Problème du restaurateur

a) **Les variables de décision** :

• x : nombre d'assiettes à 8 $ commandées

• y : nombre d'assiettes à 6 $ commandées

• Les contraintes :

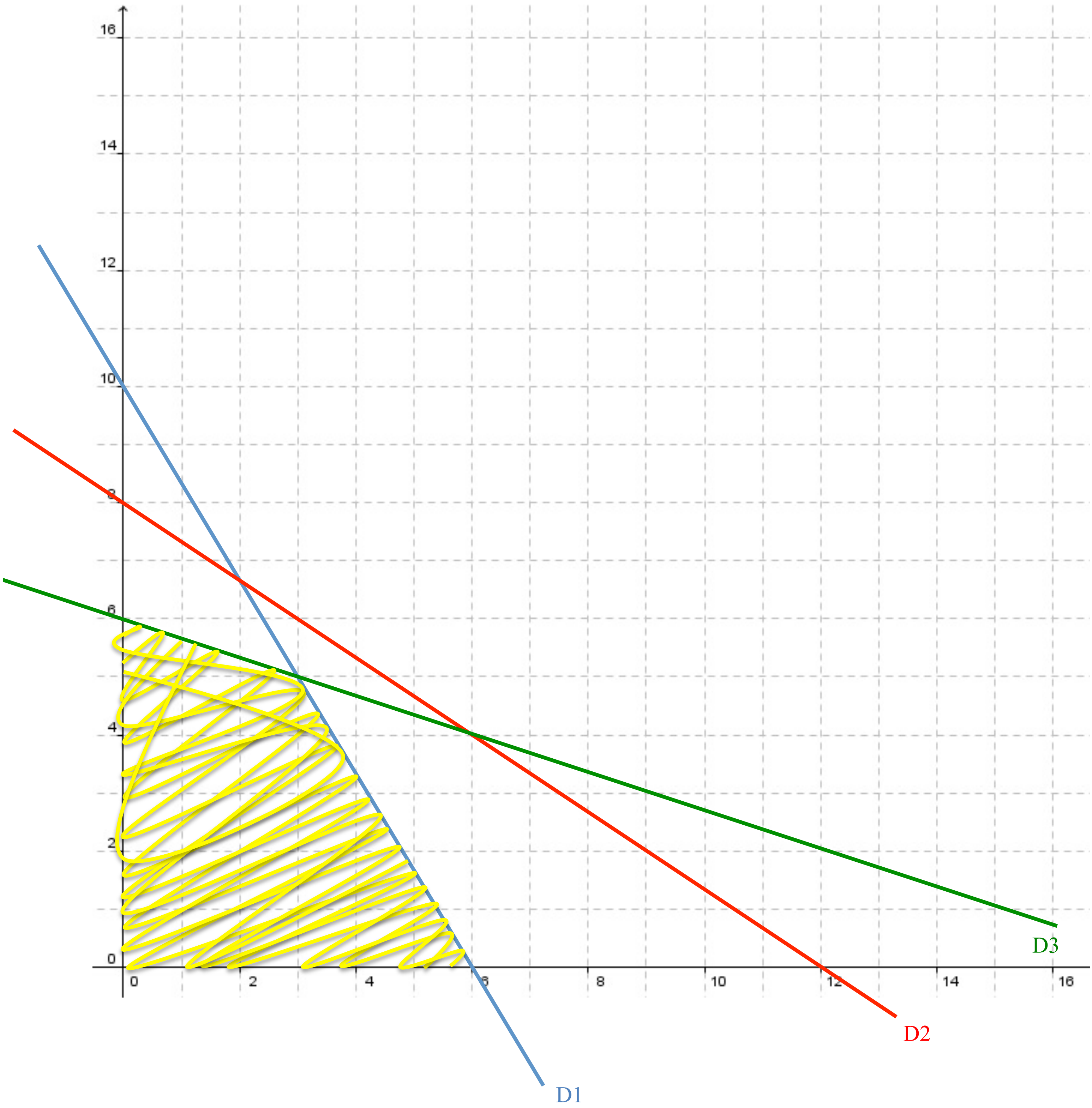
$$\begin{cases} \text{Oursins} & & 5x + 3y \leq 30 \\ \text{Crevettes} & \Rightarrow & 2x + 3y \leq 24 \\ \text{Huitres} & & x + 3y \leq 18 \\ & & x \geq 0\,;\, y \geq 0 \end{cases}$$

• On cherche à : maximiser le revenu Z(x;y) = 8x + 6y

b) **Méthode Graphique**

• Première étape : On trace les droites :

- D1 d'équation : $5x + 3y = 30$. Elle passe par les points de coordonnées A(6 ; 0) et B(0 ; 10)
- D2 d'équation : $2x + 3y = 24$. Elle passe par les points de coordonnées C(0 ; 8) et D(12 ; 0)
- D3 d'équation : $x + 3y = 18$. Elle passe par les points de coordonnées E(0 ; 6) et F(18 ; 0)



• <u>Deuxième étape</u> : Le simplexe solution contient l'origine (polygone hachuré en jaune). Il est délimité par les points :

- O (0 ; 0)

- I point intersection des droites D1 et D3 : ses coordonnées vérifient les équations des deux droites et sont donc solution du système :

$$\begin{cases} 5x + 3y = 30 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12$ et : $x = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 3 \\ 18 & 3 \end{vmatrix}}{12} = \frac{36}{12} = 3$ et $y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 30 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}}{12} = \frac{60}{12} = 5$

Les coordonnées du point I (3 ; 5)

- A(6 ;0) point d'intersection de la droite D1 et l'axe des abscisses.

- E(0 ; 6) point d'intersection de la droite D3 et l'axe des ordonnées

• Troisième étape : Le programme optimal est les coordonnées de l'un de ces sommets. Or :

Z(O) = 0

Z(I) = 54

Z(A) = 48

Z(E) = 36

• Conclusion. Le programme optimal est donc :

x = 3 assiettes de type 1

y = 5 assiettes de type 2

Pour un revenu maximal de 54 $

b) **Méthode de l'algorithme du simplexe** :

• On introduit les variables d'écart : e1 et e2 et e3 (ces trois variables sont ≥ 0)

$$\begin{cases} 5x + 3y + e1 & = & 30 \\ 2x + 3y + e2 & = & 24 \\ x + 3y + e3 & = & 18 \\ x \geq 0\,;y \geq 0\,; & & e1 \geq 0\,;e2 \geq 0 \;et\; e3 \geq 0 \end{cases}$$

On cherche à : maximiser le revenu Z(x;y) = 8x + 6y

Faire tourner l'algorithme du simplexe :

• <u>Première étape</u> :

i) Solution initiale :
Le point O (0;0) est la solution initiale admissible e_1 = 30 ; e_2 = 24 et e_3 = 18

ii) Tableau initial : TABLEAU 1

	Base	x	y	e_1	e_2	e_3	Résultat	Rapport
L1	e_1	5	3	1	0	0	30	30/5=6
L2	e_2	2	3	0	1	0	24	24/2=12
L3	e_3	1	3	0	0	1	18	18/1=18
L4	$-Z$	8	6	0	0	0	0	

Remarques :

• Variables dans la base : e1 ; e2 et e3 (sont strictement positives)

• Variables hors base : x et y (toutes les variables hors base sont nulles : x = 0 et y = 0)

• <u>Deuxième étape</u> :

i) Variable entrant dans la base

On choisit dans la dernière ligne (ligne de –Z) le coefficient strictement positif le plus grand

La variable entrante dans la base est : x

ii) Variable sortant de la base (quelle variable va-t-on mettre à 0 ?)

La variable sortante est la variable qui a le plus petit rapport : e_1 (e_1=0 ; la première contrainte (oursins) va être saturée)

Rapport = Résultat/ coefficient de la variable entrante (ici : coefficient en x)

iii) Nouveau tableau : TABLEAU 2

On choisit 5 comme pivot et L1 comme ligne pivot

	Base	x	y	e_1	e_2	e_3	Résultat	Rapport
L1$\leftarrow \left(\frac{1}{5}\right) * L1$	x	1	0,6	0,2	0	0	6	6/0,6=10
L2$\leftarrow -\left(\frac{2}{5}\right) * L1 + L2$	e2	0	1,8	-0,4	1	0	12	2/1,8=6,7
L3$\leftarrow -\left(\frac{1}{5}\right) * L1 + L3$	e3	0	2,4	-0,2	0	1	12	12/2,4=5
L4 $\leftarrow -\left(\frac{8}{5}\right) * L1 + L4$	$-Z$	0	1,2	-1,6	0	0	-48	

Z = 48

• Troisième étape :

i) Variable entrant dans la base : y

ii) Variable sortant de la base : e3

iii) Nouveau tableau : TABLEAU 3

On choisit 2,4 comme pivot et L3 comme ligne pivot

	Base	x	y	e_1	e_2	e_3	Résultat
L1$\leftarrow -\left(\frac{0,6}{2,4}\right) * L3 + L1$	x	1	0	0,25	0	-0,25	3
L2$\leftarrow -\left(\frac{1,8}{2,4}\right) * L3 + L2$	e2	0	0	-0,25	1	-0,75	3
L3$\leftarrow \left(\frac{1}{2,4}\right) * L3$	y	0	1	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{24}$	5
L4$\leftarrow -\frac{1,2}{2,4} * L3 + L4$	$-Z$	0	0	-1,5	0	- 0,5	- 54

La dernière ligne n'étant constituée que de coefficients négatifs ou nuls, l'algorithme s'arrête.

• Conclusion :

On obtient donc, comme programme optimal, par lecture du tableau :

x = 3 assiettes de type 1

y = 5 assiettes de type 2

Pour un revenu maximal de 54 $

Remarques :

• les première contrainte (oursins) et troisième contrainte (huitres) sont saturées (leurs variables d'écart, hors base, sont nulles)

• la deuxième contrainte (crevettes) n'est pas saturée : il reste 3 crevettes.