M12-05 Mathématiques

Chapitre 4 : Équations et inéquations

adelaide.olivier@u-psud.fr

B409

Plan du Chapitre 4

Mise en équations

Exercice 4 (16 pts)
A l'écoute de ses clients, ZILCHIK EMBALLAGE conçoit, fabrique et commercialise des solutions d'emballages sur mesure répondants à des besoins spécifiques. Le service R&D vient de mettre au point de nouveaux sachets à base de matériaux bio-dégradables. Le profit réalisé, en milliers d'euros, pour la vente de v milliers de sachets est donné par :

$$P(v) = (18 - 5v)e^{(v-2)} - 5.$$

La capacité maximale de production est de trois mille sachets.

a) Calculer le profit en euros réalisé sur la vente de mille, deux mille et trois mille sachets.

b) Déterminer la quantité à vendre par jour pour réaliser un profit maximal.

c) Quel est alors le profit maximal en euros ?

d) À partir de quelle quantité de sachets l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

1. Formaliser l'énoncé

Variable	Fonction
$x =$ « en français avec unité €,kg,…»	$y =$« en français avec unité €,kg,…» $= f(x)$

2. Formaliser la question

On cherche x tel que ….

3. Résoudre

J'utilise le cours ….

4. Rédiger la réponse

On a donc $x =$….

Equation, inéquation

Problématique : on cherche l'ensemble des x tels que :

$$P(x) - Q(x) \quad = \quad 0 \qquad \text{« équation »}$$

ou

$$P(x) - Q(x) \leq, <, \geq, > \ 0 \qquad \text{« inéquation »}$$

Ex : Le « **seuil de rentabilité en volume** » est le nombre d'unité que l'entreprise doit vendre pour **couvrir** ses coûts

$$\boldsymbol{B(x) = 0}$$

Ex : L'activité est alors **rentable** si

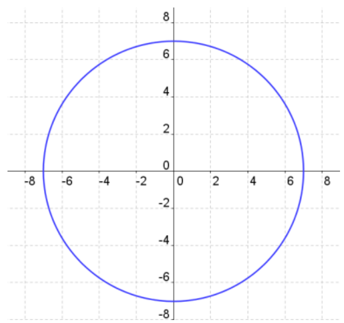
$$\boldsymbol{B(x) > 0}$$

Equation $P(x) = Q(x)$

Déf : **Résoudre une équation**, c'est **trouver toutes les solutions** et seulement les solutions de cette équation.

Ex : $x^2 + y^2 = a^2$?

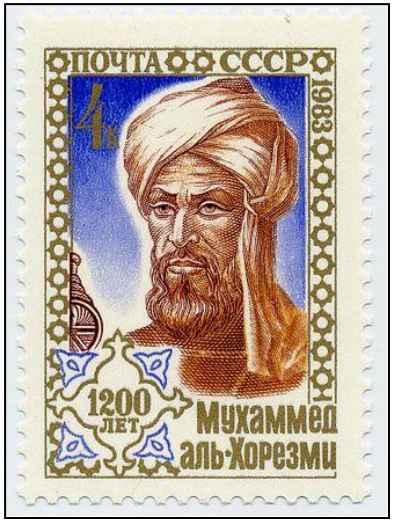
$\mathcal{S} =$



Remarque:
deux équations (ou inéquations) sont **« équivalentes »** (Eq1 $\Leftrightarrow$ Eq2) ssi elles ont **les mêmes solutions**

Ex : $1000x^2 + 1000y^2 = 1000a^2$?

Algèbre - Al jabr



M. Al-Khawarizmi
780-850

Résoudre: $9x \;- 3 = 5x$

al muqabala (la réduction): $9x \;- 3 = 5x \Leftrightarrow 9x \;\mathbf{-\,5x} \;- 3 = 5x \mathbf{-\,5x}$

al jabr (le reboutement) : $4x \;-\; 3 \;=\; 5 \;\Leftrightarrow\; 4x - 3 \mathbf{+\,3} \;=\; 5 \mathbf{+\,3}$

al hatt (division) : $4x \;=\; 8 \;\Leftrightarrow \dfrac{4x}{4} = \dfrac{8}{4}$

Equation $P(x) = Q(x)$

Pour résoudre une équation

1. On vérifie les **conditions d'existence** :
   ensemble de définitions de $P(x)$ et $Q(x)$

2. On utilise les **propriétés d'équivalence** pour se ramener à :

   - $a\boldsymbol{x} + b = 0$ avec $\boldsymbol{a \neq 0}$
   - $a\boldsymbol{x}^2 + b\boldsymbol{x} + c = 0$ avec $\boldsymbol{a \neq 0}$
   - $\boldsymbol{x}^n = a$
   - $a^x = b$
   - $\ln(x) = a$

① Ajouter une constante / Multiplier par une constante

Propriétés d'équivalence

- **Ajouter (ou retrancher) une constante :**
  pour tout $a \in \mathbb{R}$,
  $$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow P(x) + a = Q(x) + a$$

- **Multiplier (ou diviser) par une constante :**
  pour tout $a \neq 0$,
  $$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow a * P(x) = a * Q(x)$$

Résoudre : $3x + 2 = -1$

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) $3x + 2 = -1 \quad \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 = -1 - 2$

$\Leftrightarrow 3x = -3 \qquad \Leftrightarrow \frac{3}{3}x = \frac{-3}{3} \qquad \boxed{\Leftrightarrow x = -1}$

② Equation $P(x)Q(x) = 0$

Propriétés d'équivalence

- **Produit :** $P(x)Q(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$ **ou** $Q(x) = 0$

- **Rapport :** $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow Q(x) \neq 0$ **et** $P(x) = 0$

Résoudre : $(\mathbf{3}x + \mathbf{2})(x - \mathbf{1}) = \mathbf{0}$

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) $(3x + 2)(x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 0 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2/3 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}}$$

③ Equation $1/P(x) = a$

Propriétés d'équivalence

Si $P(x) \neq 0$ et $a \neq 0$ alors

$$\frac{1}{P(x)} = a \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{P(x) = \frac{1}{a}}$$

Résoudre : $$\boldsymbol{\frac{1}{x-1} = 2}$$

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \; x - 1 \neq 0\} \quad = \{x \in \mathbb{R} : \; x \neq 1\}$

2) $\dfrac{1}{x-1} = 2 \quad \Leftrightarrow x - 1 = \dfrac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow x - 1 + 1 = \dfrac{1}{2} + 1$

$$\boxed{\Leftrightarrow \boldsymbol{x = 3/2}}$$

④ Equation $x^n = a$

Propriétés d'équivalence

- Si $\boldsymbol{n}$ **pair** alors
  - Si $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^n = a \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = -a^{1/n}$ ou $a^{1/n}$
  - Si $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}^n = a$ n'a pas de solution
- Si $\boldsymbol{n}$ **impair** alors

$$\boldsymbol{x}^n = a \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = a^{1/n}$$

Résoudre : $\boldsymbol{x^2 = 9}$

1) $D_f = \mathbb{R}$
2) $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 9^{1/2} = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x = -3} \text{ ou } \boldsymbol{x = 3}}$

Résoudre : $\boldsymbol{x^3 = 8}$

1) $D_f = \mathbb{R}$
2) $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 8^{1/3} = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 2}}$

⑤ Equation $\exp(P(x)) = a$

Propriétés d'équivalence

- Si $a > 0$, $\exp\big(P(x)\big) = a \Leftrightarrow P(x) = \ln(a)$
- Si $a \leq 0$, $\exp\big(P(x)\big) = a$ n'a pas de solution

Résoudre : $e^{x-1} = 1$

1) $D_f = \mathbb{R}$
2) $e^{x-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \ln(e^{x-1}) = \ln(1) \quad \Leftrightarrow x - 1 = \ln(1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

Résoudre : $3^{x-1} = 2$

1) $D_f = \mathbb{R}$
2) $3^{x-1} = 2 \Leftrightarrow e^{(x-1)\ln(3)} = 2 \quad \Leftrightarrow (x-1)\ln(3) = \ln(2)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} + 1$$

⑥ Equation $\ln(P(x)) = a$

Propriétés d'équivalence

$$\ln(P(x)) = a \quad \Leftrightarrow \quad P(x) = \exp(a)$$

Résoudre : $\mathbf{\ln(x-1) = 1}$

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \quad x - 1 > 0\} \;=]\,1\,;\,+\infty\,[$

2) $\ln(x-1) = 1 \quad \Leftrightarrow \exp(\ln(x-1)) = \exp(1) \quad \Leftrightarrow x - 1 = e$

$$\boxed{\Leftrightarrow x = e + 1 > 1}$$

Inéquation $P(x) \leq Q(x)$

Pour résoudre une inéquation

1. On vérifie les **conditions d'existence** :
   ensemble de définitions de $P(x)$ et $Q(x)$

2. On utilise les **propriétés d'équivalence** pour se ramener à étudier le signe de :

   - $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$
   - $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
   - $f(x) = x^n - a$
   - $f(x) = a^x - b$
   - $f(x) = \ln(x) - a$

① Ajouter une constante / Multiplier par une constante

Propriétés d'équivalence

- **Ajouter (ou retrancher) une constante :**
  pour tout $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$,
  $$P(x) \leq Q(x) \Leftrightarrow P(x) - \boldsymbol{a} \leq Q(x) - \boldsymbol{a}$$

- **Multiplier (ou diviser) par une constante :**
  - Si $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, $P(x) \leq Q(x) \Leftrightarrow \boldsymbol{a} * P(x) \leq \boldsymbol{a} * Q(x)$
  - Si $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, $P(x) \leq Q(x) \Leftrightarrow \boldsymbol{a} * P(x) \geq \boldsymbol{a} * Q(x)$

Quand on multiplie / divise par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité !

② Inéquations $P(x)Q(x) \leq 0, \ldots, \frac{P(x)}{Q(x)} > 0$

Propriétés d'équivalence

- **Signe du produit :**

	signe	signe	signe	signe
$P(x)$	+	-	+	-
$Q(x)$	+	-	-	+
$P(x) \times Q(x)$	+	+	-	-

- **Signe du rapport = signe du produit**

Résoudre : $(3x+2)(x-1) \geq 0$

③ Inéquations $\frac{1}{x} \leq a, \dots, \frac{1}{x} > a$

Propriétés d'équivalence

- **Si $a > 0$,**

$$\frac{1}{x} \leq a \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{1}{a}$$

- **Si $a < 0$,**

$$\frac{1}{x} \leq a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} \leq x < 0$$

④ Inéquations $x^n \leq a, \ldots, x^n > a$

Propriétés d'équivalence

- Si n **pair** alors
  - Si $a \geq 0$, $x^n \leq a \Leftrightarrow x \in [-a^{1/n} \; ; \; a^{1/n}]$
  - Si $a < 0$, $x^n \leq a$ n'a pas de solution

- Si n **impair** alors

$$x^n \leq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq a^{1/n}$$

Résoudre : $x^2 > 9$

Résoudre : $x^3 \leq 8$

⑤ Inéquations $\exp(P(x)) \leq a$, ...

Propriétés d'équivalence

Pour tout $a > 0$,

- $\exp(P(x)) \leq a \Leftrightarrow P(x) \leq \ln(a)$
- $\exp(P(x)) > a \Leftrightarrow P(x) > \ln(a)$

$\ln(x)$ est **croissante** donc **on conserve les inégalités !**

Résoudre : $e^{x-1} \geq 1$

⑥ Inéquations $\ln(P(x)) \leq a$, …

Propriétés d'équivalence

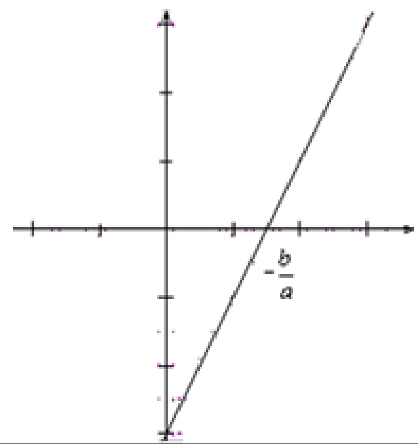
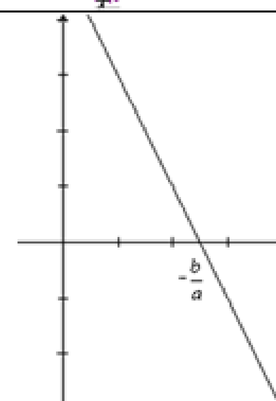
Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

- $\ln(P(x)) \leq a \Leftrightarrow P(x) \leq \exp(a)$
- $\ln(P(x)) > a \Leftrightarrow P(x) > \exp(a)$

$\exp(x)$ est **croissante** donc **on conserve les inégalités !**

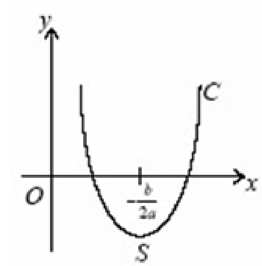
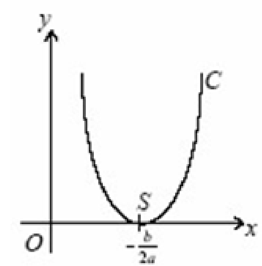
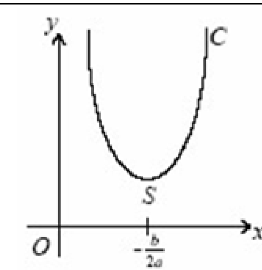
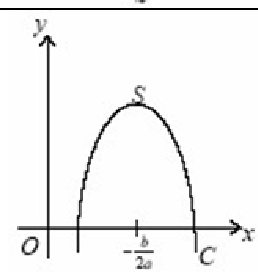
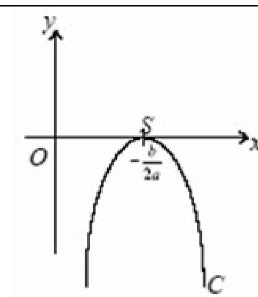
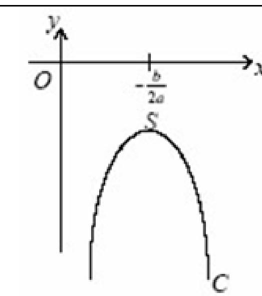
Résoudre : $\ln(x-1) < 1$

$f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$

<table>
<tr><td>Solution
$f(x) = 0$</td><td>$x_0 = -b/a$</td></tr>
<tr><td>factorisation</td><td>$f(x) = a(x - x_0)$</td></tr>
<tr><td>Signe de $f(x)$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-∞ ...</td><td>$x_0 = -b/a$</td><td>... +∞</td></tr>
<tr><td>Signe de
$f(x) = ax + b$</td><td>Signe de
$-a$</td><td>0</td><td>Signe de
a</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$a > 0$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>
</td></tr>
</table>

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

<table>
<tr><th></th><th>$\Delta > 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta < 0$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">solutions
$f(x) = 0$</td><td>Deux solutions
$x_1 < x_2$</td><td>Une seule solution
x_0</td><td>Pas de solution dans $\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>$\frac{-b}{2a}$</td><td>$\emptyset$</td></tr>
<tr><td>factorisation</td><td>$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$</td><td>$f(x) = a(x-x_0)^2$</td><td>Pas de factorisation</td></tr>
<tr><td>Signe de $f(x)$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ …</td><td>x_1</td><td>…</td><td>x_2</td><td>… $+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $f(x)$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de $-a$</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ …</td><td>x_0</td><td>… $+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $f(x)$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ … $+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $f(x)$</td><td>Signe de a</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$a > 0$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>