

TD4 – ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Objectifs : à la fin de ces séances **vous devriez être capable :**

- 1) de **résoudre** des équations et des inéquations ;
- 2) de **formaliser** une problématique d'économie ou de gestion à l'aide d'équations et d'inéquations et de la résoudre.

Sommaire

1 Équations	2
1.1 QUIZZ Cours	2
1.2 Exercices travaillés	4
2 Inéquations	6
2.1 QUIZZ Cours	6
2.2 Exercices travaillés	8
3 Cas pratiques	10

1 Équations

1.1 QUIZZ Cours

1) Pour $a \neq 0$: $ax + b = 0 \Leftrightarrow$

2) Pour $a \neq 0$: $ax^2 + bx + c = 0$

Étape 1 : On calcule $\Delta =$

Étape 2 : On rappelle les formules des solutions éventuelles :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Nb de solutions			
$x =$			

Étape 3 : On utilise sa calculatrice pour faire l'application numérique

3)	Pour $a > 0$: $x^2 = a \Leftrightarrow$
4)	Pour $a > 0$: $a^x = b \Leftrightarrow$
5)	Pour $a > 0$: $\ln(x) = a \Leftrightarrow$

1.2 Exercices travaillés

Exercice 1 (Attention à la méthode!).

Pour résoudre l'équation $3x^2 = 9x$ dans \mathbb{R} , on propose la méthode suivante :

$$3x^2 = 9x \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3.$$

- a) Indiquer pourquoi cette méthode n'est pas correcte.

- b) Résoudre cette équation.

Exercice 2 (Résolution d'équations).**Méthode à suivre pour résoudre une équation :**

- **Étape 1 : Expliciter l'inconnue** : « On cherche $x = ?$ solution de l'équation $P(x) = Q(x)$ »
- **Étape 2 : Identifier l'ensemble de définition**
- **Étape 3 : Se ramener à une équation usuelle** en utilisant les propriétés d'équivalence du cours
- **Étape 4 : Conclure** : « On a donc $x = \dots$ »

Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes :

a) $6x - 11 = -1 + x$

b) $\frac{2q + 1}{q - 3} = 1$

c) $(2x + 1)(x - 3) = 0$

d) $2x^2 - x - 3 = 0$

e) $x^2 - 6x + 9 = 0$

f) $x^2 + 10x + 26 = 0$

g) $e^{x-3} = 1$

h) $2e^{x-3} = 4$

i) $e^{x^2} e^{-6x+9} = 1$

j) $3^x = 7$

k) $x^3 = 7$

l) $6\sqrt{x} - 11 = -1 + \sqrt{x}$

m) $\ln(3x + 1) = 2$

n) $\ln(x) + \ln(x - 2) = 0$

o) $-5x + 20\sqrt{x} - \frac{5}{2} = 0$

2 Inéquations

2.1 QUIZZ Cours

1)	<p>Pour $a \neq 0$: signe de $f(x) = ax + b$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; width: 80%;"> <tr> <td style="width: 15%; text-align: center; padding: 5px;">x</td> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 25%;"></td> <td style="width: 35%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">signe de $ax + b$</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	x				signe de $ax + b$							
x													
signe de $ax + b$													
2)	<p>Pour $a \neq 0$: signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$</p> <p>1) On calcule $\Delta =$ et on résout $ax^2 + bx + c = 0$</p> <p>2) On donne le tableau des signes (voir cours)</p> <p>$\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; width: 80%;"> <tr> <td style="width: 15%; text-align: center; padding: 5px;">x</td> <td style="width: 85%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">signe de $ax^2 + bx + c$</td> <td></td> </tr> </table> <p>$\Delta = 0$: $f(x) = a(x - \frac{b}{2a})^2$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; width: 80%;"> <tr> <td style="width: 15%; text-align: center; padding: 5px;">x</td> <td style="width: 85%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">signe de $ax^2 + bx + c$</td> <td></td> </tr> </table> <p>$\Delta < 0$: $f(x)$ n'admet pas de factorisation</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; width: 80%;"> <tr> <td style="width: 15%; text-align: center; padding: 5px;">x</td> <td style="width: 85%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">signe de $ax^2 + bx + c$</td> <td></td> </tr> </table>	x		signe de $ax^2 + bx + c$		x		signe de $ax^2 + bx + c$		x		signe de $ax^2 + bx + c$	
x													
signe de $ax^2 + bx + c$													
x													
signe de $ax^2 + bx + c$													
x													
signe de $ax^2 + bx + c$													

3)	Résoudre $\ln(f(x)) \leq a$
4)	Pour $a > 0$, résoudre $e^{f(x)} \leq a$
5)	Pour $a > 0$, résoudre $b^{f(x)} \leq a$

2.2 Exercices travaillés

Exercice 3 (Attention à la méthode!).

Pour résoudre l'équation $\frac{4}{x} > x$ dans \mathbb{R} , on propose la méthode suivante :

$$\frac{4}{x} > x \Leftrightarrow 4 > x^2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

- a) Indiquer pourquoi cette méthode n'est pas correcte.

- b) Résoudre cette inéquation.

Exercice 4 (Résolution d'inéquations).**Méthode à suivre pour résoudre une inéquation :**

- **Étape 1 : Expliciter l'inconnue** : « On cherche $x = ?$ solution de l'inéquation $P(x) \leq Q(x)$ »
- **Étape 2 : Identifier l'ensemble de définition**
- **Étape 3 : Se ramener à une inéquation usuelle** en utilisant les propriétés d'équivalence du cours
- **Étape 4 : Conclure** : « On a donc $x = ; > ; < ; \leq ; \geq \dots$ »

Résoudre dans \mathbb{R} chacune des inéquations suivantes :

- | | | |
|--|--|------------------------------------|
| a) $6x - 11 \leq -1 + x$ | b) $\frac{x+2}{x-1} > 0$ | c) $\frac{1}{x+2} < \frac{x}{x+1}$ |
| d) $2x^2 + 11x - 21 < 0$ | e) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ | f) $x^2 + 10x + 26 \geq 0$ |
| g) $2e^{x-3} < 4$ | h) $3^x > 7$ | i) $\ln(3x+1) \leq 2$ |
| j) $6\sqrt{x} - 11 \geq -1 + \sqrt{x}$ | k) $(\ln(x))^2 - 6\ln(x) + 9 > 0$ | l) $x^3 < 7$ |
| m) $\frac{3}{1+e^{(t-1)}} \geq \frac{13}{5}$ | n) $-5v e^{(v-1)} + 13 e^{(v-1)} \leq 0$ | o) $6x^2 - 4x \leq 0$ |

3 Cas pratiques

Dans les exercices qui suivent il vous est demandé de :

1) Formaliser l'énoncé

Variables	Fonctions
$x = \dots$ <i>Expliciter l'unité! (kg, tonnes, etc.)</i>	$y = \dots$ $= f(x)$ <i>Expliciter l'unité! (€, K €, etc.)</i> <i>Donner la fonction</i>

2) Formaliser chacune des questions :

- **Étape 1 : Expliciter l'inconnue et Trouver une équation ou inéquation vérifiée par cette inconnue** : « On cherche $x = ?$ telle que : $f(x) = ; \leq ; \geq ; > ; < 0$ »
- **Étape 2 : Identifier l'ensemble de définition**
- **Étape 3 : Résoudre l'équation ou inéquation** en utilisant les équivalences : $\dots \Leftrightarrow \dots$
- **Étape 4 : Conclure** : « On a donc $x = ; \in \dots$ » (*en précisant bien l'unité!*)

Avertissement :

Lors des contrôles, si l'une des étapes n'est pas faite, la suite n'est pas corrigée!!

Exercice 5 (Économie).

L'offre $O(p)$ et la demande $D(p)$ désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné p .

Une étude économique concernant une matière première a permis d'établir que pour un prix $5 \leq p \leq 12$ en €, l'offre et la demande exprimées en tonnes sont égales à :

$$D(p) = -0,1p^2 + 0,7p + 9 \quad ; \quad O(p) = 0,4p + 3,6.$$

- Calculer l'offre et la demande pour un prix de 7€ : quel est le problème ?
- Calculer l'offre et la demande pour un prix de 10€ : quel est le problème ?
- Pour quel prix a-t-on l'équilibre $O(p) = D(p)$?
- Quelle est alors la quantité associée ?

Exercice 6 (Calcul des coûts).

Une coopérative agricole estime que pour v tonnes d'abricot vendus, le bénéfice est égal à :

$$B(v) = \exp(3v - 7) - 2 \quad \text{pour } v \geq 0.$$

Le volume total des ventes sur n mois est égal à :

$$VT(n) = \ln(3n - 1) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

- On appelle « seuil de rentabilité » le volume des ventes pour lequel le bénéfice est nul. Calculer le seuil de rentabilité.
- On appelle « point mort » le nombre de mois à partir duquel on dépasse le seuil de rentabilité. Calculer le point mort.

Exercice 7 (Gestion financière).

Un capital C_0 est placé sur un compte à long terme au taux annuel de t . Sa valeur acquise, C_n , au bout de n années est égale à

$$C_n = C_0 (1 + t)^n.$$

- Si l'on place 10 000€ à un taux de 5% par an : au bout de combien d'années aura-t-on doublé notre capital initial ?
- Combien faut-il placer, à un taux de 5% par an, pour obtenir 20 000€ au bout de 4 ans ?
- À quel taux doit-on placer 10 000€ pour obtenir 20 000€ au bout de 3 ans ?

Exercice 8 (Gestion financière).

Un capital C_0 est placé sur un compte à court terme au taux mensuel de t . Sa valeur acquise, C_n , au bout de n mois est égale à

$$C_n = C_0 (1 + nt).$$

- Si l'on place 10 000€ à un taux de 0,5% par mois : au bout de combien de mois aura-t-on doublé notre capital initial ?
- Combien faut-il placer, à un taux de 0,5% par mois, pour obtenir 20 000€ au bout de 4 mois ?
- À quel taux doit-on placer 10 000€ pour obtenir 20 000€ au bout de 3 mois ?

Exercice 9 (Contrôle de gestion et gestion prévisionnelle).

On estime que le nombre moyen de produits vendus (en million) au cours de l'année $2015 + n$ est égal à

$$T(n) = (1,7)^n \quad \text{pour } n \geq 1.$$

- a) Quelle sera, en moyenne, la quantité vendue l'an prochain ?
- b) Au cours de quelle année les ventes vont-elles, en moyenne, dépasser 4 millions ?