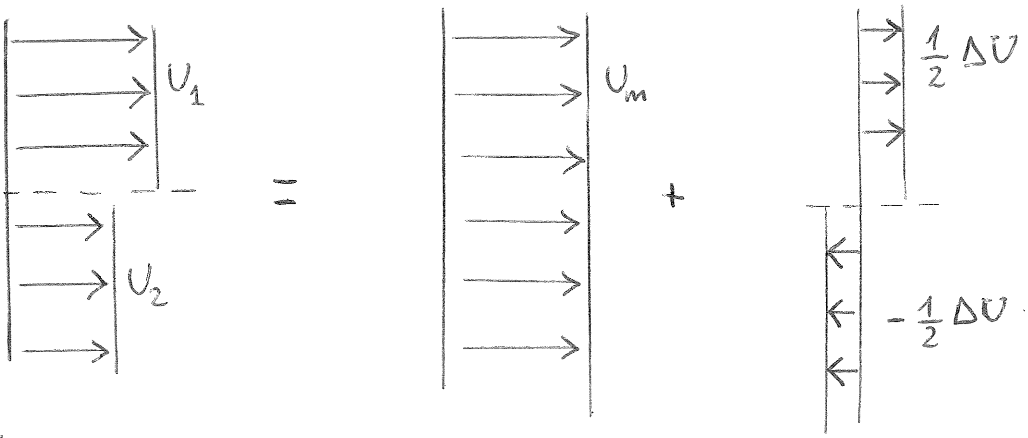
Turbulence

TD 2 bis : Modèles de longueur de mélange

Exercice supplémentaire : Couche de mélange turbulente



$$\begin{cases} U_m + \frac{1}{2}\Delta U = U_1 \\ U_m - \frac{1}{2}\Delta U = U_2 \end{cases}$$

1°) $\nu \dfrac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}$ $\equiv$ Transport de quantité de mvt de l'éc. moyen par diffusion visqueuse. (Contrainte visqueuse)

$-\overline{u_i' u_j'}$ $\equiv$ Transport par advection turbulente (Contrainte Turbulente).

2°) Incompressibilité : $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta U}{L} \sim \dfrac{V}{\delta} \Rightarrow \boxed{V \simeq \Delta U \dfrac{\delta}{L}}$

(nb : $\bar{u}$ est d'ordre U_m, mais $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \ldots}$ est d'ordre $\dfrac{\Delta U}{\ldots}$)

$$\cancel{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}} + \underbrace{\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}_{U_m \frac{\Delta U}{L}} + \underbrace{\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\frac{\Delta U^2}{L}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}}_{\nu\frac{\Delta U}{L^2}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}}_{\nu\frac{\Delta U}{\delta^2}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x}}_{\frac{\Delta U^2}{L}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}}_{\frac{\Delta U^2}{\delta}}$$

$$\underbrace{U_m\frac{\Delta U}{L} \quad \frac{\Delta U^2}{L}}_{\simeq o\left(\frac{U_m \Delta U}{L}\right)} \qquad \underbrace{\nu\frac{\Delta U}{L^2} \quad \nu\frac{\Delta U}{\delta^2}}_{\simeq o\left(\nu\frac{\Delta U}{\delta^2}\right)} \qquad \underbrace{\frac{\Delta U^2}{L} \quad \frac{\Delta U^2}{\delta}}_{\simeq o\left(\frac{\Delta U^2}{\delta}\right)}$$

Inertiel x Visqueux x Turbulent x

$$\cancel{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}} + \underbrace{\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}}_{U_m \Delta U \frac{\delta}{L^2}} + \underbrace{\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}}_{\Delta U^2 \frac{\delta}{L^2}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}}_{\nu \frac{\Delta U \delta}{L^3}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}}_{\frac{\nu \Delta U}{\delta L}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x}}_{\frac{\Delta U^2}{L}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}}_{\frac{\Delta U^2}{\delta}}$$

$$\simeq o\left(\frac{U_m \Delta U \delta}{L^2}\right) \qquad \simeq o\left(\frac{\nu \Delta U}{\delta L}\right) \qquad \simeq o\left(\frac{\Delta U^2}{\delta}\right).$$

Inertiel y — visqueux y — Turbulent y.

- Visqueux ≪ Inertiel : $\nu \frac{\Delta U}{\delta^2} \ll \frac{U_m \Delta U}{L}$ et $\nu \frac{\Delta U}{\delta L} \ll \frac{U_m \Delta U \delta}{L^2}$

soit $\boxed{Re_\delta = \frac{U_m \delta}{\nu} \gg \frac{L}{\delta}}$

- Visqueux ≪ Turbulent : $\nu \frac{\Delta U}{\delta^2} \ll \frac{\Delta U^2}{\delta}$ et $\nu \frac{\Delta U}{\delta L} \ll \frac{\Delta U^2}{\delta}$

soit $Re_\delta \gg \frac{U_m}{\Delta U}$ et $Re_\delta \gg \frac{U_m}{\Delta U} \cdot \frac{\delta}{L}$.

Donc $\boxed{Re_\delta \gg \frac{U_m}{\Delta U}}$ (puisque $\frac{\delta}{L} \ll 1$)

Soit enfin :

$$\begin{cases} \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} & (3) \\ \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}. & (4') \end{cases}$$

3°) $\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = o\left(\frac{U_m \Delta U \delta}{L^2}\right)$ et $\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} = o\left(\frac{\Delta U^2}{\delta}\right)$.

donc $\left|\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}\right| \gg \left|\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right|$ si $\frac{\Delta U^2}{\delta} \gg \frac{U_m \Delta U \delta}{L^2}$, soit $\frac{\Delta U}{U_m} \gg \left(\frac{\delta}{L}\right)^2$

Donc $(4') \Rightarrow (4)$, cqfd.

4°) $\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial y} = -\rho \dfrac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{y} \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial y}\, dy = -\rho \int_{-\infty}^{y} \dfrac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}\, dy$

$$\Rightarrow \bar{p}(y) - \underbrace{\bar{p}(-\infty)}_{p_0} = -\rho \overline{v'^2}(y) + \underbrace{\rho \overline{v'^2}(-\infty)}_{=0} + f(x)$$

soit $\bar{p}(y) = p_0 + \rho \overline{v'^2} + f(x)$

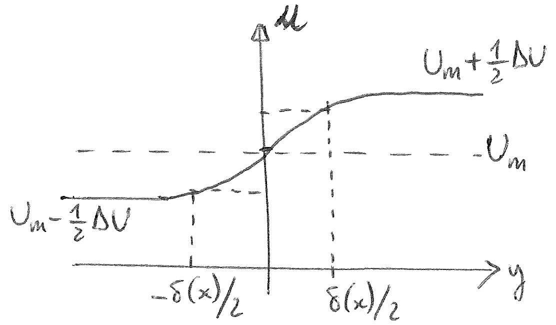
pour $y = \pm\infty$, $\bar{p}(y)$ indépendant de $x \Rightarrow f(x) = 0$,

soit $\boxed{\bar{p}(y) = p_0 + \rho \overline{v'^2}}$

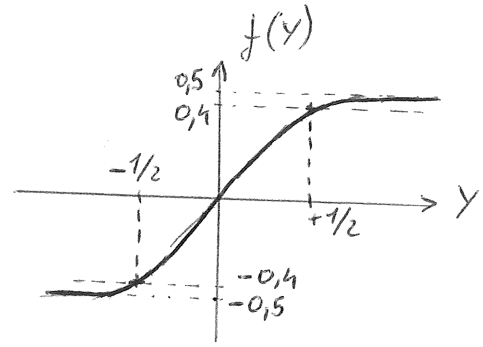
On reporte dans (3) : $\bar{u} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\underbrace{\dfrac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x}}_{\simeq O\left(\frac{\Delta U^2}{L}\right)} - \underbrace{\dfrac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}}_{\simeq O\left(\frac{\Delta U^2}{\delta}\right)}$

d'où (5) car $\dfrac{\delta}{L} \ll 1$.

5°)



$\Longrightarrow$



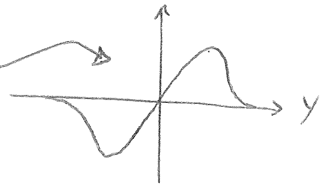
6°) $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$, avec $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial Y} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial \delta} \cdot \dfrac{\partial \delta}{\partial x} = -\dfrac{\partial \delta}{\partial x} \cdot \dfrac{y}{\delta^2} \dfrac{\partial}{\partial Y} = -\dfrac{1}{\delta} \dfrac{\partial \delta}{\partial x} Y \dfrac{\partial}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial Y} \dfrac{\partial Y}{\partial y} = \dfrac{1}{\delta} \dfrac{\partial}{\partial Y} \end{cases}$

soit $+\dfrac{1}{\delta} \dfrac{\partial \delta}{\partial x} Y \dfrac{\partial}{\partial Y}\Big(U_m + \Delta U f(y)\Big) = \dfrac{1}{\delta} \dfrac{\partial}{\partial Y} \bar{v}$

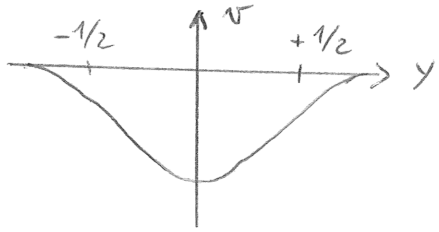
$\Rightarrow + \dfrac{\partial \delta}{\partial x} Y \Delta U \dfrac{\partial f}{\partial Y} = \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial Y}$ d'où $\bar{v} = \boxed{\Delta U \dfrac{d\delta}{dx} \displaystyle\int_{-\infty}^{Y} Y \dfrac{df}{dY}\, dY}$

Pour que l'intégrale converge, il faut que $Y \dfrac{df}{dY}$ tende vers 0 plus vite que $1/Y$, c'est-à-dire que $f(Y)$ tende vers $\pm 1/2$ plus vite que $1/Y$. (par exemple $1/Y^2$, e^{-Y}, e^{-Y^2} etc).

(6°) suite. $f(Y)$ impaire croissante $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial Y}$ paire, positive, $Y\dfrac{\partial f}{\partial Y}$ impaire



donc $\bar v$ négative et paire :



Son ordre de grandeur est bien $\Delta U \dfrac{d\delta}{dx} \simeq \Delta U \dfrac{\delta}{L}$ (cf 1°).

$\bar v < 0 \Rightarrow$ écoulement vers le bas. En effet, l'étalement du profil $\bar u$ nécessite (par incompressibilité) un transport de matière de haut en bas.

7°) $\bar u \dfrac{\partial \bar u}{\partial x} = -\dfrac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'} \Rightarrow (U_m + \Delta U f(Y))\left(-\dfrac{1}{\delta}\dfrac{d\delta}{dx} Y \dfrac{\partial}{\partial Y}\right)(U_m + \Delta U f(Y))$

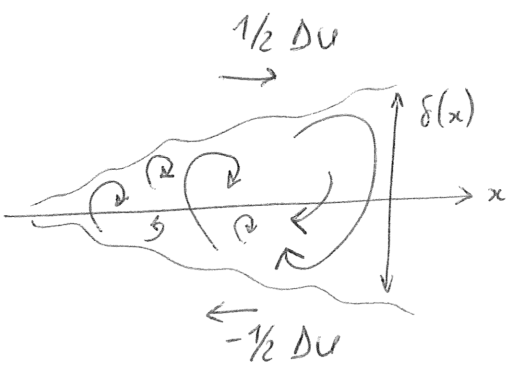
$$= -\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial Y}\left(\Delta U^2 g(Y)\right).$$

Soit : $(U_m + \cancel{\Delta U f(Y)})\dfrac{d\delta}{dx} Y \dfrac{df}{dY} = \Delta U \dfrac{dg}{dY}$

$$\Rightarrow \frac{Y f'(Y)}{g'(Y)} = \frac{\Delta U}{U_m}\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^{-1}.$$

Le membre de gauche ne dépend que de Y, celui de droite que de x. Donc chaque membre est une constante, et $\dfrac{d\delta}{dx} = S = \text{cste}$.

8°)



Des tourbillons de taille $\Omega < \delta(x)$ transportent la quantité de mvt de $y>0$ vers $y<0$.

Les tourbillons les plus efficaces sont ceux de taille $\Omega \simeq \delta(x)$.

Ces tourbillons sont d'amplitude $u' \simeq \Delta U$

↳ Agit comme une viscosité effective $\simeq \Delta U \cdot \delta(x)$ (m^2/s).

9°)

$$-\rho\overline{u'v'} = \rho\nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho\mu\,\Delta U\,\delta(x).\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial Y}\left(U_m + \Delta U f(Y)\right)$$

soit $\overline{u'v'} = -\mu\,\Delta U^2 \frac{df}{dY}$ soit $\boxed{g = -\mu \frac{df}{dY}}$.

on reporte dans (9) $\Rightarrow \frac{Yf'}{-\mu f''} = \frac{\Delta U}{U_m}\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^{-1}$, soit $\boxed{f'' + \frac{U_m}{\Delta U}\frac{S}{\mu} Y f' = 0}$

on reconnait (12) avec $\sigma = \sqrt{\frac{\Delta U}{U_m}\frac{\mu}{S}}$

$$f(Y) = \frac{1}{2}\int_0^Y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-Y^2/2\sigma^2}\, dY$$

vérifie bien $f(\pm\infty) = \pm 1/2$ et $f(0) = 0$.
(nb l'intégrale d'une gaussienne vaut 1).

$$f'(Y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-Y^2/2\sigma^2}$$

$$f''(Y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot\left(\frac{-2Y}{2\sigma^2}\right) e^{-Y^2/2\sigma^2} = -\frac{Y}{\sigma^2} f'(Y),$$ cqfd.

10°) Si $\Delta U / U_m \ll 1$ n'est pas vérifiée, $f(Y)$ n'est plus impaire (en particulier $f(0) \neq 0$)

basculement de la couche vers le bas.