours rempli et calculatrice en état de marche obligatoires

Objectifs : à la fin de ces séances **vous devriez être capable de** :

1) **formaliser** une problématique de programmation linéaire ;
2) **résoudre** une programmation linéaire par une méthode graphique ;
3) **résoudre** une programmation linéaire avec l'algorithme du simplexe ;
4) **faire** une analyse de sensibilité de la fonction-objectif et des contraintes.

Sommaire

1 Formalisation d'un problème de programmation linéaire

Exercice 1 (Plan de production maximisant les marges).
Une entreprise spécialisée dans la fabrication de pièces détachées en acier, propose dans son catalogue des centaines de référence. On ne s'intéresse ici qu'aux deux modèles de poutrelles pour l'industrie du bâtiment : des poutrelles en I et des poutrelles en U. Les caractéristiques de production sont données dans le tableau suivant :

	pour 1 000 poutrelles	
	en I	en U
Énergie (en kWh)	100	100
Acier (en kg)	200	600
Main d'œuvre (en h)	3	1

Les coûts sont de 0,15€ le kWh, 7€ le kg d'acier et 11€ par heure de main d'œuvre. Les poutres sont fabriquées et vendues à la demande par lot de 1 000. Le prix de vente est de 1 848€ le lot de 1 000 poutrelles en I et 5 026€ le lot de 1 000 poutrelles en U. Écrire le programme de production (en nombre de lots de poutres I et U) maximisant le total des marges, si l'entreprise dispose de 1 000 kWh, de 4 800 kg d'acier et 24 h de main d'œuvre.

a) **Variables de décision ?**

- soit $x=$ nombre de lots de 1 000 poutrelles en I à fabriquer ;
- soit $y=$ nombre de lots de 1 000 poutrelles en U à fabriquer.

b) **Contraintes ?**

Contraintes logiques : on produit des quantités positives,
$x \geq 0, \qquad y \geq 0$

Contraintes économiques :

$$\begin{cases} \text{Énergie} \\ \\ \text{Acier} \\ \\ \text{Main d'œuvre} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100x + 100y \leq 1\,000 \\ \\ 200x + 600y \leq 4\,800 \\ \\ 3x + y \leq 24 \end{cases}$$

On obtient donc les contraintes :

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 3y \leq 24 \\ 3x + y \leq 24 \\ x \geq 0, \qquad y \geq 0 \end{cases}$$

c) **Fonction-objectif ?**

On cherche à maximiser les marges par lot :

- marge sur un lot de poutrelles en I : $1\,848 - (100 \times 0,15 + 200 \times 7 + 3 \times 11) = 400$€
- marge sur un lot de poutrelles en U : $5\,026 - (100 \times 0,15 + 600 \times 7 + 1 \times 11) = 800$€

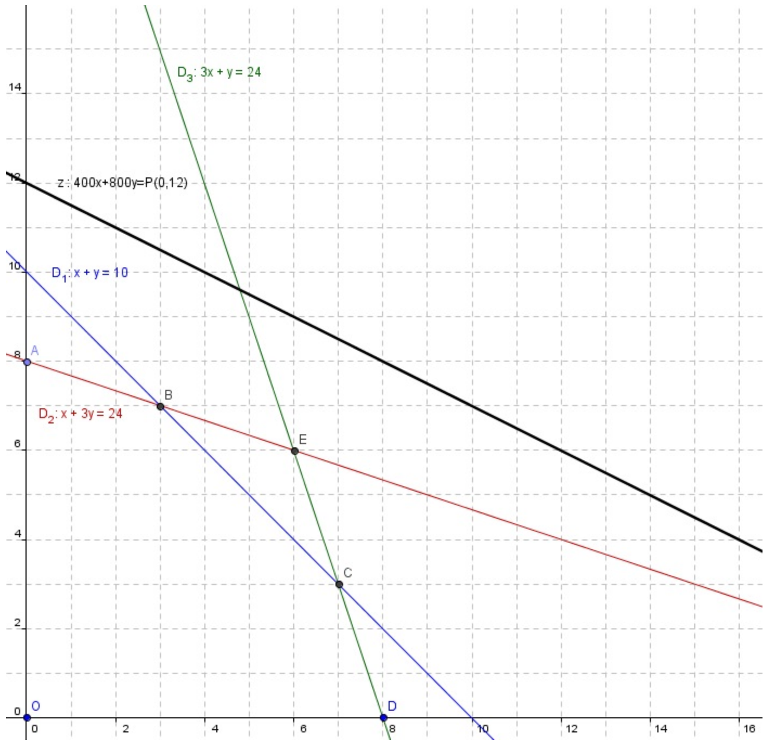
On cherche donc à maximiser le total des marges sur coûts variables :

$$\max Z(x,y) = 400\,x + 800\,y$$

2 Méthode graphique

Exercice 2.
Reprenons l'exercice 1.

a) Faire une **représentation graphique des contraintes**



Rappel : pour construire la droite $ax + by = c \Leftrightarrow y = (-a/b)x + c/b$, on utilise

- soit les points $(x = 0\,;\, y = c/b)$ et $(x = c/a\,;\, y = 0)$
- soit un des points $(x = 0\,;\, y = c/b)$ ou $(x = c/a\,;\, y = 0)$ et la pente $-a/b$

- D_1 : $x + y = 10$ passe par les points :
  (0 ;10) et (10,0)

- D_2 : $x + 3y = 24$ passe par les points :
  (0 ;8) et (24,0) : on utilise (0 ;8) et la pente -2/6 : quand x avance de 6, y diminue de 2

- D_3 : $3x + y = 24$ passe par les points :
  (0 ;24) et (8,0) : on utilise (8 ;0) et la pente -3/1 : quand x recule de 1, y augmente de 3

b) Identifier le **simplexe des solutions admissibles**

Le simplexe des solutions admissibles est déterminé par les points
$O = (0, 0)$,
$A =$ intersection entre $x = 0$ et $D_2 : x + 3y = 24$ donc $A = (x = 0, y = 8)$,
$B =$ intersection entre D_1 et D_2, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$
donc

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 24 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = 3 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 24 \end{vmatrix}}{\Delta} = 7$$

donc $B = (x = 3, y = 7)$
$C =$ intersection entre D_1 et D_3, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$
donc

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 24 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = 7 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 24 \end{vmatrix}}{\Delta} = 3$$

donc $C = (x = 7, y = 3)$
et $D =$ intersection entre $y = 0$ et $D_3 : 3x + y = 24$ donc $D = (x = 8, y = 0)$.
Le point $E =$ intersection entre D_2 et D_3 est hors-contraintes !

c) Rechercher le **programme optimal**

On sait que la programmation optimale est un des sommets du simplexe :

$Z(0) =$0 €

$Z(A) =$6 400 €

$Z(B) =$6 800 €

$Z(C) =$5 200 €

$Z(D) =$3 200 €

Le programme optimal est donc

$x =$3 000 poutrelles en I

et $y =$7 000 poutrelles en U

pour un profit de 6 800 €.
Remarque $Z(E) = 7\,200$€, mais E n'est pas une solution admissible !

d) ~~Peut-on augmenter les marges des poutres sans changer le programme optimal ?~~

On cherche m_x= marge des poutres en I avec

$$Z = m_x\,x + 800\,y \Leftrightarrow x = -\frac{800}{m_x}y + \frac{Z}{m_x}$$

le programme optimal B est solution du système :

$$\begin{aligned} D_1 :\ & x + y = 10 \Leftrightarrow x = -y + 10 \\ D_2 :\ & x + 3y = 24 \Leftrightarrow x = -3y + 24 \end{aligned}$$

Donc

$$-1 \leq -\frac{800}{m_x} \leq -3 \Leftrightarrow \frac{800}{3} \leq m_x \leq \frac{800}{1}$$

De même on cherche m_y=marge des poutres en U avec

$$Z = 400\,x + m_y\,y \Leftrightarrow y = -\frac{400}{m_y}x + \frac{Z}{m_y}$$

le programme optimal B est solution du système :

$$\begin{aligned} D_1 :\ & x + y = 10 \Leftrightarrow y = -x + 10 \\ D_2 :\ & x + 3y = 24 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}y + 8 \end{aligned}$$

Donc

$$-1 \leq -\frac{400}{m_y} \leq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{400}{3} \leq m_y \leq 400 \cdot 3$$

Si l'on fixe une marge entre 400 et 800€ pour le lot de poutres en I
et entre 800 et1 200€ pour le lot de poutres en U,
alors le programme $x = 3$ et $y = 7$ reste optimal et Z augmente.

3 Algorithme du simplexe

Exercice 3.
Reprenons l'exercice 1.

a) Écrire le programme sous **forme canonique**

Les variables de décision :
- soit $x =$ quantité (en milliers) de poutrelles en I à fabriquer
- soit $y =$ quantité (en milliers) de poutrelles en U à fabriquer

Les contraintes :

$$\begin{cases} \text{Énergie} \\ \text{Acier} \\ \text{Main d'œuvre} \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 3x \leq 24 \\ 3x + y \leq 24 \\ x \geq 0, \qquad y \geq 0 \end{cases}$$

On cherche à maximiser les marges (en milliers d'euros) :

$$\max Z = 400x + 800y$$

b) Écrire le programme sous **forme standard**

On introduit les variables d'écart :

$$\begin{cases} x + y & +e_1 & & & = & 10 \\ x + 3y & & +e_2 & & = & 24 \\ 3x + y & & & +e_3 & = & 24 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ e_i \geq 0 \end{cases}$$

c) Faire tourner l'**algorithme du simplexe**.

Étape 1 – i) Solution initiale

$x = y = 0$ solution initiale admissible. On part de O !!

Étape 1 – ii) Tableau initial (Tableau 1)

	Base	x	y	e_1	e_2	e_3	Résultat	Rapport
L_1	e_1	1	1	1	0	0	10	$10/1 = 10$
L_2	e_2	1	3	0	1	0	24	$24/3 = 8$
L_3	e_3	3	1	0	0	1	24	$24/1 = 24$
L_4	$-Z$	400	800	0	0	0	0	

Remarques :

- La dernière ligne du tableau se lit : $-Z + 400x + 800y = 0$
- Variables dans la base : $e_1 = 10$ $e_2 = 24$ $e_3 = 24$
- Variables hors-base : $x = y = 0$

Étape 2 – i) Variable entrant dans la base (quelle variable va-t-on augmenter ?)

On choisit le plus grand coefficient positif dans $-z$: c'est 800 donc y entre dans la base
Voir graphique exo1 : on augmente y

Étape 2 – ii) Variable sortant de la base (quelle variable va-t-on mettre à 0 ?)

Puisque $x = 0$, on a :

$$\begin{cases} e_1 = 10 - y \\ e_2 = 24 - 3y \\ e_3 = 24 - y \end{cases} \text{Si} \begin{cases} e_1 \geq 0 \\ e_2 \geq 0 \\ e_3 \geq 0 \end{cases} \text{alors} \begin{cases} y \leq 10 \\ y \leq 24/3 = 8 \\ y \leq 24 \end{cases}$$

On calcule les rapports (dans le tableau)
et on choisit le plus petit afin que les variables restent positives :
c'est 8 donc e_2 sort de la base
Voir le graphique exo1 : on augmente y de 8 (voir graphique on arrive en A)

Étape 2 – iii) Nouveau tableau (Tableau 2)

on choisit 3 comme pivot

	Base	x	y	e_1	e_2	e_3	Résultat	Rapport
$L_1 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 + L_1$	e_1	$2/3$	0	1	$-1/3$	0	2	$2/(2/3) = 3$
$L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$	y	$1/3$	1	0	$1/3$	0	8	$8/(1/3) = 24$
$L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 + L_3$	e_3	$8/3$	0	0	$-1/3$	1	16	$16/(8/3) = 6$
$L_4 \leftarrow -\frac{800}{3}L_2 + L_4$	$-Z$	$400/3$	0	0	$-796/3$	0	$-6\,400$	

Remarque : La dernière ligne du tableau se lit : $-Z + (400/3)x - (796/3)e_2 = -6400$ cad Z=6 400€

Étape 3 – i) Variable entrant dans la base (quelle variable va-t-on augmenter ?)

On choisit le plus grand coefficient positif dans $-Z$: c'est 400/3 donc x entre dans la base
Voir graphique on augmente x.

Étape 3 – ii) Variable sortant de la base (quelle variable va-t-on mettre à 0 ?)

On calcule les rapports et on choisit le plus petit : 3 donc e_1 sort de la base
On augmente x de 3, (voir graphique on arrive en B)

Étape 3 – iii) Nouveau tableau (Tableau 3)

on choisit 2/3 comme pivot

	Base	x	y	e_1	e_2	e_3	Resultat
$L_1 \leftarrow \frac{1}{2/3}L_1$	x	1	0	3/2	$-1/2$	0	3
$L_2 \leftarrow -\frac{1/3}{2/3}L_1 + L_2$	y	0	1	$-1/2$	1/2	0	7
$L_3 \leftarrow -\frac{8/3}{2/3}L_1 + L_3$	e_3	0	0	-4	1	1	8
$L_4 \leftarrow -\frac{400/3}{2/3}L_1 + L_4$	$-Z$	0	0	-200	-200	0	$-6\,800$

À présent, $Z =6\,800$

Étape 4 – i) Variable entrant dans la base.

On choisit le plus grand coefficient positif dans $-Z$:
il n'y en a pas, on ne peut pas améliorer la fonction-objectif, l'optimum est atteint.

d) **Résultats**

Variables de décision : On lit alors dans le tableau que le programme optimal est
$x^* = 3$ et $y^* = 7$ pour $Z = 6\,800$€
il faut donc produire 3 000 poutrelles en I et 7 000 poutrelles en U pour un CA de 6 800 €

Variables d'écart : Contraintes non-saturées, contraintes saturées et prix-cachés.
$e_3 = 8$ il reste 8h de Main d'œuvre inutilisées (contrainte non-saturée).

e_1 et e_2 sont hors-base, donc nulles :
les contraintes d'Énergie et d'Acier sont donc saturées !
Les contraintes saturées sont intéressantes à mettre en évidence car ce sont elles qui limitent l'augmentation de la fonction objectif.

~~Pour « relâcher » ces contraintes il faut augmenter les ressources, mais cela est-il profitable ? on regarde alors les prix cachés :~~

~~Les prix cachés des contraintes saturées se lisent dans la dernière ligne du tableau.~~

~~Le prix caché d'une contrainte saturée est égal à la variation de la valeur optimale de la fonction objectif lorsque la contrainte augmente d'une unité :~~

- ~~si on achète 100 kWh supplémentaire, alors Z augmente de 200 €~~ :
  ~~si l'on achète 1 kWh à un prix inférieur 2 € alors Z augmente~~ ;

- ~~de même pour l'acier :~~
  ~~si l'on achète 1 kg d'acier à un prix inférieur 2 € alors Z augmente.~~

Exercice 4.
Voici un tableau de l'algorithme du simplexe associé à un problème d'optimisation linéaire.

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	Resultat	Rapport
e_1	4	-7	0	1	-1	0	0	0	5	$5/4 = 1,25$
x_3	$6/11$	$17/11$	1	0	$1/11$	0	0	0	$10/11$	$(10/11)/(6/11) \simeq 1,67$
e_3	$131/11$	$-177/11$	0	0	$-13/11$	1	0	0	$5\,150/11$	$(5\,150/11)/(131/11) \simeq 39,61$
e_4	$92/11$	$-161/11$	0	0	$-14/11$	0	1	0	$4\,480/11$	$(4\,480/11)/(92/11) \simeq 48,69$
e_5	$111/11$	$-21/11$	0	0	$-9/11$	0	0	1	$4\,035/11$	$(4\,035/11)/(111/11) \simeq 36,35$
$-Z$	$20/11$	$-805/11$	0	0	$-48/11$	0	0	0	$-480/11$	

a) Quelles sont les **variables dans la base** ?

e_1, x_3, e_3, e_4, e_5

b) Quelles sont les **variables hors-base** ?

x_1, x_2, e_2

c) Donner les valeurs des variables x_1, x_2, x_3 et de la fonction-objectif Z.

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 10/11$ et $Z = 480/11$

d) Y-a-t-il des contraintes saturées ?

Oui : $e_2 = 0$, la 2ème contrainte est saturée

e) Peut-on continuer ? (Si oui, donner les variables entrant et sortant de la base, puis entourer le pivot.)

Il y a des coefficients positifs dans la dernière ligne : on peut continuer !

- variable entrant : le plus grand coefficient positif : x_1 entre dans la base ;
- variable sortant : le plus petit des rapport : e_1 sort de la base ;
- le pivot est 4.

Exercice 5.

Pour x_1, x_2 et x_3 quantités de produits fabriqués on dégage une marge $Z(x_1, x_2, x_3)$. On cherche alors à maximiser Z sous des contraintes 1) de matières premières (en kg), 2) de main d'œuvre (en h), 3) d'énergie (en kWh). Voici un tableau de l'algorithme du simplexe associé à ce problème d'optimisation linéaire :

Base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Resultat
e_1	0	$-15/4$	$1/2$	1	0	$-5/4$	410
e_2	0	$-211/8$	$-69/4$	0	1	$-17/8$	$145/2$
x_1	1	$19/8$	$5/4$	0	0	$1/8$	$15/2$
$-Z$	0	$-635/8$	$-161/4$	0	0	$-41/8$	$-615/2$

où e_i est la variable d'écart de la contrainte n°i.

a) Pourquoi peut-on s'arrêter ?

il n'y a plus de coefficients positifs dans la dernière ligne : on ne peut plus augmenter Z !

b) Donner le programme optimal et la valeur de la fonction-objectif.

le programme optimal est $x_1 = 15/2$ et $x_2 = x_3 = 0$, avec $Z = 615/2$

c) Y-a-t-il des **contraintes non-saturées** ?

$e_1 = 410$ kg de matière première et $e_2 = 145/2$ h de main d'œuvre

d) Y-a-t-il des **contraintes saturées** ? (Si oui, donner leur prix caché.)

$e_3 = 0$, la contrainte n°3 est saturée

~~le prix caché est de 41/8 par unité de Z par unité de e_3~~ :

~~c-à-d en achetant 1 unité de la 3^e, Z augmente de 41/8~~

~~donc en achetant 1 unité de la 3^e pour un montant inférieur à 41/8 l'unité~~

~~alors on augmente les marges~~

4 Cas pratiques

Pour chacun des exercices suivants, il vous est demandé de :

1 – Formaliser l'énoncé :

- **Variables de décision ?**
- **Contraintes ?**
- **Fonction-objectif ?**

2 – Résoudre : méthode graphique ou algorithme du simplexe.

3 – Conclure : programme optimal et valeur de la fonction-objectif.

4 – Faire une analyse de sensibilité.

Exercice 6 (Raffinerie de pétrole).
Une raffinerie de pétrole traite deux sortes de brut pour donner des produits finis avec les rendements suivants :

	Essence	Diesel	Fuel	Total
Brut 1	25%	30%	45%	100%
Brut 2	35%	30%	35%	100%

Les quotas de production imposent de fabriquer au plus 8,25 millions de m^3 d'essence ; 7,5 millions de m^3 de diesel et 10,65 millions de m^3 de fuel. La marge bénéficiaire laissée par le traitement du brut 1 est de 30 € par m^3, et celle du brut 2 est de 40 € par m^3. Quelles quantités de chaque brut faut-il traiter pour obtenir une marge maximale ?

Exercice 7 (Élevage de chevaux).
Un éleveur de chevaux dispose de trois types de foin séché pour alimenter ses chevaux. Il souhaite déterminer les quantités de chaque type de foin séché qui doivent être données aux chevaux afin de satisfaire leur besoin en composants nutritifs et ceci pour un coût minimum. Les unités de chacun des ingrédients nutritionnels de base contenus dans un kilogramme de foin séché figurent dans le tableau suivant, qui indique également les besoins nutritionnels quotidiens (*a minima*).

Composants nutritifs (g/kg)	foin de Grau	foin de prairie	foin de luzerne	Quantité requise (g par j)
Valeur énergétique	9	2	4	20
Acide aminé	3	8	6	18
Matière azoté	1	2	6	15

Les coûts des foins séchés sont respectivement de 7€ le kg de foin de Grau ; 6€ le kg de foin de prairie et 5€ le kg de foin de luzerne. Quel est alors le régime journalier des chevaux minimisant les coûts ?

Exercice 8 (Brasseur de bière).
Un brasseur dispose d'ingrédients en quantités limitées : 240 kg de maïs ; 5 kg de houblon et 595 kg de malt. À partir de ces ingrédients, il peut brasser différents types de bière. Pour produire
– un décalitre de bière blonde, il utilise 2,5 kg de maïs ; 125 g de houblon et 17,5 kg de malt ;
– un décalitre de bière brune, il utilise 7,5 kg de maïs ; 125 g de houblon et 10 kg de malt ;
– un décalitre de bière spéciale, il utilise 4 kg de maïs ; 80 g de houblon et 14 kg de malt ;
– un décalitre de bière extra, il utilise 10 kg de maïs ; 140 g de houblon et 15 kg de malt.
La marge résultant de la vente d'un décalitre est de 39€ pour la bière blonde ; de 69€ pour la bière brune ; de 42€ pour la bière spéciale et de 75€ pour la bière extra.

a) Combien doit-il brasser de décalitres de chaque type de bière pour maximiser ses marges ?

b) Est-il profitable d'augmenter les capacités de production ?

c) De combien peut-il augmenter ses marges sans modifier le programme optimal ?