

Exercice 8

• Formalisation

- x1 : quantité en décalitres de bières blondes fabriquée
- x2 : quantité en décalitres de bières brunes fabriquée
- x3 : quantité en décalitres de bières spéciales fabriquée
- x4 : quantité en décalitres de bières extra fabriquée

Forme canonique

$$\begin{cases} \text{maïs} & 5x_1 + 15x_2 + 8x_3 + 20x_4 \leq 480 \\ \text{houblon} & \Rightarrow 25x_1 + 25x_2 + 16x_3 + 28x_4 \leq 1000 \\ \text{malt} & 35x_1 + 20x_2 + 28x_3 + 30x_4 \leq 1190 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard : j'introduis 3 variables d'écart

$$\begin{cases} \text{maïs} & 5x_1 + 15x_2 + 8x_3 + 20x_4 + e_1 = 480 \\ \text{houblon} & \Rightarrow 25x_1 + 25x_2 + 16x_3 + 28x_4 + e_2 = 1000 \\ \text{malt} & 35x_1 + 20x_2 + 28x_3 + 30x_4 + e_3 = 1190 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, e_2 \text{ et } e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Afin de maximiser une marge : $Z = 39x_1 + 69x_2 + 42x_3 + 75x_4$

• Algorithme du simplexe

Etape 1 : Tableau initial (Tableau 1)

	Base	x1	x2	x3	x4	e1	e2	e3	Résultat	Rapport
L1	e1	5	15	8	20	1	0	0	480	24
L2	e2	25	25	16	28	0	1	0	1000	35,7
L3	e3	35	20	28	30	0	0	1	1190	39,7
L4	-Z	39	69	42	75	0	0	0	0	



Etape 2 : Tableau 2

Variable entrante (plus grand coefficient strictement positif dans la dernière ligne - Z) : x_4

Variable sortante (plus petit rapport positif : Résultat/coef de la variable entrante) : e_1

Pivot : 20 ; Ligne Pivot : L1

$$L1 \leftarrow 0,05 * L1 ; L2 \leftarrow -1,4 * L1 + L2 ; L3 \leftarrow -1,5 * L1 + L3 ; L4 \leftarrow -3,75 * L1 + L4$$

Base	x1	x2	x3	x4	e1	e2	e3	Résultat	Rapport
x_4	0,25	0,75	0,4	1	0,05	0	0	24	
e_2	18	4	4,8	0	-1,4	1	0	328	
e_3	27,5	-2,5	16	0	-1,5	0	1	470	
-Z	20,25	12,75	12	0	-3,75	0	0	-1800	

$Z = 1800$



Etape 3 : Tableau 3

Variable entrante (plus grand coefficient strictement positif dans la dernière ligne - Z) : x_1

Variable sortante (plus petit rapport positif : Résultat/coef de la variable entrante) : e_2

Pivot : 27,5 ; Ligne Pivot : L3

Base	x1	x2	x3	x4	e1	e2	e3	Résultat	Rapport
x_4	0	17/22	14/55	1	7/110	0	-1/110	217/11	25,53
e_2	0	62/11	-312/55	0	-23/55	1	-36/55	224/11	3,61
x_1	1	-1/11	32/55	0	-3/55	0	2/55	188/11	-188
-Z	0	321/22	12/55	0	-291/110	0	-81/110	-23607/11	

$Z = 23607/11$



Etape 4 : Tableau 4

Variable entrante (plus grand coefficient strictement positif dans la dernière ligne – Z) : x_2

Variable sortante (plus petit rapport positif : Résultat/coef de la variable entrante) : e_2

Pivot : $62/11$; Ligne Pivot : L2

Base	x1	x2	x3	x4	e1	e2	e3	Résultat	Rapport
x_4	0	0	$32/31$	1	$15/124$	$-17/124$	$5/62$	$525/31$	$16,41$
x_2	0	1	$-156/155$	0	$-23/310$	$11/62$	$-18/155$	$112/31$	$-3,59$
x_1	1	0	$76/155$	0	$-19/310$	$1/62$	$4/155$	$540/31$	$35,53$
-Z	0	0	$462/31$	0	$-1349/310$	$-321/124$	$297/310$	$-68163/31$	

$Z = 68163/11$



Etape 5 : Tableau 5

Variable entrante (plus grand coefficient strictement positif dans la dernière ligne – Z) : x_3

Variable sortante (plus petit rapport positif : Résultat/coef de la variable entrante) : x_4

Pivot : $32/31$; Ligne Pivot : L1

Base	x1	x2	x3	x4	e1	e2	e3	Résultat
x_3	0	0	1	$31/32$	$15/128$	$-17/128$	$5/64$	$525/32$
x_2	0	1	0	$39/40$	$7/160$	$7/160$	$-3/80$	$161/8$
x_1	1	0	0	$-19/40$	$-19/160$	$13/160$	$-1/80$	$75/8$
-Z	0	0	0	$-231/16$	$-1059/320$	$-39/64$	$-33/160$	$-39093/16$

- L'algorithme s'arrête : il n'y a plus de coefficients strictement positifs dans la dernière ligne (-Z)

- Conclusion. Le programme optimal est :

$x_1 = 9,38$ décalitres de bières blondes fabriquée

$x_2 = 20,13$ décalitres de bières brunes fabriquée

$x_3 = 16,41$ décalitres de bières spéciales fabriquée

$x_4 = 0$ décalitre de bières extra fabriquée

Pour une marge maximale : $Z = 2443,31$ euros

Remarques :

la première contrainte (maïs) la deuxième (houblon) et la troisième contrainte (malt) sont saturées (leurs variables d'écart, hors base, sont nulles)

POUR LE TD1

• Formalisation

- x1 : quantité en décalitres de bières blondes fabriquée
- x2 : quantité en décalitres de bières brunes fabriquée
- x3 : quantité en décalitres de bières spéciales fabriquée
- x4 : quantité en décalitres de bières extra fabriquée

Forme canonique

$$\begin{cases} \text{maïs} & 2,5x_1 + 7,5x_2 + 4x_3 + 10x_4 \leq 240 \\ \text{houblon} & \Rightarrow 25x_1 + 25x_2 + 16x_3 + 28x_4 \leq 1000 \\ \text{malt} & 17,5x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 15x_4 \leq 595 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Forme standard : j'introduis 3 variables d'écart

$$\begin{cases} \text{maïs} & 2,5x_1 + 7,5x_2 + 4x_3 + 10x_4 + e_1 = 240 \\ \text{houblon} & \Rightarrow 25x_1 + 25x_2 + 16x_3 + 28x_4 + e_2 = 1000 \\ \text{malt} & 17,5x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 15x_4 + e_3 = 595 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, e_2 \text{ et } e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Afin de maximiser une marge : $Z = 39x_1 + 69x_2 + 42x_3 + 75x_4$

• Algorithme du simplexe

Etape 1 : Tableau initial (Tableau 1)

	Base	x1	x2	x3	x4	e1	e2	e3	Résultat	Rapport
L1	e1	2,5	7,5	4	10	1	0	0	240	24
L2	e2	25	25	16	28	0	1	0	1000	35,7
L3	e3	17,5	10	14	15	0	0	1	595	39,7
L4	-Z	39	69	42	75	0	0	0	0	



Etape 2 : Tableau 2

Variable entrante (plus grand coefficient strictement positif dans la dernière ligne – Z) : x_4

Variable sortante (plus petit rapport positif : Résultat/coef de la variable entrante) : e_1

Pivot : 10 ; Ligne Pivot : L1

$$L1 \leftarrow 0,1 * L1 ; L2 \leftarrow -2,8 * L1 + L2 ; L3 \leftarrow -1,5 * L1 + L3 ; L4 \leftarrow -7,5 * L1 + L4$$

Base	x1	x2	x3	x4	e1	e2	e3	Résultat	Rapport
x_4	0,25	0,75	0,4	1	0,1	0	0	24	$24/0,25=96$
e_2	18	4	4,8	0	-2,8	1	0	328	$328/18=18,22$
e_3	13,75	-1,25	8	0	-1,5	0	1	235	$235/13,75=17,09$
-Z	20,25	12,75	12	0	-7,5	0	0	-1800	

$Z = 1800$

Etape 3 : Tableau 3

Variable entrante (plus grand coefficient strictement positif dans la dernière ligne – Z) : x_1

Variable sortante (plus petit rapport positif : Résultat/coef de la variable entrante) : e_3

Pivot : 13,75 ; Ligne Pivot : L3

Base	x1	x2	x3	x4	e1	e2	e3	Résultat	Rapport
x_4	0	$17/22$	$14/55$	1	$7/55$	0	$-1/55$	$217/11$	$25,53$
e_2	0	$62/11$	$-312/55$	0	$-46/55$	1	$-72/55$	$224/11$	$3,61$
x_1	1	$-1/11$	$32/55$	0	$-6/55$	0	$4/55$	$188/11$	-188
-Z	0	$321/22$	$12/55$	0	$-291/55$	0	$-81/55$	$-23607/11$	

$Z = 23607/11$

Etape 4 : Tableau 4

Variable entrante (plus grand coefficient strictement positif dans la dernière ligne – Z) : x_2

Variable sortante (plus petit rapport positif : Résultat/coef de la variable entrante) : e_2

Pivot : $62/11$; Ligne Pivot : L2

Base	x1	x2	x3	x4	e1	e2	e3	Résultat	Rapport
x_4	0	0	$32/31$	1	$15/62$	$-17/124$	$5/31$	$525/31$	16,41
x_2	0	1	$-156/155$	0	$-23/155$	$11/62$	$-36/155$	$112/31$	-3,59
x_1	1	0	$76/155$	0	$-19/155$	$1/62$	$8/155$	$540/31$	35,53
-Z	0	0	$462/31$	0	$-969/310$	$-321/124$	$297/155$	$-68163/31$	

$Z = 68163/11$



Etape 5 : Tableau 5

Variable entrante (plus grand coefficient strictement positif dans la dernière ligne – Z) : x_3

Variable sortante (plus petit rapport positif : Résultat/coef de la variable entrante) : x_4

Pivot : $32/31$; Ligne Pivot : L1

Base	x1	x2	x3	x4	e1	e2	e3	Résultat
x_3	0	0	1	$31/32$	$15/64$	$17/128$	$5/32$	$525/32$
x_2	0	1	0	$39/40$	$7/80$	$7/160$	$-3/40$	$161/8$
x_1	1	0	0	$-19/40$	$-19/80$	$13/160$	$-1/40$	$75/8$
-Z	0	0	0	$-231/16$	$-1059/160$	$-39/64$	$-33/80$	$-39093/16$

- L'algorithme s'arrête : il n'y a plus de coefficients strictement positifs dans la dernière ligne (-Z)

- Conclusion. Le programme optimal est :

$x_1 = 9,38$ décalitres de bières blondes fabriquée

$x_2 = 20,13$ décalitres de bières brunes fabriquée

$x_3 = 16,41$ décalitres de bières spéciales fabriquée

$x_4 = 0$ décalitre de bières extra fabriquée

Pour une marge maximale : $Z = 2443,31$ euros

Remarques :

la première contrainte (maïs) la deuxième (houblon) et la troisième contrainte (malt) sont saturées (leurs variables d'écart, hors base, sont nulles)