

M12-05 Mathématiques

Chapitre 5 : Variations d'une fonction

adelaide.olivier@u-psud.fr

B409

Plan du Chapitre 5

5.1 Variations

5.2 Dérivée

5.3 Tableau de variations

5.4 Maximum et minimum

5.5 Résolution numérique d'équation

5.6 Calculs des coûts

Variations d'une fonction

Une entreprise produit et commercialise des disques-durs.



Combien doit-elle produire de disques ?

Pour +1 disques supplémentaires, quelle est la variation :

- du Coût Total ?
- du Bénéfice ?

Combien de disques faut-il fabriquer pour

- minimiser les coûts ?
- maximiser le bénéfice ?

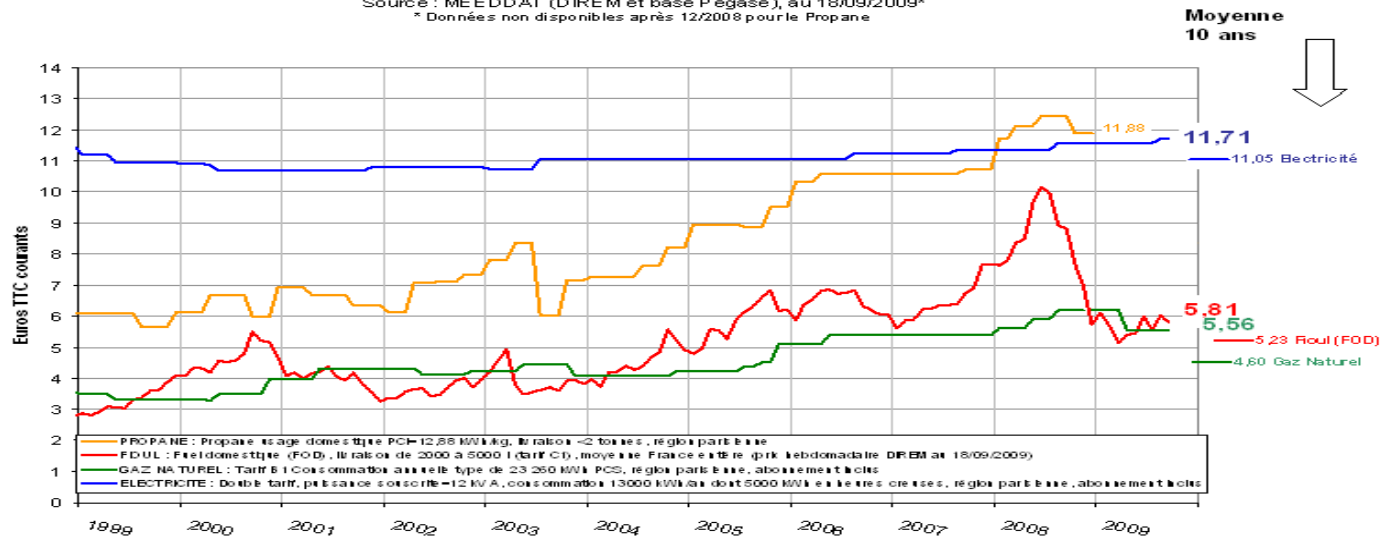
Variations d'une fonction

Evolution du prix des énergies 1999-2009

(Euros TTC courants pour 100 kWh PCI, tarifs usages domestiques)

Source : MEEDDAT (DIREM et base Pégase), au 18/09/2009*

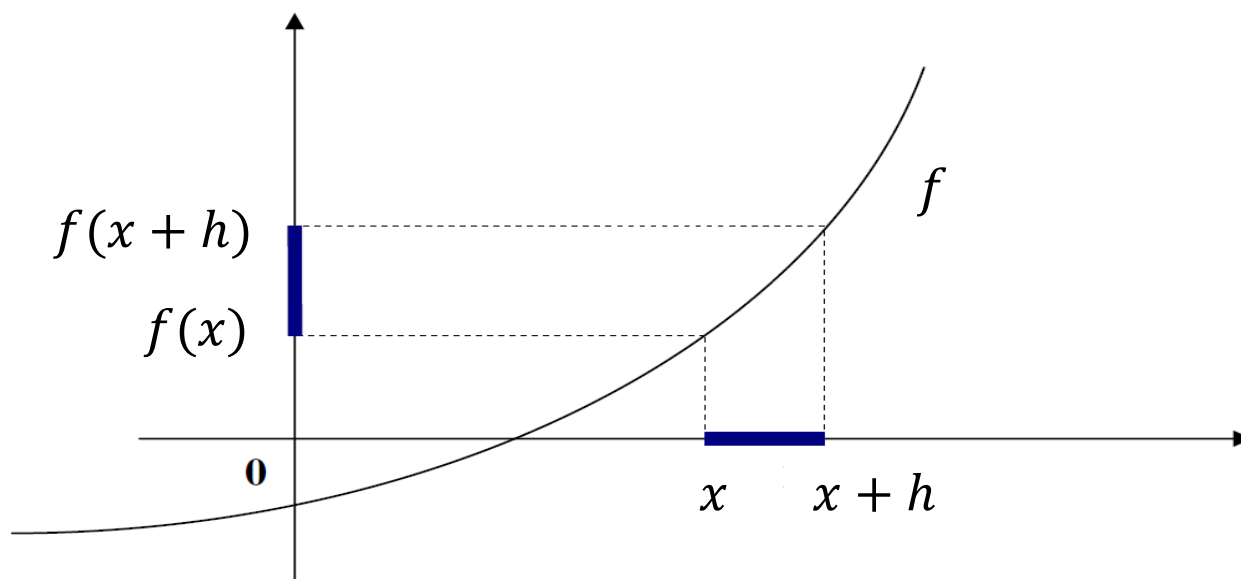
* Données non disponibles après 12/2008 pour le Propane



Déf 1 : On dit que

- f est croissante sur un intervalle I
si pour (x, y) de I tels que $x \geq y$ on a $f(x) \geq f(y)$
- f est décroissante sur un intervalle I
si pour (x, y) de I tels que $x \geq y$ on a $f(x) \leq f(y)$
- f est monotone sur un intervalle I
si elle est croissante sur I ou décroissante sur I

Taux de variation



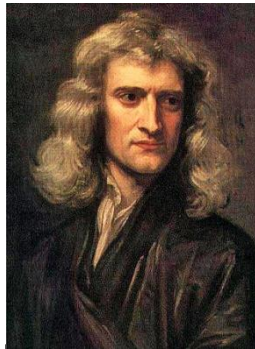
Déf 2 : On appelle « taux de variation » de f entre x et $x+h$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemple :

Augmentation des coûts lorsque l'on fabrique h unités en plus

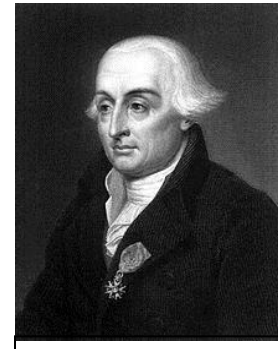
Dérivées à droite et à gauche



I. NEWTON
1642-1727



G.W. LEIBNIZ
1646-1716



J-L LAGRANGE
1736-1813

Déf 3: On dit que f admet **une dérivée à droite en x** si la limite ci-dessous existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Déf 4: On dit que f admet **une dérivée à gauche en x** si la limite ci-dessous existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - h)}{h}$$

Dérivée

Déf 5: On dit que f **est dérivable en x** si

- elle admet une dérivée à droite et à gauche de x ;
- les deux limites sont égales.

On note alors

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Déf 6: On dit que f **est dérivable** sur un intervalle I si elle est dérivable en **tout point de I** .

On définit alors « **la fonction dérivée** » sur I :

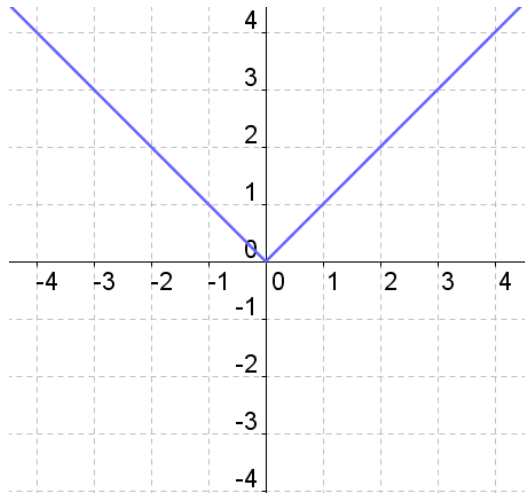
$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Dérivée de fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$
$ax + b$	a
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\exp(x) = e^x$	$\exp(x) = e^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Dérivée

Exemple : $x \mapsto |x|$



- si $x \geq 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

$x \mapsto |x|$ est admet une dérivée à droite en x

- si $x \leq 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x| - |x-h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x+x-h}{h} = -1$$

$x \mapsto |x|$ est admet une dérivée à gauche en x

Les limites **sont différentes** pour $x = 0$: $x \mapsto |x|$ **n'est pas dérivable** en 0 !

$x \mapsto |x|$ **est dérivable** sur $]0; +\infty[$

$x \mapsto |x|$ **est dérivable** sur $] -\infty; 0[$

Dérivée seconde

Déf 7: On appelle dérivée seconde de f , notée f'' , la dérivée de f' .

On définit alors « **la fonction dérivée seconde** » sur I :

$$f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f''(x) = \frac{df'}{dx}(x) = [f'(x)]'$$

Opérations sur les dérivées

Dérivée d'une constante :

$$f(x) = k, \quad f'(x) = 0$$

Exemple : $(3)' = 0$

Dérivée du produit par une constante :

$$[k \cdot f]' = k \cdot f'$$

Exemple : $(3x^2)' = 3 \cdot (x^2)' = 3 \cdot (2 \cdot x^{2-1})$

Dérivée de la somme de deux fonctions :

$$[f + g]' = f' + g'$$

Exemples : $(x^5 + 3)' = (x^5)' + (3)' = 5x^{5-1} + 0 = 5x^4$

$(\ln(x) + x^2)' = \frac{1}{x} + 2x$

Opérations sur les dérivées

Dérivée du produit de deux fonctions :

$$[f \times g]' = f' \times g + f \times g'$$

Exemple : $h(x) = x^2 \times e^x = f(x) \times g(x)$ où je pose :

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$$

D'après le cours :

$$h' = (f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

On obtient alors :

$$h'(x) = 2x \times \exp(x) + x^2 \times \exp(x)$$

Opérations sur les dérivées

Dérivée du rapport de deux fonctions :

$$\left[\frac{f}{g} \right]' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

Exemple : $h(x) = \ln(x) / x = f(x)/g(x)$ où je pose :

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = 1/x$$

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$$

D'après le cours :

$$h' = (f/g)' = (f' \times g - f \times g')/g^2$$

On obtient alors :

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Opérations sur les dérivées

Dérivé de la composée de deux fonctions :

$$[f(g)]' = g' \times f'(g)$$

Ex : $h(x) = (3x + 1)^7 = g(x)^7 = f(g(x))$ où je pose :

$$f(y) = y^7 \Rightarrow f'(y) = 7y^6$$

$$g(x) = 3x + 1 \Rightarrow g'(x) = 3$$

En appliquant la formule du cours :

$$h' = g' \times f'(g) = g' \times (7g^6)$$

On obtient alors :

$$h'(x) = 3 \times 7 \times (3x + 1)^6$$

Opérations sur les dérivées

Ex : $h(x) = \ln(2x + 3) = \ln(g(x)) = f(g(x))$

$$f(y) = \ln(y) \Rightarrow f'(y) = \frac{1}{y}$$

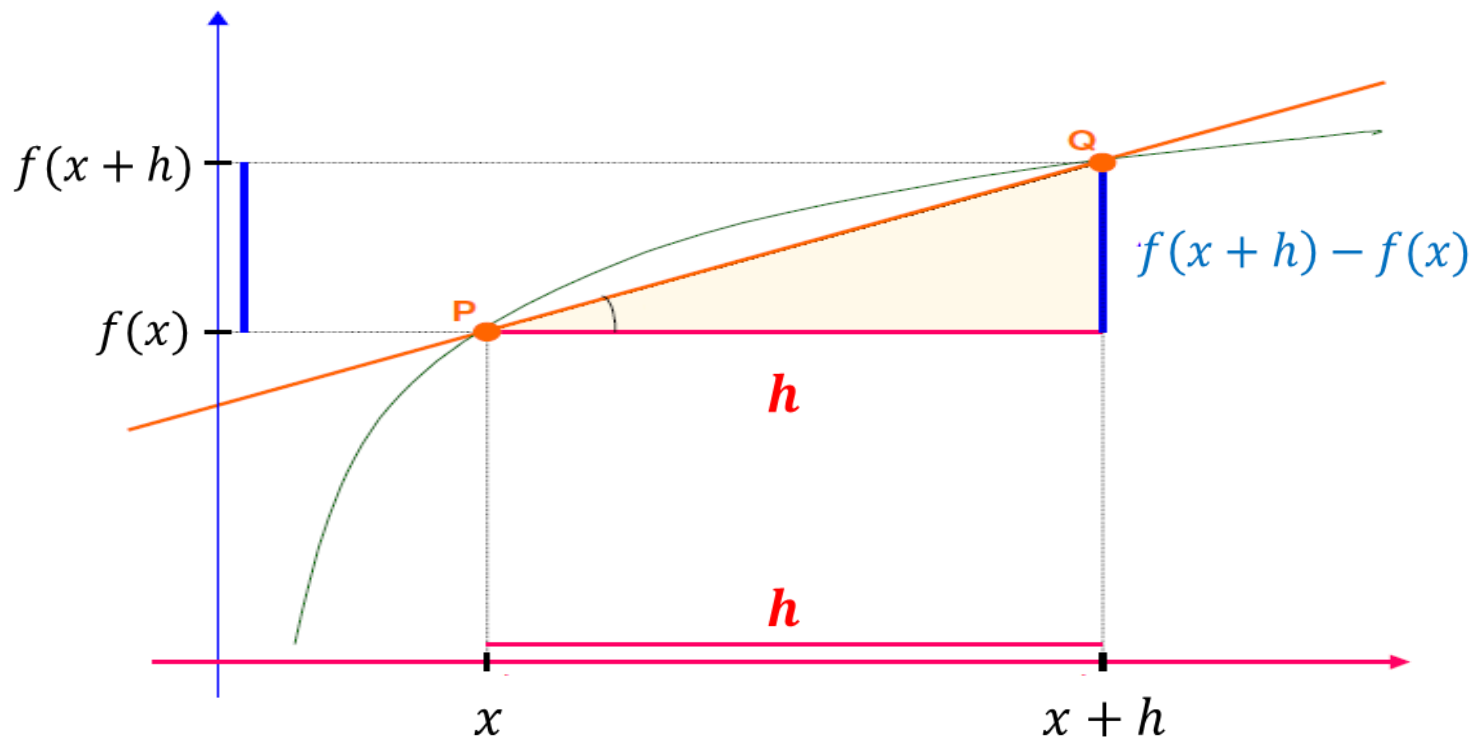
$$g(x) = 2x + 3 \Rightarrow g'(x) = 2$$

donc $h' = g' \times f'(g) = g' \times \frac{1}{g}$

On a alors : $h'(x) = \boxed{\frac{2}{2x + 3}}$

A retenir ! « **Dérivée logarithmique** » : $(\ln(g))' = \frac{g'}{g}$

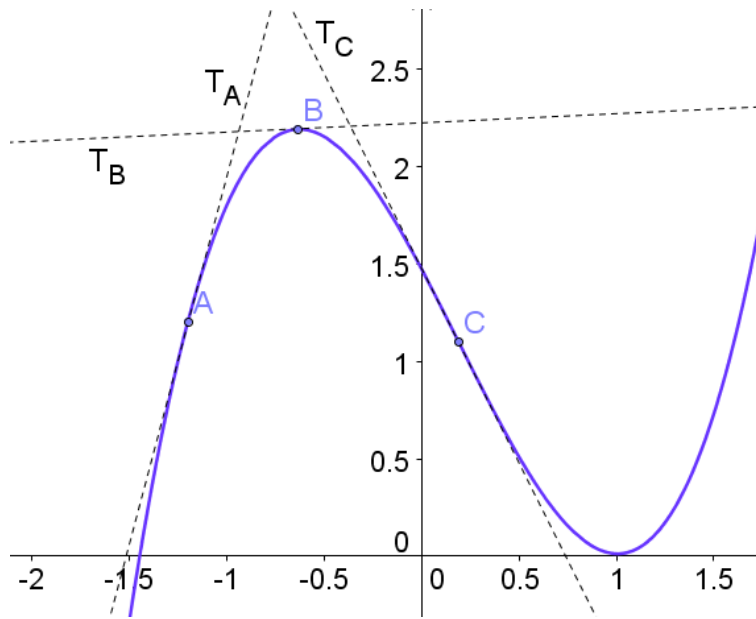
Interprétation graphique



Quand $h \rightarrow 0$ la droite (PQ) tend vers la **tangente à la courbe** au point $P = (x, f(x))$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{pente de la tangente à la courbe au point } (x, f(x))$$

Sens de variations



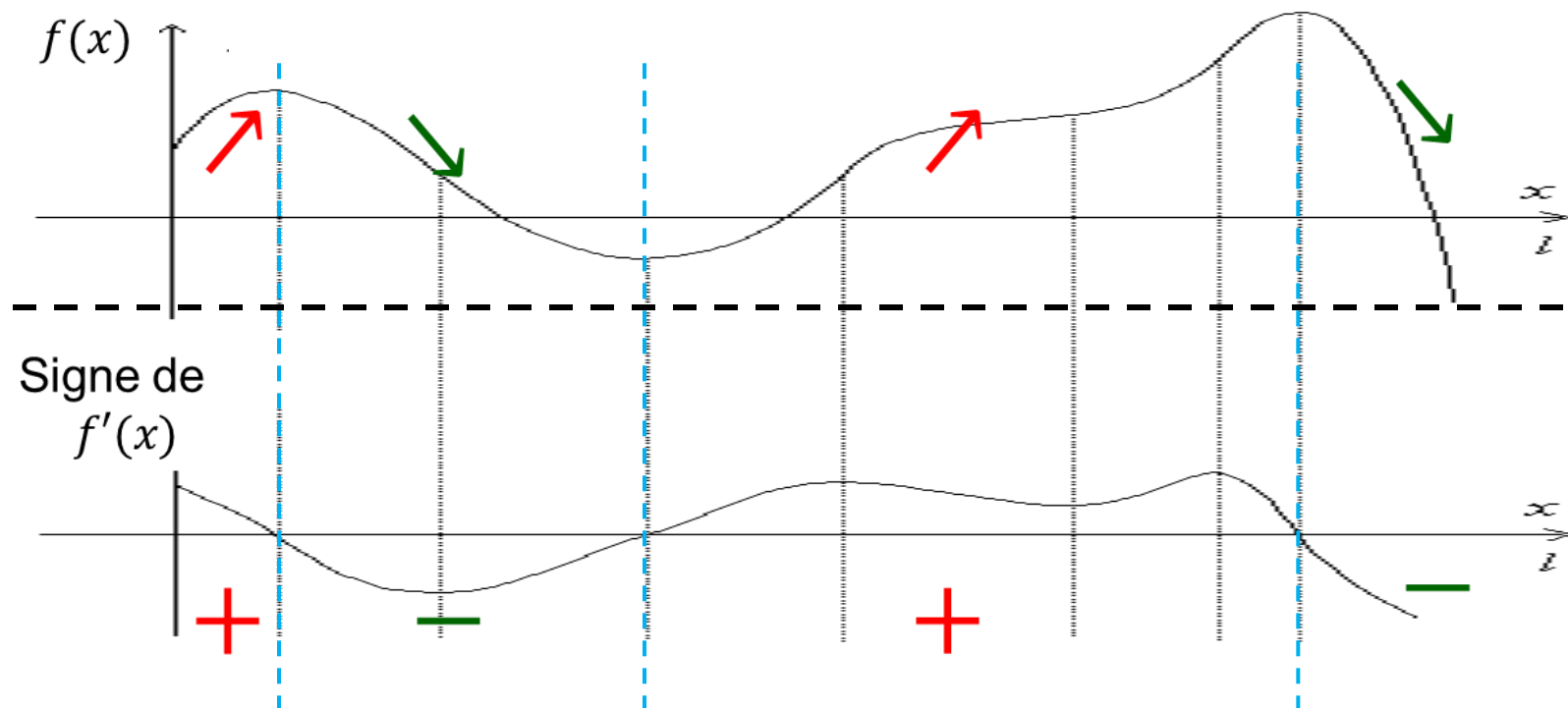
Equation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Principe de LAGRANGE(1736-1813) :

- Si $f'(x) \geq 0$ alors f est **croissante**
- Si $f'(x) \leq 0$ alors f est **décroissante**
- Si $f'(x) = 0$ alors f est **constante**

Tableau de variations



Le signe de la dérivée f' nous permet
d'étudier la monotonie de la fonction f

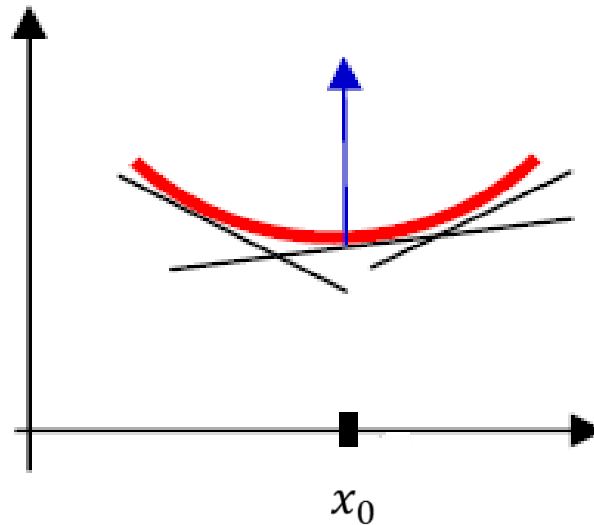
Méthodologie

1. Déterminer le domaine de définition de f et domaine d'étude
2. Calculer la dérivée f'
3. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$
4. Etudier le signe de f'
5. Dresser le tableau de variations

x	domaine d'étude de f	
signe de $f'(x)$	+	si f' est positive
	0	si f' est nulle
	-	si f' est négative
monotonie de $f(x)$	↗	si f' est positive
	↘	si f' est négative

6. Identifier les extrema

Minimum local

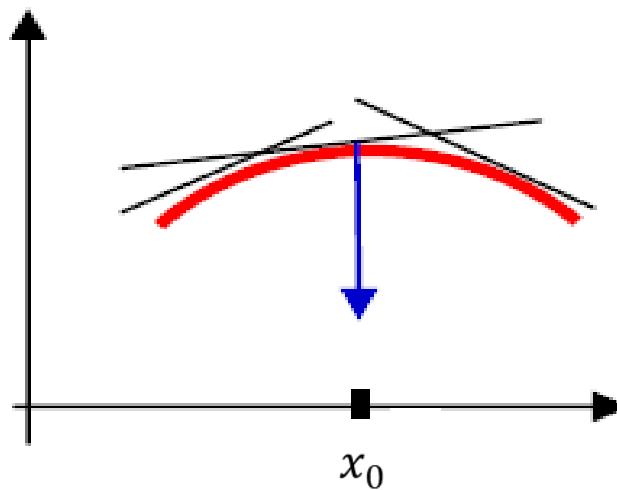


Dérivée et minimum local

Si $f'(x_0) = 0$ et $\begin{cases} f'(x_0 -) < 0 \\ f'(x_0 +) > 0 \end{cases}$ « f' change de signe »

alors x_0 est un minimum local

Maximum local

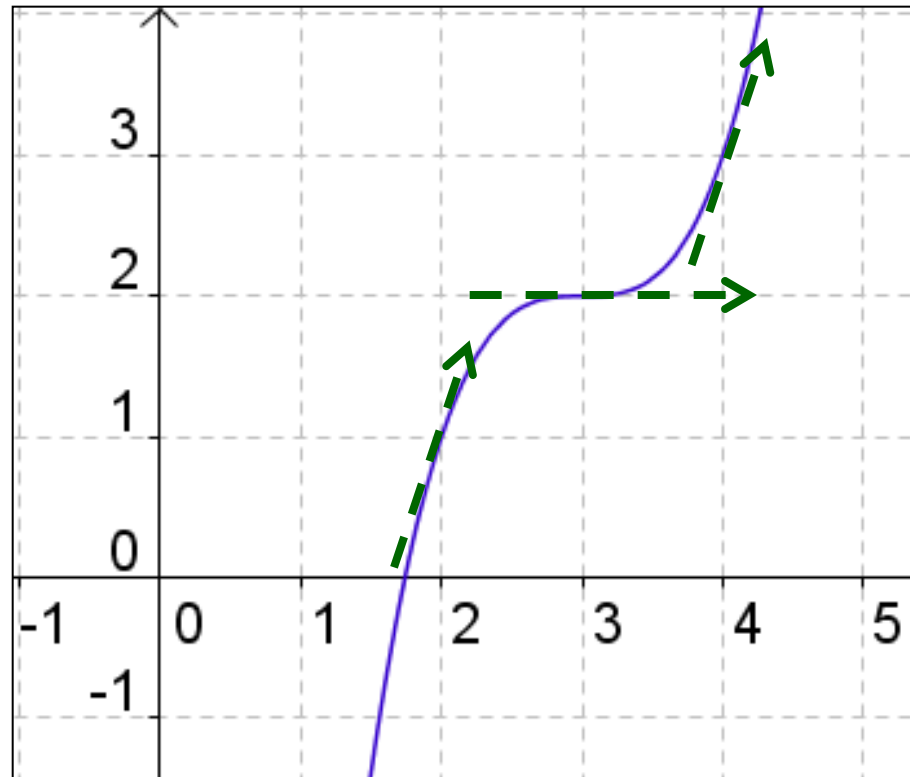


Dérivée et maximum local

Si $f'(x_0) = 0$ et $\begin{cases} f'(x_0 -) > 0 \\ f'(x_0 +) < 0 \end{cases}$ « f' change de signe »

alors x_0 est un maximum local

Point d'inflexion



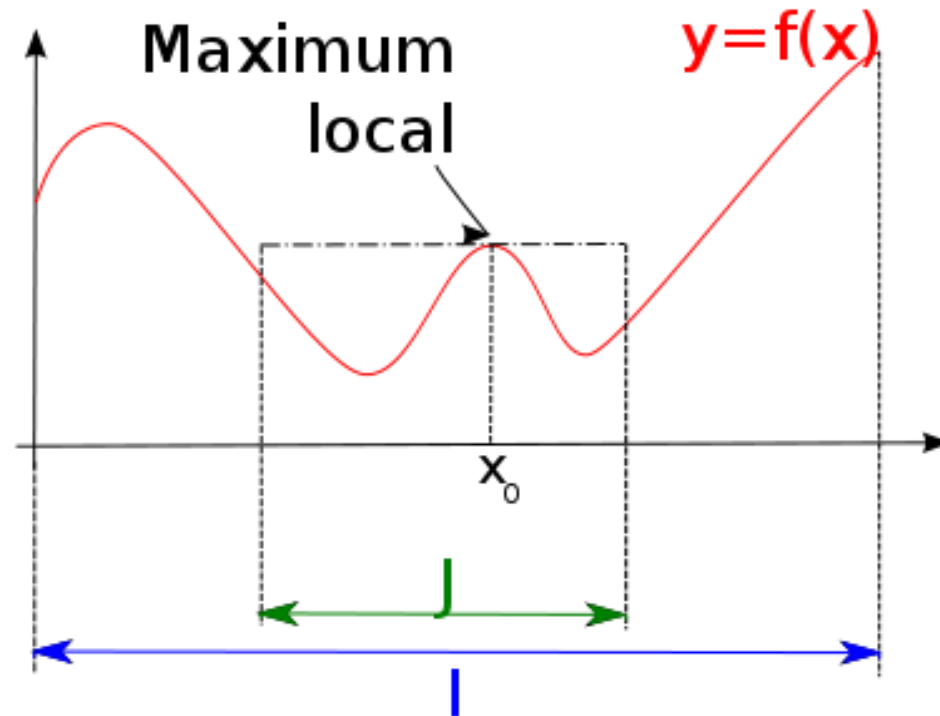
Dérivée et point d'inflexion

Si $f'(x_0)=0$

et $f'(x_0 -) \times f'(x_0 +) > 0$ « f' ne change pas de signe »

alors x_0 est un point d'inflexion

Extremum local, extremum global

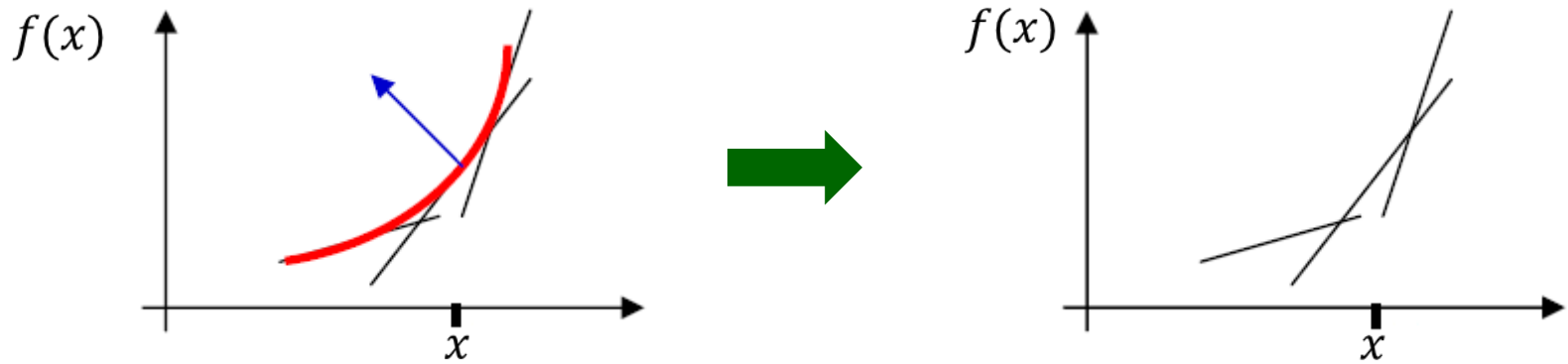


x_0 est un maximum sur l'intervalle J , mais pas sur I :

- c'est un « maximum local » de f sur J ;
- mais pas « un maximum global » de f sur I

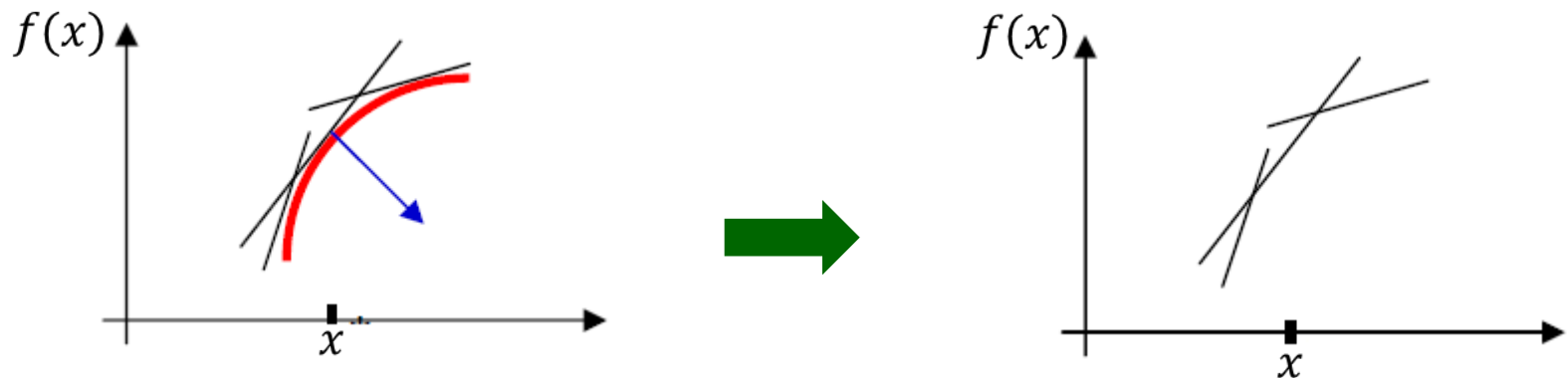
Convexité

Convexité :



Si $f'' \geq 0$ alors f' est croissante, f est convexe

Concavité :



Si $f'' \leq 0$ alors f' est décroissante, f est concave

Résolution numérique d'équation

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$

- Soit c'est une **équation usuelle** (Chapitre 4)
- Soit on utilise **les propriétés d'équivalences** pour se ramener à une équation usuelle (Chapitre 4)
- Soit on **résout l'équation numériquement**
 - 1) **Tableau de variations**
 - 2) **Théorème des valeurs intermédiaires** pour prouver l'existence d'une solution
 - 3) Utilisation de **la calculatrice**

Etape 1 : Tableau de variations

On cherche à résoudre : $f(x) = x - 3 \ln(x) = 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x} = \frac{x - 3}{x}$$

x	1		3
signe de x	+	+	+
signe de $x - 3$	−	−	−
Signe de f'	−	−	−
$f(x)$	1 ↘	↘	↘ −0,3

$\begin{cases} f(1) = 1 > 0 \\ f(3) = -0,3 < 0 \end{cases}$

et f est continue, monotone

Donc il existe $x_0 \in]1; 3[$ tel que $f(x_0) = 0$

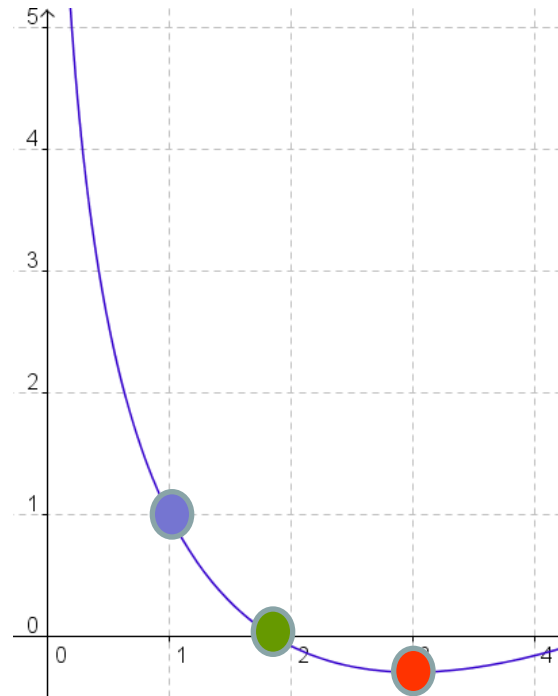
Etape 2 : Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires

Si $f(a) \times f(b) < 0$ et f continue et monotone sur $[a; b]$,

alors il existe $x_0 \in]a; b[$ tel que $f(x_0) = 0$

Ex :

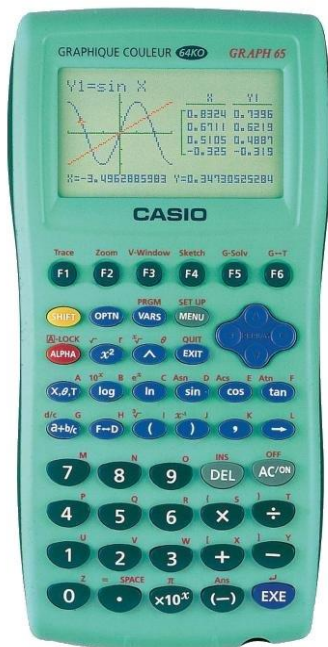


$$\begin{cases} f(1) = 1 > 0 \\ f(3) = -0,3 < 0 \end{cases}$$

f continue, monotone

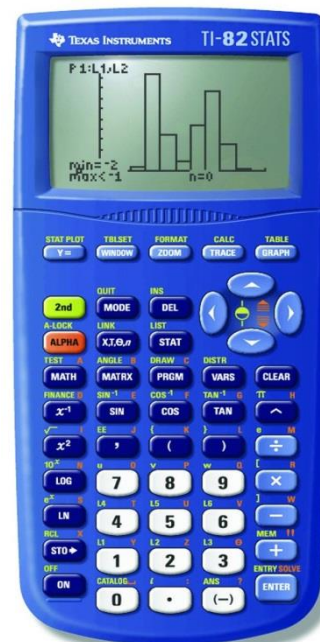
Etape 3 : Utilisation de la calculatrice

On résout alors : $f(x) = x - 3 \ln(x) = 0$
avec le solveur de votre calculatrice (voir TD)



Eq : $X - 3 \ln(X) = 0$
X=1,85718386

Lower=1
Upper=10



SOLVEUR EQUATION

eqn : $0 = Y_1$

X=1,85718386

bornes $\{-1^{E99}, 1^{E99}\}$

diff=0

Fonction de Coût

- $CT(x) = \text{Coût Total}$ de production de x unités
 $= CV(x) + CF$

où $CV(x) = \text{Coût variable}$ et $CF = \text{Coût fixe}$

CT est une fonction positive croissante

- $CT'(x) = \text{Coût marginal}$
 $=$ coût supplémentaire pour fabriquer une unité
 $CT(x + 1) - CT(x) \simeq +1 \cdot CT'(x)$

- $CM(x) = \text{Coût Moyen}$ de production de x unités
 $= \frac{CT(x)}{x}$

Economie d'échelle : $x \mapsto CM(x)$ décroissante

Chiffre d'affaires, Marge

$$\text{Ventes} = v$$

$$\text{Production} = x$$

- $CA(v) = \text{Chiffre d'Affaires}$ pour v unités vendues
 $= v \cdot P(v)$

où $P(v) = \text{le prix unitaire}$ de vente pour v unités

- $MCV(v, x) = \text{Marge sur Coût Variable}$
 $= \text{Chiffre d'Affaires} - \text{Coût variable}$
 $= CA(v) - CV(x)$

Bénéfice

$$\begin{aligned} B(v, x) &= \text{Bénéfice ou Profit} \\ &\text{pour } v \text{ unités vendues et } x \text{ unités produites} \\ &= CA(v) - CT(x) \end{aligned}$$

- Quand l'entreprise produit à la demande : $v = x$
- Quand l'entreprise fait des stocks :
 - $x = \text{stock}$
 - $v = \text{ventes} = \min(\text{demande} ; \text{stock})$

Bénéfice

- $B(v, x) = \text{Bénéfice}$ ou **Profit**
pour v unités **vendues** et x unités **produites**
$$= CA(v) - CT(x)$$
$$= CA(v) - CV(x) - CF = MCV(v, x) - CF$$
- On appelle seuil de rentabilité,
la quantité vendue v_{SR} telle que :

$$B(v_{SR}, x) = 0 \quad \Leftrightarrow CA(v_{SR}) = CT(x)$$

$$\Leftrightarrow MCV(v_{SR}, x) = CF$$

Le **CA** dépasse les **Coûts Totaux**
si les **Ventes** dépassent le **Seuil de Rentabilité** !