

SAVOIRS

PHYSIQUE

ACTUELS

HYDRODYNAMIQUE PHYSIQUE

3^e ÉDITION



ÉTIENNE GUYON,
JEAN-PIERRE HULIN
ET LUC PETIT

CNRS ÉDITIONS

EDP SCIENCES

Illustration de couverture : Visualisation de filets de colorant dans un filament de tourbillon (courtoisie P. Petitjeans).

Imprimé en France.

© **2012, EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A

et

CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

ISBN EDP Sciences 978-2-7598-0561-7

ISBN CNRS ÉDITIONS 978-2-271-07601-4

Préface

La mécanique des fluides a une longue histoire, mais elle reste un sujet jeune avec des découvertes récentes et de nombreuses applications qui touchent à la vie courante. Cette histoire est un défilé de grands noms de la Science : au XVIII^e siècle les Bernoulli, Euler, Lagrange ; au XIX^e, Cauchy, Navier, Stokes, Helmholtz, Rayleigh, Reynolds, et Lamb ; au XX^e Couette, Prandtl, G.I. Taylor et Kolmogorov entre autres.

Dans l'environnement naturel, nous pouvons nous fier aux prévisions météorologiques à cinq jours et aux alertes sur les tornades ; la réussite de longue date du calcul des marées s'étend aujourd'hui à la prédiction des tsunamis ; la connaissance des circulations océaniques et atmosphériques est appliquée à des problèmes tels que la pollution, le trou d'ozone et les changements climatiques. À l'intérieur de la Terre, la mécanique des fluides joue un rôle crucial dans la convection du manteau, les volcans et leurs nuages de poussière, les gisements pétrolifères ainsi que pour l'évaluation de la possibilité de séquestrer le CO₂.

La mécanique des fluides joue aussi un rôle clé dans nombre d'industries : la conception des avions est partie d'idées simples au début du XX^e siècle pour aboutir à la fin du siècle au développement d'ailerons à faible traînée équipés d'ailerons et de fuselages améliorés. Dans le même temps, le bruit des réacteurs a été réduit de façon spectaculaire grâce au principe du double flux : une turbine concentrique de grand diamètre crée un écoulement froid masquant le jet rapide central. Des fluides simples ou complexes sont utilisés pour produire du verre et d'autres matériaux, ainsi que dans le génie chimique et les industries agroalimentaires.

Récemment, les chercheurs en mécanique des fluides se sont intéressés à la microfluidique qui permet de multiples analyses simultanées d'un petit échantillon biologique, ainsi qu'à l'impression à jet d'encre où le mouillage intervient sur des distances très petites, à la conception de bâtiments à haute efficacité énergétique impliquant la convection naturelle et au contrôle des instabilités et de la turbulence.

Une telle profusion d'idées et d'applications pose un défi quant à l'enseignement du sujet. Certaines notions doivent être réservées à des cours spécialisés de Masters. Mais l'enseignement de base doit aider les étudiants à progresser vers des sujets plus avancés, présents et futurs.

Les auteurs de ce livre ont adopté, à mon sens, l'approche et le style qui intéresseront et formeront les étudiants, les préparant ainsi pour le futur. Je crains que certaines des autres approches risquent fort d'échouer de ce point de vue. Ainsi, certains cours de formation d'ingénieurs dépendent trop fortement des simulations numériques, ce qui n'est pas sans risque dans le cas d'applications nouvelles. Les enseignements de caractère plus mathématique se heurtent souvent à des difficultés considérables en cherchant à prouver si les équations gouvernant les systèmes étudiés ont ou n'ont pas de solution, même dans le cas apparemment simple de l'équation de Navier Stokes (un des problèmes non résolus du prix Clay). L'approche de ce livre est ancrée dans les expériences et la réalité concrète. La structure de la présentation choisie guidera les lecteurs vers une vision en profondeur des sujets abordés.

Le domaine de la mécanique des fluides a, à mon avis, largement bénéficié au cours de ces trente dernières années des contributions des physiciens français tels que les auteurs de ce livre : ils ont apporté une approche renouvelée du sujet, des techniques expérimentales nouvelles, un sens des aspects pratiques et une ouverture vers les disciplines scientifiques voisines. Ce livre est un témoignage de cette dynamique.

John Hinch
Professeur à l'Université de Cambridge
Fellow de Trinity College

Table des matières

Introduction	xiii
1 Physique des fluides	1
1.1 L'état liquide	1
1.1.1 Les différents états de la matière : systèmes modèles et milieux réels	2
1.1.2 La limite solide-liquide : une frontière parfois floue . . .	7
1.2 Coefficients macroscopiques de transport	8
1.2.1 Conductivité thermique	9
1.2.2 Diffusion de masse	17
1.3 Modèles microscopiques des coefficients de transport	19
1.3.1 La marche au hasard	19
1.3.2 Coefficients de transport des gaz parfaits	22
1.3.3 Phénomènes de transport diffusif dans les liquides . . .	27
1.4 Effets de surface et tension superficielle	29
1.4.1 La tension superficielle	29
1.4.2 Forces de pression associées à la tension superficielle . .	32
1.4.3 Étalement de gouttes sur une surface – notion de mouillage	34
1.4.4 Influence de la gravité	36
1.4.5 Quelques méthodes de mesure de la tension superficielle	41
1.4.6 Instabilité de Rayleigh-Taylor	43
1.5 Diffusion de rayonnements dans les fluides	46
1.5.1 Quelques sondes de la structure des liquides	46
1.5.2 Diffusion élastique et inélastique	48
1.5.3 La diffusion élastique et quasi élastique de la lumière : un outil d'étude de la structure et du transport diffusif dans les liquides	52
1.5.4 Diffusion inélastique de la lumière dans les liquides . . .	55
1.6 Coefficients de transport de fluides	59

2	Transport de la quantité de mouvement et régimes d'écoulement	61
2.1	Transports diffusif et convectif de quantité de mouvement dans les écoulements	62
2.1.1	Diffusion et convection de la quantité de mouvement : deux expériences illustratives	62
2.1.2	Transport de quantité de mouvement dans un écoulement de cisaillement – introduction de la viscosité	64
2.2	Modèles microscopiques de la viscosité	68
2.2.1	Viscosité des gaz	68
2.2.2	Viscosité des liquides	70
2.2.3	Simulation numérique des trajectoires de molécules dans un écoulement	73
2.3	Comparaison entre les mécanismes de diffusion et de convection	74
2.3.1	Le nombre de Reynolds	74
2.3.2	Transports convectif et diffusif de masse ou d'énergie thermique	76
2.4	Description de différents régimes d'écoulement	79
2.4.1	Écoulements dans un tube cylindrique : l'expérience de Reynolds	80
2.4.2	Écoulement derrière un cylindre	80
2.4.3	Écoulement derrière une sphère	83
3	Cinématique des fluides	85
3.1	Description du mouvement d'un fluide	85
3.1.1	Échelles de longueur et hypothèse de continuité	85
3.1.2	Descriptions eulérienne et lagrangienne du mouvement d'un fluide	86
3.1.3	Accélération d'une particule de fluide	87
3.1.4	Lignes et tubes de courant, trajectoires, lignes d'émission	89
3.2	Déformations dans les écoulements	90
3.2.1	Décomposition des variations du champ de vitesse au voisinage d'un point	91
3.2.2	Composante symétrique du tenseur des taux de déformation : déformation pure	92
3.2.3	Composante antisymétrique du tenseur des taux de déformation : rotation pure	96
3.2.4	Application	98
3.2.5	Cas des grandes déformations	100
3.3	Conservation de la masse dans un fluide en écoulement	101
3.3.1	Équation de conservation de la masse	102
3.3.2	Condition d'incompressibilité d'un fluide	103
3.3.3	Écoulements rotationnels ; écoulements potentiels	105

- 3.4 Fonction de courant 106
 - 3.4.1 Introduction et signification de la fonction de courant 106
 - 3.4.2 Fonctions de courant d'écoulements plans 108
 - 3.4.3 Fonctions de courant des écoulements axisymétriques . . 111
- 3.5 Visualisations et mesures de vitesse et de gradient
 - de vitesse dans les écoulements 113
 - 3.5.1 Visualisation des écoulements 113
 - 3.5.2 Mesures de concentrations 117
 - 3.5.3 Quelques méthodes de mesure de la vitesse locale d'un fluide 118
 - 3.5.4 Mesures de champ de vitesse d'écoulements et de gradients de vitesse 121
- 4 Dynamique des fluides visqueux, rhéologie, écoulements parallèles 125**
 - 4.1 Forces de surface 125
 - 4.1.1 Expression générale des forces de surface. Contraintes dans un fluide 125
 - 4.1.2 Caractéristiques du tenseur des contraintes de viscosité 128
 - 4.1.3 Tenseur des contraintes de viscosité pour un fluide newtonien 130
 - 4.2 Équation du mouvement d'un fluide 132
 - 4.2.1 Équation de la dynamique d'un fluide dans le cas général 132
 - 4.2.2 Équation de Navier-Stokes du mouvement d'un fluide newtonien 134
 - 4.2.3 Équation d'Euler pour un fluide parfait 135
 - 4.2.4 Forme adimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes 135
 - 4.3 Conditions aux limites dans les écoulements fluides 136
 - 4.3.1 Conditions aux limites à la surface d'un corps solide . . 136
 - 4.3.2 Conditions aux limites entre deux fluides – effet de la tension superficielle 138
 - 4.4 Les fluides non newtoniens 140
 - 4.4.1 Mesures des caractéristiques rhéologiques 140
 - 4.4.2 Fluides non newtoniens indépendants du temps 142
 - 4.4.3 Différents types de fluides dépendant du temps 147
 - 4.4.4 Élasticité et viscosité complexes des fluides viscoélastiques 150
 - 4.4.5 Anisotropie des contraintes normales 155
 - 4.4.6 Viscosité élongationnelle 157
 - 4.4.7 Résumé des principaux types de fluides non Newtoniens 158
 - 4.5 Écoulements unidirectionnels de fluides visqueux newtoniens . . 159
 - 4.5.1 Équation de Navier-Stokes pour les écoulements unidirectionnels 159

4.5.2	Écoulement de Couette entre deux plans parallèles . . .	161
4.5.3	Écoulements de Poiseuille	162
4.5.4	Écoulements oscillants dans un fluide visqueux	167
4.5.5	Écoulement parallèle créé par une variation horizontale de densité	173
4.5.6	Écoulement de Couette cylindrique	175
4.6	Écoulements unidirectionnels simples de fluides non newtoniens indépendants du temps	179
4.6.1	Écoulement stationnaire de Couette plan	179
4.6.2	Écoulement unidirectionnel avec des parois fixes	180
4.6.3	Profils de vitesse pour des lois rhéologiques simples	182
4.6.4	Écoulement d'un fluide viscoélastique près d'un plan oscillant	186
5	Équations de bilan	191
5.1	Équation de bilan de masse	191
5.2	Bilan de quantité de mouvement	192
5.2.1	Expression locale	192
5.2.2	Forme intégrale de l'équation de bilan de quantité de mouvement	193
5.3	Bilan d'énergie cinétique – équation de Bernoulli	198
5.3.1	Équation de bilan d'énergie cinétique dans un fluide incompressible en écoulement avec ou sans viscosité . . .	198
5.3.2	Relation de Bernoulli	201
5.3.3	Applications de l'équation de Bernoulli	204
5.4	Applications des équations de bilan de quantité de mouvement et d'énergie	210
5.4.1	Jet incident sur un plan	210
5.4.2	Jet sortant d'un réservoir par un orifice	212
5.4.3	Force sur les parois d'une conduite de révolution de section variable	215
5.4.4	Couches liquides d'épaisseur variable – ressaut hydraulique	216
6	Écoulements potentiels	225
6.1	Introduction	225
6.2	Définitions, propriétés et exemples d'écoulements potentiels . . .	227
6.2.1	Caractéristiques et exemples de potentiels de vitesse	227
6.2.2	Unicité du potentiel des vitesses	228
6.2.3	Potentiels des vitesses des écoulements élémentaires et combinaison des fonctions potentielles	231
6.2.4	Exemple d'écoulements potentiels simples	237
6.3	Forces sur un obstacle dans un écoulement potentiel	246
6.3.1	Cas bidimensionnel	247

6.3.2	Effets de masse ajoutée pour un corps tridimensionnel accéléré dans un fluide parfait	251
6.4	Ondes linéaires à la surface d'un fluide parfait	256
6.4.1	Houle, risée et déferlantes	256
6.4.2	Trajectoires des particules de fluide lors du passage de l'onde	260
6.4.3	Ondes solitaires	261
6.4.4	Un autre écoulement potentiel avec interface : la bulle de Taylor	263
6.5	Analogie électrique des écoulements potentiels bidimensionnels	264
6.5.1	Analogie directe	265
6.5.2	Analogie inverse	265
6.6	Potentiel complexe des vitesses	267
6.6.1	Définition du potentiel complexe	267
6.6.2	Potentiel complexe de quelques écoulements	268
6.6.3	La transformation conforme	271
7	Vorticité, dynamique du tourbillon, écoulements en rotation	283
7.1	La vorticité : définition, exemple des filaments de tourbillons rectilignes	284
7.1.1	Notion de vorticité	284
7.1.2	Un modèle simple de tourbillon rectiligne : le vortex de Rankine	285
7.1.3	Analogies avec l'électromagnétisme	290
7.2	Dynamique de la circulation de la vitesse d'écoulement	295
7.2.1	Le théorème de Kelvin : conservation de la circulation .	295
7.2.2	Sources de circulation	299
7.3	Dynamique de la vorticité	306
7.3.1	Équation de transport de la vorticité et conséquences .	306
7.3.2	Équilibre étirement-diffusion	311
7.4	Exemples de répartition de vorticité concentrée sur des lignes singulières	313
7.4.1	Vorticité concentrée sur des lignes	313
7.4.2	Dynamique d'un ensemble de lignes de vorticité rectilignes parallèles	314
7.4.3	Anneaux tourbillons	322
7.5	Tourbillons, vorticité et locomotion dans l'air et dans l'eau . . .	326
7.5.1	Forces de poussée et émission de tourbillons	326
7.5.2	Portance et sustentation	328
7.5.3	Portance et propulsion	330
7.6	Fluides en rotation	332
7.6.1	Mouvement d'un fluide dans un repère en rotation . . .	333
7.6.2	Écoulements à petit nombre de Rossby	339

7.6.3	Ondes dans les fluides en rotation	345
7.6.4	Effet de la viscosité au voisinage de parois : couche d'Ekman	356
7.7	Vorticité, rotation et écoulements secondaires	360
7.7.1	Écoulements secondaires dus à la courbure de canalisations ou de canaux à surface libre	360
7.7.2	Écoulements secondaires dans des mouvements transitoires	363
7.7.3	Écoulements secondaires associés à des effets de couches d'Ekman	366

8 Écoulements quasi parallèles – Approximation de lubrification

373

8.1	Approximation de lubrification	373
8.1.1	Écoulements quasi parallèles	373
8.1.2	Hypothèses de l'approximation de lubrification	374
8.1.3	Effets d'instationnarité	377
8.1.4	Équations de mouvement dans l'approximation de lubrification	378
8.1.5	Un exemple d'application de l'équation de lubrification : écoulement stationnaire entre deux plans mobiles formant un angle faible	378
8.1.6	Écoulements d'un film fluide de profil d'épaisseur quelconque	383
8.1.7	Écoulement entre deux cylindres de rayons voisins décentrés	387
8.1.8	Lubrification et rugosité des surfaces	390
8.2	Écoulements de films liquides à surface libre – hydrodynamique du mouillage	392
8.2.1	Dynamique des films liquides minces sans effets de la tension superficielle	392
8.2.2	Angles de contact dynamiques	394
8.2.3	Dynamique de l'étalement de gouttes sur une surface plane	399
8.2.4	Écoulements induits par des gradients de la tension superficielle – effet Marangoni	403
8.3	Chute d'un jet liquide cylindrique	408
8.3.1	Régime d'écoulement stable	409
8.3.2	Effets capillaires et instabilité de Rayleigh-Plateau du jet	412

9 Écoulements à petit nombre de Reynolds

417

9.1	Les écoulements à petit nombre de Reynolds	418
9.1.1	Sens physique du nombre de Reynolds	418
9.1.2	Exemples d'écoulements à petit nombre de Reynolds	418

9.1.3	Quelques caractéristiques marquantes	420
9.2	Équation du mouvement à petit nombre de Reynolds	421
9.2.1	Équation de Stokes	421
9.2.2	Quelques formes équivalentes de l'équation de Stokes	422
9.2.3	Propriétés des solutions de l'équation de Stokes	423
9.2.4	Prédictions dimensionnelles sur les écoulements à petit nombre de Reynolds	432
9.3	Forces et moments s'exerçant sur un solide en mouvement	434
9.3.1	Linéarité des relations entre la vitesse d'un solide et les forces exercées	435
9.3.2	Influence des propriétés de symétrie des solides sur les forces et les moments appliqués	436
9.3.3	Propulsion aux faibles nombres de Reynolds	441
9.4	Déplacement d'une sphère dans un fluide visqueux	443
9.4.1	Champ de vitesse autour d'une sphère en mouvement	443
9.4.2	Force exercée sur une sphère en mouvement dans un fluide – coefficient de traînée	447
9.4.3	Extensions de la résolution de l'équation de Stokes à d'autres problèmes	451
9.5	Limites de la description de Stokes des écoulements à faible nombre de Reynolds	458
9.5.1	Équation d'Oseen	458
9.5.2	Forces sur un cylindre circulaire infini dans un écoulement uniforme ($Re \ll 1$)	461
9.6	Dynamique des suspensions	463
9.6.1	Rhéologie des suspensions	464
9.6.2	Sédimentation d'une suspension de particules	467
9.7	Écoulements dans les milieux poreux	469
9.7.1	Quelques exemples	469
9.7.2	Paramètres caractérisant un milieu poreux	470
9.7.3	Écoulements dans les milieux poreux saturés – loi de Darcy	473
9.7.4	Modèles simples de la perméabilité des matériaux poreux	479
9.7.5	Relations conductivité électrique – perméabilité des poreux	481
9.7.6	Écoulement de fluides non miscibles dans les milieux poreux	484
10	Transports couplés. Couches limites laminares	491
10.1	Introduction	492
10.2	Structure de la couche limite près d'une plaque plane dans un écoulement uniforme	493

10.3	Équations de mouvement dans la couche limite – théorie de Prandtl	495
10.3.1	Équations de mouvement près d’une plaque plane	495
10.3.2	Transport de vorticité dans la couche limite	498
10.3.3	Autosimilitude des profils de vitesse dans la couche limite pour une vitesse extérieure uniforme et constante	498
10.4	Profils de vitesse dans les couches limites	501
10.4.1	équation de Blasius pour un écoulement extérieur uniforme	501
10.4.2	Profil de vitesse solution de l’équation de Blasius	502
10.4.3	Force de frottement sur une plaque plane dans un écoulement uniforme	504
10.4.4	épaisseurs de couche limite	505
10.4.5	Stabilité hydrodynamique d’une couche limite laminaire – Couches limites turbulentes	507
10.5	Couche limite laminaire en présence d’un gradient de pression externe : décollement des couches limites	508
10.5.1	Analyse physique simplifiée du problème	508
10.5.2	Profils de vitesse autosimilaires – �coulements de la forme $U(x) = Cx^m$	508
10.5.3	Couches limites d’épaisseur constante	512
10.5.4	écoulements non autosimilaires – décollement de la couche limite	514
10.5.5	Conséquences pratiques du décollement des couches limites	515
10.6	Aérodynamique et couches limites	516
10.6.1	Contrôle de couche limite sur l’aile d’avion	516
10.6.2	Aérodynamique automobile	519
10.6.3	Aérodynamique d’autres véhicules terrestres	522
10.6.4	Contrôle actif et réactif de la traînée ou de la portance .	523
10.7	Sillage et jet laminaire	524
10.7.1	équation de mouvement du sillage	524
10.7.2	Force de traînée sur un corps – relation avec la vitesse dans le sillage	528
10.7.3	Jet laminaire à deux dimensions	531
10.8	Couches limites thermiques et massiques	532
10.8.1	Couches limites thermiques	532
10.8.2	Couches limites de concentration, polarographie	538
10.8.3	Dispersion de Taylor	546
10.9	Flammes	550
10.9.1	Flammes, mélange et réactions chimiques	551
10.9.2	Flammes de diffusion laminaires	553
10.9.3	Flammes prémélangées	556
10.9.4	Instabilité d’une flamme plane de prémélange	561

11 Instabilités hydrodynamiques	563
11.1 Une approche globale des instabilités : le modèle de Landau . .	564
11.1.1 Un modèle expérimental simple d'instabilité mécanique	564
11.1.2 Écoulement autour d'un cylindre au voisinage du seuil d'émission de tourbillons	567
11.1.3 Évolution temporelle des instabilités dans le modèle de Landau	568
11.2 Instabilité de Rayleigh-Bénard	573
11.2.1 Équations de transport thermique convectif	573
11.2.2 Stabilité d'une couche fluide en présence d'un gradient vertical de température	574
11.2.3 Description de l'instabilité de Rayleigh-Bénard	575
11.2.4 Mécanisme de l'instabilité de Rayleigh-Bénard et ordres de grandeur	575
11.2.5 Solution bidimensionnelle du problème de Rayleigh-Bénard	579
11.2.6 Modèle de Landau appliqué à la convection de Rayleigh Bénard	585
11.2.7 Évolution vers la turbulence au-dessus du seuil de convection	586
11.3 Autres exemples d'instabilités fermées	587
11.3.1 Instabilité thermocapillaire de Bénard-Marangoni	587
11.3.2 Instabilité de Taylor-Couette	592
11.3.3 Autres instabilités centrifuges	595
11.4 Instabilités d'écoulements ouverts	596
11.4.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz	597
11.4.2 Rôle de la forme du profil de vitesse des écoulements ouverts	604
11.4.3 Instabilités sous-critiques des écoulements de Poiseuille et de Couette	606
12 Turbulence	609
12.1 Une longue histoire	610
12.2 Les équations de base	611
12.2.1 Description statistique des écoulements turbulents . . .	611
12.2.2 Dérivation des valeurs moyennes	613
12.2.3 Équations du mouvement des écoulements turbulents . .	613
12.2.4 Bilans d'énergie dans un écoulement turbulent	617
12.2.5 Transport de la vorticité dans un écoulement turbulent	619
12.3 Expressions empiriques du tenseur de Reynolds et applications aux écoulements libres	621
12.3.1 Fermeture de l'équation de Reynolds	621
12.3.2 Viscosité turbulente	622
12.3.3 Longueur de mélange	622

12.3.4	Autres approches pratiques de la turbulence	625
12.4	Écoulements turbulents libres : jets, sillages	625
12.4.1	Propriétés de base des jets et sillages turbulents bidimensionnels	626
12.4.2	Champs de vitesse autosimilaires dans les jets et sillages bidimensionnel	630
12.4.3	Jets et sillages turbulents tridimensionnels axisymétriques	634
12.5	Écoulements près d'une paroi solide	634
12.5.1	Propriétés qualitatives des écoulements turbulents en présence d'une paroi	634
12.5.2	Écoulements turbulents stationnaires parallèles à une paroi plane	636
12.5.3	Écoulement turbulent entre deux plaques parallèles . . .	639
12.5.4	Pertes de charge et coefficient de frottement pour des écoulements entre plans parallèles et dans des tubes	645
12.5.5	Couches limites turbulentes	648
12.5.6	Décollement des couches limites turbulentes	652
12.6	Turbulence homogène – théorie de Kolmogorov	655
12.6.1	<i>Cascade d'énergie</i> dans un écoulement turbulent homogène	655
12.6.2	Expression spectrale des lois de Kolmogorov	660
12.6.3	Vérification expérimentale de la théorie de Kolmogorov	666
12.7	Autres aspects de la turbulence	666
12.7.1	Intermittence de la turbulence	667
12.7.2	Structures cohérentes turbulentes	667
12.7.3	Dynamique des tourbillons en turbulence bidimensionnelle	669
	Références bibliographiques	671
	Index	683
	Cahier couleurs	

Introduction

Cette troisième édition d'*Hydrodynamique physique* arrive dix ans après une précédente qui, elle-même, avait élargi l'édition originale parue dix ans plus tôt. Nous nous sommes efforcés de conserver l'esprit qui nous avait guidés alors, issu de notre expérience d'enseignants en Université et en Grande École : le titre « Hydrodynamique Physique » de l'ouvrage reflète notre souci de présenter la mécanique des fluides en donnant une large place aux observations et analyses physiques tout en évitant les développements mathématiques trop lourds. Les arguments dimensionnels ou d'ordres de grandeur y occupent une large place. L'iconographie a été renouvelée et s'est enrichie d'un cahier central en couleurs, favorisant ainsi une approche inductive plus directe des phénomènes étudiés.

Nous nous sommes attachés à ce que ce livre reste utilisable pour un enseignement de licence et au-delà. Certains sujets traités dans le livre complètent des notions fondamentales et peuvent être, en ce sens, considérés comme des exercices d'application. Mais ce livre s'adresse également à tous les scientifiques, pas seulement physiciens, s'intéressant aux applications de la mécanique des fluides : cela nous a conduit à l'enrichir par des exemples issus des sciences de la nature et de la vie courante.

La mécanique des fluides a un statut mal défini. Elle apparaît comme une branche directe des sciences physiques aux États-Unis, où la Division de Dynamique des Fluides de l'*American Physical Society* organise la plus importante rencontre annuelle au monde sur le sujet. En France, au contraire, elle a été longtemps plus proche des mathématiques appliquées, tout en entretenant une relation forte avec les sciences de l'ingénieur. Une tradition, qui remonte aux grands noms de la mécanique française du XIX^e siècle, Cauchy, Poisson, Navier, Darcy... explique cette tendance. Il en est résulté pendant longtemps une ignorance mutuelle entre mécaniciens et physiciens, ces derniers étant également très ignorants de la science des fluides réels. Une raison annexe de cette méconnaissance de la mécanique par les physiciens est venue de la polarisation compréhensible de la physique du XX^e siècle tournée vers des problèmes tels que la relativité, la mécanique quantique, tout en oubliant que les pères de ces disciplines avaient aussi une excellente maîtrise de la mécanique. Ainsi nous voyons apparaître le nom d'Einstein dans l'étude des suspensions en relation avec le mouvement brownien ; de même, la thèse de

Heisenberg portait sur la turbulence, sujet auquel il s'intéressera de nouveau en 1945...

Les années 1980 ont vu se développer une vision nouvelle des instabilités et de la transition vers la turbulence : des physiciens tels que P. Bergé, S. Fauve, A. Libchaber, B. Perrin, Y. Pomeau et J.E. Wesfreid en France et G. Ahlers, J. Gollub et H. Swinney aux États-Unis (entre autres) y ont largement contribué.

Dans les décennies qui ont suivi, la méconnaissance mutuelle des mécaniciens et physiciens s'est encore atténuée grâce aux contributions foisonnantes de jeunes scientifiques associant les deux types de formation initiale. Notre livre, à travers ses précédentes versions, a pu jouer un rôle modeste dans cette évolution.

Au-delà de notre formation initiale de physiciens, nous avons appris la mécanique des fluides « sur le tas » à travers des travaux expérimentaux sur les superfluides, les instabilités hydrodynamiques, les cristaux liquides, les milieux poreux et les suspensions ; nous avons également revisité des problèmes classiques de la mécanique des fluides en mettant en place des instrumentations physiques nouvelles. Plus généralement, les recherches expérimentales en mécanique des fluides ont largement bénéficié de nouvelles méthodes d'acquisition et de traitement de données et d'images et de l'utilisation de lasers. Enfin, les approches théoriques développées pour traiter certains problèmes physiques fondamentaux (comme les phénomènes critiques) ont trouvé des débouchés importants en mécanique des fluides.

Dans les premiers chapitres de l'ouvrage, nous avons tout d'abord voulu donner les bases nécessaires pour aborder des problèmes spécifiques.

Le *chapitre 1* rappelle quelques notions sur la structure des fluides et leurs propriétés microscopiques, sur les méthodes spectroscopiques qui permettent de les étudier et sur les phénomènes d'interfaces à prendre en compte dans les écoulements à surface libre.

Le *chapitre 2* introduit la notion de viscosité et les différents régimes d'écoulement des fluides, souvent liés au nombre de Reynolds caractérisant la nature convective ou diffusive du transport dans ces écoulements.

Les *chapitres 3* et *4* discutent les champs de vitesse d'écoulement ainsi que les déformations des particules de fluide (cinématique) et les contraintes qui leur sont associées (dynamique). Nous étudions des fluides newtoniens ou non suivant la relation contrainte-déformation qui est vérifiée. Les équations de mouvement des fluides qui ont été établies alors sont appliquées à quelques géométries d'écoulement simples.

Le *chapitre 5* discute les équations de bilan des fluides. Celles-ci sont souvent des formes intégrales des relations établies au chapitre 4 et elles permettent de résoudre de nombreux problèmes sans avoir à connaître les champs de vitesses locaux.

Le *chapitre 6* traite de l'écoulement des fluides parfaits et est un prolongement naturel des équations de bilan. Dans ces écoulements, le rotationnel de

la vitesse est souvent nul en tous points, ce qui permet des analogies directes avec l'électrostatique.

Le *chapitre 7* est la charnière du livre : il introduit la notion clé de vorticité (la dernière brique de base de la mécanique des fluides), puis l'applique aux tourbillons où cette vorticité est très localisée dans un « coeur ». Le chapitre se prolonge par le problème étroitement lié des écoulements en rotation, crucial notamment pour les écoulements terrestres à grande échelle.

La suite du livre aborde des problèmes plus spécifiques :

Le *chapitre 8* décrit quelques écoulements quasi-parallèles dominés par la viscosité et décrits dans l'approximation de « lubrification » : celle-ci est riche d'applications aux écoulements de films liquides minces à surface libre ou non et aux jets liquides libres.

Le *chapitre 9* s'intéresse aux écoulements contrôlés par la viscosité à cause de leur faible nombre de Reynolds et non de leur géométrie seulement comme ceux de lubrification. Leurs nombreuses applications telles que la locomotion de microorganismes, la dynamique des suspensions, les écoulements dans les milieux poreux sont présentées.

Le *chapitre 10* traite les transports couplés associant convection et diffusion et faisant intervenir plusieurs échelles de longueur. La couche limite décrit ainsi la zone de transition entre une vitesse nulle sur une paroi et un écoulement potentiel extérieur et s'applique largement en aérodynamique. Nous étendons ensuite cette approche aux sillages et aux jets ainsi qu'aux réactions électrochimiques et aux flammes.

Les instabilités hydrodynamiques sont abordées *au chapitre 11*, tant à partir de l'approche globale du modèle de Landau qu'à l'échelle du champ de vitesse local à partir de solutions approchées. Quelques instabilités convectives confinées sont d'abord étudiées en dégageant des notions telles que les instabilités sous critiques avant de passer à des exemples d'instabilités d'écoulements ouverts.

Enfin, le *chapitre 12* traite les écoulements turbulents, dominés par les mouvements aléatoires du fluide. Après les écoulements libres (jets ou sillages) puis en présence de parois, nous décrivons le transfert d'énergie dans la turbulence homogène avant d'évoquer la turbulence bidimensionnelle.

Comme nous l'avons dit, notre approche physique est issue de nos travaux sur des problèmes de mécanique des fluides. Nos contacts avec une communauté internationale très accueillante à nos approches de physiciens ont fait le reste. En particulier, nous voulons rendre hommage à l' cole britannique de mécanique des fluides : les cours de E.J. Hinch qui nous fait le grand honneur de préfacer ce livre et de K.H. Moffatt nous ont ainsi ouverts à une présentation de la mécanique associant théorie, expérience et une solide part de pragmatisme. Il ne faudrait bien sûr pas oublier les quatre volumes des articles de G.I. Taylor et le livre classique de G.K. Batchelor (ainsi que nos contacts directs avec lui).

Aux États-Unis, nos contacts avec des personnalités comme A. Acrivos, J. Brady, G. Homsy, J. Koplik, L. Mahadevan et H. Stone (entre autres), ont élargi notre vision vers des problèmes très divers. Enfin, nous avons découvert de nombreux phénomènes de mécanique des fluides à travers la remarquable série de films du NCFMF (National Committee for Fluid Mechanics Films) ; ceux ci ont trouvé un prolongement sous une forme actuelle et de nombreuses extensions dans le projet Multimedia Fluid Mechanics animé par G. Homsy.

En France, une École des Houches organisée en 1973 par J.L. Peube avec K. Moffatt, S. Orszag, P. Germain a suscité, pour P.G. de Gennes qui y participait comme élève, deux années de cours très originaux au Collège de France et, pour l'un d'entre nous (EG), le projet du présent livre.

Mais, avant tout, en plus de nos enseignements, c'est dans la vie quotidienne des laboratoires de notre communauté que ce livre s'est construit. Les recherches et enseignements de P. Bergé, B. Castaing, C. Clanet, Y. Couder, M. Farge, M. Fermigier, P. Gondret, E. Guazzelli, J.F. Joanny, F. Moisy, B. Perrin, Y. Pomeau, M. Rabaud, D. Salin, J.E. Wesfreid et bien d'autres sont ainsi à l'origine de nombreux éléments de ce livre ; nous remercions tous ces collègues.

Nous souhaitons enfin remercier tout spécialement plusieurs collègues qui nous ont généreusement aidé dans la rédaction de plusieurs parties de cet ouvrage : J.L. Aider (aérodynamique appliquée), C. Allain (écoulements non newtoniens), A. Ambari (polarographie), A.M. Cazabat (dynamique du mouillage), M. Champion (flammas), C. Clanet (capillarité), F. Moisy (turbulence et écoulements en rotation), C. Nore (magnétohydrodynamique), N. Ribe (jets libres), H. Swinney (instabilités) et J. Teixeira (diffusion de rayonnements dans les fluides).

Chapitre 1

Physique des fluides

À une échelle microscopique, la physique des fluides peut être considérée comme une branche de la thermodynamique. L'approche physique classique s'intéresse aux états d'équilibre des corps purs – solides, liquides et gaz – et aux changements d'état entre ces phases. Un premier élargissement de cette approche est l'étude des fluctuations au voisinage immédiat d'un état d'équilibre ; ces fluctuations sont caractéristiques de cet état, mais renseignent aussi sur les propriétés de retour à l'équilibre. Ainsi, pour un système physique contenant un grand nombre de particules et qui a subi un « léger écart » par rapport à son état d'équilibre thermodynamique, il existe des relations simples de proportionnalité entre les flux, qui ramènent le système à l'équilibre et l'importance de l'écart par rapport à cet équilibre.

L'étude de ces relations et la définition des coefficients de transport qui les caractérisent constituent le noyau de ce premier chapitre ; cette étude sera d'abord macroscopique (section 1.2), puis microscopique (section 1.3). Nous analyserons ensuite (section 1.4) quelques phénomènes de surface qui apparaissent lorsque deux fluides ont une surface de séparation commune (interface). Nous discuterons enfin brièvement l'application aux liquides des techniques de spectroscopie optique, de rayons X ou de neutrons (section 1.5) : ces méthodes permettent d'étudier les fluctuations autour de l'équilibre et d'en déduire les valeurs des coefficients de transport. Mais, tout d'abord (section 1.1), nous allons donner une description simple de l'état microscopique d'un fluide en nous attachant à analyser l'influence de ses caractéristiques microscopiques sur ses propriétés macroscopiques.

1.1 L'état liquide

On connaît bien, à partir de l'étude des structures microscopiques (rayons X) ou par l'observation de la forme extérieure d'un cristal, l'organisation périodique de ses atomes. Dans cet état de la matière, les atomes

restent fixes les uns par rapport aux autres, à l'exception de vibrations de faible amplitude, d'origine thermique. À l'opposé, les gaz sous faible pression constituent un ensemble dilué de particules se déplaçant rapidement, avec de faibles interactions entre elles, excepté lors de leurs collisions ; les modèles de théorie cinétique des gaz permettent de comprendre de façon microscopique l'évolution de leurs variables d'état d'équilibre, telles que la température ou la pression. En revanche, la description d'un liquide – de caractéristiques intermédiaires entre celle d'un gaz et celle d'un solide – est plus délicate : faut-il le considérer comme un gaz très dense ou comme un solide désordonné ? De fait, les modèles microscopiques des liquides associent souvent ces deux approches extrêmes. En particulier, les systèmes modèles microscopiques et macroscopiques à deux dimensions fournissent un outil très puissant pour analyser la structure et les propriétés statiques des différents états de la matière.

1.1.1 Les différents états de la matière : systèmes modèles et milieux réels

Représentation visuelle des états de la matière par une table soufflante

Les modèles de tables soufflantes utilisent un écoulement d'air dirigé vers le haut à travers une plaque horizontale percée de trous identiques de petit diamètre, répartis uniformément sur sa surface. On y place des palets de rayon R qui se déplacent ainsi sans friction appréciable ; « l'agitation thermique » des palets peut être simulée par la vibration de la plaque ou de ses parois latérales. Suivant la concentration moyenne des palets, on peut observer les caractéristiques des différents états de la matière. Les figures 1.1a et 1.1b ont été obtenues en fixant une petite source lumineuse sur chacun des palets et en enregistrant les trajectoires correspondantes sur une photo exposée pendant un temps de pose plus long que le temps moyen entre chocs. Les trajectoires des palets apparaissent en blanc sur les figures. On caractérise la concentration de palets par la *compacité* C (ou facteur de remplissage), qui est le rapport de la surface occupée par les palets à la surface totale. Nous allons maintenant discuter le mouvement des palets à différentes compacités.

– Compacité maximale : $C = C_M$

La valeur maximum de C_M pour des systèmes à deux dimensions est égale à 0,901 et elle est obtenue pour un empilement triangulaire compact de disques. Les palets forment alors un réseau cristallin parfait bidimensionnel (Fig. 1.2) : cet état représenterait celui d'un cristal parfait sans agitation thermique.

Démonstration. Dans cette configuration, un motif unité (la maille élémentaire) qui, répété périodiquement, conduit au réseau triangulaire, est un losange (L) de

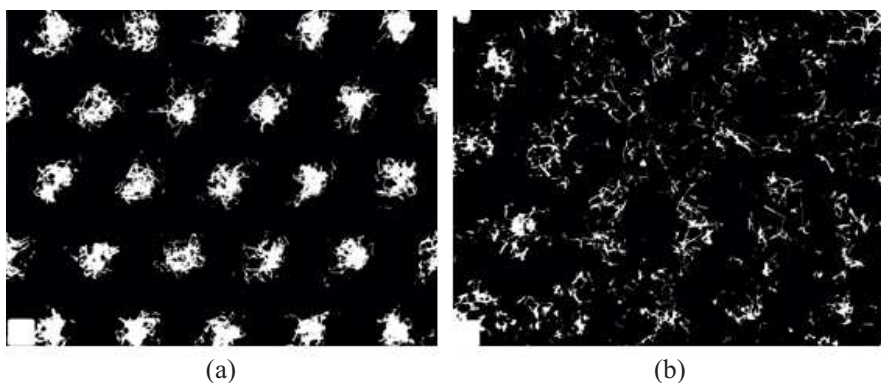


FIG. 1.1 – Configurations observées lors du mouvement de palets sur une table soufflante pour différentes valeurs de la compacité C ; (a) état solide $C = 0,815$; (b) état fluide $C = 0,741$ (docs. Piotr Pieranski).

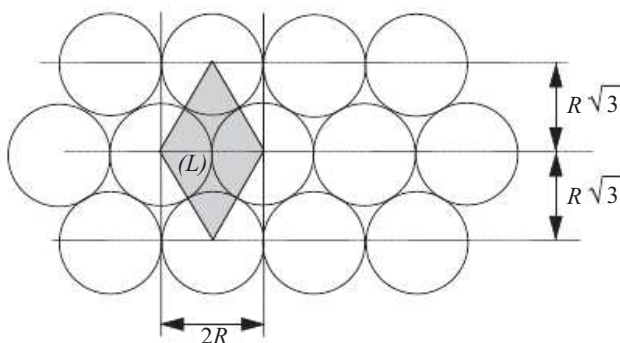


FIG. 1.2 – Configuration de compacité maximale d'un empilement de palets circulaires de même diamètre et dont les centres forment un réseau cristallin plan.

surface $S_0 = (2R)(2R)\sqrt{3}/2$. À l'intérieur de cette surface, il y a exactement les éléments d'un disque de surface $S_p = \pi R^2$, d'où une compacité :

$$C_M = \frac{S_p}{S_0} = \frac{\pi R^2}{2R^2\sqrt{3}} = 0,901. \quad (1.1)$$

On parle quelquefois, par abus de langage, de réseau hexagonal. Ce dernier correspondrait à la présence d'un élément seulement au sommet de chaque hexagone, et non au centre de l'hexagone. ■

– Compacités élevées

Tant que la compacité reste voisine de C_M , les palets se déplacent autour de leur position d'équilibre, comme le révèlent les trajectoires des points lumineux (Fig. 1.1a). En revanche, leur position moyenne reste fixe et l'arrangement correspondant est périodique : on a ainsi l'image des vibrations des atomes d'un solide, responsables de la propagation du son. Dans un solide, les

déplacements des particules se transmettent en effet de proche en proche, en réponse à une oscillation imposée à une extrémité. Ces modes de propagation sont appelés *phonons*. Mais deux rangées voisines de l'empilement ne peuvent pas glisser l'une par rapport à l'autre de plus d'une distance de l'ordre de R : chaque particule garde toujours les mêmes voisines. L'amplitude des déformations correspondant à ce glissement est donc limitée, et des forces de rappel élastique apparaissent.

– Compacités moyennes

Pour des valeurs de compacité inférieures à $C_0 \approx 0,8$, on passe à un régime différent dans lequel les particules peuvent sortir de la cage constituée par leurs voisines. Dans ce cas, les particules ne restent plus dans une position moyenne fixe les unes par rapport aux autres et constituent un « liquide » bi-dimensionnel (Fig. 1.1b). Dans le même temps, la périodicité du cristal est perdue. La fluidité de l'état liquide entraîne la possibilité d'un mouvement d'ensemble des palets les uns par rapport aux autres, si l'on impose un mouvement relatif par rapport à des parois latérales qui délimitent le système.

– Faibles compacités $C \ll C_0$

Dans ce cas, on a un « gaz » de palets. La distance moyenne entre les centres de deux particules plus proches voisines peut être alors très grande (de l'ordre de $R/\sqrt{C}$), alors qu'elle était de l'ordre de $2R$ à l'état liquide.

Modèles numériques de disques durs et leur extension.

On peut obtenir des résultats identiques à ceux que nous venons de décrire dans le modèle analogique ci-dessus, à partir de simulations numériques où l'interaction entre particules est de type *disque dur* ; dans ce cas, le potentiel d'interaction entre deux particules est nul lorsque la distance r entre leurs centres est supérieure à $2R$, et infiniment grand lorsque r est inférieur ou égal à $2R$.

Des simulations plus réalistes sont obtenues en utilisant des potentiels d'interaction plus proches de la réalité, tel celui de Lennard-Jones qui, pour un problème à trois dimensions, est de la forme :

$$V(r) = V_0 \left[\left(\frac{2R}{r} \right)^{12} - \left(\frac{2R}{r} \right)^6 \right]. \quad (1.2)$$

Cette forme de potentiel permet de rendre compte d'une très légère inter-pénétration des particules, fortement limitée par le principe d'exclusion de Pauli, lorsque r est inférieur ou égal à $2R$; ce potentiel introduit aussi une faible attraction entre particules, due aux forces de Van der Waals, qui devient dominante aux « grandes » distances ($r \gg R$). L'équation (1.2) prédit

l'existence d'un minimum de $V(r)$ pour une valeur r_0 de l'ordre de $2R$; cela correspond à un équilibre stable qui n'existe pas dans le modèle de disques ou de sphères durs. En introduisant ce potentiel, on modifie l'équation d'état du gaz parfait bidimensionnel et on obtient une forme similaire à l'équation de Van der Waals pour un corps pur. En particulier, on voit apparaître un domaine où un équilibre liquide-gaz est possible.

Modèles à trois dimensions

Nous avons précédemment modélisé la structure des solides et la transition solide-liquide à partir d'un arrangement de palets circulaires. Il est également possible de représenter la structure de certains états d'organisation de la matière à l'aide d'empilements périodiques de sphères : c'est le cas, par exemple, pour le réseau cubique à faces centrées dont la compacité est 0,74 (Fig. 1.3a).

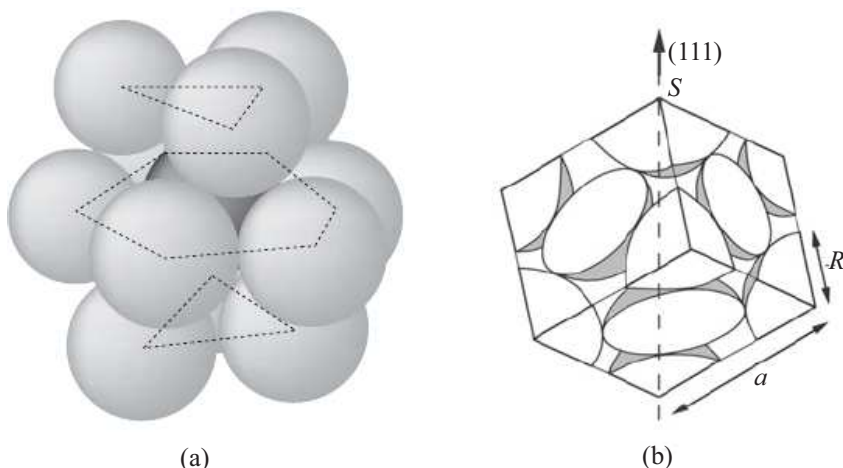


FIG. 1.3 – (a) Empilement compact cubique à faces centrées (CFC) d'un ensemble de sphères de rayon uniforme R ; (b) le réseau CFC de sphères en contact a été coupé par le cube qui forme la maille élémentaire du réseau. Il y a en tout quatre sphères à l'intérieur de ce cube. La correspondance avec la figure (a) peut être comprise si l'on réalise que la sphère S à l'extrémité de l'axe 111, formant la diagonale principale du cube, joue le rôle de la sphère (foncée) au centre de l'empilement de (a).

Compacité du réseau cubique à faces centrées. Le motif de base de l'empilement est constitué par un cube de rayon $a = 4R/\sqrt{2}$ (Fig. 1.3b) qui contient l'équivalent du volume de quatre sphères de rayon R (la diagonale des côtés du cube est en effet égale à $4R$). La compacité C (fraction de volume occupée par des sphères en contact) vérifie donc :

$$C = \frac{4 \left(\frac{4}{3} \right) \pi R^3}{a^3} = \frac{4 \left(\frac{4}{3} \right) \pi R^3}{\left(\frac{4R}{\sqrt{2}} \right)^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 0,74. \quad (1.3)$$

La valeur 0,74 est la plus élevée qui existe pour des empilements de sphères de même rayon R : une fois réalisé, cet empilement assure une organisation périodique

à grande distance, tout comme pour un réseau triangulaire à deux dimensions. La conjecture de Kepler, qui proposait que l'on ne puisse dépasser cette limite pour des empilements de sphères de même diamètre, a reçu une démonstration mathématique en... 1998 !

La différence avec le cas à deux dimensions provient du fait que l'empilement périodique ne se forme pas spontanément quand on remplit un récipient de billes identiques. En effet, il existe une infinité de façons de placer autour d'une seule sphère le même nombre (12) de sphères voisines : l'icosaèdre formé par les centres des sphères de la figure 1.4 en est un exemple particulier. Il n'est pas possible de construire un cristal à partir de tels remplissages locaux. Cela est différent du cas bidimensionnel où la seule façon de disposer six disques en contact avec un disque central est de les placer aux sommets d'un hexagone ; ce dernier constitue alors l'amorce du cristal triangulaire bidimensionnel de la figure 1.2.

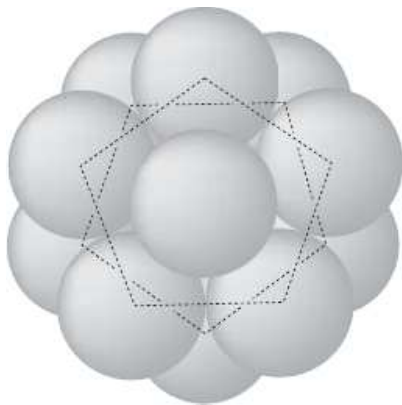


FIG. 1.4 – Empilement icosaédrique construit, comme celui de la figure 1.3(a), à partir de 12 sphères de même diamètre placées régulièrement autour d'une sphère centrale cachée : il a une probabilité plus grande de se produire que l'empilement cubique à faces centrées. À cause de sa symétrie d'ordre 5, il ne peut pas être l'amorce d'un réseau cristallin.

En pratique, lorsque l'on remplit un récipient avec des billes de même rayon, on construit un empilement désordonné de compacité comprise entre 0,59 et 0,64, quel que soit le mode de remplissage. La structure ainsi obtenue représente assez bien celle d'un métal amorphe obtenu en déposant rapidement un film d'alliage de métal à l'état liquide ou vapeur sur un support très froid. Elle représente assez bien aussi la position instantanée des atomes d'un liquide simple (Fig. 1.1b). Enfin, ces empilements fournissent une bonne représentation des milieux granulaires et des milieux poreux (sable, grès) dont nous parlerons dans la section 9.7.

Remarque. Il est également possible d'obtenir des modèles de cristaux tridimensionnels à partir de particules sphériques de latex de diamètre bien défini, mises en solution dans un milieu ionique. Tant que les répulsions coulombiennes entre les

sphères sont suffisamment fortes, ces interactions conduisent à la formation d'un arrangement périodique des particules (cristal colloïdal). En augmentant la concentration ionique de la solution, on diminue les répulsions car les charges de la solution réalisent un écran contre les interactions entre particules ; la structure périodique disparaît et il se forme des agrégats de particules.

1.1.2 La limite solide-liquide : une frontière parfois floue

La limite entre le comportement mécanique d'un solide et celui d'un liquide n'est pas toujours aussi franche qu'elle apparaît dans la description thermodynamique ; elle dépend étroitement de l'amplitude et de la durée des contraintes appliquées. La science qui étudie l'évolution de la déformation des matériaux sous contrainte est la *rhéologie*. Dans la section 4.4, nous discuterons les différents types de comportements observés dans des fluides variés, en particulier la *viscoélasticité*. Limitons nous ici à deux exemples.

Modélisation de la plasticité à deux dimensions

La déformation de solides, tels que des barres ou des ressorts métalliques soumis à des forces, cesse d'être réversible au-delà d'une contrainte seuil qui représente leur *limite élastique*. Aussi, de nombreux corps, en apparence solides, « s'écoulent » lorsqu'ils sont soumis à de très fortes contraintes (glaciers, matériaux de la croûte terrestre, feuilles métalliques dans un pressage à froid). Ce processus est appelé *plastification*. Les modèles à deux dimensions permettent d'illustrer l'influence capitale, sur ce phénomène, des défauts qui existent dans des empilements cristallins. Ces défauts pourront, par exemple, être l'apparition d'une nouvelle rangée de particules à partir d'un point du réseau (*dislocation*), ou bien une ligne de contact entre deux réseaux d'orientation légèrement différentes (*joint de grain*). En inclinant légèrement un plateau à deux dimensions sur lequel on a placé une monocouche de billes, on constate que les déformations d'ensemble de cette couche sont rendues possibles par le mouvement des billes voisines des défauts. Ainsi, les défauts permettent à la matière solide de s'écouler. Cette observation est à la base de la métallurgie moderne.

Influence de la vitesse de variation des contraintes sur la déformation d'un matériau

La rapidité de la variation des contraintes joue un rôle tout aussi important que leur amplitude pour déterminer le comportement d'un matériau : ainsi, nous verrons à la section 4.4.3 que la réponse d'un corps à une perturbation de fréquence (ou de durée) variable permet de faire apparaître un passage de l'état solide (à haute fréquence ou pour une faible durée) à l'état liquide (à basse fréquence). La limite entre ces deux régimes est déterminée par un temps τ_{De} caractéristique du corps : le type de comportement observé dépendra du

rapport entre τ_{De} et la durée (ou période) de l'excitation. Ce rapport, défini par l'équation (4.44), est appelé *nombre de Deborah*.

1.2 Coefficients macroscopiques de transport

Analysons maintenant le transport induit dans les fluides par de légers déséquilibres tels que la réponse du système puisse continuer à être décrite par une approximation linéaire. Trois types de problèmes peuvent ainsi être abordés :

- le transport d'*énergie thermique* en présence de variations spatiales de température ;
- le transport de *matière* dû à des variations de concentration ;
- le transport de *quantité de mouvement* dans un fluide en mouvement. C'est surtout cette dernière propriété de transport qui sera étudiée dans la suite de cet ouvrage. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux deux premières citées.

En physique des fluides, ces différents modes de transport coexistent souvent. Voici deux exemples de cette coexistence :

- un objet chaud (température T_+), placé dans un fluide au repos à une température plus faible T_- , induit souvent un mouvement dit *convectif* dans la partie supérieure du fluide (Fig. 1.5a). En retour, les mouvements du liquide augmentent le transport d'énergie thermique entre l'objet et le fluide. Ainsi, en soufflant sur un morceau de bois incandescent, on modifie à la fois les transports de masse, de matière et d'énergie thermique (Q), et la cinétique de la réaction exothermique de combustion est accélérée (Fig. 1.5b).

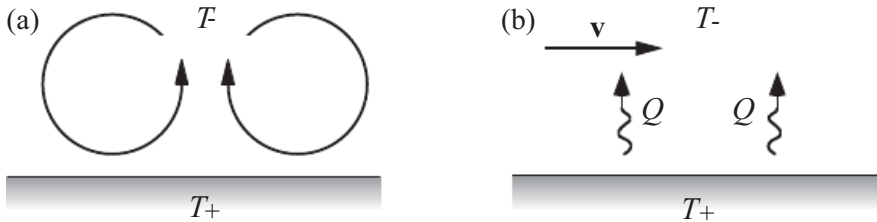


FIG. 1.5 – Échange thermique entre un fluide et une plaque chauffée : (a) en présence d'un écoulement de convection spontané induit par la différence de température (et étudié en détail au chapitre 11) ; (b) entre un courant d'air et un corps chaud, avec la formation d'une couche limite (voir chapitre 10).

On a, dans ces exemples, une juxtaposition de mécanismes d'échange convectif (entraînement par le fluide en écoulement), radiatif, chimique

(associé aux réactions) et diffusif (ou conductif). Ces derniers mécanismes dépendent uniquement des propriétés microscopiques du fluide et sont analysés comme des faibles déviations par rapport à l'état d'équilibre. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement à ce cas.

Nous discuterons d'abord, d'un point de vue macroscopique, l'exemple familier de la diffusion thermique, pour aborder ensuite la diffusion de masse (section 1.2.2) ; puis à la section 1.3, nous donnerons une image microscopique de ces effets dans les gaz et les liquides. Au chapitre 2, nous verrons comment la viscosité d'un fluide rend compte de la diffusion de la quantité de mouvement. La correspondance entre le transport diffusif pour ces trois grandeurs est à relier au fait que les équations décrivant les processus et les caractéristiques observées sont analogues ; les résultats obtenus pour le transport d'énergie thermique sont facilement transposables au transport de la masse ou de la quantité de mouvement (moyennant un changement des coefficients et une transposition scalaire-vecteur).

1.2.1 Conductivité thermique

Équation de transport de l'énergie thermique en régime stationnaire

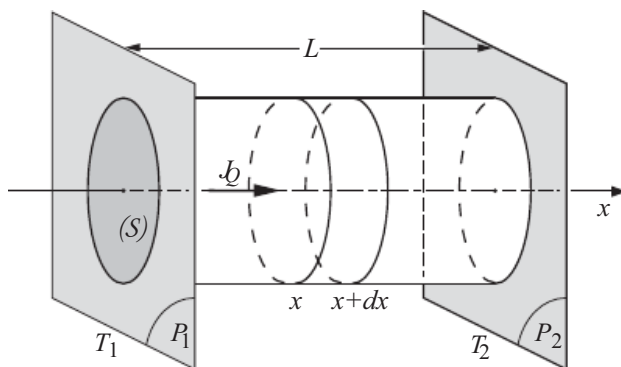


FIG. 1.6 – Transport de chaleur le long de l'axe d'un cylindre induit par une différence de température $T_1 - T_2$.

Un corps homogène (solide, liquide ou gaz) infiniment étendu dans les trois directions est soumis à un gradient de température dT/dx le long de l'axe Ox . Ce gradient est obtenu en appliquant une différence de température $T_1 - T_2$ entre les deux plans P_1 et P_2 distants de L (Fig. 1.6). On s'intéresse au transport de l'énergie thermique à travers une section de surface S perpendiculaire à l'axe Ox .

Le flux d'énergie thermique J_Q par unité de section et de temps varie linéairement avec $T_1 - T_2$, ce que l'on peut exprimer par la relation de proportionnalité :

$$J_Q = \frac{\delta Q}{S \delta t} = k \frac{T_1 - T_2}{L} = -k \frac{dT}{dx}. \quad (1.4)$$

La dernière égalité vient du fait que, à l'équilibre, la température varie linéairement entre les valeurs extrêmes T_1 et T_2 , ce que nous justifierons plus loin. Le signe moins indique que le flux d'énergie thermique est dirigé dans le sens opposé du gradient thermique. Le coefficient k (appelé *conductivité thermique*) est fonction uniquement des propriétés du matériau. Il vérifie l'équation aux dimensions :

$$[k] = \frac{[M][L]^2[T]^{-3}}{[L]^2[\Theta]/[L]} = [M][L][T]^{-3}[\Theta]^{-1} \quad (1.5)$$

($[L]$ correspond à la longueur, $[M]$ à la masse, $[T]$ au temps, $[\Theta]$ à la température). Des valeurs typiques de ce coefficient sont données dans le tableau 1.2 à la fin de ce chapitre.

La relation (1.4) peut être généralisée sous une forme vectorielle dans le cas où la température T varie dans les trois directions de l'espace avec :

$$\mathbf{J}_Q(\mathbf{r}) = -k \mathbf{grad} T(\mathbf{r}). \quad (1.6)$$

Cette relation a la même forme que la loi d'Ohm locale $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\sigma \mathbf{grad} V(\mathbf{r})$, qui relie la densité de courant électrique $\mathbf{j}$ au potentiel $V(\mathbf{r})$ en électrocinétique (σ est la conductivité électrique du milieu). Nous comprenons maintenant pourquoi, en régime stationnaire, la température varie linéairement avec la distance dans la géométrie de la figure 1.6, tout comme le potentiel électrique varie linéairement entre deux électrodes parallèles portées à des potentiels différents et plongées dans un fluide conducteur. La relation linéaire (1.6) exprime une proportionnalité entre un *flux* (l'énergie thermique) et une *force thermodynamique* (le gradient thermique) ; on retrouvera des relations similaires dans les autres phénomènes de transport au voisinage de l'équilibre.

Conductivité thermique en géométrie cylindrique

L'expérience suivante permet de mesurer la conductivité thermique du matériau constituant le cylindre creux de rayon a , représenté sur la figure 1.7. Initialement, le cylindre est plongé dans un bain isotherme à la température uniforme T_1 , de telle façon que $T(r=a) = T_1$ quel que soit t . La zone creuse à l'intérieur du cylindre ($r < b$) n'est en communication avec le bain extérieur que par l'intermédiaire du cylindre. On y place un thermomètre qui permet de mesurer la température intérieure $T_i(t)$, et une résistance chauffante R qui délivre une puissance P constante et uniforme sur la hauteur H du cylindre. Si cette hauteur H est assez grande devant le rayon a du cylindre, on peut supposer que le flux d'énergie thermique $\mathbf{J}_Q(r)$ est radial et ne varie pas le long de l'axe. À l'instant $t = 0$, on branche la résistance chauffante et on enregistre les variations de la température intérieure $T_i(t)$ du cylindre mesurée par le thermomètre. Au bout d'un temps suffisamment long, cette température se stabilise à une valeur T_2 .

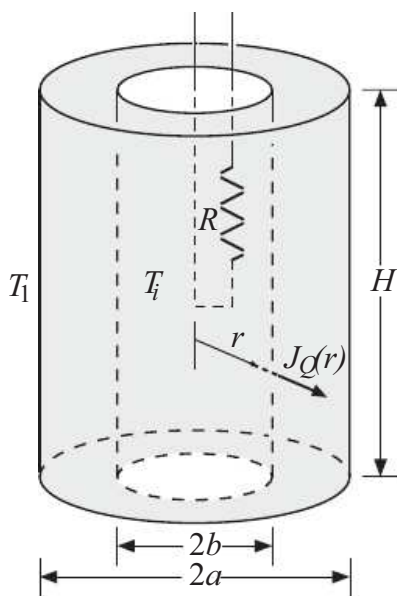


FIG. 1.7 – Principe de l'expérience de la mesure de conductivité thermique à l'aide d'un cylindre creux.

La mesure de $T_2 - T_1$ donne accès à la valeur de la conductivité thermique k du cylindre. En effet, évaluons le flux d'énergie thermique radial $\mathbf{J}_Q(r)$ par unité de surface ($b < r < a$) circulant entre deux cylindres de rayons infiniment voisins r et $r + dr$. Son module $J_Q(r)$ vérifie :

$$P = 2\pi r H J_Q(r) \quad (1.7)$$

avec :

$$J_Q(r) = -k \frac{dT}{dr}, \quad (1.8)$$

où P est la puissance de chauffe qui est constante en régime stationnaire. En combinant ces deux relations, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{r} = -\frac{2\pi H k}{P} dT. \quad (1.9)$$

En intégrant cette équation, compte tenu des conditions aux limites sur la température, on obtient :

$$k = \frac{P}{2\pi H (T_2 - T_1)} \text{Log} \frac{a}{b}. \quad (1.10)$$

Remarque. Ce calcul, valable en régime permanent, est identique à celui de la conductivité électrique d'un conducteur formé de deux cylindres coaxiaux entre lesquels est appliquée une différence de potentiel ($V_2 - V_1$) (analogue à la différence de température $T_2 - T_1$) et parcourus par un courant d'intensité I (analogue à la puissance de chauffe P).

Échange thermique en régime non stationnaire – Équation de Fourier

Nous avons traité l'exemple précédent en supposant que l'on avait atteint un régime stationnaire où la température en chaque point est indépendante du temps. On mesure alors un effet de diffusion sous gradient imposé. Considérons maintenant le cas plus général où la température T est à la fois fonction de la position et du temps. Nous traiterons ici, tout d'abord, le cas plus simple de la variation de température avec la géométrie unidimensionnelle de la figure 1.6. L'évolution de la température $T(x, t)$ est décrite par l'équation de Fourier à une dimension qui relie les dérivées partielles de la température T par rapport au temps et à la coordonnée d'espace x :

$$\rho C \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.11a)$$

ou :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.11b)$$

avec :

$$\kappa = \frac{k}{\rho C}. \quad (1.12)$$

ρ est la masse volumique du corps et C sa capacité thermique par unité de masse, le coefficient κ est la *diffusivité thermique* (une grande diffusivité thermique correspond à une grande conductivité thermique et à une faible inertie au transfert thermique, mesurée par ρC). Dimensionnellement, l'équation (1.11b) implique que le rapport de κ au carré d'une distance est homogène à l'inverse d'un temps ; on a donc $[\kappa] = [L]^2[T]^{-1}$ avec, pour unité, le mètre carré par seconde. On trouvera les valeurs des coefficients k , ρ et C pour plusieurs fluides usuels en fin du présent chapitre.

Démonstration. Exprimons le bilan thermique pour un élément de volume de corps limité par les plans voisins x et $x + dx$ (Fig. 1.6). La quantité d'énergie thermique entrant pendant le temps dt par la surface S est, d'après l'équation (1.6) :

$$q_x(x) S dt = -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} S dt. \quad (1.13)$$

Le flux sortant est de même :

$$q_x(x + dx) S dt = -k \frac{\partial T(x + dx, t)}{\partial x} S dt. \quad (1.14)$$

La différence de ces deux flux est l'énergie thermique algébrique accumulée dans le volume limité par les deux plans soit :

$$\begin{aligned} q_x(x) S dt - q_x(x + dx) S dt &= k S dt \left[-\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial T(x + dx, t)}{\partial x} \right] \\ &= k S dt \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction $\partial T(x, t)/\partial x$. Cette énergie thermique accumulée entraîne une variation de température $\partial T(x, t)/\partial t$ donnée par l'égalité :

$$\rho C S dx \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dt = k S dt \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} dx. \quad (1.16)$$

En simplifiant l'équation (1.16), on obtient les équations (1.11). ■

La forme de l'équation (1.11b) est très générale et caractéristique de tous les phénomènes de diffusion : on la retrouve avec des variables différentes, dans les problèmes de transport de masse ou de quantité de mouvement. Il est souvent utile d'exploiter cette correspondance où les coefficients de diffusivité gardent la même dimension, mais prennent des valeurs différentes.

Notons que, en régime stationnaire et dans une géométrie unidimensionnelle, l'équation (1.11b) se ramène à : $\partial^2 T(x, t)/\partial x^2 = 0$. Dans ce cas, on a donc un gradient de température constant le long de la coordonnée x et, par suite, une variation linéaire de la température avec la distance, comme nous l'avons supposé dans l'établissement de la relation (1.4).

Plus généralement, dans un problème où la température varie dans les trois directions de l'espace, il convient de remplacer le terme $\partial^2 T(x, t)/\partial x^2$ dans l'équation (1.11) par le Laplacien :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2}$$

d'où :

$$\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{k}{\rho C} \Delta T(\mathbf{r}, t) = \kappa \Delta T(\mathbf{r}, t) \quad (1.17)$$

qui est l'équation de Fourier à trois dimensions.

Propagation d'une variation de température dans une direction

Nous considérons maintenant un milieu homogène, limité par le plan $x = 0$ et occupant un demi espace infini dans les directions $x > 0$, y et z . Le corps est initialement à une température uniforme $T = T_0$ aux temps $t \leq 0$. À l'instant $t = 0$, on impose une variation de température sur le plan limite $x = 0$, en le mettant en contact avec un thermostat à la température uniforme : $T_1 = T(x = 0, t > 0)$. Le profil de température en fonction de la distance au plan origine est montré sur la figure 1.8a, à différents instants ; on observe l'étalement progressif de la perturbation introduite dans le plan origine sous l'effet de la diffusion thermique.

La solution de ce problème nous éclairera sur de nombreux autres exemples de diffusion. Remarquons d'abord que, à partir de la diffusivité thermique κ et du temps t , on peut construire la variable $\sqrt{\kappa t}$ qui a la dimension d'une longueur. Il est donc raisonnable de normaliser les abscisses x par cette longueur, en formant le rapport sans dimensions $u = x/\sqrt{\kappa t}$; de même, au lieu de calculer $T(x, t)$, nous déterminons la fonction normalisée $(T - T_0)/(T_1 - T_0)$,

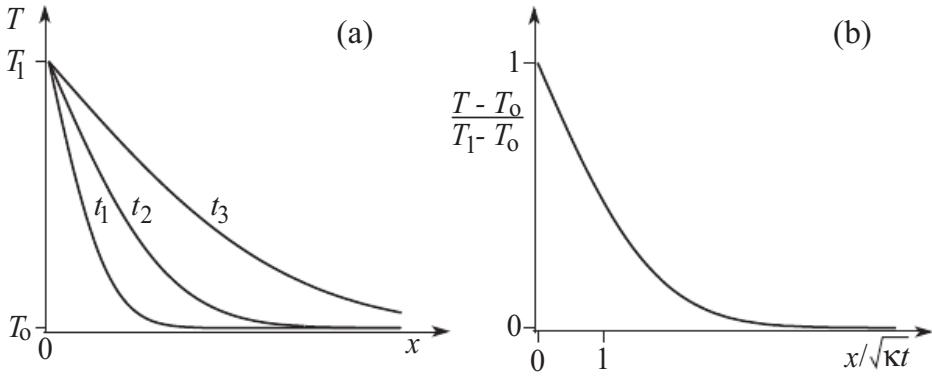


FIG. 1.8 – Profils de variations de la température avec la distance dans un milieu semi-infini limité par le plan $x = 0$: (a) profils à des instants différents $t_1 < t_2 < t_3$ après une variation initiale en échelon sur le plan origine $x = 0$; (b) profils à des instants différents en fonction de la distance normalisée $u = x/\sqrt{\kappa t}$. La courbe normalisée unique est donnée par la formule (1.18).

qui varie entre 1 (pour $x = 0$) et 0 (pour $x \rightarrow \infty$). On trouve alors, comme nous le démontrerons plus bas, la solution :

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{u}{2} \right) \right], \quad (1.18)$$

où $\operatorname{erf}(z)$ est la fonction définie par $\operatorname{erf}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta$; $\operatorname{erf}(u)$ est égale à zéro pour $u = 0$ et à l'unité lorsque u tend vers l'infini. Ainsi, *pour les conditions aux limites* que nous avons considérées, nous avons obtenu une solution qui ne dépend pas séparément de x et t , mais seulement de la variable réduite $x/\sqrt{\kappa t}$. La figure 1.8b montre que les profils spatiaux de la température normalisée correspondant à différents instants coïncident lorsqu'ils sont tracés en fonction de cette variable. Pour des conditions aux limites différentes, il aurait pu être nécessaire de rechercher des solutions plus complexes dépendant séparément de x et t .

On voit que, à un instant t donné, l'effet de la perturbation de la température s'est propagé sur une distance de l'ordre de $\sqrt{\kappa t}$ (à un préfacteur de l'ordre de l'unité près), ce qui est bien en accord avec la forme dimensionnelle de κ . Nous rencontrons ici la caractéristique essentielle des phénomènes diffusifs, à savoir la proportionnalité entre la distance moyenne de diffusion et la racine carrée du temps. Ce résultat explique, en particulier, l'inefficacité des mécanismes diffusifs à grande distance ; s'il faut un temps t_L pour qu'une perturbation de température diffuse sur une distance L , il faut un temps $t_{10L} = 100 t_L$ pour qu'elle diffuse sur une distance dix fois plus grande. Pour l'air, par exemple, $\sqrt{\kappa t} = 1$ cm, pour $t = 10$ s ; $\sqrt{\kappa t} = 10$ cm, pour $t = 10^3$ s.

Démonstration de l'équation (1.18). À titre d'essai, recherchons des solutions de la forme :

$$T(x, t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{\kappa t}}\right) = f(u). \quad (1.19)$$

En reportant la fonction (1.19) dans l'équation (1.17) et en exprimant les dérivées de T par rapport à t et à x sous la forme :

$$\left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}\right)_x = -\frac{1}{2}t^{-3/2}\frac{x}{\sqrt{\kappa}}f'(u) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}\right)_t = \frac{1}{\kappa t}f''(u),$$

on obtient l'équation :

$$f''(u) + \frac{1}{2}uf'(u) = 0. \quad (1.20)$$

En posant $F(u) = f'(u)$, cette équation différentielle de la variable réduite u devient :

$$F'(u) + \frac{uF(u)}{2} = 0 \quad (1.21)$$

dont la solution s'écrit :

$$F = F_0 e^{-u^2/4}. \quad (1.22)$$

On en déduit alors :

$$f(u) = A \operatorname{erf}\left(\frac{u}{2}\right) + B \quad \text{avec} \quad u = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}}. \quad (1.23)$$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des valeurs de la température pour $x = 0$ ($T = T_1 = B$) et pour $x \rightarrow \infty$ ($T = T_0 = A + B$).

Diffusion thermique en géométrie cylindrique

Nous avons discuté précédemment le transport thermique radial en régime stationnaire dans un cylindre creusé d'une cavité cylindrique. Analysons maintenant les variations transitoires de température dans le cas limite où la cavité cylindrique intérieure, dans laquelle on mesure la variation de température, a un rayon et une capacité calorifique négligeables : nous supposons que le cylindre de rayon a , initialement à une température T_0 , est plongé brusquement à l'instant $t = 0$ dans un fluide de température $T_0 + \delta T_0$. Sans faire le calcul qui fait appel à un développement en série de fonctions, montrons simplement les résultats obtenus.

La figure 1.9 représente les profils de la température réduite $\delta T(r/a)/\delta T_0$ à différentes valeurs de t (r est la distance à l'axe du cylindre et $\delta T(r/a)$ est l'écart de la température locale par rapport à la température initiale T_0). Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs du rapport t/τ_κ où $\tau_\kappa = a^2/\kappa$ représente, comme nous l'avons vu plus haut, l'ordre de grandeur du temps de diffusion sur la distance a . On constate que, pour les temps faibles, la variation de température est limitée à une couche proche de la surface ($r = a$), d'épaisseur de l'ordre de $\sqrt{\kappa t}$. Les profils sont similaires à ceux que nous avons montrés sur la figure 1.8 pour une surface limite plane, donc de rayon de courbure infiniment grand. Pour des temps plus longs, de l'ordre de

$0,1\tau_\kappa$, la perturbation de température se fait sentir sur l'axe du cylindre. Elle devient partout pratiquement égale à $T_0 + \delta T_0$ lorsque $t \approx \tau_\kappa$. Nous verrons à la section 2.1.2 que ces profils décrivent tout aussi bien les variations temporelle et spatiale de la vitesse dans un cylindre rempli de fluide auquel on impose un mouvement de rotation.

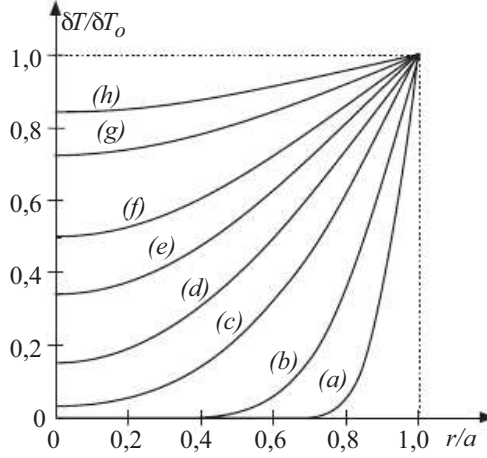


FIG. 1.9 – Diffusion de la chaleur dans un cylindre dont la surface extérieure est soumise, à l'instant t , à une brusque variation de température de T_0 à $T_0 + \delta T_0$. La distribution de la température réduite $\delta T/\delta T_0$ est portée en fonction de la distance réduite r/a à l'axe du cylindre. Les différentes courbes sont obtenues à différents instants, caractérisés par le temps réduit $(\tau/\tau_\kappa) = 0,005$ (a); $0,02$ (b); $0,06$ (c); $0,1$ (d); $0,15$ (e); $0,2$ (f); $0,3$ (g); $0,4$ (h).

Propagation par diffusion et par ondes

Pour évaluer l'efficacité des différents processus, comparons l'équation de Fourier (1.17) à l'équation classique de propagation d'une onde d'amplitude A dans la direction Ox :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (1.24)$$

où c est la célérité de l'onde. On recherche pour cette équation des solutions de la forme : $A(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$. Elles décrivent la propagation d'une onde dans les directions $+x$ et $-x$ à une vitesse c constante ; la distance parcourue augmente proportionnellement au temps. Au contraire, l'équation (1.17) admet des solutions pour lesquelles la distance de propagation x varie comme la racine carrée du temps t : la « vitesse effective » de propagation (x/t) décroît avec la distance. Physiquement, ce résultat est dû au fait que le flux de la variable qui diffuse (température, concentration...) est proportionnel au gradient de cette dernière : plus le front de variation s'étale, plus la propagation se fait lentement.

Ainsi, le simple changement de l'ordre de la dérivation par rapport au temps donne des comportements tout à fait différents pour les phénomènes de propagation des ondes et pour ceux de diffusion. Ceux-ci sont efficaces à des temps courts ou sur de très petites distances ; la propagation par ondes ainsi que la convection par le fluide en mouvement (qui donne elle aussi un déplacement linéaire avec le temps) sont dominants dans les autres cas.

1.2.2 Diffusion de masse

Équation de conservation de la masse

Dans l'exemple à une dimension de la figure 1.6, remplaçons la température T par la concentration d'un élément dilué dans le fluide principal : ce traceur peut être un autre gaz ou une fumée dans le gaz, des ions, des molécules de colorant ou des isotopes radioactifs dans un liquide.

Note. L'étude microscopique des phénomènes de diffusion s'applique également à des objets plus gros que la molécule, comme des particules colloïdales, tant que leur taille est suffisamment faible (typiquement inférieure au μm) pour que les effets d'agitation thermique soient prédominants.

Dans ce phénomène de *diffusion sous gradient*, on s'intéresse au flux de traceur induit par son gradient de concentration. On peut aussi s'intéresser à l'*autodiffusion* décrivant la redistribution de molécules marquées évoluant, en l'absence de gradient, parmi d'autres molécules de même espèce mais non marquées. Dans une solution diluée, les coefficients de diffusion sous gradient et d'autodiffusion ont des valeurs identiques. Dans le cas où les particules diffusantes interagissent entre elles, ces deux coefficients peuvent devenir différents.

La concentration peut être mesurée par le nombre $n(x, t)$ de particules de traceur par unité de volume ou par la masse ρ_A de traceur par unité de volume de mélange. L'équivalent de la relation (1.6) est l'*équation de Fick* :

$$\mathbf{J}_m = -D_m \text{grad} \rho_A \quad (1.25)$$

où $\mathbf{J}_m$ est la densité de courant de traceur (masse par unité de surface et de temps) et D_m est le coefficient de *diffusion moléculaire* du traceur. Sa valeur est fonction à la fois des propriétés du traceur et de l'espèce diffusante. D_m vérifie l'équation aux dimensions :

$$[D_m] = \frac{[M][L]^{-2}[T]^{-1}[L]}{[M][L]^{-3}} = [L]^2[T]^{-1}$$

et a donc la même dimensionnalité que le coefficient de diffusion thermique. En annexe à ce chapitre, nous donnons quelques valeurs de ce coefficient.

On peut établir l'équation aux dérivées partielles qui relie les variations de la densité avec la position et le temps en suivant pas à pas la procédure utilisée pour le problème thermique, c'est-à-dire en exprimant la conservation de la

masse de traceur dans un volume élémentaire fixe de deux façons différentes ; on obtient ainsi, dans le cas unidimensionnel, l'équation équivalente à (1.11b) :

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial x^2}. \quad (1.26)$$

À la section 1.2.1, nous avons discuté des exemples de conduction thermique où sont fixées des conditions aux limites de température sur une paroi. Ils correspondent à des problèmes où sont imposées des valeurs aux limites de concentration d'espèces chimiques. Dans ce cas, les solutions mathématiques se transposent directement en changeant la variable T en ρ , et en remplaçant κ par D_m .

En pratique, il est plus simple de créer une répartition de concentration initiale donnée de traceur et de regarder comment elle évolue. L'équivalent thermique consisterait à injecter une certaine énergie thermique en un point pendant un temps court et à la laisser diffuser ensuite.

Étalement d'un traceur initialement localisé dans un plan

On suppose que, à l'intérieur du fluide, on introduit de façon uniforme une masse M_A de traceur, initialement localisée sur une très faible épaisseur autour du plan $x = 0$. Mathématiquement, cette distribution initiale est du type distribution de Dirac δ avec $\rho_A = M_A \delta(x)$. Par ailleurs, si le traceur ne réagit pas avec le fluide, la conservation de la masse de traceur s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_A(x) dx = M_A = \text{cte}. \quad (1.27)$$

Pour vérifier ces conditions, on utilise la dérivée $g(x, t)$ par rapport à la variable x de la solution (1.23) de l'équation de diffusion thermique que nous avons déterminée à la section 1.2.1 :

$$g(x, t) = \frac{A}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-\frac{u^2}{4}} \quad (1.28)$$

avec $u = x/\sqrt{\kappa t}$. La fonction $g(x, t)$ est bien solution de l'équation (1.11b) : en effet, en dérivant cette équation par rapport à x , on trouve que, si une fonction est solution de l'équation, sa dérivée par rapport à x l'est aussi. En remplaçant κ par D_m , on obtient donc :

$$\rho_A(x, t) = \frac{M_A}{2\sqrt{\pi D_m t}} e^{-\frac{x^2}{4D_m t}}. \quad (1.29)$$

La solution de ce problème est donc une courbe Gaussienne (Fig. 1.10). Sa largeur augmente comme la racine carrée du temps, ce qui est caractéristique des phénomènes diffusifs. Dans le même temps, l'amplitude décroît comme $1/\sqrt{t}$ de façon à conserver l'aire sous la courbe (cette aire représente la masse

totale de colorant injecté). Comme nous l'avons fait pour la courbe de la figure 1.8b, nous pourrions superposer les différentes variations en utilisant la coordonnée $u = x/\sqrt{D_m t}$ comme abscisse et le produit $2\sqrt{\pi D_m t} \rho_A(x, t)/M_A$ comme ordonnée.

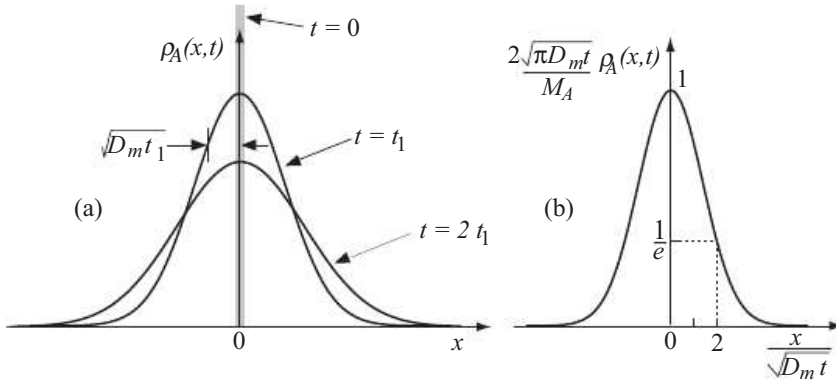


FIG. 1.10 – Étalement par diffusion moléculaire d'une tache de traceur initialement localisée dans le plan $x = 0$; (a) profils de concentration à différents instants $t = 0$, $t = t_1$ et $t = 2t_1$, après l'instant d'injection du traceur; (b) profil obtenu en utilisant la variable normalisée $x/\sqrt{D_m t}$ en abscisse et l'amplitude $2\sqrt{\pi D_m t} \rho_A(x, t)/M_A$ en ordonnée. La courbe correspond à la fonction gaussienne de la formule (1.29).

Remarque. La solution (1.23), obtenue pour la diffusion de chaleur, correspond à la réponse à une variation spatiale en échelon de la température initiale (ou de la concentration de traceur dans le fluide). Ici, nous avons considéré une injection très localisée d'une quantité finie de traceur, ce qui conduit à la solution (1.28) différente de la solution (1.23) (et qui représente la dérivée spatiale de cette dernière).

1.3 Modèles microscopiques des coefficients de transport

Les lois macroscopiques que nous avons écrites pour l'énergie thermique et la masse s'appliquent de façon générale aux fluides et aux solides. Jusqu'à présent, nous n'avons pas envisagé la nature microscopique de ces processus de transport, ni la liaison entre les coefficients de diffusion et la structure du milieu. Nous allons maintenant donner une description simplifiée des mécanismes microscopiques du transport. Nous analyserons tout d'abord la diffusion massique en termes de marche au hasard, puis nous appliquerons la théorie cinétique au transport dans les gaz; nous discuterons enfin le cas des liquides.

1.3.1 La marche au hasard

Nous nous intéressons ici à l'étalement d'une tache de traceur initialement localisée en un point. Analysons le mouvement de particules de traceur qui

peuvent être des molécules ou des particules très petites, dites browniennes, de taille inférieure à un micromètre : en raison de l'agitation thermique, celles-ci ne sont pas immobiles mais ont des trajectoires complexes comportant une suite de changements de direction aléatoires (mouvement brownien).

Pour analyser ce processus, nous utiliserons le modèle de la *marche au hasard*, la marche de l'homme ivre ! Partant d'un point origine O au temps initial $t = 0$ (qui représente la position initiale du traceur), il effectue des pas de même longueur ℓ et de même durée τ avec une vitesse caractéristique de module $\bar{u} = \ell/\tau$. Après chaque pas, il repart immédiatement dans une nouvelle direction indépendante de celle du pas précédent. Physiquement, ℓ correspond au libre parcours moyen des molécules, τ au temps de trajet entre deux chocs et $\bar{u}$ à la vitesse d'agitation thermique (dans ce cas, comme pour la marche au hasard, la trajectoire entre deux chocs est rectiligne). L'équivalent de l'étalement carré moyen de la tache de traceur sera la moyenne $\langle R(t)^2 \rangle$ où R est le module de la distance du marcheur au point de départ : pour obtenir une valeur statistiquement significative, cette moyenne est prise sur un ensemble de marches aléatoires indépendantes.

Remarque. La moyenne de la distance vectorielle $\mathbf{R}(t)$ est, en revanche, nulle car toutes les directions sont équivalentes.

On trouve alors que :

$$\langle R(t)^2 \rangle = \frac{t}{\tau} \ell^2 = \frac{\ell^2}{\tau} t = D_m t \quad (1.30)$$

avec :

$$D_m = \frac{\ell^2}{\tau} = \bar{u} \ell = \bar{u}^2 \tau. \quad (1.31)$$

L'écart moyen $\sqrt{\langle R(t)^2 \rangle}$ par rapport à la position initiale augmente donc comme la racine carrée du temps, ce qui correspond bien à une loi d'étalement diffusif.

Démonstration. Au bout du premier pas, $\langle R(\tau)^2 \rangle = R(\tau)^2 = \ell^2$. Nous allons montrer par récurrence que, après N pas, on a :

$$\langle R^2(N\tau) \rangle = N\ell^2. \quad (1.32)$$

Supposons que, après $(N-1)$ pas, $\langle R^2((N-1)\tau) \rangle = (N-1)\ell^2$. Pour une marche donnée telle que celle de la figure 1.11, appelons M_{N-1} le point d'arrivée du pas $N-1$ et M_N celui du pas suivant.

On obtient donc l'égalité vectorielle :

$$\begin{aligned} (\mathbf{OM}_N)^2 &= (\mathbf{OM}_{N-1} + \mathbf{M}_{N-1}\mathbf{M}_N)^2 \\ &= (\mathbf{OM}_{N-1})^2 + (\mathbf{M}_{N-1}\mathbf{M}_N)^2 + 2(\mathbf{OM}_{N-1}) \cdot (\mathbf{M}_{N-1}\mathbf{M}_N). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Prenons la moyenne de cette égalité sur tout un ensemble de marches indépendantes partant de O au temps $t = 0$. Par suite de l'indépendance de la direction d'un pas

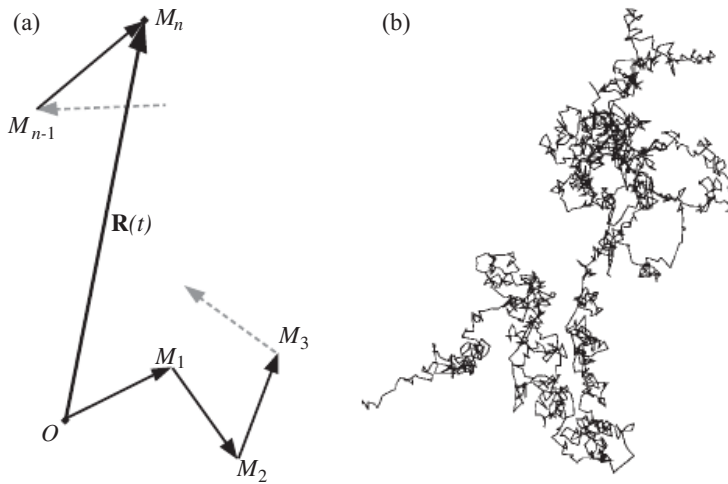


FIG. 1.11 – (a) Déplacement d’une particule de traceur au cours d’une marche au hasard brownienne ; la longueur de tous les pas est supposée la même. (b) Trajectoire brownienne réelle, obtenue par l’analyse de l’image d’une sphère de polystyrène suivie dans son mouvement pendant 2 000 s. Un déplacement élémentaire dure une seconde en moyenne ; 1 cm sur la figure représente environ $3,5 \mu\text{m}$ (doc. G. Bossis).

et de celle du pas précédent, la moyenne du produit scalaire $(\mathbf{OM}_{N-1}) \cdot (\mathbf{M}_{N-1}\mathbf{M}_N)$ est nulle : il peut en effet prendre, avec la même probabilité, des valeurs positives et négatives. On trouve donc bien le résultat final :

$$(\mathbf{OM}_N)^2 = (N-1)\ell^2 + \ell^2 + 0 = N\ell^2 \quad (1.34)$$

que l’on peut bien récrire sous la forme (1.30) puisque $t = N\tau$.

Il est à noter que la démonstration de la formule (1.30) ne demande pas de connaître la dimension de l’espace dans lequel se fait la marche au hasard ou la diffusion. Dans le cas particulier où cette marche se fait le long d’une ligne, il est assez facile de montrer que la loi donnant la probabilité d’étalement à partir d’un point situé sur cette ligne est une courbe de Gauss. On retrouve ainsi indépendamment le résultat de l’équation (1.29) obtenu par une approche purement macroscopique. La démonstration part de la formule du binôme appliquée à :

$$(p+q)^N = p^N + Np^{N-1}q + \dots + C_r^N p^r q^{N-r} + \dots + q^N. \quad (1.35)$$

Si p (respectivement q) (avec $p+q=1$) représente la probabilité de faire un pas à droite (respectivement à gauche), le terme général $C_r^N p^r q^{N-r}$ donne la probabilité que l’on ait eu r pas à droite et $N-r$ pas à gauche. Dans la limite d’un très grand nombre de pas (N tend vers l’infini), on montre que la distribution des termes du binôme tend vers une distribution gaussienne, qui est centrée à l’origine si $p=q=1/2$. ■

– Si la marche au hasard se fait sur un plan légèrement incliné, chaque pas est légèrement biaisé dans le sens de la descente. Au bout d’un nombre de pas N , la distribution de marcheurs n’est plus centrée autour de l’origine

O , comme dans la distribution de Gauss précédente, mais on a centrage autour d'un point O' tel que $\mathbf{OO}'$ est orienté vers le bas. Nous avons alors la manifestation d'un phénomène convectif qui se superpose au phénomène diffusif de la marche au hasard : ce phénomène convectif sera prépondérant aux temps longs car le déplacement $\mathbf{OO}'$ varie linéairement avec le temps, alors que la distance de transport diffusif ne croît que comme $\sqrt{t}$. Il est possible d'étudier ce problème dans le modèle à une dimension précédent, en prenant des probabilités p et q différentes d'aller vers la droite et vers la gauche. On trouve alors que le déplacement du centre de gravité de la tache varie comme $|\mathbf{OO}'| = N(p - q)\ell$, mais que l'étalement reste gaussien. Ce résultat représente, par exemple, la diffusion d'un traceur en présence d'un champ de forces permanent en volume, tel que la gravité sur des particules pesantes pour la sédimentation (section 9.6.2) ou un champ électrique sur des ions.

Remarque. Dans l'analyse précédente, nous avons envisagé le cas où tous les pas de la marche au hasard étaient de longueur identique. On peut montrer que le modèle gaussien obtenu dans ces conditions reste valable si la distribution de la taille des pas de la marche au hasard n'est pas trop large (plus précisément, il suffit que la probabilité d'avoir un pas de taille ℓ décroisse plus vite que $1/\ell^2$). Si tel n'est pas le cas, alors l'écart quadratique moyen du déplacement dans la marche au hasard varie avec le temps plus vite qu'en $\sqrt{t}$, ce qui est dû au fait que les pas rares et très longs dominent le comportement diffusif. On parle dans ce cas de *diffusion anormale* (ici, il s'agit d'*hyperdiffusion*).

1.3.2 Coefficients de transport des gaz parfaits

Volume élémentaire représentatif

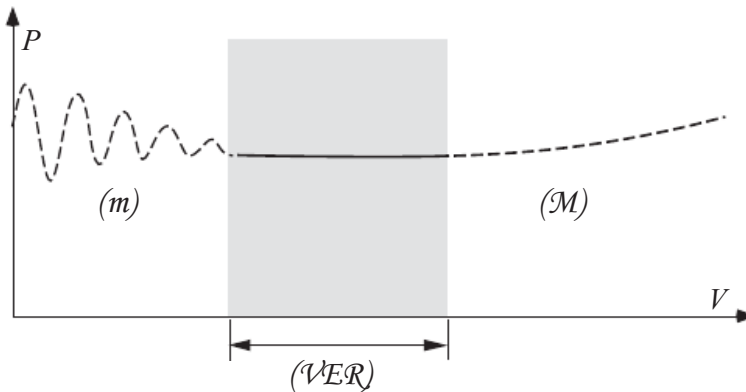


FIG. 1.12 – Le paramètre P est obtenu par une moyenne de la grandeur microscopique correspondante sur un volume V .

Avant d'aborder l'interprétation microscopique des coefficients de transport, nous donnons ici la définition du *volume élémentaire représentatif*

($\mathcal{VER}$). En mécanique des milieux continus, on est amené à définir des grandeurs macroscopiques : pression, température, vitesse, masse volumique. Ces quantités sont des moyennes des grandeurs microscopiques correspondantes, sur une taille grande (le $\mathcal{VER}$) devant l'échelle de leurs fluctuations microscopiques (m), mais petite devant celle des variations à l'échelle macroscopique ($\mathcal{M}$) (Fig. 1.12). Ce volume élémentaire représentatif n'existe pas dans tous les cas, en particulier dans les milieux très inhomogènes, pour lesquels les variations macroscopiques se font sur de très courtes distances.

Diffusion moléculaire pour un gaz parfait

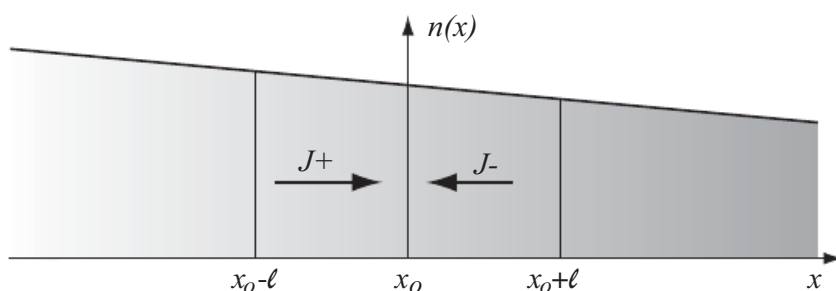


FIG. 1.13 – Schéma du modèle de transport de particules par diffusion unidimensionnelle en théorie cinétique des gaz.

Nous nous plaçons dans le cas de la géométrie unidimensionnelle de la section 1.2.1 (Fig. 1.6) et nous étudions un gaz dilué de molécules de traceur, dont le nombre $n(x)$ par unité de volume varie régulièrement dans la direction Ox (Fig. 1.13). Les molécules de traceur sont accompagnées d'autres molécules qui se redistribuent pour compenser les variations de pression associées à celles de la densité $n(x)$. Les molécules sont animées d'une vitesse moyenne d'agitation thermique. On obtient alors la valeur suivante pour le coefficient de diffusion :

$$D_m = \frac{1}{3} \bar{u} \ell. \quad (1.36)$$

Nous constatons que l'équation (1.36) coïncide (au facteur $1/3$ près) avec le résultat obtenu par le modèle de marche au hasard de la section 1.3.1, en utilisant comme vitesse entre les chocs la vitesse d'agitation thermique des molécules et en prenant la longueur des pas égale au libre parcours moyen. Dans ce cas particulier, cela montre l'équivalence des deux phénomènes d'étalement d'une tache de traceur et de flux induit par un gradient de concentration : les deux approches de la théorie cinétique des gaz et de la marche au hasard sont donc équivalentes.

Démonstration. Afin de déterminer D_m , nous évaluons le flux total de particules de traceur à travers une section plane d'abscisse x_0 et d'aire unité. Nous notons

J_+ (respectivement J_-) le flux de particules de traceur venant de la gauche (respectivement de la droite) de ce plan (le flux représente le nombre de particules qui traversent l'unité de surface par unité de temps). Par suite de l'effet du gradient de la concentration de particules $n(x)$, ces deux flux sont différents. Le rapport entre la différence $(J_+ - J_-)$ et $(-\partial n/\partial x)$ nous donne le coefficient de diffusion moléculaire D_m . Le calcul exact utilise la distribution en module et en direction des vitesses d'agitation thermique. Nous ferons ici plusieurs hypothèses simplificatrices :

- Nous considérons qu'un tiers seulement des molécules se déplacent suivant la direction $\pm x$ avec la vitesse d'agitation thermique $\bar{u}$; les deux tiers restants se déplacent dans les directions y et z et ne contribuent pas, de ce fait, au transport dans la direction considérée.
- Pour évaluer les flux venant de la gauche ou de la droite, nous divisons l'espace en cellules de taille égale au libre parcours moyen ℓ des particules de traceur. C'est à cette échelle microscopique, mais grande cependant devant la taille des particules, que se font les échanges. Le libre parcours moyen sera considéré dans la suite comme l'échelle minimale de variation des propriétés moyennes : concentration, température, vitesse.

Avec ces hypothèses, le flux J_+ s'écrit :

$$J_+ = \frac{1}{2} \frac{1}{3} n(x_0 - \ell) \bar{u}. \quad (1.37a)$$

Le facteur supplémentaire $1/2$ donne la fraction de particules qui se dirigent dans la direction des x positifs; $n(x_0 - \ell)$ est le nombre de molécules de traceur par unité de volume dans le plan d'abscisse $x_0 - \ell$. La formule (1.37a) représente simplement la définition classique du flux où le facteur $1/6$ permet de tenir compte des différentes orientations des vitesses. L'hypothèse principale est l'introduction de l'abscisse $x_0 - \ell$ ce qui revient à supposer que toutes les particules ont fait, pour arriver en x_0 , un saut d'une longueur juste égale à ℓ . On écrit de même le flux J_- des particules venant de la droite :

$$J_- = \frac{1}{6} n(x_0 + \ell) \bar{u}. \quad (1.37b)$$

Le flux global $J = J_+ - J_-$ résultant du gradient de concentration dn/dx est donc :

$$J = \frac{1}{6} \bar{u} [n(x_0 - \ell) - n(x_0 + \ell)] = -\frac{1}{3} \bar{u} \ell \frac{dn(x)}{dx} = -D_m \frac{dn(x)}{dx}. \quad (1.38)$$

L'équation (1.36), qui en résulte immédiatement, coïncide exactement (y compris le coefficient $1/3$) avec le résultat que donne un calcul plus exact dans l'approximation des gaz parfaits. ■

Application numérique à l'hélium gazeux

On applique la formule (1.36) à l'hélium dans les conditions normales de température et de pression. La masse d'un atome d'hélium est $m = \mathcal{M}/\mathcal{N}$ où

$\mathcal{N} = 6,02 \times 10^{23}$ est le nombre d'Avogadro et $\mathcal{M} = 4 \times 10^{-3}$ kg est la masse molaire de l'hélium. La vitesse thermique moyenne $\bar{u}$ de l'atome d'hélium est donnée par :

$$\frac{1}{2} m \bar{u}^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad (1.39a)$$

soit :

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}, \quad (1.39b)$$

où $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K est la constante de Boltzmann. On en déduit la valeur $\bar{u} = 1\,370$ m s⁻¹.

Le libre parcours moyen ℓ est donné par le résultat classique de la théorie cinétique des gaz :

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma_c} \quad (1.40)$$

où $\sigma_c = 1,5 \times 10^{-19}$ m² est la section efficace de l'atome d'hélium et le nombre n d'atomes par unité de volume est $n = \mathcal{N}/\mathcal{V}$ où le volume molaire $\mathcal{V}$ vaut $22,4 \times 10^{-3}$ m³.

On en déduit :

$$\ell = 1,8 \times 10^{-7} \text{ m} \quad \text{et} : \quad D_m = \frac{1}{3} \bar{u} \ell = 8 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Justification de l'équation (1.40). Elle signifie que, dans un cylindre de section σ_c et de longueur ℓ , il y a en moyenne une particule : ce cylindre représente en effet le volume « balayé » par la molécule lorsqu'elle se déplace d'une distance ℓ . À l'intérieur de ce volume devra se trouver une autre particule pour qu'il puisse y avoir choc.

Notons que, dans ce modèle valable pour un gaz parfait (particules sans interactions), la diffusivité D_m croît comme $\sqrt{T}$ avec la température, à densité n constante (puisque $\bar{u}$ varie de même).

Remarque. Dans une approche plus rigoureuse de la « théorie cinétique », on distingue la vitesse quadratique moyenne $u_{rms} = \sqrt{\bar{u}^2} = \sqrt{3k_B T/m}$ et la moyenne de la valeur absolue de la vitesse $\bar{u} = \overline{|u|} = \sqrt{8k_B T/m}$. La première (u_{rms}) apparaît dans la dérivation microscopique de la pression dans un gaz parfait de particules sans interaction. La seconde ($\bar{u}$) est celle qui intervient dans la détermination des propriétés de transport. Cependant, ces valeurs ne diffèrent que de 60 %. Cette distinction n'est donc pas nécessaire dans le cas présent, puisque nous sommes surtout intéressés par des ordres de grandeur.

Calcul de la diffusivité thermique pour un gaz parfait

Avec un raisonnement du même type que celui utilisé pour le coefficient de diffusion moléculaire, on trouve les valeurs suivantes pour la conductivité et la diffusivité thermiques :

$$k = \frac{1}{2} \rho C_v \bar{u} \ell \quad (1.41a)$$

et :

$$\kappa = \frac{k}{\rho C_v} = \frac{\bar{u} \ell}{2}. \quad (1.41b)$$

où la vitesse d'agitation thermique $\bar{u}$ est donnée par l'équation (1.39b), ρ est la masse volumique et C_v la capacité thermique à volume constant. La diffusivité thermique κ a une expression très proche de D_m . Le mécanisme qui contrôle le transport – la diffusion par agitation thermique – est en effet le même dans les deux cas.

Notons que la conductivité thermique k est indépendante du nombre n de molécules par unité de volume tant que l'approximation de gaz parfait reste valable. En effet, ρC_v est proportionnel à la densité n et la relation (1.41a) contient donc le produit $\ell n = n/(\sqrt{2}n\sigma)$ qui est indépendant de n . Ce résultat, *a priori* surprenant, se comprend si l'on réalise que, en augmentant le nombre n de particules par unité de volume, on augmente la fréquence des chocs entre particules, mais on diminue d'autant le libre parcours moyen et, par suite, l'efficacité du transport.

Démonstration. Ici, on suppose que l'on a, d'une part, une seule sorte de particules et que leur nombre n par unité de volume est constant. D'autre part, on suppose que l'on a un gradient de température constant suivant Ox . Compte tenu de la relation (1.39b), on aura donc également un gradient de la vitesse $\bar{u}$. Par ailleurs, les relations comme (1.37) et (1.38), qui évaluaient des flux de particules, vont représenter maintenant des flux thermiques notés J_Q avec :

$$J_{Q+} = \frac{1}{6} \rho C_v T(x_0 - \ell) \bar{u}(x_0 - \ell) \quad (1.42a)$$

et :

$$J_{Q-} = \frac{1}{6} \rho C_v T(x_0 + \ell) \bar{u}(x_0 + \ell). \quad (1.42b)$$

La quantité $\rho C_v T$ représente l'énergie par unité de volume associée au mouvement d'agitation thermique des molécules.

Remarquons que, à la différence du cas précédent de la diffusion de masse, il intervient dans les flux thermiques J_{Q+} et J_{Q-} à la fois les variations spatiales de température et les variations spatiales de la vitesse moyenne $\bar{u}$ d'agitation thermique, dues au gradient de température. Le flux thermique global J_Q s'écrit à l'aide des relations (1.40) et (1.41) :

$$J_Q = J_{Q+} - J_{Q-} = -\frac{1}{2} \rho C_v \bar{u}(x_0) \ell \frac{dT(x)}{dx} = -k \frac{dT(x)}{dx} \quad (1.43)$$

d'où l'on déduit immédiatement les expressions (1.41a-b). ■

Validité des modèles de gaz parfait

Les résultats obtenus ci-dessus ne s'appliquent ni aux gaz à très faibles pressions, ni aux gaz denses qui ont des propriétés proches de celles des liquides.

– Dans le premier cas, si le libre parcours moyen ℓ devient très supérieur à la taille L du récipient qui le contient, il y a essentiellement des chocs avec la paroi et peu de collisions entre particules. Or, ces collisions sont nécessaires pour établir l'état d'équilibre statistique décrit par la théorie cinétique des gaz. Ce régime, dit de *Knudsen*, est obtenu dans des cavités sous très faible pression : en effet, pour une pression de l'ordre de 0,1 Pascal, le libre parcours moyen des molécules de gaz devient de l'ordre de la dizaine de centimètres. On peut donc atteindre le régime de Knudsen dans des tubes de taille macroscopique.

– L'autre limite est celle où la distance moyenne entre particules (de l'ordre de $n^{-1/3}$) est comparable au libre parcours moyen. C'est le cas des liquides que nous allons traiter maintenant.

1.3.3 Phénomènes de transport diffusif dans les liquides

À la différence des gaz, on ne peut pas comprendre les différents coefficients de transport dans les liquides à partir d'un modèle simple et unique comme celui de la théorie cinétique. Nous discutons ici brièvement les cas de la diffusion de masse et de la diffusion thermique.

Coefficient de diffusion moléculaire dans les liquides

Lorsque nous avons étudié le transport dans les gaz, nous avons négligé les interactions entre molécules dans l'intervalle de temps entre deux chocs. Dans les liquides, les interactions restent toujours très importantes. Aussi, nous allons commencer par étudier la diffusion de particules sphériques de rayon R utilisées comme traceurs : dans ce cas, si la particule se déplace par rapport au liquide avec une vitesse $\mathbf{v}$, la force d'interaction avec celui-ci est égale à la *force de Stokes* :

$$\mathbf{F}_1 = -6\pi\eta R\mathbf{v}, \quad (1.44)$$

où η est un coefficient appelé coefficient de viscosité, caractéristique du fluide, qui sera défini au chapitre 2. Cette expression de la force d'interaction sera établie à la section 9.4.2. Si la particule est assez petite (typiquement pour R inférieur à un micromètre), les effets d'agitation thermique sont suffisamment importants pour que l'on puisse calculer le coefficient de diffusion moléculaire correspondant. Il suffit alors d'extrapoler vers les petites tailles pour estimer le coefficient de diffusion d'un traceur moléculaire. On peut mettre la relation (1.44) sous la forme :

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{\mathbf{v}}{\mu} \quad (1.45)$$

avec :

$$\mu = \frac{1}{6\pi\eta R} \quad (1.46)$$

(μ est appelé *coefficient de mobilité*). Dans un célèbre article sur le mouvement brownien publié en 1905, Einstein a établi la relation générale suivante entre le coefficient de diffusion moléculaire D_m et la mobilité μ :

$$D_m = \mu k_B T \quad (1.47)$$

soit, d'après (1.46) :

$$D_m = \frac{k_B T}{6 \pi \eta R}. \quad (1.48)$$

On note que le coefficient D_m représente un étalement en l'absence de force extérieure mais en présence d'agitation thermique, alors que la mobilité μ est définie en présence d'une force extérieure $\mathbf{F}_1$.

La relation (1.48) s'applique assez bien jusqu'à des rayons de particules de taille moléculaire et donne donc un ordre de grandeur de coefficients de diffusion de liquides. Ainsi, pour une molécule de 1 nm de diamètre avec une viscosité $\eta = 10^{-3}$ Pa.s, on trouve : $D_m = 2,2 \times 10^{-10}$ m²s⁻¹. Cette valeur est très inférieure à celle obtenue dans les gaz.

Démonstration de la relation d'Einstein. Pour démontrer la relation d'Einstein, nous allons écrire, dans un cas particulier, l'équilibre entre les effets de l'agitation thermique et d'une force extérieure. Supposons un ensemble de particules d'un traceur quelconque (moléculaire ou non), de mobilité μ et de coefficient de diffusion D_m placé dans un champ de force $\mathbf{f}$ constant parallèle à l'axe Ox . En pratique, ce modèle peut, par exemple, correspondre au comportement d'un ensemble de particules browniennes sédimentant sous l'effet de la gravité. Elles sont supposées en équilibre thermique avec un thermostat à température T . Le champ de force $\mathbf{f}$ crée un potentiel $U = -fx$. La présence de ce potentiel crée un gradient (dn/dx) du nombre n de particules par unité de volume; localement, $n(x)$ vérifie la loi de distribution de Boltzmann :

$$n(x) = n_0 e^{-\frac{U}{k_B T}} = n_0 e^{\frac{fx}{k_B T}} \quad (1.49)$$

d'où :

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} = \frac{f}{k_B T}. \quad (1.50)$$

Le gradient dn/dx induit un flux diffusif J_m de particules avec :

$$J_m = -D_m \frac{dn}{dx} = -D_m n \frac{f}{k_B T}. \quad (1.51)$$

La force f induit une vitesse de dérive moyenne des particules $v_d = \mu f$. Notons que v_d est une vitesse moyenne de l'ensemble des particules; elle peut être très inférieure à la vitesse d'agitation thermique d'orientation aléatoire des particules prises individuellement. À v_d correspond un flux J_d de particules avec :

$$J_d = n v_d = n \mu f. \quad (1.52)$$

À l'équilibre statistique, les deux flux doivent se compenser avec $J_m + J_d = 0$. En reportant les équations (1.51) et (1.52) dans cette égalité, on retrouve bien la relation d'Einstein (1.47).

Conductivité thermique des liquides

Dans un liquide, il existe deux mécanismes de transfert thermique. Le premier correspond à la propagation de proche en proche des vibrations des particules individuelles du liquide, telle que l'on peut se la représenter approximativement dans l'expérience modèle qui utilise un ensemble dense de palets mis en vibration (Fig. 1.1). Le second existe pour les métaux à l'état liquide (Hg, Na...) et se fait par l'intermédiaire des électrons responsables de la conduction électrique. Ces deux mécanismes sont similaires à ceux qui assurent la conduction thermique dans un solide cristallin ; nous ne les étudions pas ici. Notons toutefois la grande efficacité du mécanisme par transport électronique qui fait que les métaux liquides sont de bons conducteurs thermiques tout en ayant une capacité thermique élevée. Le sodium liquide est, par exemple, utilisé comme fluide caloporteur dans les échangeurs thermiques des réacteurs nucléaires surgénérateurs.

Valeurs des coefficients de transport diffusif

Dans le tableau 1.2, on trouvera des valeurs des coefficients de transport diffusif pour quelques corps purs. Aux coefficients D_m et κ analysés au cours de ce chapitre, nous avons ajouté le coefficient de *viscosité cinématique* ν . Il représente la diffusivité de la quantité de mouvement et sa signification physique sera discutée en détail au chapitre 2 (ν est relié à la viscosité dynamique η introduite dans la relation (1.44) et à la masse volumique ρ par $\nu = \eta/\rho$). Les coefficients D_m , κ et ν ont tous trois la même dimension $[L]^2[T]^{-1}$. Dans de nombreux processus, deux phénomènes de diffusion pourront intervenir simultanément ; leur efficacité relative sera alors un paramètre très important. On la caractérise par un nombre sans dimension qui est le rapport des constantes de temps de diffusion des quantités considérées sur une distance de l'ordre de la taille caractéristique L de l'écoulement. Nous verrons plusieurs exemples de tels nombres sans dimension dans la section 2.3. Ils jouent un rôle important dans de nombreux phénomènes de transfert d'énergie thermique et de matière.

1.4 Effets de surface et tension superficielle

Les interfaces entre un liquide et un autre corps, qu'il s'agisse d'un gaz, d'un autre liquide ou d'un solide, jouent un rôle très important dans l'équilibre et l'écoulement de films ou de nappes fluides. Nous allons d'abord introduire le coefficient de tension superficielle et discuter sa relation avec l'énergie de ces interfaces.

1.4.1 La tension superficielle

Mise en évidence des effets de la tension superficielle

Considérons l'expérience représentée par la figure 1.14 : un film de liquide (de l'eau savonneuse par exemple) est supporté par un cadre rectangulaire

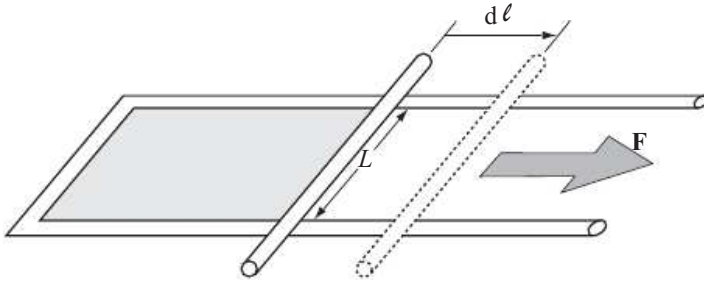


FIG. 1.14 – Principe de la mise en évidence de la tension superficielle.

dont l'un des côtés est mobile. Si nous laissons ce côté libre, on constate qu'il se déplace de façon à diminuer la surface du film. Pour le maintenir en place, il est nécessaire d'exercer une force F qui est proportionnelle à la longueur L du côté libre. Pour accroître la surface du film d'une quantité $dS = L d\ell$, il faut fournir une énergie dW qui correspond au travail de la force F et s'exprime par :

$$dW = F d\ell = 2\gamma L d\ell = 2\gamma dS. \quad (1.53)$$

γ est appelé coefficient de *tension superficielle* entre le liquide considéré et l'air ; le facteur 2 traduit le fait que le film de liquide est constitué de deux interfaces liquide-air. La relation (1.53) montre que γ correspond à une énergie par unité de surface de chaque interface ; il représente également la norme de la force par unité de longueur exercée par chaque interface sur le côté du cadre. Son unité est donc le newton par mètre (N.m^{-1}). Sa valeur pour l'eau pure à la température ambiante est environ $70 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$. Dans le tableau 1.1 sont reportées les valeurs numériques de la tension superficielle et de sa variation avec la température pour quelques liquides usuels (les valeurs données correspondent à la tension superficielle entre les liquides et l'air ; elles sont différentes dans le cas d'interfaces entre deux liquides, ou entre un liquide et un solide, comme nous le verrons au paragraphe suivant).

Les phénomènes de tension superficielle ont pour effet de minimiser l'aire de l'interface, compte tenu des contraintes imposées par ailleurs au système (gravité, pression...). En particulier, en l'absence de gravité, une goutte prend une forme sphérique car celle-ci assure une surface minimale pour un volume donné.

Origine physique des forces de tension superficielle

La tension superficielle est associée aux forces de cohésion internes qui s'exercent entre les molécules d'un fluide : forces de van der Waals, liaisons hydrogène (dans l'eau par exemple), liaisons ioniques, liaisons métalliques (dans les métaux comme le mercure). Dans un fluide en volume, les forces exercées par chaque molécule sont équilibrées par celles exercées par les molécules voisines. Si l'on introduit une interface, par exemple avec le vide, les forces

TAB. 1.1 – Ordre de grandeur de quelques paramètres physiques caractérisant les propriétés interfaciales de liquides usuels.

	Tension superficielle γ (N.m ⁻¹)	Variation de γ avec la température $b = -d\gamma/dT$ (mN.m ⁻¹ .K ⁻¹)	Longueur capillaire $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ (m)
Métaux liquides	7×10^{-2} à 2,5	10^{-2} – 10^{-1}	2 à 5×10^{-3}
Liquides organiques	50×10^{-3}	10^{-2} – 10^{-1}	1 à 3×10^{-3}
Sels fondus	10^{-1}	10^{-2}	2 à 3×10^{-3}
Huiles silicones	20×10^{-3}	10^{-2}	10^{-3}
Eau	70×10^{-3}	10^{-1}	3×10^{-3}
Verre fondu	10^{-1}	10^{-2}	5×10^{-3}

exercées dans sa direction ne sont plus équilibrées : c’est l’origine de l’énergie superficielle. La valeur de la tension superficielle sera très variable suivant la nature des forces qui s’exercent entre les atomes ou les molécules. La tension superficielle élevée de beaucoup de métaux liquides ($0,48 \text{ N.m}^{-1}$ pour le mercure et jusqu’à $2,5 \text{ N.m}^{-1}$ pour l’osmium à 3 000 K) s’explique par la forte valeur des énergies associées aux liaisons métalliques ; les forces de Van der Waals, qui jouent un rôle prépondérant dans de nombreux corps moléculaires, donnent des valeurs seulement de l’ordre de 20×10^{-3} à $25 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$.

La tension superficielle définie précédemment concerne une interface entre un corps et le vide. Dans le cas du contact entre deux corps, l’énergie de surface de chacun des corps est modifiée par la présence de l’autre et l’on parle alors de *tension interfaciale*. Cette dernière dépend de la tension superficielle de chacun des deux composés, ainsi que de l’énergie d’interaction entre les deux composés. Pour bien indiquer qu’il s’agit d’une tension interfaciale, on précise en indice les corps en présence ; ainsi, γ_{AB} représente la tension interfaciale (c’est-à-dire l’énergie par unité de surface) entre le corps *A* et le corps *B*.

Influence de la température sur la tension superficielle

La diminution de la cohésion d’un liquide lorsque la température augmente se traduit par une diminution de la tension superficielle avec la température. Pour des variations modérées de température, on peut utiliser la dépendance linéaire suivante :

$$\gamma(T) = \gamma(T_0)[1 - b(T - T_0)]. \tag{1.54}$$

Le coefficient *b*, de l’ordre de 10^{-2} à 10^{-1} K^{-1} , est positif, ce qui traduit la diminution de l’énergie de surface lorsque la température augmente. Ainsi, le coefficient de tension superficielle s’annule au point critique. Nous verrons à la section 8.2.4 que ces variations peuvent induire des écoulements (effet Marangoni).

Variation de la tension superficielle en présence d'un surfactant

La présence d'un composé tiers (ou surfactant) au niveau de l'interface entre deux fluides peut conduire à la diminution de la tension superficielle. Sans entrer dans les détails des interactions réciproques entre les trois composés en présence, nous pouvons expliquer qualitativement cet abaissement de la tension superficielle : prenons un surfactant tel qu'un acide gras (tel que l'acide stéarique qui est le principal constituant des bougies). C'est un composé formé d'une tête acide polaire, partiellement ionisée, et d'une longue queue constituée de radicaux CH_2 . En présence d'eau, la molécule se dispose de façon à placer sa tête polaire du côté de l'eau (on dit que la tête est *hydrophile*) et sa queue aliphatique *hydrophobe* vers le milieu extérieur. Pour cette raison, on parle de composés *amphiphiles*. Cette interposition des molécules de surfactant entre les deux fluides diminue les interactions directes entre leurs molécules et, de ce fait, diminue la tension interfaciale par suite de l'affinité du surfactant pour chacun des deux fluides. Il devient alors énergétiquement moins défavorable pour le système d'accroître l'aire de l'interface entre les deux fluides.

Les surfactants jouent un rôle clé dans de nombreux problèmes de physicochimie, en particulier dans le domaine des détergents : ces molécules se placent à la surface des gouttes de corps gras avec la partie hydrophobe vers l'intérieur et les têtes hydrophiles vers l'extérieur : cela permet leur solubilisation dans l'eau. Les surfactants interviennent aussi dans la mobilité des liquides au voisinage des interfaces.

1.4.2 Forces de pression associées à la tension superficielle

Loi de Laplace

Considérons à présent une goutte sphérique de rayon R d'un fluide (1), immergée dans un autre fluide (2) (Fig. 1.15a). Pour qu'une telle goutte puisse être en équilibre, il est nécessaire que l'intérieur de la goutte soit en surpression par rapport à l'extérieur d'une quantité :

$$p_1 - p_2 = 2\frac{\gamma}{R}. \quad (1.55)$$

Dans le cas d'une bulle de savon, la mesure de la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur d'une bulle de savon donne le double de la valeur précédente : il y a, en effet, deux interfaces eau savonneuse-air et chacune donne une contribution égale à $2\gamma/R$ (Fig. 1.15b).

Démonstration. Le rayon de la goutte correspond à l'équilibre entre les effets de tension de surface (minimisation de l'aire de l'interface) et de surpression de l'intérieur de la goutte par rapport à l'extérieur (cette surpression peut, par exemple, être assurée en reliant la goutte à un réservoir qui maintienne la pression p_1).

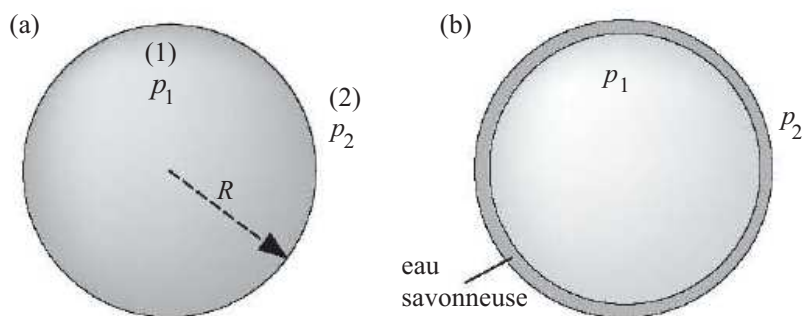


FIG. 1.15 – (a) Différence de pression capillaire ($p_1 - p_2$) entre l'intérieur et l'extérieur d'une goutte sphérique d'un fluide (1) dans un fluide (2); (b) cas d'une bulle d'air dans l'air pour laquelle il existe deux interfaces eau savonneuse-air.

Pour justifier la relation (1.55), appliquons le principe des travaux virtuels pour un accroissement de rayon dR de la bulle sous une différence de pression $\Delta p = p_1 - p_2$ constante. La valeur de Δp correspondant à l'équilibre mécanique sera telle que la variation d'énergie totale dW_t correspondante soit nulle. dW_t est la somme de deux termes :

- l'un, dW_s , dû à la variation d'énergie de surface de la sphère :

$$dW_s = d(4\pi\delta R^2) = 8\pi\delta R dR ; \quad (1.56)$$

- l'autre, dW_p , dû au travail des forces de pression :

$$dW_p = -\Delta p dV = -(p_1 - p_2)d[(4/3)\pi R^3] = -(p_1 - p_2)4\pi R^2 dR. \quad (1.57)$$

En écrivant que $dW_s + dW_p = 0$, on obtient la formule (1.55), aussi appelée loi de Laplace. ■

Dans le cas où la surface de séparation entre les deux fluides est quelconque, la *loi de Laplace* prend la forme plus générale :

$$p_1 - p_2 = \gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) = \gamma C, \quad (1.58)$$

où R et R' sont les rayons de courbure principaux de la surface au point considéré (rayons de courbure extrema des courbes, sections de la surface par deux plans perpendiculaires contenant la normale $\mathbf{n}$ (Fig. 1.16a CC). La somme $C = (1/R) + (1/R')$ est la *courbure moyenne* locale de l'interface. Les rayons de courbure R et R' sont algébriques et comptés positivement lorsque le centre de courbure correspondant est situé du côté du fluide (1). Sur la figure 1.16b CC, on peut voir un film de liquide tendu sur un cadre, dans une configuration où la courbure C en chaque point est nulle : R et R' sont différents de zéro, mais opposés. Cela permet de satisfaire la loi de Laplace (Éq. 1.58) lorsque, comme ici, la pression de part et d'autre de l'interface est la même.

La loi de Laplace intervient dans de très nombreux phénomènes physiques. Citons en particulier la nucléation des bulles dans les phénomènes d'ébullition : il est impossible de faire apparaître des bulles de vapeur à la température normale d'ébullition d'un liquide car cela demanderait un excédent de pression très élevé entre l'intérieur de la bulle et le fluide, au moment de la formation de la bulle ($\Delta p \propto 1/R$) ; il en résulte un retard à l'ébullition. Cette dernière s'effectue en général, par croissance de bulles microscopiques pré-existantes. Pour limiter ces phénomènes de retard, on place dans le liquide des objets générateurs de bulles (billes de verre) ; ils donnent l'échelle de taille minimale à partir de laquelle les bulles de vapeur vont nucléer et grossir. Plus cette échelle est grande, plus la surchauffe est réduite.

1.4.3 Étalement de gouttes sur une surface – notion de mouillage

Dans ce paragraphe, nous étudions les conditions dans lesquelles une goutte d'un liquide *mouille* une surface solide, c'est-à-dire s'étale sur cette surface.

Paramètre d'étalement

Afin de voir si l'étalement d'une goutte d'un liquide (l) sur un plan solide (s) est énergétiquement favorable, on compare l'énergie d'une interface solide-vide recouverte ou non d'une couche de liquide (Fig. 1.17). On appelle γ_{sl} l'énergie de cette surface par unité de surface en présence de liquide, γ_{so} son énergie dans le vide et $\gamma = \gamma_{lo}$ l'énergie *interfaciale* entre le liquide et le vide. Les énergies par unité de surface totales dans les deux situations sont respectivement $F_{\sigma f} = \gamma_{lo} + \gamma_{sl}$ et $F_{\sigma} = \gamma_{so}$. Nous supposons ici que l'épaisseur du film est suffisamment grande par rapport à la portée des forces entre atomes ou molécules pour que l'on puisse négliger l'interaction entre les deux interfaces (films qualifiés de macroscopiques). Il existe des films microscopiques d'épaisseur submicronique pour lesquels cette condition ne sera plus vérifiée.

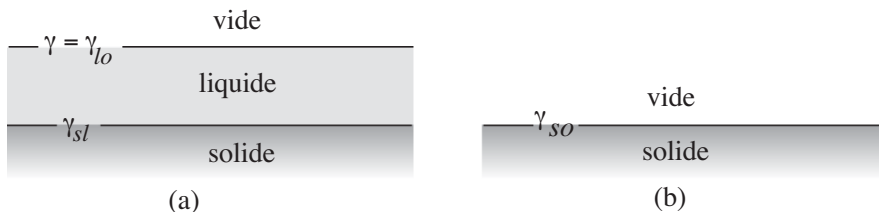


FIG. 1.17 – Calcul des énergies interfaciales pour une surface recouverte (a) ou non (b) d'un film de liquide.

La présence d'un film sera donc énergétiquement favorable si la différence :

$$S_0 = F_\sigma - F_{\sigma f} = \gamma_{so} - \gamma_{sl} - \gamma \quad (1.59)$$

est positive. On appelle S_0 le *paramètre d'étalement*. Dans la plupart des cas, l'environnement extérieur des surfaces est constitué par un gaz et l'on doit remplacer les énergies de surface γ_{lo} et γ_{so} par rapport au vide par des énergies γ_{lg} et γ_{sg} par rapport au gaz environnant. Les différences peuvent être significatives, en particulier entre γ_{sg} et γ_{so} compte tenu des phénomènes d'adsorption, et tout particulièrement si la phase gazeuse contient la vapeur du liquide (situation d'équilibre dans le cas d'une vapeur saturante). On utilise alors pratiquement le paramètre d'étalement S :

$$S = F_\sigma - F_{\sigma f} = \gamma_{sg} - \gamma_{sl} - \gamma, \quad (1.60)$$

où γ représente, cette fois, la tension interfaciale, γ_{lg} , entre le liquide et le gaz.

Mouillage partiel et total

Lorsque le paramètre d'étalement S est négatif, on est dans des conditions de mouillage partiel; pour S positif, on a mouillage total et il peut exister un film liquide sur la surface solide. D'un point de vue moléculaire, les solides « durs », à liaisons fortes (ioniques, covalentes ou métalliques), ont de fortes énergies de surface ($\gamma_{so} = 0,5 - 1 \text{ N.m}^{-1}$). Ce sont, par exemple, le verre, la silice, les oxydes métalliques : ils sont généralement mouillés par la plupart des liquides moléculaires. Ils seront contaminés également facilement par des impuretés présentes dans l'environnement, ce qui peut modifier les propriétés de mouillage.

Par ailleurs, les solides à liaisons de plus basse énergie (Van der Waals, liaison hydrogène) auront des énergies de surface plus faibles ($\gamma_{sg} = 5 \times 10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$). Ce sera le cas des polymères, du téflon, ou de la paraffine : de telles surfaces seront plus difficilement contaminées. Le mouillage sera total ou partiel, suivant le liquide utilisé.

Équilibre d'une goutte sur une paroi

Analysons tout d'abord le cas des gouttes de petite taille pour lesquelles la gravité est négligeable (Fig 1.18a). On peut écrire les conditions d'équilibre de forces pour la ligne triple de contact de l'interface liquide avec la paroi. La composante verticale est équilibrée par la réaction élastique de la paroi solide (pour un étalement sur un substrat liquide, on observerait une déformation de ce dernier). L'écriture de l'équilibre des composantes horizontales de la force donne :

$$\gamma_{sl} + \gamma \cos \theta = \gamma_{sg} \quad (1.61)$$

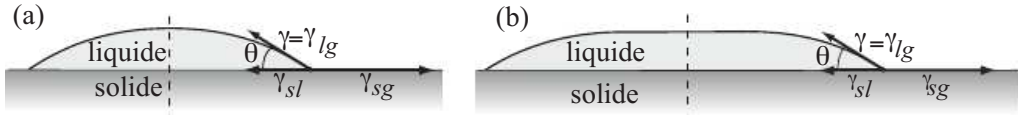


FIG. 1.18 – (a) Équilibre d'une goutte posée sur un plan solide lorsque la goutte est assez petite pour que la gravité soit négligeable ; (b) cas d'une goutte aplatie sous l'effet de la gravité.

En combinant ce résultat avec l'expression (1.60) du paramètre d'étalement, on obtient la loi de *Young-Dupré* :

$$\gamma(\cos \theta - 1) = S. \quad (1.62)$$

θ est appelé *angle de contact statique*. On vérifie bien que, pour $S = 0$, on a : $\cos \theta = 1$. Pour des gouttes de plus grande taille (Fig. 1.18b), la goutte est aplatie, mais l'angle de contact de l'interface avec la paroi garde la même valeur.

Déplacement d'une interface

Abordons maintenant le cas de lignes de contact en déplacement. Il s'agit ici de déplacements à des vitesses infiniment petites pour lesquelles on reste dans le domaine quasi statique. Le cas du déplacement d'interfaces à vitesse finie sera traité à la section 8.2.2. Même lorsque le déplacement est très lent, on constate qu'il y a une différence entre les angles de contact d'un liquide avec une paroi suivant le sens de déplacement de la ligne de contact. On observe cet effet aussi bien lors de l'étalement (ou de la rétraction) de gouttes sur un plan (Figs. 1.19a-b), que lors du déplacement spontané d'une goutte sur un plan incliné (Fig. 1.19c) ou lors du mouvement d'une goutte pendulaire à l'intérieur d'un tube (Fig. 1.19d).

Aux très faibles vitesses de déplacement considérées dans ce chapitre, cet effet est dû à la présence de rugosités ou d'hétérogénéités chimiques sur la surface solide. On définit un angle d'avancée θ_a et un angle de reculée θ_r , comme la limite des angles de contact dans chacune de ces situations, lorsque la vitesse de la ligne de contact tend vers zéro.

1.4.4 Influence de la gravité

Formes de gouttes ; nombre de Bond

Les effets de capillarité, qui sont directement liés à la courbure des interfaces, sont importants lorsque l'on s'intéresse à des phénomènes aux petites échelles de longueur. Pour des objets de grande taille, ils sont masqués par l'influence des forces en volume, comme la gravité. La figure 1.20 illustre ce point : des gouttes de mercure de tailles différentes sont posées sur une surface

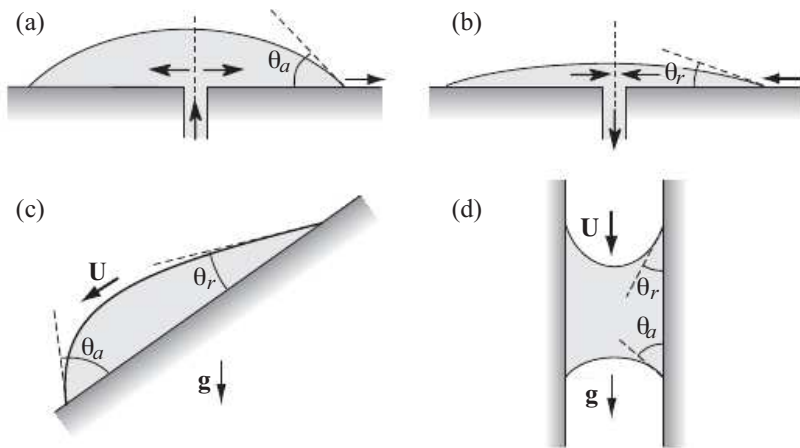


FIG. 1.19 – Différence entre les angles d’avancée (a) et de reculée (b) pour des gouttes posées en situation de mouillage partiel lorsque l’on augmente (a) ou diminue (b) leur volume. (c) Angles d’avancée et de reculée en avant et en arrière d’une goutte se déplaçant à vitesse très faible le long d’un plan incliné. (d) Angle de contact d’avancée et de reculée pour un bouchon liquide pendulaire se déplaçant très lentement à l’intérieur d’un tube capillaire.

horizontale. Les plus petites ont une forme de calotte sphérique, tandis que les plus grosses sont aplaties sous l’effet de la gravité.

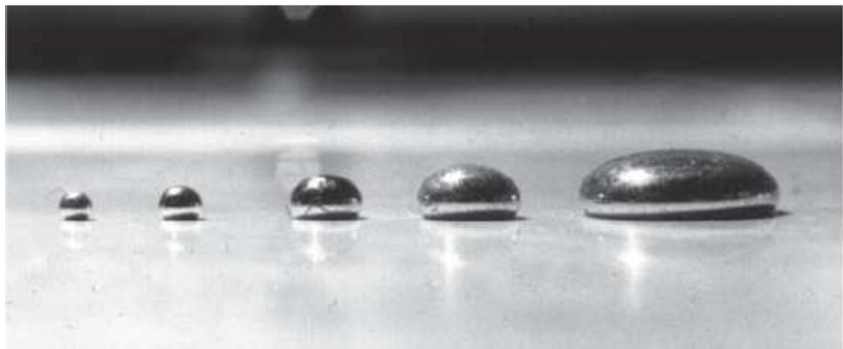


FIG. 1.20 – Déformation de gouttes de mercure de tailles variables posées sur un plan solide en verre, sous l’effet des forces de pesanteur. La plus petite goutte est sensiblement une calotte sphérique de diamètre voisin de 2 mm. On peut remarquer que le mercure ne mouille pas le verre, c’est-à-dire que, au voisinage du verre, l’interface est convexe (la notion de mouillage a été abordée au paragraphe précédent) [photographie des auteurs].

Estimons l’ordre de grandeur relatif des différences de pression capillaires et hydrostatiques intervenant sur une goutte en forme de calotte sphérique posée sur une surface plane (Fig. 1.21).

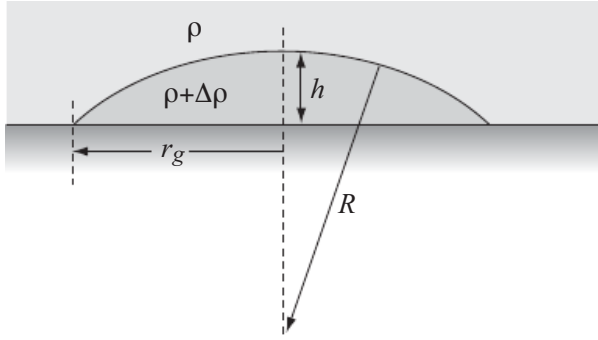


FIG. 1.21 – Géométrie d'une goutte partiellement mouillante posée sur une surface plane.

Pour plus de généralités, on considère une goutte d'un fluide de densité $\rho + \Delta\rho$ entourée d'un fluide de densité ρ . La différence de pression capillaire et la différence de pression hydrostatique sur la hauteur h de la goutte sont respectivement :

$$\Delta p_{cap} = 2 \frac{\gamma}{R} \quad (1.63a)$$

et :

$$\Delta p_{grav} = \Delta\rho g h. \quad (1.63b)$$

Par ailleurs, si la goutte n'est pas trop déformée par rapport à une calotte sphérique, le rayon r_g de la ligne de contact s'écrit : $r_g^2 \approx 2Rh$. On peut donc caractériser l'importance relative des effets de gravité et de ceux de capillarité par le rapport des différences de pression correspondantes, soit :

$$Bo = \frac{\Delta\rho g h}{2\gamma/R} \approx \frac{\Delta\rho g r_g^2}{\gamma}. \quad (1.64)$$

Ce rapport est appelé *nombre de Bond*. Une grande valeur du nombre de Bond correspond à des effets de gravité dominants ceux de tension superficielle. La valeur $Bo = 1$ permet de définir une longueur caractéristique l_c appelée *longueur capillaire*. Elle s'écrit :

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\Delta\rho g}}. \quad (1.65)$$

Des valeurs typiques de l_c sont données dans le tableau 1.1. Dans le cas du mercure, elle est de l'ordre de $l_c \approx 2$ mm ; pour l'eau, $l_c \approx 3$ mm. Des petites valeurs du nombre de Bond (pour lesquelles les effets capillaires dominent) sont également obtenues dans des expériences hydrodynamiques en microgravité. On peut aussi diminuer la masse volumique effective en utilisant deux fluides non miscibles présentant une faible différence $\Delta\rho$ de masse volumique ; on parle alors de gravité compensée (par l'effet de la poussée d'Archimède). Pour déterminer l'importance relative de la tension superficielle pour un écoulement donné, on compare l_c à ses dimensions caractéristiques.

Ascension capillaire le long d'une paroi

La longueur capillaire l_c intervient dans de nombreux phénomènes. Elle représente, par exemple, l'ordre de grandeur de la hauteur d'ascension capillaire d'un fluide le long d'une paroi verticale dans le cas où le fluide mouille celle-ci, c'est-à-dire lorsque le centre de courbure de l'interface est à l'extérieur du liquide (Fig. 1.22).

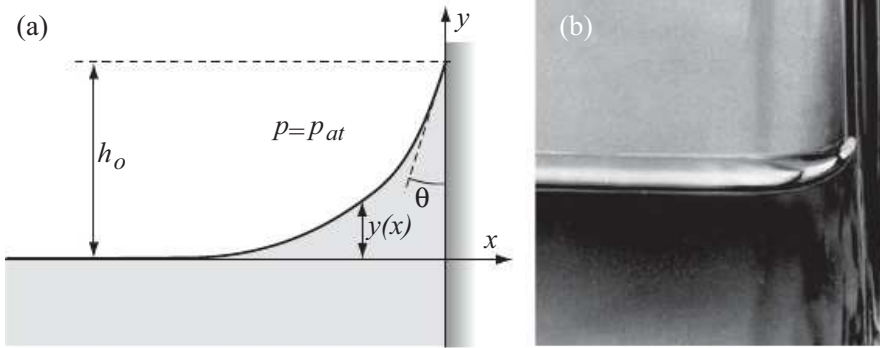


FIG. 1.22 – Ascension d'un fluide mouillant sur une paroi verticale : (a) schéma ; (b) expérience réalisée avec de l'eau dans un récipient en verre. La hauteur d'ascension est de l'ordre du millimètre (photographie C. Rousselin, Palais de la découverte).

Nous allons déterminer maintenant la hauteur d'ascension du liquide au voisinage de la paroi. Signalons qu'il peut exister un film microscopique très mince (quelques centaines d'angströms d'épaisseur) au-dessus de la ligne de contact du ménisque avec la paroi solide. Nous négligeons ce film dans la présente étude.

La pression à l'intérieur du liquide à une ordonnée $y(x)$ au-dessous de l'interface s'écrit : $p_s(x) = p_{at} - (\gamma/R(x)) + \rho g y(x)$ où $R(x)$ représente le rayon de courbure local de l'interface (il est positif dans le cas présent), p_{at} est la pression de l'air au-dessus de l'interface. Le terme en γ/R représente les effets de la tension superficielle et le terme $\rho g y(x)$ ceux de pression hydrostatique. D'autre part, juste au-dessous de l'interface, dans sa partie plane, la pression dans le liquide est p_{at} . On en déduit l'égalité :

$$\rho g y(x) = \frac{\gamma}{R(x)}. \quad (1.66)$$

En utilisant la relation géométrique $R(x) = [(1 + y'(x)^2)^{3/2}]/y''(x)$, on obtient l'équation différentielle :

$$\rho g y = \gamma \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (1.67)$$

soit :

$$d(y^2) = -2 \frac{\gamma}{\rho g} d\left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}\right). \quad (1.68)$$

On voit apparaître l'échelle de longueur caractéristique du problème, la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$. Par intégration, en utilisant les conditions asymptotiques pour x très grand (en valeur absolue), $y \rightarrow 0$ et $y' \rightarrow 0$, et en remarquant que $y'(x=0) = -\cotan \theta_0$, on obtient pour la hauteur d'ascension capillaire le long de la paroi :

$$h_0^2 = 2l_c^2(1 - \sin \theta_0). \quad (1.69)$$

Cette hauteur d'ascension est donc bien de l'ordre de grandeur de la longueur capillaire, corrigée par un facteur faisant intervenir les propriétés de mouillage de la paroi par le liquide (angle de raccordement θ_0). Le cas de la figure 1.22 est celui d'un fluide mouillant ($\theta_0 < 90^\circ$). Pour un fluide non mouillant comme le mercure ($\theta_0 > 90^\circ$), l'interface descend au voisinage de la paroi au lieu de remonter et h_0 représente la hauteur dont descend le liquide le long de la paroi, au-dessous de sa surface libre loin de cette paroi.

Ascension capillaire dans un tube ; loi de Jurin

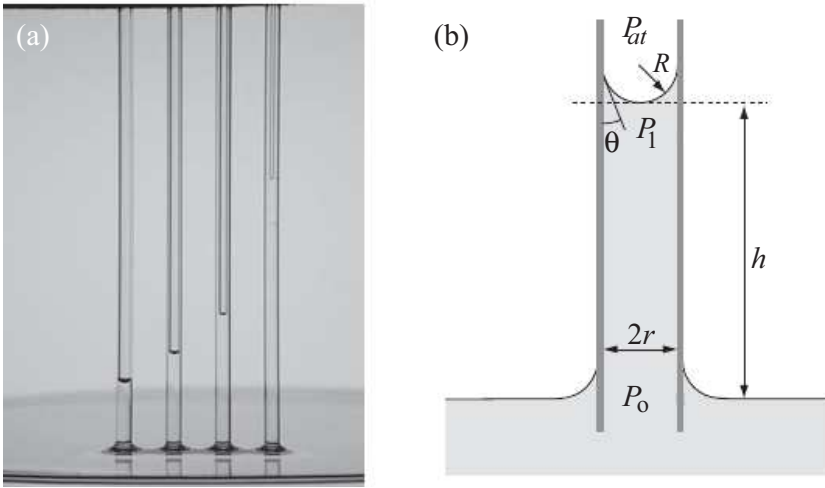


FIG. 1.23 – Ascension capillaire d'un fluide dans un ensemble de tubes de diamètres décroissants de gauche à droite (cliché K. Piroird) ; (b) schéma pour le calcul de la hauteur d'ascension.

Lorsqu'un tube capillaire est plongé dans un liquide (Fig. 1.23a), on observe, comme précédemment, une déformation de l'interface près des parois, mais, également, une ascension du ménisque dans le tube par rapport à l'extérieur si celui-là est de petit diamètre et si le fluide est mouillant pour la paroi du tube (angle de raccordement θ avec la paroi solide inférieur à 90°) ; si le fluide est non mouillant – cas du mercure par exemple – le niveau de l'interface dans le tube est plus bas qu'à l'extérieur. Nous allons calculer l'ordre de grandeur de la différence de niveau entre l'intérieur et l'extérieur du tube capillaire. Nous écrivons l'équilibre de la colonne de liquide située dans le tube capillaire

(colonne de rayon r et de hauteur h) sous l'effet de son poids ($\pi r^2 h \rho g$) et de la différence de pression au niveau de l'interface (Fig. 1.23b). Supposons que l'interface entre le liquide et l'air à l'intérieur du capillaire soit sphérique et notons R son rayon. La pression P_1 juste au-dessous de l'interface est égale à $(P_{at} - 2\gamma/R)$. Par ailleurs, le rayon de courbure R de l'interface est lié au rayon r du tube et à l'angle de raccordement θ par la relation $r = R \cos \theta$. Pour la différence de pression de part et d'autre de l'interface, on a donc :

$$\Delta p = P_{at} - P_1 = \frac{2\gamma \cos \theta}{r} = \frac{4\gamma \cos \theta}{d}, \quad (1.70a)$$

où d est le diamètre du tube capillaire. La pression P_1 vaut également $P_{at} - \rho g h$. En substituant cette expression de P_1 dans la relation (1.70a), on obtient :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} = 2 \frac{l_c^2}{r} \cos \theta. \quad (1.70b)$$

C'est la *loi de Jurin*. Elle est d'autant mieux vérifiée que l'on peut négliger l'ascension capillaire sur les parois donnée par la formule (1.69) par rapport à h . Cela implique que r soit très petit devant h . Pour une valeur de la tension superficielle $\gamma = 7 \times 10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$ (eau), $\cos \theta = 0,6$ et $r = 0,5 \text{ mm}$, on trouve une valeur $h \approx 20 \text{ mm}$ largement supérieure à l_c ($l_c = 3 \text{ mm}$ pour l'eau). Pour un fluide non mouillant (angle de contact $\theta > 90^\circ$), la formule (1.70b) reste valable en donnant une valeur de h négative correspondant à un abaissement du niveau de l'interface dans le tube.

1.4.5 Quelques méthodes de mesure de la tension superficielle

Plusieurs de ces méthodes sont basées sur les phénomènes décrits plus haut. Dans la première catégorie, la tension superficielle est déterminée directement, sans connaître l'angle de contact des liquides avec les surfaces solides.

Mesures de la géométrie ou d'autres caractéristiques des gouttes

– Méthode de la goutte pendante

Une goutte est émise au bout d'un tube capillaire. Sa forme, influencée par la gravité, est analysée par traitement d'image et comparée aux profils théoriques en ajustant la valeur de la tension superficielle pour avoir un accord satisfaisant. La précision peut être de l'ordre du pour cent, ou mieux dans les cas favorables.

– Poids des gouttes formées au bout d'un tube capillaire (compte-gouttes)

Le poids des gouttes produites par un tube capillaire est approximativement proportionnel à la tension superficielle et il dépend du rayon du tube. En

moyennant un nombre suffisant de mesures et en appliquant des corrections adaptées, on peut avoir une précision de l'ordre de quelques pour cents sur la mesure.

Nous allons décrire maintenant des méthodes qui font intervenir l'angle de contact des liquides avec les parois solides. Associées aux méthodes présentées plus haut, elles permettent de déterminer à la fois la tension superficielle et l'angle de contact.

Mesures de forces sur des surfaces solides

Ces méthodes posent souvent des problèmes de reproductibilité, de préparation des surfaces et de dépendance par rapport à la façon dont les surfaces sont mises en contact avec les fluides.

– Mesures de hauteur d'ascension capillaire

Cette méthode consiste à mesurer la hauteur d'ascension d'un liquide dans un tube capillaire. On en déduit la tension superficielle en utilisant la loi de Jurin donnée par la relation (1.70b).

– Méthode d'arrachement

On tire verticalement sur un cylindre creux plongé dans le liquide et l'on mesure la force exercée par le liquide sur le cylindre au moment où ce dernier se détache de l'interface. La force F vérifie :

$$F = P_{\text{Arch.}} + 2(2\pi R)\gamma \cos \theta$$

où $P_{\text{Arch.}}$ représente la poussée d'Archimède exercée sur le cylindre (le facteur 2 provient de la présence de deux lignes de contact liquide-solide-air au niveau du cylindre). Au moment où il y a détachement (situation de la Fig. 1.24), la poussée d'Archimède n'intervient plus et l'interface liquide-air est verticale au contact du cylindre. On a alors $\cos \theta = 1$ et :

$$F = 4\pi R\gamma. \quad (1.71)$$

Notons que, pour avoir des mesures fiables, il est nécessaire de travailler avec des surfaces très propres.

Remarque. Cette méthode de détermination de la tension superficielle par la mesure d'une force est connue aussi sous le nom de méthode de Wilhelmy.

Mesures d'angles de contact

Les angles de contact d'une surface liquide avec une paroi peuvent tout d'abord être déterminés en combinant des mesures de force ou d'ascension capillaire sur des interfaces et des mesures directes de tension superficielle.

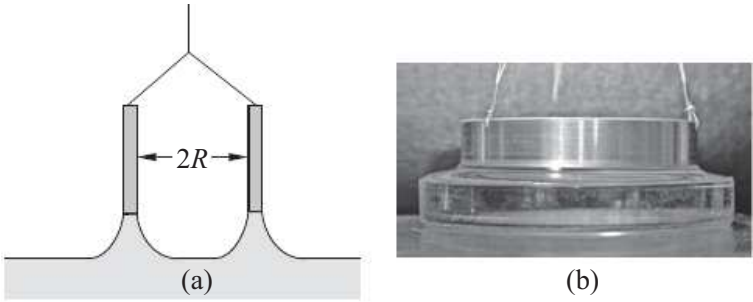


FIG. 1.24 – Mesure de tension superficielle par la méthode d’arrachement d’un anneau. (a) Principe de la mesure; (b) vue d’un dispositif expérimental (cliché P. Jenffer).

Ils peuvent également être déterminés directement par des observations au microscope dans les cas favorables. D’autres techniques donnent des mesures plus rapides et précises dans des cas particuliers :

- *mesures interférométriques* par franges d’égale épaisseur près d’une ligne de contact dans le cas d’un angle de mouillage faible ($< 2^\circ$) ;
- *mesures par réflexion* (Fig. 1.25) sur la surface supérieure d’une goutte posée (angles de contact inférieurs à 20°).

La limite de la partie illuminée de l’écran vient des rayons issus de la ligne de contact et son rayon R vérifie :

$$\tan 2\theta = \frac{R - r_g}{h}. \tag{1.72}$$

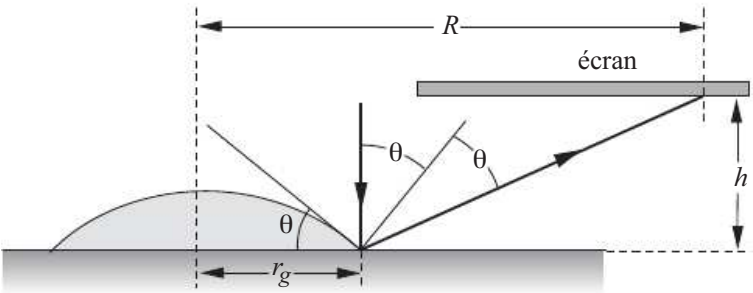


FIG. 1.25 – Principe de la mesure de l’angle de contact d’une goutte avec une surface, par réflexion sur la surface supérieure de la goutte.

1.4.6 Instabilité de Rayleigh-Taylor

Un exemple de compétition entre les effets de la tension superficielle et ceux de la gravité est *l’instabilité de Rayleigh-Taylor*. Nous avons vu que

l'effet des forces de tension superficielle est de minimiser l'aire de l'interface entre deux fluides (on peut se le représenter en considérant l'interface comme une membrane élastique). Analysons le cas où une interface horizontale sépare deux fluides de densités différentes, le plus léger étant situé au-dessous. Une telle situation est gravitationnellement instable ; en effet, toute déformation de l'interface crée un déséquilibre de pression qui tend à l'amplifier. Cependant, les effets de tension superficielle, qui, eux, tendent à limiter les déformations de l'interface, pourront ramener cette dernière à l'équilibre (Fig. 1.26). Ils seront d'autant plus importants que l'étendue de l'interface sera petite. Nous pouvons prévoir le paramètre qui va gouverner cette instabilité, en analysant ces deux effets antagonistes.

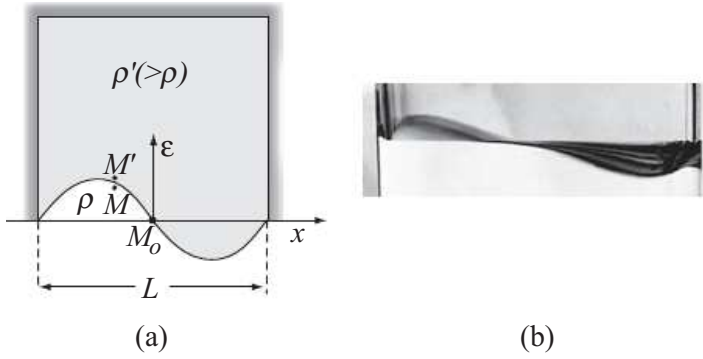


FIG. 1.26 – Instabilité de Rayleigh-Taylor ; (a) géométrie de l'expérience ; (b) photographie prise plusieurs secondes après avoir retourné un récipient contenant une huile très visqueuse (5 000 fois la viscosité de l'eau) (photographie C. Rousselin, Palais de la découverte).

Le moteur de l'instabilité est la gravité, à laquelle est associée une différence de pression hydrostatique δp_1 de part et d'autre de l'interface, de l'ordre de :

$$\delta p_1 \approx (\rho' - \rho) g \varepsilon, \quad (1.73)$$

où ε est le déplacement vertical infinitésimal de l'interface et ρ et ρ' représentent les masses volumiques des deux fluides (Fig. 1.26a).

L'ordre de grandeur des différences de pression « stabilisantes » créées par les effets de tension de surface est :

$$\delta p_2 \approx \frac{\gamma}{R}, \quad (1.74)$$

où R est le rayon de courbure de l'interface ; en assimilant cette interface à un élément de calotte sphérique (approximation du premier ordre en ε/R), ce rayon R est relié au déplacement vertical ε par la relation $2\varepsilon R \simeq (L/4)^2$. L'importance relative des deux effets peut donc être caractérisée par le rapport :

$$\frac{\delta p_1}{\delta p_2} \approx \frac{\Delta \rho g \varepsilon}{\gamma / R} \approx \frac{\Delta \rho g L^2}{\gamma}. \quad (1.75)$$

C'est la valeur de ce rapport qui détermine la stabilité de l'interface. Pour ce paramètre, il n'est pas surprenant de retrouver la forme du nombre de Bond (Éq. 1.64) puisqu'il s'agit, dans ces deux cas, d'évaluer l'importance relative de la gravité et de la tension superficielle.

Cette instabilité peut être aisément observée en prenant un fluide suffisamment visqueux pour ralentir la croissance de la déformation de l'interface et faciliter son observation (Fig. 1.26b). En retournant rapidement un pot de miel assez visqueux par exemple, on peut voir l'apparition d'un renflement de l'interface d'un côté de l'ouverture du pot et d'un creusement de l'autre côté.

Traitement détaillé de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Considérons un récipient contenant le fluide de masse volumique ρ' et présentant en sa partie inférieure une ouverture de taille L dans la direction x (Fig. 1.26a) et très allongée dans la direction perpendiculaire z , afin que l'on puisse négliger les effets de la courbure dans cette direction. Cet ensemble est placé au-dessus d'un second fluide de masse volumique plus faible ρ . Supposons une déformation de l'interface dans le plan de la figure et désignons par $\varepsilon(x, t)$ le déplacement vertical de cette interface, repéré par rapport à sa position initiale plane. Désignons par M' et M deux points infiniment voisins situés de part et d'autre de l'interface dans chacun des deux fluides. Si $R(x)$ désigne le rayon de courbure de l'interface au niveau de ces deux points, on peut écrire d'après la loi de Laplace :

$$p_{M'} - p_M = \frac{\gamma}{R(x)}. \quad (1.76)$$

Le principe fondamental de l'hydrostatique appliqué à l'intérieur de chacun des deux fluides (principe que l'on peut appliquer car les fluides sont à leur limite de stabilité) permet d'écrire :

$$p_{M'} = p_{M_0} + \rho' g \varepsilon \quad (1.77a)$$

et :

$$p_M = p_{M_0} + \rho g \varepsilon. \quad (1.77b)$$

En effet, au point M_0 , le rayon de courbure de l'interface est nul et la pression a la même valeur de part et d'autre de cette interface. En éliminant $p_{M'}$, p_M et p_{M_0} entre les trois équations ci-dessus et en tenant compte du fait que l'interface est peu déformée car on reste au voisinage de l'équilibre (donc $R(x) \approx -1/(d^2\varepsilon/dx^2)$), on obtient :

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} = -\frac{\Delta\rho g}{\gamma} \varepsilon(x, t). \quad (1.78)$$

Cette équation a pour solution générale :

$$\varepsilon(x, t) = A \cos kx + B \sin kx \quad (1.79)$$

avec :

$$k = \sqrt{\frac{\Delta\rho g}{\gamma}}. \quad (1.80)$$

Si l'on suppose que l'interface est fixe au niveau des parois latérales, $\varepsilon(x, t)$ vérifie les conditions aux limites : $\varepsilon(x=0) = \varepsilon(x=L) = 0$. Par ailleurs, le déplacement moyen

de l'interface $\int_0^L \varepsilon(x, t) dx$ doit être nul pour assurer la conservation de la quantité de fluide dans le récipient. L'ensemble de ces conditions impose la solution :

$$\varepsilon(x, t) = B \sin kx \quad (1.81)$$

avec $k = (2n\pi/L)$ où n est entier. Le seuil est obtenu pour la plus petite valeur de k satisfaisant cette condition ($n = 1$) avec : $2\pi/L = \sqrt{\Delta\rho g/\gamma}$, ou encore :

$$\frac{\Delta\rho g L^2}{\gamma} = 4\pi^2. \quad (1.82)$$

Dans cette expression, on retrouve bien la forme du paramètre obtenu dans l'équation (1.75). Un calcul d'ordre de grandeur avec une interface eau-air ($\Delta\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\gamma \approx 70 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$) donne une valeur seuil :

$$L_c = \sqrt{\frac{4\pi^2\gamma}{\Delta\rho g}} \approx 1,7 \times 10^{-2} \text{ m}. \quad (1.83)$$

On se trouvera donc pratiquement toujours dans une situation où l'interface est instable ($L > L_c$).

L'approche utilisée ici est très générale dans l'étude des instabilités hydrodynamiques (chapitre 11). Nous avons supposé un type de déformation, ou *mode d'instabilité* (Éq. 1.79), et cherché dans quelles conditions il est à la limite de la stabilité (c'est-à-dire qu'il représente une solution des équations de mouvement, indépendante du temps). C'est celui des modes instables, qui correspond au seuil le plus faible, qui détermine l'apparition de l'instabilité globale.

1.5 Diffusion de rayonnements dans les fluides

1.5.1 Quelques sondes de la structure des liquides

Sondes de diffusion

Nous avons montré précédemment (section 1.3) la relation étroite entre les propriétés de transport des fluides et leur structure microscopique. Cette dernière, ainsi que les mouvements à petite échelle, peuvent être étudiés à partir de la diffusion d'une onde par le matériau. La longueur d'onde utilisée doit être comparable ou supérieure de quelques ordres de grandeur aux distances à étudier. On peut utiliser des *ondes électromagnétiques* (rayons X ou lumière), mais aussi des faisceaux de particules (*électrons* ou *neutrons*). Dans ce dernier cas, la longueur d'onde λ associée aux particules sondes vérifie la *formule de De Broglie* :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (1.84)$$

(h est la constante de Planck, p, m et v sont respectivement la quantité de mouvement, la masse et la vitesse de la particule supposée non relativiste).

Ces trois types de mesures sont couramment utilisés pour l'étude des liquides. Les techniques de diffusion de neutrons utilisent soit les neutrons issus de la fission de l'uranium dans des réacteurs nucléaires (Institut Laue-Langevin à Grenoble, Laboratoire Léon Brillouin à Saclay), soit ceux arrachés par bombardement d'une cible par des particules de haute énergie (ISIS en Grande-Bretagne, le futur European Spallation Source en Suède) construits exclusivement à cet effet. Elles ont pris une place très importante au cours des dernières décennies. Par rapport à la diffusion de rayons X, la diffusion neutronique est relativement plus sensible aux éléments légers – H, O, C, N – que l'on rencontre dans un grand nombre de liquides organiques. Cela vient du fait que les neutrons n'interagissent pas avec le nuage électronique des atomes, mais avec les noyaux atomiques. Aussi, pour un même élément, cette interaction varie d'un isotope à l'autre. Les deux autres types de spectroscopies « voient » les électrons des atomes et ont une sensibilité qui augmente plus vite avec le numéro atomique : ces techniques sont donc plus sensibles aux éléments lourds.

Quelques ordres de grandeur

Les techniques que nous venons d'évoquer permettent, suivant la longueur d'onde ou les instruments utilisés, d'analyser la structure du liquide, ou ses *excitations élémentaires*. Ces dernières peuvent être, par exemple, des ondes de pression ou des modes diffusifs élémentaires excités thermiquement. Nous allons donner maintenant quelques ordres de grandeur de paramètres courants pour les techniques les plus utilisées.

Pour obtenir des informations sur la structure du liquide à l'échelle des *distances interatomiques*, on utilise des sondes correspondant à des longueurs d'onde qui sont du même ordre :

- **Rayons X** : ils sont produits classiquement par bombardement d'une anode métallique par des électrons accélérés sous un champ électrique. Les longueurs d'onde correspondantes sont de l'ordre de quelques angströms (1,542 Å pour la raie $K\alpha$ du cuivre). Les études actuelles se font également à l'aide du *rayonnement synchrotron* très puissant, obtenu à partir de l'accélération d'électrons dans des *anneaux de stockage* : synchrotron SOLEIL (source optimisée de lumière d'énergie intermédiaire du laboratoire d'utilisation du rayonnement électromagnétique) à Saclay, ESRF (European Synchrotron Radiation Facility) à Grenoble. . .
- **Électrons** : la longueur d'onde associée à des électrons accélérés, sous une différence de potentiel de 200 V, est de 0,87 Å. Il s'agit donc d'*électrons lents* de faible énergie.
- **Neutrons** : ils sont obtenus dans des réacteurs nucléaires ou des sources à spallation par ralentissement de neutrons rapides dans un milieu hydrogéné soit à température ordinaire (*neutrons thermiques*), soit à très

basse température (*neutrons froids*) ; après un nombre de chocs suffisant avec les noyaux du milieu, la distribution de vitesse des neutrons correspond à un équilibre thermique. À 300 K, la longueur d'onde correspondante est de 1,78 Å.

- **Diffusion de la lumière** : En raison de sa plus grande longueur d'onde, on l'utilise pour analyser des fluctuations de densité ou de composition du fluide à *grande échelle*. Elle représente un incomparable outil d'étude des phénomènes de transport dans les liquides, mais à des échelles supérieures au micromètre.

Dans les deux sections suivantes, nous discuterons la *diffusion élastique et inélastique* de *rayons X* et de *neutrons*, puis la diffusion *Rayleigh et Brillouin* de la lumière.

1.5.2 Diffusion élastique et inélastique

Dans cette section, nous discutons d'abord la détermination de la structure des liquides à l'échelle de quelques atomes (quelques angströms). Cependant, le mode d'analyse utilisé pourra être en grande partie transposé à la diffusion de la lumière.

Fonction de corrélation de paires dans un liquide atomique

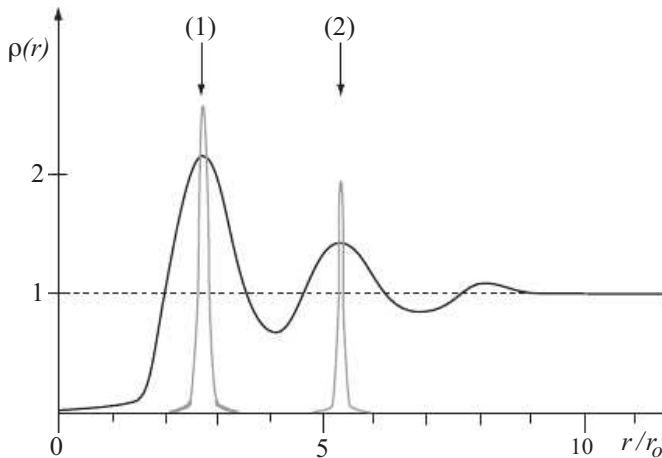


FIG. 1.27 – Comparaison des variations de la fonction de corrélation de paires avec la distance au centre d'un atome origine, pour un métal juste au-dessus (traits pleins noirs) et juste au-dessous (traits pleins gris) de son point de fusion. La flèche (1) correspond à la distance des premiers voisins d'un atome central.

L'information essentielle sur la répartition des distances des atomes dans un liquide est contenue dans sa fonction de corrélation de paires, $g(r)$ (Fig. 1.27), définie de la manière suivante : si on considère un atome de

centre O , $g(r)$ est reliée au nombre $n(r)dr$ d'atomes dont les centres se trouvent à une distance de O comprise entre r et $r + dr$ par :

$$4\pi r^2 g(r) dr = n(r) dr. \quad (1.85)$$

La quantité $g(r)$ est pratiquement nulle à l'intérieur d'une sphère de rayon $r = 2r_0$, où r_0 est le rayon atomique, à cause de l'impénétrabilité des sphères. Elle présente un premier pic pour une valeur légèrement supérieure à $2r_0$, correspondant à la présence des atomes premiers voisins (Fig. 1.27). Lorsque r augmente, la fonction $g(r)$ présente ensuite plusieurs oscillations amorties qui traduisent les effets des seconds voisins, troisièmes... Au-delà d'une distance de l'ordre de quelques rayons d'atomes, la fonction $\rho(r)$ est constante et égale à la densité moyenne d'atomes : cela traduit l'absence d'ordre à grande distance dans un liquide.

La fonction de distribution $\rho(r)$ est une moyenne sur toutes les configurations possibles des atomes d'un liquide. Nous allons montrer qu'elle peut être déduite d'expériences de diffusion, par exemple de rayons X, dont les longueurs d'onde sont de l'ordre de l'angström.

Diffusion élastique

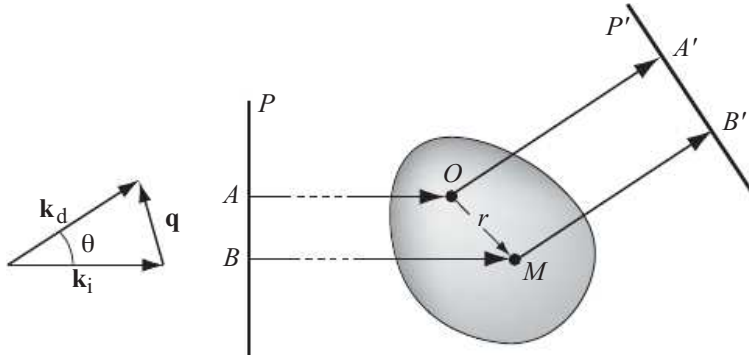


FIG. 1.28 – Schéma de la diffusion élastique de rayons X ; (a) représentation en termes de vecteurs d'onde dans l'espace de Fourier ; (b) représentation dans l'espace réel (les plans P et P' sont en réalité à très grande distance de l'objet).

La figure 1.28 montre schématiquement une expérience de diffusion à partir des vecteurs d'onde $\mathbf{k}_i$ et $\mathbf{k}_d$ de l'onde incidente, de l'onde diffusée et du vecteur d'onde de transfert $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i \quad (1.86)$$

où $\mathbf{q}$ représente le transfert de quantité de mouvement entre l'onde et le milieu. Nous supposons ici la *diffusion élastique*, c'est-à-dire sans échange d'énergie : les normes de $\mathbf{k}_d$ et $\mathbf{k}_i$ sont donc égales.

Remarque. Nous faisons ici l'hypothèse de diffusion élastique approximativement vérifiée pour des photons X de longueur d'onde de l'ordre de l'angström. L'énergie correspondante est en effet de l'ordre de 12 keV et elle est beaucoup plus grande que celle des excitations créées dans le fluide : cette énergie restera donc pratiquement inchangée pendant la diffusion. Ce ne sera pas le cas pour des sondes, comme des neutrons thermiques, de même longueur d'onde dont l'énergie est considérablement plus faible ($kT \approx 1/40$ eV à 300 K).

L'amplitude $A(\mathbf{q})$ diffusée dans la direction $\mathbf{k}_d$ vaut :

$$A(\mathbf{q}) = C D(\mathbf{q}) \left(1 + \iiint_V g(r) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \right). \quad (1.87)$$

Démonstration. Supposons que l'amplitude complexe de l'onde diffusée par une molécule soit $D(q)$ (on suppose que les molécules sont à symétrie sphérique, de manière à ce que l'angle des vecteurs d'onde avec les directions caractéristiques de la molécule n'intervienne pas). Prenons une molécule O comme origine et supposons qu'il y ait une deuxième molécule en un point M tel que $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$ (fig. 1.28b). Calculons le déphasage $\Delta\varphi$ entre les ondes diffusées par O et M à partir de la différence des chemins optiques AOA' et BMB' ($\mathbf{AB}$ et $\mathbf{A'B'}$ sont respectivement perpendiculaires aux vecteurs d'onde incident et diffusé). En projetant $\mathbf{OM}$ sur $\mathbf{OA}$ et $\mathbf{OA'}$, on trouve $\Delta\varphi = (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_d) \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$. L'amplitude résultante des deux ondes diffusées par O et M vaut donc :

$$A_{O+M} = D(\mathbf{q})(1 + e^{-i\Delta\varphi}) = D(\mathbf{q})(1 + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}). \quad (1.88)$$

Pour avoir une valeur significative, il faut intégrer cette expression sur l'ensemble des vecteurs $\mathbf{r}$ correspondant au volume diffusant en pondérant par la probabilité de présence $g(r)$ de la deuxième molécule, ce qui donne l'expression (1.87). ■

Dans l'équation (1.87), l'amplitude totale diffusée dans la direction $\mathbf{k}_d = \mathbf{k}_i + \mathbf{q}$ dépend de deux facteurs :

- l'un, $D(\mathbf{q})$, qui est lié à la structure des molécules individuelles ;
- l'autre, $S(\mathbf{q}) = (1 + \iiint_V \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r})$, appelé *facteur de structure*, est déterminé par la distribution des positions relatives des molécules.

Remarque. L'expression du facteur $S(\mathbf{q})$ utilise la transformée de Fourier de $\rho(r)$ pour passer de l'espace réel à celui des vecteurs d'onde $\mathbf{q}$. La transformée inverse permet de remonter de la mesure de $S(\mathbf{q})$ à celle de $\rho(r)$, ce qui fait tout l'intérêt de la méthode. Comme c'est le produit $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$ qui intervient dans l'intégrale, les informations sur la structure à grande échelle seront obtenues avec des vecteurs $\mathbf{q}$ petits (on parle de diffusion aux petits angles) ; pour une valeur de $\mathbf{k}_i$ donnée, cela signifie que la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}_d$, où se fait la mesure, devra faire un angle faible avec l'onde incidente. Lorsque la fonction $\rho(r)$ est périodique, comme c'est le cas pour un solide cristallin, $S(\mathbf{q})$ sera, lui aussi, périodique en $\mathbf{q}$: on observera des pics d'intensité diffractée aux angles auxquels les conditions de Bragg sont remplies pour la réflexion sur les plans cristallins.

Le passage de l'espace réel à l'espace de Fourier des vecteurs d'onde et les propriétés qui en découlent sont une caractéristique commune à toutes les techniques de diffusion que nous rencontrerons aussi dans l'étude de la diffusion de la lumière.

La diffusion élastique de rayons X apparaît ainsi comme un moyen privilégié d’analyse des corrélations entre les positions des molécules dans un liquide (quand ces dernières sont toutes identiques et de symétrie sphérique). La longueur d’onde des rayons X utilisés est bien adaptée à l’analyse des phénomènes à l’échelle des distances atomiques.

Diffusion inélastique

Si, dans l’exemple précédent, on considérait la diffusion comme élastique, il y a, plus généralement, à la fois transfert de quantité de mouvement et d’énergie lors de la diffusion : la norme $|\mathbf{k}_d|$ du vecteur d’onde diffusé est alors différente de celle $|\mathbf{k}_i|$ du vecteur d’onde incident. Ce sera particulièrement important dans le cas des neutrons thermiques dont nous avons vu plus haut que l’énergie était beaucoup plus faible que celle des rayons X de même longueur d’onde ($kT \approx 1/40$ eV à 300 K pour une longueur d’onde de 1 Å) : la valeur relative de la variation de cette énergie est donc beaucoup plus importante et l’on a alors une *diffusion inélastique* mesurable aisément. Cette dernière fournit des informations précieuses sur les modes d’excitation interne d’un fluide.

Généralisons maintenant la discussion précédente à un type quelconque de particules (neutrons...) ou ondes (X, lumière...) incidentes sur et diffusées par une particule A ; cette dernière peut être un atome ou une particule fictive représentant l’effet complexe de l’interaction de l’onde avec le fluide. En utilisant la relation (1.84) pour déterminer des vecteurs d’onde, écrivons l’énergie et l’impulsion de ces différents objets sous la forme :

	Particule ou onde i	Particule A	Particule ou onde d
Énergie	$\hbar \omega_i$	$\hbar \Omega$	$\hbar \omega_d$
Impulsion	$\hbar \mathbf{k}_i$	$\hbar \mathbf{q}$	$\hbar \mathbf{k}_d$

Entre ces différentes variables, on a les relations suivantes qui traduisent la conservation de l’énergie et de la quantité de mouvement :

$$\Omega = \omega_d - \omega_i \qquad \mathbf{q} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i \qquad (1.89)$$

Ces relations seront valables aussi bien pour les sondes locales que pour la lumière dont la longueur d’onde est beaucoup plus élevée : celle-ci permet l’étude de phénomènes d’échelle caractéristique de taille beaucoup plus grande, comme nous le verrons dans les deux sections suivantes.

La figure 1.29 montre les domaines de transfert d’énergie et de vecteur d’onde pour les différentes sondes classiques d’analyse des liquides.

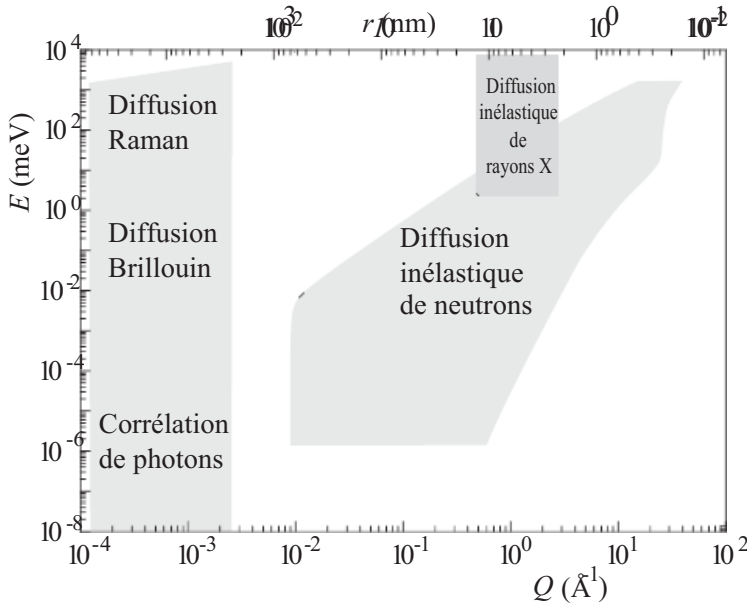


FIG. 1.29 – Domaines de transfert d'énergie et de vecteur d'onde pour les diverses sondes d'analyse spectroscopique des liquides.

1.5.3 La diffusion élastique et quasi élastique de la lumière : un outil d'étude de la structure et du transport diffusif dans les liquides

Un exemple de diffusion élastique de la lumière : la diffusion Rayleigh par une émulsion diluée

Observons (Fig. 1.30 CC) un long tube contenant une solution diluée de particules de petite taille (telle que de l'eau dans laquelle a été ajouté un tout petit peu de lait). Si l'on éclaire le tube par l'une de ses extrémités, on verra une lumière rougeâtre en regardant par l'autre extrémité ; en revanche, à angle droit du faisceau, on observe une lumière diffusée qui est bleutée. Ce résultat est analogue aux couleurs du ciel, qui apparaît rouge au couchant lorsque l'on regarde dans la direction des rayons du soleil (lumière transmise après absorption), et bleu dans la direction perpendiculaire (lumière diffusée par les molécules d'oxygène de l'air). Dans cette expérience, la diffusion résulte des fluctuations de densité, donc d'indice, dues à la présence des gouttelettes de lait. Le principe du calcul de l'intensité diffusée est analogue à celui effectué à la section 1.5.2 pour la diffusion élastique des rayons X. Si la solution est diluée, ce sont simplement les intensités diffusées par les gouttelettes qui s'ajoutent, car $g(r)$ est pratiquement constant : la variation de l'intensité diffusée avec le vecteur d'onde correspond donc à celle de $D(\mathbf{q})$.

Notons que le changement de couleur observé résulte d'une absorption et d'une diffusion différentes pour les différentes composantes du spectre de la

lumière blanche. Une lumière monochromatique d'une longueur d'onde donnée garde la même longueur d'onde : ce phénomène, appelé *diffusion Rayleigh*, apparaît, à ce niveau, comme élastique.

Dans l'exemple précédent, la diffusion Rayleigh est induite par les fluctuations de concentration dues à la présence de l'émulsion diluée de lait ; dans un liquide pur, son amplitude est beaucoup plus faible et associée aux variations d'indice dues à des fluctuations de température locale. Ces fluctuations diffusent, comme nous l'avons vu à la section 1.2 de ce chapitre, et ne se propagent pas comme des ondes.

Note. Si on éclaire une suspension de particules browniennes par un rayonnement laser cohérent et monochromatique, les fluctuations temporelles de la lumière permettent de caractériser la dynamique de ces particules. Cette technique, dite de *diffusion dynamique de la lumière* (ou de corrélation de photons), a actuellement de nombreuses applications.

La diffusion Rayleigh forcée

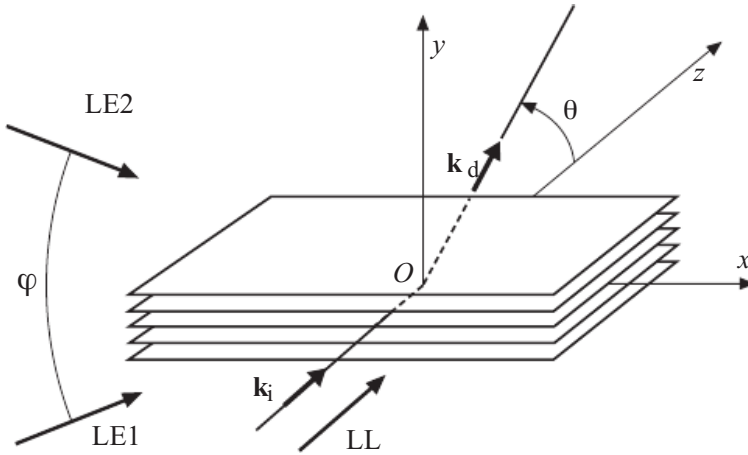


FIG. 1.31 – Schéma de l'expérience de diffusion Rayleigh forcée ; le réseau est « écrit » dans le liquide par l'interférence de deux faisceaux LE d'un laser pulsé. Ce réseau est ensuite « lu » en formant la figure de diffraction par un laser continu LL de faible puissance.

Nous allons maintenant analyser une expérience modèle de diffusion : la *diffusion Rayleigh forcée*, où des variations de température de grande amplitude sont induites artificiellement.

Dans un liquide au repos, on forme une figure de franges d'interférences par une impulsion laser puissante, mais de très courte durée : le faisceau monochromatique est séparé en deux composantes qui viennent converger en un même point à l'intérieur du liquide à étudier (Fig. 1.31). La période spatiale

Λ du réseau de franges d'interférence (l'interfrange) est liée à l'angle φ entre les deux faisceaux par :

$$\Lambda = \frac{\lambda_0}{2n \sin \varphi / 2}, \quad (1.90)$$

où λ_0 désigne la longueur d'onde dans le vide. L'élévation de température induite par l'impulsion laser évolue avec le temps et la distance y suivant une loi du type :

$$\Delta T(y, t) = \Delta T_0 e^{-\kappa(2\pi/\Lambda)^2 t} \cos \frac{2\pi y}{\Lambda}. \quad (1.91)$$

Démonstration. Compte tenu de la forte puissance du laser LE qui forme le réseau de température (faisceau *d'écriture*), une modulation spatiale $\Delta T(y)$ de la température est associée à cette figure d'interférences avec :

$$\Delta T(y, t) = \Delta T_0(t) \cos \frac{2\pi y}{\Lambda}.$$

L'amplitude $\Delta T_0(t)$ de cette variation de température s'atténue avec le temps en raison de la diffusion thermique ; la longueur d'onde Λ de la modulation reste néanmoins pratiquement constante avec le temps. La modulation $\Delta T(y, t)$ vérifie l'équation de diffusion thermique (1.17) ; en reportant dans cette équation l'expression de $\Delta T(y, t)$ précédente, on obtient :

$$\frac{\partial \Delta T_0(t)}{\partial t} = -\frac{4\pi^2 \kappa}{\Lambda^2} \Delta T_0(t) \quad \text{soit :} \quad \Delta T_0(t) = \Delta T_0 e^{-\kappa(2\pi/\Lambda)^2 t}.$$

En reportant cette équation dans l'expression de $\Delta T(y, t)$, on retrouve alors l'équation (1.91). ■

Pour mesurer l'amplitude de ces variations de température, on éclaire le système de franges dans la direction Oz , perpendiculaire au plan des rayons qui interfèrent, avec le faisceau d'un second laser LL continu de faible puissance et de longueur d'onde λ . Ce faisceau de *lecture* est diffracté par les modulations d'indice dues à la modulation de température. Comme le réseau est périodique, on observe des maximums de diffraction pour certains vecteurs d'onde. Le phénomène est l'équivalent, pour la lumière, de la diffusion élastique de rayons X avec transfert de quantité de mouvement décrit par la figure 1.28. Le vecteur d'onde de transfert $\mathbf{q} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i$, correspondant au maximum le plus intense, a un module $q = 2\pi/\Lambda$. En effet, le vecteur d'onde incident $\mathbf{k}_i$ et le vecteur d'onde diffusé $\mathbf{k}_d$ font entre eux un angle θ tel que :

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{q}{2k} \approx \frac{\lambda}{2\Lambda} \quad (1.92)$$

où k est le module des vecteurs $\mathbf{k}_d$ et $\mathbf{k}_i$, ce qui caractérise une diffusion élastique. À la section 1.5.2, nous avons vu que l'amplitude diffractée est proportionnelle à l'amplitude des variations de densité. L'intensité diffractée $I_d(t)$

varie comme le carré de l'amplitude $\Delta T_0(t)$ de la modulation de température. D'après l'équation (1.91), elle décroît donc avec le temps comme :

$$I_d(t) \propto e^{-\kappa q^2 t} = e^{-2(t/\tau_Q)}. \quad (1.93)$$

Cette décroissance permet donc de mesurer κ , puisque q est connu ($q = (4\pi/\lambda) \sin(\theta/2)$). Remarquons que, d'après la section 1.2.1, τ_Q est de l'ordre du temps de diffusion thermique sur une distance égale à la longueur d'onde Λ du réseau.

La diffusion Rayleigh spontanée

La diffusion Rayleigh spontanée correspond à la diffusion de la lumière par des fluctuations de température ou de concentration dues à l'agitation thermique, présentes naturellement au sein d'un liquide. La technique de diffusion Rayleigh forcée, que nous avons étudiée plus haut, représente un excellent modèle de la diffusion par de telles fluctuations spontanées. Ces dernières peuvent être décomposées en perturbations élémentaires, comme celles que nous avons discutées ; leur vecteur d'onde peut prendre toutes les normes et toutes les directions possibles. L'amplitude diffusée est une combinaison des amplitudes diffusées correspondantes. L'intensité lumineuse détectée est en général très faible : pour un laser d'une puissance de 0,1 watt, elle varie de quelques photons à 10^7 photons par seconde.

Remarque. En sélectionnant une direction d'observation de l'onde diffusée, on choisit en même temps la direction et la longueur d'onde du réseau qui diffuse l'onde. On réalise ainsi un filtrage des fluctuations spontanées sur l'ensemble des longueurs d'onde en ne retenant que les composantes qui donnent un maximum de lumière dans la direction choisie.

L'élargissement $\Delta\omega$ du spectre autour de la fréquence ω_0 de l'onde incidente permet de déterminer le coefficient des processus diffusifs présents dans le fluide. Cet élargissement est très variable : il peut descendre jusqu'à une fraction de hertz si l'on observe la diffusion (très lente) par des grosses particules, mais il peut aller jusqu'à quelques dizaines de mégahertz pour des processus rapides.

1.5.4 Diffusion inélastique de la lumière dans les liquides

En analysant un spectre d'intensité de diffusion de la lumière dans un liquide avec une résolution suffisante (Fig. 1.32), on observe de part et d'autre de la raie centrale Rayleigh (R), non décalée en fréquence, des pics satellites (B). Ces pics de *diffusion Brillouin* correspondent à la diffusion de la lumière par les fluctuations spontanées de pression qui se propagent dans le fluide comme une onde acoustique. Le décalage entre les raies Rayleigh et Brillouin est de quelques gigahertz. L'élargissement des raies donne une mesure des

constantes de temps de relaxation des fluctuations de masse et de concentration. Pour éclairer ce processus, nous allons, comme pour la diffusion Rayleigh, décrire une expérience où les fluctuations de densité sont imposées.

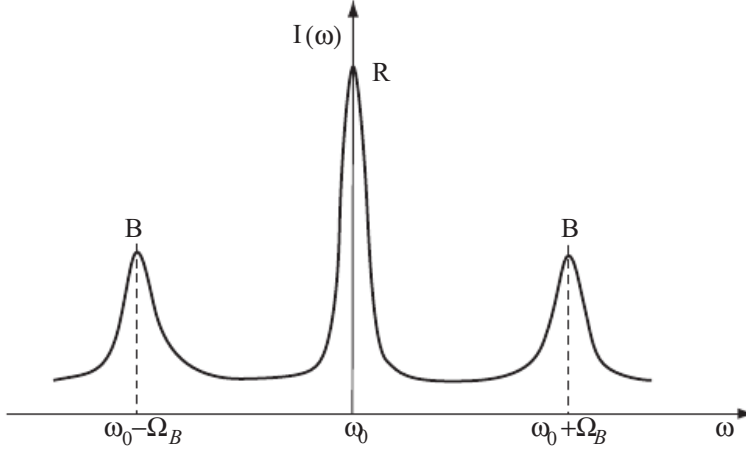


FIG. 1.32 – Vue schématique d'un spectre de diffusion Brillouin de la lumière.

La diffusion Brillouin forcée

Cette expérience fournit un modèle de diffusion inélastique par effet Doppler. À l'intérieur d'un liquide, on crée une onde acoustique progressive de haute fréquence f_s à l'aide d'un transducteur à quartz (T) (Fig. 1.33). Cette onde correspond à une modulation de pression de période spatiale Λ qui se propage dans le liquide. Un faisceau de lumière de longueur d'onde λ dans le vide et de pulsation ω_0 est dirigé vers les plans d'onde en formant avec eux un angle $\theta/2$. Le faisceau est diffracté par les plans d'onde acoustique avec un angle de diffraction opposé et il y a des interférences entre les rayons réfléchis sur les différents plans. La variation de chemin optique d'un plan à un autre est égale à $2\Lambda \sin(\theta/2)$. On obtient donc des interférences constructives si la condition :

$$2\Lambda \sin \frac{\theta}{2} = p \frac{\lambda}{n} \quad (1.94)$$

est vérifiée ; p est entier et sera ensuite pris égal à 1 et n représente l'indice du milieu. Notons que cette relation est identique à la *condition de Bragg* pour la réflexion de rayons X sur des plans cristallins, qui peut être obtenue à partir de l'analyse réalisée à la section 1.5.3 (Éq. 1.92). Dans le même temps, la pulsation ω_d de l'onde diffusée est modifiée par effet Doppler d'une quantité Ω_B telle que :

$$\frac{\Omega_B}{\omega_0} = \frac{\omega_d - \omega_0}{\omega_0} = 2 \frac{v_s}{c/n} \sin \frac{\theta}{2} = 2n \frac{v_s}{c} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{v_s}{c} \frac{\lambda}{\Lambda}. \quad (1.95)$$

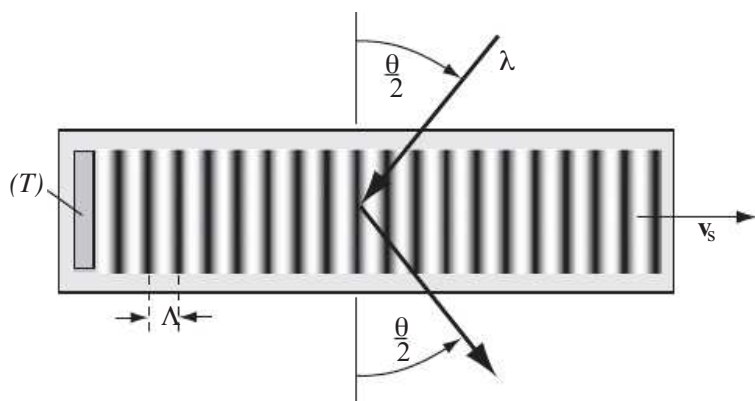


FIG. 1.33 – Diffusion Brillouin forcée d'une onde lumineuse de longueur d'onde λ par une onde acoustique de longueur d'onde Λ produite dans un fluide par un transducteur acoustique (T).

En remarquant que v_s/Λ représente la fréquence f_s de l'onde acoustique et que $c/\lambda = \omega_0/2\pi$, on voit que le décalage de pulsation Brillouin Ω_B de ω_0 est égal à la pulsation $\omega_s = 2\pi f_s$ de l'onde acoustique. La mesure de cette pulsation ω_B à partir du spectre de la lumière diffusée (Fig. 1.32) et la détermination expérimentale de l'angle de diffusion θ , pour lequel on a le maximum d'intensité diffusée permettent de déterminer la vitesse v_s de l'onde acoustique dans le fluide par la relation : $v_s = (\Omega_B/2\pi) (\lambda/[2n \sin(\theta/2)])$. Le sens du décalage dépend du sens de propagation de l'onde progressive par rapport à la direction d'incidence. Si on utilise une onde stationnaire au lieu d'une onde progressive, on obtient deux raies décalées symétriquement.

Ordres de grandeur. On considère une onde acoustique de vitesse $v_s = 1500 \text{ m.s}^{-1}$ et de fréquence $f_s = 150 \text{ MHz}$. La longueur d'onde de la lumière d'un laser hélium-néon est de $6328 \text{ \AA}$ dans le vide et l'indice n du liquide est 1,5. La longueur d'onde sonore vaut : $\Lambda = v_s/f_s = 10^{-5} \text{ m}$. En appliquant la formule (1.94), on trouve un angle de Bragg : $\theta = 6,3 \times 10^{-2} \text{ radians}$. La pulsation ω_0 de la lumière vérifie $\omega_0 = 2\pi c/\lambda = 3 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$. En appliquant l'équation (1.95), on trouve $\Omega_B = 9,4 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$. Ce décalage de fréquence est suffisamment grand pour être facilement mesuré, même en utilisant de la lumière incohérente.

La diffusion Brillouin spontanée

Comme dans le cas de la diffusion Brillouin forcée, dans le spectre de diffusion de la lumière par un liquide, on observe des raies de diffusion Brillouin situées de chaque côté de la raie centrale de diffusion Rayleigh. Dans le cas présent, ces raies Brillouin sont dues aux fluctuations thermodynamiques de pression qui existent et se propagent *spontanément* dans le liquide (au lieu d'être imposées extérieurement comme dans le cas précédent).

Expérimentalement, on utilise un faisceau incident collimaté et un détecteur de taille suffisamment petite pour que l'angle θ entre le faisceau incident et le faisceau diffusé soit bien défini. Cela revient à sélectionner les composantes des fluctuations de pression qui vérifient la condition de Bragg (Éq. 1.94) et telles que les angles d'incidence et de diffusion sur les plans d'onde soient les mêmes. La relation (1.95) donne alors immédiatement la vitesse v_s de propagation de ces fluctuations. D'après (1.94), fixer θ équivaut à fixer le vecteur d'onde $\mathbf{q}$ des fluctuations analysées ; en faisant varier θ , on peut donc mesurer la variation de v_s avec $\mathbf{q}$, c'est-à-dire l'effet de la dispersion de l'onde acoustique. Notons toutefois que cette mesure concerne des fréquences qui ne sont pas accessibles par des mesures classiques en acoustique des ultrasons.

Par extension, la diffusion Brillouin peut être appliquée directement à la caractérisation de la distribution de vitesses d'un ensemble d'objets en suspension dans un fluide ; on utilise alors la variation de fréquence lors de la diffusion sur les objets en mouvement.

Une technique de mesure similaire est l'*anémométrie laser Doppler*, que nous discuterons en détail à la section 3.5.3 ; cette technique consiste à utiliser des particules légères en suspension pour suivre le mouvement d'un fluide. En éclairant les particules par un faisceau laser et en mesurant le décalage en fréquence de la lumière diffusée, on obtient la vitesse des particules.

Remarque. Dans le spectre de diffusion, on observe d'autres pics plus éloignés du pic de diffusion Rayleigh que les raies Brillouin ; ils sont dus à l'excitation de modes internes des molécules (rotation et vibration) et correspondent au phénomène de diffusion Raman que nous ne discutons pas ici.

En résumé, les techniques de diffusion Brillouin et Rayleigh apparaissent comme des outils complémentaires d'étude des phénomènes de transport dans les liquides :

- la diffusion Rayleigh permet d'analyser les phénomènes de transport diffusif et de mesurer les coefficients de diffusion correspondants ;
- la diffusion Brillouin permet d'analyser les modes de transport convectifs ; elle permet de mesurer la vitesse du son dans les matériaux aux fréquences élevées.

1.6 Coefficients de transport de fluides

TAB. 1.2 – Coefficients de transport thermique, de masse et de quantité de mouvement de quelques fluides usuels. Pour les coefficients D_m de diffusion moléculaire, il s’agit d’ordres de grandeur du coefficient d’autodiffusion (c’est-à-dire du composé dans lui-même), destinés à montrer la forte différence de valeur entre le cas des gaz et celui des liquides.

	Conductivité thermique k (J.m ⁻¹ .s ⁻¹ .K ⁻¹)	Capacité thermique C_v (J/K ⁻¹)	Masse volumique ρ (kg.m ⁻³)	Diffusivité thermique $\kappa = k/\rho C_v$ (m ² .s ⁻¹)	Diffusivité moléculaire D_m (m ² .s ⁻¹)	Viscosité cinématique ν (m ² .s ⁻¹)	Nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$	Viscosité dynamique $\eta = \rho\nu$ (Pa.s)
Métaux liquides	1–10 ²	≈ 10 ³	2 × 10 ³ –2 × 10 ⁴	10 ⁻⁶ –10 ⁻⁴	10 ⁻⁹ –10 ⁻⁸	10 ⁻⁸ –10 ⁻⁶	10 ⁻³ –10 ⁻¹	10 ⁻⁴ –10 ⁻³
Liquides organiques	≈ 0,15	10 ³ –3 × 10 ³	10 ³	10 ⁻⁸ –10 ⁻⁷	10 ⁻¹⁰ –10 ⁻⁷	10 ⁻⁷ –10 ⁻⁶	1–10	10 ⁻⁴ –10 ⁻³
Sels fondus	10 ⁻⁷ –10 ⁻⁶	10 ³ –4 × 10 ³	≈ 2 × 10 ³	10 ⁻⁷	≈ 10 ⁻¹⁰	10 ⁻⁶	10	10 ⁻³
Huiles silicones	≈ 0,1	≈ 2 × 10 ³	≈ 10 ³	≈ 10 ⁻⁷	10 ⁻¹³ –10 ⁻⁹	10 ⁻⁵ –10 ⁻¹	10–10 ⁷	10 ⁻² –10 ³
Eau	0,6	4 × 10 ³	10 ³	10 ⁻⁷	10 ⁻¹⁰ –10 ⁻⁸	10 ⁻⁶	10	10 ⁻³
Verre fondu (800 K)	10 ⁻²	≈ 10 ³	≈ 3 × 10 ³	10 ⁻⁶	≈ 10 ⁻¹²	10 ⁻²	10 ³ –10 ⁴	10
Air (gaz à $p = 1$ atm et $T = 300$ K)	2,6 × 10 ⁻²	10 ³	1,29	2,24 × 10 ⁻⁵	10 ⁻⁵ –10 ⁻⁴	1,43 × 10 ⁻⁵	0,71	1,85 × 10 ⁻⁵

This page intentionally left blank

Chapitre 2

Transport de la quantité de mouvement et régimes d'écoulement

AU CHAPITRE précédent, nous avons vu comment l'énergie thermique, ou des traceurs miscibles, se transportaient par diffusion. Les flux d'énergie thermique, ou de masse de traceur, sont alors proportionnels et dans la direction des gradients de la quantité transportée (température ou concentration de traceur); le sens des flux est tel qu'il tend à atténuer ces gradients. Une autre manière (souvent plus efficace) de transporter l'énergie thermique ou des espèces chimiques est la convection par un écoulement : si l'écoulement est suffisamment rapide, une tache de colorant se déplacera à la vitesse du fluide, tout en s'étalant sous l'effet de la diffusion moléculaire et des gradients de vitesse transverse.

Au début de ce chapitre (section 2.1), nous allons montrer que, de même que la masse (concentration d'un traceur) ou l'énergie thermique, la quantité de mouvement d'un fluide en écoulement peut être transportée à la fois par diffusion et par convection. Une différence importante par rapport aux deux autres exemples est la nature vectorielle de la quantité de mouvement, alors que la température et la concentration sont des scalaires. À la section 2.2, nous présenterons de façon simplifiée les modèles microscopiques de la viscosité, comme nous l'avions fait pour les autres coefficients de transport au chapitre 1. Nous comparerons ensuite (section 2.3) l'efficacité des mécanismes de convection et de diffusion, ce qui nous conduira à définir le nombre de Reynolds. Enfin (section 2.4), nous illustrerons les changements de régime d'écoulement obtenus, lorsque le nombre de Reynolds croît, par des exemples d'écoulements dans un tube et autour d'un cylindre ou d'une sphère.

2.1 Transports diffusif et convectif de quantité de mouvement dans les écoulements

2.1.1 Diffusion et convection de la quantité de mouvement : deux expériences illustratives

Le transport de quantité de mouvement par convection est simple à comprendre sur l'exemple d'un liquide en écoulement parallèle avec un vecteur vitesse $\mathbf{U}$ constant. Chaque élément de fluide transporte (convecte) avec lui sa quantité de mouvement pendant son déplacement à sa vitesse propre, qui est la vitesse locale $\mathbf{U}$ de l'écoulement. Le flux de la quantité de mouvement par unité de temps et de surface d'un tube est égal dans ce cas au produit de $\mathbf{U}$ par la quantité transportée $\rho \mathbf{U}$. Ce terme ρU^2 a la dimension d'une pression, souvent appelée *pression dynamique* du fluide, que nous retrouverons lorsque nous nous intéresserons au bilan de quantité de mouvement d'un fluide (section 5.2).

Nous allons voir que le transport de quantité de mouvement par diffusion est également un mécanisme efficace, mais qu'il est souvent masqué par le transport par convection. Comme ce dernier s'opère dans la direction de l'écoulement, on identifiera plus facilement la diffusion dans la direction perpendiculaire, ainsi que nous l'observons dans l'expérience décrite par la figure 2.1. Un long cylindre d'axe vertical et de rayon R est rempli d'un liquide dont le mouvement peut être visualisé grâce à des particules déposées sur sa surface. Le système est initialement au repos. À l'instant initial, on met en mouvement le cylindre avec une vitesse angulaire constante Ω_0 . Tout d'abord, seules les couches fluides immédiatement voisines du cylindre se mettent en mouvement avec la vitesse angulaire de celui-ci (Fig. 2.1a). Cet écoulement de fluide est caractérisé par la vitesse angulaire $\Omega(r, t) = v(r, t)/r$, où la vitesse locale $\mathbf{v}$ de l'écoulement est perpendiculaire au rayon $\mathbf{r}$. L'écoulement se propage de proche en proche vers les couches internes ; aux temps longs, le fluide tourne avec une vitesse angulaire uniforme égale à celle du cylindre (Fig. 2.1b). Ce phénomène ressemble de façon saisissante au problème de diffusion thermique que nous avons discuté à la section 1.2.1 : on y considérait un cylindre plein formé d'un matériau de diffusivité thermique κ à une température uniforme T_0 ; à un instant initial, on portait la paroi extérieure de ce cylindre à une température $T_0 + \Delta T_0$. La perturbation de température se propageait par diffusion vers les couches internes, et l'épaisseur de la zone affectée croissait avec le temps comme $(\kappa t)^{1/2}$; la même loi de propagation en $t^{1/2}$ est observée dans l'expérience hydrodynamique. De plus, nous verrons que, dans cette expérience d'écoulement dans un cylindre tournant, nous pouvons également définir un coefficient de diffusion de la quantité de mouvement : cela permet de faire correspondre rigoureusement les profils de la vitesse angulaire $\Omega(r)$ à différents temps aux profils de diffusion thermique $\delta T(r)$ de la figure 1.9.

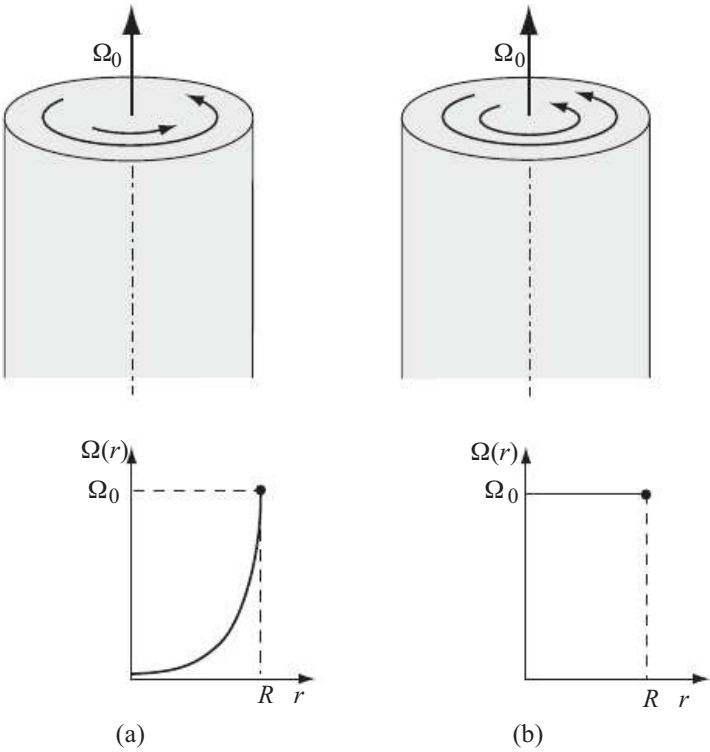


FIG. 2.1 – (a) Phase de mise en mouvement d'un liquide visqueux contenu dans un cylindre mis en rotation à une vitesse angulaire constante; (b) régime stationnaire de rotation. Les courbes inférieures montrent les variations correspondantes de la vitesse angulaire à la surface supérieure avec la distance à l'axe de rotation.

On a transfert de proche en proche, par diffusion radiale, de l'information « quantité de mouvement » ; la convection due aux écoulements hydrodynamiques ne peut en effet contribuer à cette propagation puisque le fluide se déplace dans une direction « tangentielle », perpendiculaire au rayon. Un second point important de cette expérience est l'égalité des vitesses de la paroi solide et du fluide près d'elle. Cette caractéristique est observée pour tous les fluides visqueux usuels. Il existe une force de friction entre les couches fluides en contact avec le solide, qui cause l'entraînement du fluide de proche en proche à partir de la paroi. Ce transport diffusif de la quantité de mouvement est caractérisé par une propriété dépendant du fluide, la *viscosité*, que nous allons maintenant discuter d'un point de vue macroscopique.

Remarque. La description, que nous avons présentée, est valable pour un cylindre infiniment long. En pratique, le fond du récipient joue un rôle essentiel dans la façon dont la vitesse évolue aux temps élevés, par suite de la création d'un *écoulement secondaire* dû à sa présence, comme nous le verrons à la section 7.7.2.

2.1.2 Transport de quantité de mouvement dans un écoulement de cisaillement – introduction de la viscosité

Définition macroscopique de la viscosité

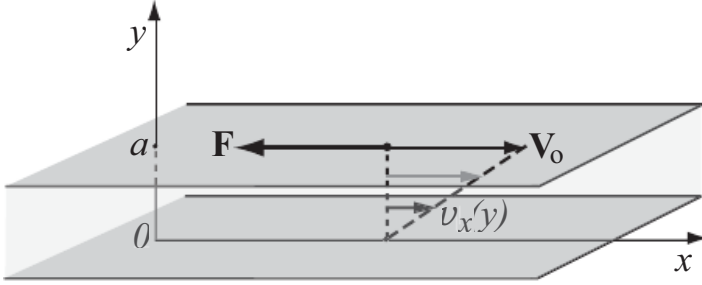


FIG. 2.2 – Géométrie d'un écoulement de cisaillement simple.

L'exemple, que nous venons de présenter, correspondait à un problème non stationnaire, dans lequel la vitesse en un point donné dépendait du temps. Analysons maintenant le cas de l'écoulement stationnaire d'un fluide situé entre deux plaques infinies, parallèles entre elles et distantes de a dans la direction perpendiculaire y (Fig. 2.2). Une plaque est maintenue fixe, l'autre se déplace parallèlement à elle-même à une vitesse constante V_0 suivant une direction Ox . Le fluide est entraîné par le mouvement. En régime stationnaire (c'est-à-dire assez longtemps après que la plaque ait été mise en mouvement), on observe que la vitesse du fluide varie linéairement de 0 à V_0 d'une plaque à l'autre avec :

$$v_x(y) = V_0 \frac{y}{a}. \quad (2.1)$$

L'écoulement ainsi réalisé est appelé *écoulement de cisaillement simple* ou *écoulement de Couette plan*. Ce type d'écoulement peut être comparé à la conduction thermique entre deux plaques parallèles, portées à des températures différentes (section 1.2.1) : en régime stationnaire, la température varie linéairement entre les valeurs limites T_1 et T_2 sur les plaques. Ici, le champ vectoriel $\mathbf{v}(y)$ remplace le champ scalaire de température $T(x)$. À la relation (1.6) entre le flux d'énergie thermique et le gradient de température correspond une relation de proportionnalité entre la force de friction $\mathbf{F}$ (pour une surface S de plaque), opposée au mouvement relatif des plaques, et le gradient de vitesse entre les plans ($\mathbf{F}$ est opposée à la direction Ox) :

$$\frac{F_x}{S} = \eta \frac{V_0}{L} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (2.2)$$

Le rapport F_x/S est appelé *contrainte de cisaillement* et il a la dimension d'une pression (S est la surface de la paroi sur laquelle s'exerce la force).

La correspondance entre le terme de contrainte F_x/S et celui de flux d'énergie thermique se précisera dans l'étude du mécanisme au niveau moléculaire.

La constante de matériau η est appelée *viscosité dynamique* (car associée à une force), ou simplement *viscosité*. Son équation aux dimensions est, d'après l'équation (2.2) :

$$[\eta] = \frac{[M] [L] [T]^{-2} [L]^{-2}}{[L] [T]^{-1} [L]^{-1}} = [M] [L]^{-1} [T]^{-1}.$$

L'unité dans le système international est le pascal.seconde (Pa.s) ($1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ kg}/(\text{m.s})$).

On rencontre dans la littérature d'autres unités historiques comme le poiseuille (symbole Pl), qui est l'ancienne dénomination de l'unité SI, et l'unité CGS qui est le poise (symbole Po) et vaut 10^{-1} Pa.s . Dans le tableau 1.2, à la fin du chapitre 1, sont reportées les valeurs de la viscosité pour quelques fluides.

Équation de diffusion de la quantité de mouvement

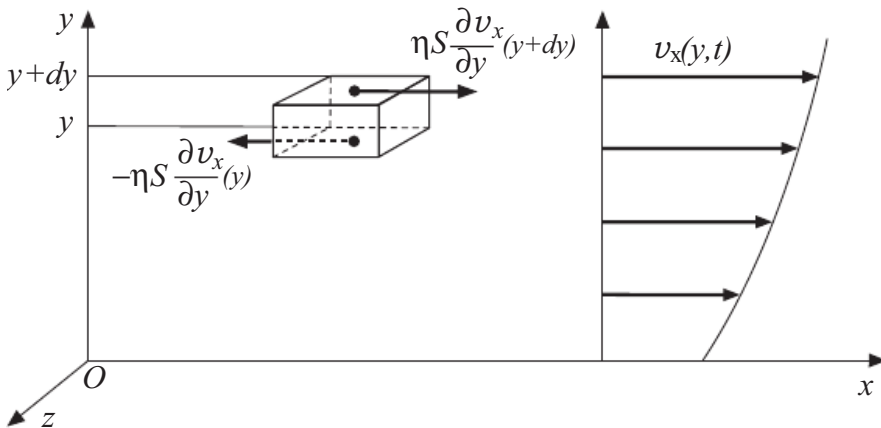


FIG. 2.3 – Équilibre des forces de cisaillement sur un élément de volume situé entre deux plans animés d'un mouvement de cisaillement.

Revenons au problème non stationnaire de départ évoqué à la section 2.1.1 et plaçons-nous dans la situation simple d'une géométrie plane (Fig. 2.3) : on suppose un écoulement dans une direction Ox , où la composante $v_x(y, t)$ de la vitesse est seulement fonction de la coordonnée y dans une direction perpendiculaire. L'équation aux dérivées partielles, qui relie les variations du champ de vitesse $v_x(y, t)$ avec la position y et le temps t , est la suivante :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (2.3)$$

Elle représente l'équivalent pour la vitesse (ou la quantité de mouvement si l'on multiplie par la masse volumique ρ ses deux membres) des équations de diffusion thermique (1.11b) et de la masse (1.26). La température et la concentration de traceur sont remplacées par les composantes de la vitesse (ici v_x) ou de la quantité de mouvement par unité de volume (ρv_x). L'équation fait intervenir le coefficient ν dépendant des propriétés du matériau et appelé *viscosité cinématique* ; il vérifie :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2.4)$$

et a pour dimension $[L]^2[T]^{-1}$. La viscosité cinématique ν représente un coefficient de diffusion pour la quantité de mouvement analogue aux coefficients de diffusion thermique κ et de masse D_m introduits au chapitre précédent. Cette correspondance permet de mieux comprendre l'analogie, développée au début de ce chapitre, entre la diffusion thermique et la pénétration d'une perturbation de vitesse à l'intérieur d'un cylindre (section 2.1.1).

Démonstration. Écrivons le bilan des forces exercées sur un élément de volume limité par deux surfaces en regard, planes et parallèles, de section S et de cotes y et $y+dy$. La paroi à la cote y est soumise à une force de cisaillement $-\eta S [\partial v_x / \partial y](y)$ exercée par le fluide situé au-dessous et dirigée vers les x négatifs dans le cas de la figure 2.3. De même, la paroi à la cote $y+dy$ est soumise à une force $+\eta S [\partial v_x / \partial y](y+dy)$ exercée par le fluide situé au-dessus et dirigée vers les x positifs. Il existe donc une force résultante sur le volume $S dy$:

$$-\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) + \eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy) = \eta S \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy.$$

Cette force communique au volume une accélération donnée par la loi de Newton :

$$\rho S dy \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta S \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy.$$

On en déduit l'équation (2.3) en divisant les deux membres par $\rho S dy$.

L'équation (2.3) peut être généralisée aux cas de géométries à deux et trois dimensions tant que n'interviennent pas des termes convectifs (notion que nous aborderons à la section 3.1.3) ; pour cela, il suffit de remplacer, dans l'équation (2.3), la dérivée par rapport à la coordonnée spatiale par un laplacien. Chaque composante du vecteur vitesse vérifiera alors la relation ainsi obtenue. On écrit l'ensemble sous la forme vectorielle :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{v} \quad (2.5)$$

(le laplacien vectoriel $\Delta \mathbf{v}$ est un vecteur tel que sa composante suivant x , par exemple, est égale à Δv_x). Nous justifierons et nous étudierons cette forme tridimensionnelle au chapitre 4, où nous écrirons une forme complète de cette équation en incluant des termes de pression.

Écoulement près d'un plan solide mis brusquement en mouvement parallèlement à lui-même

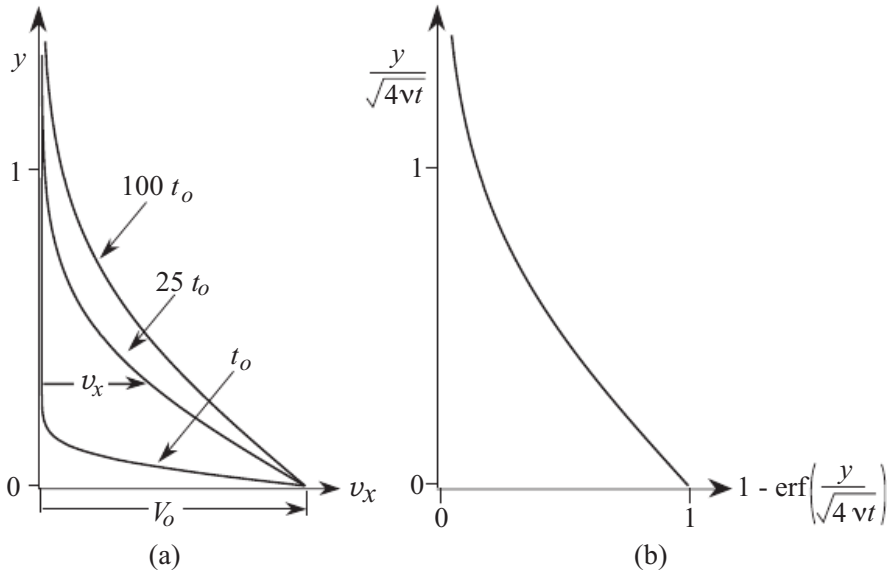


FIG. 2.4 – (a) Évolution avec le temps du profil de vitesse $v_x(y, t)$ induit par la mise en mouvement brusque d'un plan solide parallèlement à lui-même (problème de Rayleigh). (b) Tracé en coordonnées réduites de la fonction $1 - \text{erf}(u/2)$ ($u = y/(\nu t)^{1/2}$) correspondant à la variation précédente. Après rotation de 90° , les courbes sont identiques à celles des figures 1.8a et 1.8b du chapitre 1.

Ce problème est une application de l'équation (2.5) à une version plane de la mise en mouvement d'un fluide au voisinage de la paroi d'un cylindre, discutée à la section 2.1.1. On suppose que, au temps $t = 0$, un plan solide infini, d'équation $y = 0$, est mis brusquement en mouvement parallèlement à lui-même à une vitesse constante $\mathbf{V}_0$ parallèle à Ox (Fig. 2.4). On s'intéresse au mouvement du fluide avec un champ de vitesse $v_x(y, t)$, dans l'espace semi-infini situé au-dessus du plan $y = 0$. La figure 2.4a montre l'évolution temporelle du profil de vitesse. La solution de l'équation (2.3) pour ce problème est rigoureusement identique à celle du problème de la diffusion thermique dans un demi-espace à partir d'un plan dont la température reste fixe (section 1.2.1). Il suffit de remplacer κ par ν et la température réduite par $v_x(y, t)/V_0$. La viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ représente donc le coefficient de diffusion de la quantité de mouvement. Par le changement de variable $u = y/(\nu t)^{1/2}$, analogue à celui utilisé pour la diffusion thermique, on trouve pour l'équation (2.3) la solution correspondant à (1.18) :

$$v_x \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) = V_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi \nu t}} \int_0^y e^{-\left(\frac{\xi^2}{4\nu t}\right)} d\xi \right) = V_0 \left(1 - \text{erf} \left(\frac{u}{2} \right) \right) \quad (2.6)$$

où la fonction $\text{erf}(u)$ est, comme nous l'avons déjà vu au chapitre 1, l'intégrale $(2/\sqrt{\pi}) \int_0^u \exp(-z^2) dz$. Le rapport v_x/V_0 dépend donc uniquement de la variable u . Tous les profils se déduisent les uns des autres par dilatation de l'échelle des longueurs suivant Oy , d'un facteur proportionnel à $\sqrt{t}$: on dit qu'ils sont *autosimilaires*. La variation de v_x/V_0 en fonction de y et de t , donnée par l'équation (2.6), est identique à la variation de la température trouvée au chapitre 1 pour le problème de diffusion thermique équivalent. La figure 2.4b est l'analogue de la figure 1.8b et montre la variation du rapport v_x/V_0 en fonction de u : la zone où l'influence de la perturbation se fait sentir a une épaisseur de l'ordre de $\delta \approx \sqrt{\nu t}$ (longueur de diffusion), mais la vitesse v_x n'est pas tout à fait nulle à des distances plus grandes.

La mise en mouvement d'un fluide par couplage visqueux est d'autant plus rapide que sa viscosité η est grande et que sa masse volumique ρ (et donc son inertie) est petite. Pour l'eau, par exemple, la longueur de diffusion d'une perturbation de vitesse est de l'ordre de 3 mm pour $t = 10$ s, et 10 cm pour $t = 10^4$ s, soit environ trois heures ; cela montre la faible efficacité de la diffusion aux temps longs, comme nous l'avons déjà souligné au chapitre 1 dans le cas de la diffusion thermique.

Note. Notons que la viscosité cinématique de l'air est de l'ordre de grandeur de celle de l'eau, par compensation entre une masse volumique et une viscosité dynamique toutes deux mille fois plus faibles.

La variation en $\sqrt{t}$ de la distance de diffusion (commune à tous les mécanismes de diffusion) rend le mécanisme de diffusion visqueuse peu efficace à grande distance. Aussi, des mécanismes convectifs souvent complexes prennent le relais dès que l'on a des écoulements dans des récipients de taille suffisamment grande ; de tels mécanismes ont, comme dans le cas des ondes, des distances de propagation croissant linéairement avec le temps. Le terme « suffisamment grande » est très imprécis : une analyse en termes de nombres sans dimension nous permettra, plus loin, une évaluation plus quantitative.

2.2 Modèles microscopiques de la viscosité

Comme pour le transport de la masse et de l'énergie thermique, la connaissance des mécanismes microscopiques responsables de la viscosité nous permettra, par la suite, de mieux en cerner les effets. Ici encore, ces mécanismes sont très différents dans le cas des gaz (où notre analyse suivra alors de près celle utilisée pour les autres coefficients de transport) et dans celui des liquides.

2.2.1 Viscosité des gaz

Dans cette section, nous allons appliquer les raisonnements de théorie cinétique des gaz, utilisés au chapitre 1, à l'analyse du transport de quantité de mouvement dans un écoulement de cisaillement : nous pouvons ainsi évaluer

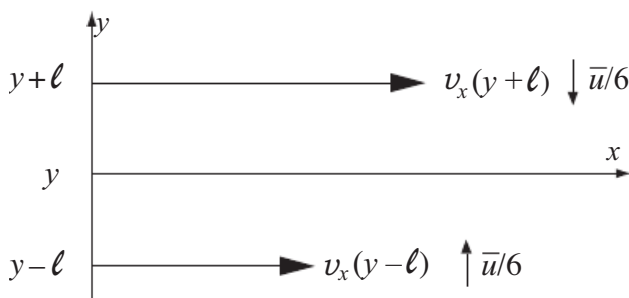


FIG. 2.5 – Schéma du calcul simplifié conduisant à la détermination de la viscosité d'un gaz.

le coefficient de viscosité défini précédemment. Nous partons d'un écoulement de cisaillement d'un gaz en régime stationnaire avec la géométrie plane de la figure 2.5. Les lignes de courant sont parallèles à l'axe x et le gradient de vitesse est dirigé suivant la direction y perpendiculaire à l'écoulement.

Nous évaluons cette fois le transfert, par les composantes perpendiculaires du mouvement d'agitation thermique, de l'impulsion moyenne $m v_x(y)$ parallèle à Ox (m représente la masse des molécules). Il apparaît deux échelles de vitesse très différentes :

- le module moyen $\bar{u}$ de la vitesse d'agitation thermique des molécules individuelles ;
- la vitesse de déplacement d'ensemble v_x , qui représente le léger excédent de mouvement d'agitation thermique dans la direction des coordonnées x positives (dans le cas de la figure), dû au mouvement relatif des plaques.

En appelant, comme au chapitre 1, ℓ le libre parcours moyen des molécules et n leur nombre par unité de volume, on obtient l'expression de la viscosité dynamique :

$$\eta = \frac{1}{3} m n \bar{u} \ell. \quad (2.7)$$

La viscosité cinématique ν est donnée à partir de la formule (2.4) :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1}{3} \bar{u} \ell, \quad (2.8)$$

ν prend, pour les gaz parfaits, la même valeur que les coefficients de diffusion thermique et de masse, κ et D_m , introduits au chapitre 1. Cela souligne encore plus fortement la correspondance avec ces deux autres mécanismes de transport diffusifs que l'analyse macroscopique nous avait déjà suggérée. Pour les gaz parfaits, la théorie cinétique donne, en combinant l'équation (2.7) avec les résultats de la section 1.3.2 :

$$\eta \propto \frac{\sqrt{mT}}{\sigma_c}$$

où σ_c est la section efficace de collision des molécules, et T la température du gaz.

Tout comme la conductivité thermique k , la viscosité est indépendante de la densité du gaz (ou de la pression), puisque le produit $n \ell \approx 1/\sigma_c$ n'en dépend pas. Ce résultat ne s'applique pas aux gaz à très basse ou à très haute pression, ainsi que nous l'avons déjà signalé à la section 1.3.2.

Démonstration de l'expression de la viscosité. Calculons le flux d'impulsion moyen traversant, par unité de temps, l'unité de surface du plan à la cote y en venant du « haut » (sur la figure). Ce flux est égal à : $-(1/6) m v_x(y + \ell) n \bar{u}$; le facteur géométrique $1/6$ vient de la prise en compte des différentes directions des vitesses des molécules, en supposant leur répartition isotrope. Le flux d'impulsion correspondant aux molécules venant de « dessous » s'écrit de même : $(1/6) m v_x(y - \ell) n \bar{u}$ (si la température est uniforme, $\bar{u}$ est indépendant de y). Ainsi, en présence d'un gradient de vitesse de cisaillement $\partial v_x / \partial y$ non nul, on a un bilan non nul des transferts, à travers le plan de coordonnée y , de la composante de l'impulsion suivant Ox .

Le flux d'impulsion résultant par unité de surface et de temps (toujours en comptant positivement les contributions venant de la zone inférieure au plan y) vaut donc :

$$-\frac{1}{6} m n \bar{u} [v_x(y + \ell) - v_x(y - \ell)].$$

L'existence de ce flux d'impulsion fini peut être interprétée comme une force de frottement $\mathbf{F}$ qui s'exerce entre les deux couches liquides situées de part et d'autre du plan y . Le sens de cette force parallèle à Ox correspond à l'entraînement des couches de plus faible vitesse par celles de vitesse plus grande.

En appliquant la relation de conservation de l'impulsion $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ à la force par unité de surface F_x/S et en utilisant l'expression (2.2) de celle-ci, on trouve :

$$\frac{F_x}{S} = -\frac{1}{6} m n \bar{u} [v_x(y + \ell) - v_x(y - \ell)] = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

ce qui conduit immédiatement à l'équation (2.7) après avoir utilisé un développement de Taylor.

2.2.2 Viscosité des liquides

Au chapitre 1, nous avons étudié la diffusion de particules dans un liquide : nous avons alors supposé qu'elle était contrôlée par des forces de type « frottement visqueux », exercées par le fluide sur les particules.

Les forces de viscosité à l'intérieur d'un liquide peuvent être analysées par une extension de cette première étude, mais nous utiliserons ici un modèle différent. Nous considérerons que les molécules du liquide sont toutes de même taille et se déplacent comme les grains d'une poudre. Les mouvements relatifs des grains associés à un écoulement de cisaillement s'opèrent par passage des grains individuels de la cage constituée par leurs plus proches voisins (supposés en contact avec eux) à une cage voisine ; ils sont illustrés par la figure 2.6 où la courbe $g(x)$ représente la variation d'énergie potentielle de la particule, avec la distance x dans la direction de la vitesse.

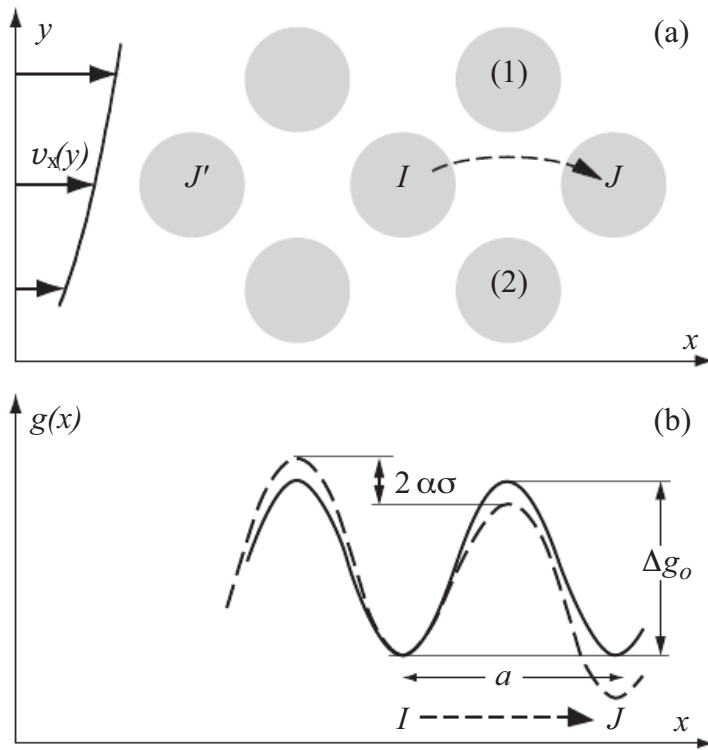


FIG. 2.6 – Principe du calcul de la viscosité d'un liquide. La barrière d'énergie g , que doit franchir la particule I pour tomber dans les puits voisins J et J' (a), est symétrique en l'absence d'écoulement (courbe grasse dans (b)). Elle devient dissymétrique (courbe en tirets) lorsqu'une contrainte de cisaillement est appliquée ; cette dissymétrie permet alors l'écoulement de cisaillement.

En l'absence d'écoulement, le passage d'une cage I à la voisine J requiert une énergie d'activation Δg_0 pour traverser la barrière de potentiel séparant les deux sites. L'application d'une contrainte de cisaillement σ a pour résultat de rendre asymétrique le profil $g(x)$ (courbe en tirets) : cela favorise le saut de la particule I vers la cage voisine J à sa droite (pour $\sigma > 0$) plutôt que vers la cage de gauche J' . Dans le cas de la figure, un écoulement de cisaillement avec $G = \partial v_x / \partial y > 0$ va donc apparaître (chaque couche glisse sur la précédente, ce qui fait augmenter la vitesse absolue de chaque plan avec la distance suivant y). Dans la limite des faibles contraintes, cette description conduit à la forme suivante de la viscosité :

$$\eta \approx \frac{h}{\alpha} e^{\frac{\Delta g_0}{k_B T}}. \quad (2.9)$$

Cette formule indique que la viscosité diminue lorsque la température croît, suivant une loi d'Arrhénus qui décrit le processus d'activation de saut à travers la barrière. Cette variation est opposée au cas des gaz, où la viscosité augmente avec la température comme $\sqrt{T}$.

Démonstration de l'expression (2.9) de la viscosité. Le passage d'un puits de potentiel à l'autre est effectué grâce à l'énergie $k_B T$ d'activation thermique; ainsi, la fréquence f des sauts d'un site I à la cage voisine J vérifie l'équation de Maxwell-Boltzmann (h est la constante de Planck) :

$$f \approx \frac{k_B T}{h} e^{-\frac{\Delta g_0}{k_B T}}. \quad (2.10)$$

La présence de la contrainte de cisaillement σ introduit une dissymétrie entre la hauteur des barrières d'énergie pour aller vers les sites J et J' . Les variations de hauteur des maxima sont proportionnelles à la contrainte σ , c'est-à-dire à la force de frottement par unité de surface entre couches :

$$-\Delta g = -\Delta g_0 \pm \alpha \sigma. \quad (2.11)$$

On remarque que la variation est du premier ordre par rapport à σ ; la variation $\alpha \sigma$ est une mesure de l'énergie fournie par le cisaillement pour abaisser (ou élever) la barrière d'énergie dans la direction de l'écoulement (ou dans le sens opposé) et α est un coefficient qui a la dimension d'un volume.

Il en résulte une différence entre les fréquences f_+ et f_- des sauts de I à J et de I à J' et, par suite, une mobilité globale des grains. En effet :

$$I \rightarrow J \quad f_+ \approx \frac{k_B T}{h} e^{-\frac{\Delta g_0 - \alpha \sigma}{k_B T}} \quad \text{et} \quad I \rightarrow J' \quad f_- \approx \frac{k_B T}{h} e^{-\frac{\Delta g_0 + \alpha \sigma}{k_B T}}.$$

Prenons la couche inférieure comme référence de vitesse nulle; la vitesse moyenne v_I des atomes I de la couche intermédiaire est de l'ordre du produit de la distance a parcourue par saut et de la fréquence globale ($f_+ - f_-$) de ces sauts :

$$v_I = a(f_+ - f_-) \approx a \frac{k_B T}{h} e^{-\frac{\Delta g_0}{k_B T}} \left(e^{\frac{\alpha \sigma}{k_B T}} - e^{-\frac{\alpha \sigma}{k_B T}} \right).$$

En supposant que la distance transverse entre les couches est également de l'ordre de a , le gradient de vitesse, à partir de la couche inférieure au repos, vaut donc :

$$G = \frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{v_I}{a} \approx 2 \frac{k_B T}{h} e^{-\frac{\Delta g_0}{k_B T}} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha \sigma}{k_B T} \right). \quad (2.12)$$

Dans la limite d'une faible contrainte, $\operatorname{sh}(\alpha \sigma / k_B T) \approx (\alpha \sigma / k_B T)$. L'expression (2.12) donne l'expression (2.9) en utilisant la forme de la viscosité η donnée par l'équation (2.2) ($\sigma = F_x / S = \eta \partial v_x / \partial y$).

Remarque. Une forme empirique d'écriture de (2.12) permet d'estimer la viscosité d'un liquide à partir de la donnée de son volume molaire $\mathcal{V}$ et de la température d'ébullition T_e :

$$\eta = \frac{h}{\mathcal{V} / \mathcal{N}} e^{3,8 (T_e / T)}. \quad (2.13)$$

Le remplacement de Δg_0 par un terme d'énergie proportionnel à $k_B T_e$ est compréhensible. La vaporisation se produit en effet lorsque la température est assez élevée pour que deux particules voisines aient une probabilité appréciable de se séparer. Nous avons exprimé une condition du même type pour le passage par activation thermique de la particule I entre les particules (1) et (2). Par ailleurs, pour obtenir l'équation (2.13), nous avons pris le volume α égal au volume moyen $\mathcal{V} / \mathcal{N}$ occupé par chaque molécule ($\mathcal{N}$ est le nombre d'Avogadro) et h est ici la constante de Planck.

Application. Évaluons la viscosité du benzène à la température ordinaire. $\nu = 89 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mole}^{-1}$, $T_e = 353 \text{ K}$, $\mathcal{N} = 6,02 \times 10^{23}$, $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J.s}$. L'application de la relation (2.13) conduit à une valeur $\eta = 4,5 \times 10^{-4}$, résultat comparable à la valeur expérimentale de $6,5 \times 10^{-4} \text{ Pa.s}$.

2.2.3 Simulation numérique des trajectoires de molécules dans un écoulement

On peut représenter les mécanismes microscopiques de la viscosité à l'aide de la technique de simulation numérique, dite de *dynamique moléculaire*, qui analyse les trajectoires de molécules individuelles (pour des questions de temps de calcul, ces simulations sont généralement réalisées avec un nombre réduit de molécules). Dans ces calculs, on tient compte des interactions locales entre molécules qui se déplacent, de l'effet des parois, qui sont elles-mêmes représentées par un ensemble de particules, et des forces imposées sur le fluide. La figure 2.7a montre la trajectoire d'une molécule, parmi un grand nombre contenues entre deux plans parallèles solides fixes et soumises à un champ de force de type gravité, parallèle à l'axe Ox . On observe un mouvement désordonné. Les changements de direction sont dus aux interactions avec les autres molécules (n'apparaissant pas sur la figure). À ce mouvement de diffusion brownienne se superpose un mouvement de dérive dans la direction de la force appliquée. La densité de particules est assez élevée pour que ce modèle bidimensionnel simule un liquide, ce qui explique les nombreuses collisions.

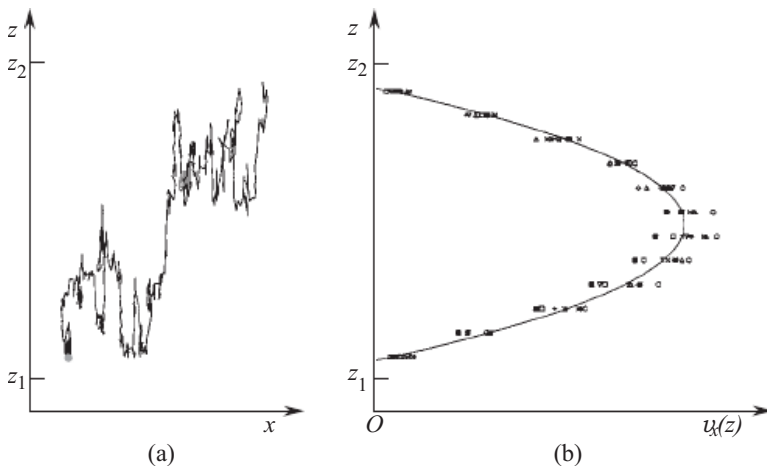


FIG. 2.7 – (a) Trajectoire d'une des molécules d'un liquide contenu entre deux plans fixes horizontaux ($z = z_1$ et $z = z_2$) et soumis à une force horizontale longitudinale (de type gravité) la molécule est au voisinage de la paroi au début de la simulation. Noter que le rapport entre les échelles suivant les directions de la trajectoire x et y est de l'ordre de 7, ce qui explique les pentes apparentes locales très fortes de la trajectoire. (b) Profil parabolique moyen de la vitesse dans le fluide (écoulement de Poiseuille plan) déduit de la même simulation (docs. J. Koplik).

On remarque aussi la réduction de l'accélération suivant Ox à proximité des parois solides. Les particules adjacentes à la paroi sont au repos, comme il est normal pour l'écoulement d'un fluide visqueux. La figure 2.7b montre, à différentes distances transverses entre les parois, la vitesse moyennée sur un grand nombre de particules et d'instantants différents. Ce profil de vitesse parabolique constitue une caractéristique essentielle de l'écoulement des fluides visqueux et sera étudié en détail au chapitre 4.

2.3 Comparaison entre les mécanismes de diffusion et de convection

2.3.1 Le nombre de Reynolds

Dans un écoulement quelconque de fluide, les deux mécanismes (convectif et diffusif) de transport de quantité de mouvement sont simultanément actifs mais, suivant la vitesse et la géométrie de l'écoulement, ils n'auront pas le même ordre de grandeur. Analysons, par exemple, le cas de l'écoulement d'un fluide dans un canal de géométrie quelconque et évaluons des ordres de grandeur pour les processus de transport.

– **Convection** : le flux de quantité de mouvement associé à la convection est de l'ordre de ρU^2 où ρ est la densité du fluide et U la vitesse caractéristique de l'écoulement (par exemple la vitesse moyenne dans la section). L'ordre de grandeur de ce flux est obtenu en multipliant la quantité de mouvement par unité de volume de l'ordre de ρU par la vitesse U .

– **Diffusion** : dans le cas des écoulements parallèles analysés précédemment, le flux transverse de quantité de mouvement associé à la viscosité était $\eta \partial v_x / \partial y$. Dans le cas général, il reste égal au produit de η par des combinaisons de dérivées premières des composantes de la vitesse et sera de l'ordre de $\eta U/L$. On peut alors former un rapport sans dimension :

$$\frac{\text{flux convectif de la quantité de mouvement}}{\text{flux diffusif de la quantité de mouvement}} \approx \frac{\rho U^2}{\eta U/L} = \frac{UL}{\nu} = Re. \quad (2.14)$$

Ce rapport définit le *nombre de Reynolds* qui caractérise l'importance relative du transport de quantité de mouvement par convection et par diffusion visqueuse.

Le nombre de Reynolds peut être également considéré comme le rapport entre les temps caractéristiques de transport par diffusion et convection sur des distances de l'ordre de L . Comme ν représente la diffusivité de la quantité de mouvement, le temps caractéristique de diffusion sur une distance de l'ordre de L est, comme pour les autres processus diffusifs, de l'ordre de L^2/ν . Le temps caractéristique de convection est, lui, de l'ordre de L/U (temps de

parcours de la distance L à la vitesse U de l'écoulement). D'où un rapport des deux temps caractéristiques :

$$\frac{\text{temps caractéristique de diffusion}}{\text{temps caractéristique de convection}} \approx \frac{L^2/\nu}{L/U} = \frac{UL}{\nu} = Re. \quad (2.15)$$

C'est le mécanisme le plus rapide de propagation des perturbations qui sera dominant et imposera l'organisation du champ de vitesse.

– Dans un écoulement à *petit nombre de Reynolds*, les forces visqueuses et le transport diffusif associé sont dominants. Le profil d'écoulement résulte d'un équilibre entre les forces de frottement visqueux et les gradients de pression ou forces en volume imposées extérieurement. Conformément à l'expression de Re , ces écoulements seront observés aux faibles vitesses et/ou dans des systèmes de très petite taille (bactéries ou micro-organismes par exemple) ou encore pour des fluides très visqueux dans lesquels les forces de frottement entre couches sont importantes. Il s'agit en général d'écoulements très stables, aux profils bien définis, appelés *écoulements rampants*. Nous consacrerons le chapitre 9 à leur étude.

– Au contraire, dans les écoulements à *grand nombre de Reynolds*, le transport de quantité de mouvement par convection est dominant et il apparaît sous forme de termes non linéaires contenant des produits de composantes de la vitesse et de leurs gradients. Les écoulements correspondants sont instables : ce sont, par exemple, les écoulements turbulents, qui correspondent à une infinité de solutions possibles des équations de mouvement et que nous étudierons au chapitre 12. Ils sont observés aux grandes vitesses, dans des fluides peu visqueux ou dans des systèmes de grande taille ; de tels écoulements apparaissent comme la superposition aléatoire de tourbillons de taille très variable. Notons cependant que, sur des échelles de distance de l'ordre de la dimension des plus petites structures, la prise en compte du transport de quantité de mouvement par diffusion redevient essentielle.

– Dans certains cas, *même à des nombres de Reynolds élevés*, la configuration de l'écoulement peut alors rester la même qu'à faible vitesse. L'exemple le plus simple est celui des *écoulements parallèles* (où seule une composante de la vitesse est non nulle), tels que l'écoulement dans un cylindre en rotation discuté à la section 2.1.1. Dans ce cas, on ne peut avoir transport de quantité de mouvement dans la direction perpendiculaire aux lignes de courant que par diffusion visqueuse ; les écoulements restent alors contrôlés par la viscosité, indépendamment du nombre de Reynolds, tant que le profil de vitesse reste parallèle. De tels écoulements seront étudiés dans la section 4.5. Néanmoins, si des composantes transverses locales de la vitesse sont créées accidentellement, le transport de quantité de mouvement par convection cesse d'être nul et de nouvelles solutions peuvent apparaître.

L'écoulement devient alors souvent instable et turbulent. Nous étudierons les écoulements de ce type aux chapitres 11 et 12 ; mais, dès la section 2.4 du présent chapitre, nous décrirons, pour plusieurs types d'écoulements, différentes séquences de transitions entre régimes d'écoulement lorsque le nombre de Reynolds augmente.

Remarque. Dans le cas général, les écoulements dominés par la viscosité sont souvent qualifiés de *laminaires*.

2.3.2 Transports convectif et diffusif de masse ou d'énergie thermique

Les mécanismes de transports convectif et diffusif peuvent agir simultanément dans les problèmes de propagation d'énergie thermique ou la dispersion de polluants, tout comme dans le cas de la quantité de mouvement que nous venons de traiter. L'analyse de l'effet convectif est d'ailleurs plus simple dans ces deux cas car la vitesse n'intervient que pour le transport convectif et parce que la quantité convectée (température, concentration) est un scalaire.

Transport de matière, nombre de Péclet

Analysons, par exemple, le transport d'un traceur A de concentration locale $\rho_A(x, t)$ par un écoulement de vitesse caractéristique U . Si l'on peut négliger les effets de différence de densité introduits par la présence du traceur, ce dernier est, d'une part, entraîné par la vitesse locale de l'écoulement et, d'autre part, s'étale par diffusion moléculaire. Appelons L l'échelle de longueur caractéristique des variations de la concentration du traceur suivant Ox ; le flux diffusif de traceur vérifie :

$$J_m = -D_m \frac{\partial \rho_A}{\partial x} \approx D_m \frac{\rho_A}{L}$$

où D_m est le coefficient de diffusion moléculaire du traceur (Eq. 1.51). Pour le flux convectif, on a, en raisonnant comme pour la quantité de mouvement au paragraphe précédent :

$$J_{conv} \approx \rho_A U.$$

Le rapport des flux associés aux deux mécanismes s'exprime par :

$$\frac{J_{conv}}{J_m} \approx \frac{\rho_A U}{D_m \rho_A / L} = \frac{UL}{D_m} = Pe. \quad (2.16)$$

Le rapport Pe , appelé *nombre de Péclet*, représente, pour les phénomènes de dispersion de masse, l'équivalent du nombre de Reynolds pour la quantité de mouvement. On peut d'ailleurs, tout comme pour le nombre de Reynolds, définir le nombre Pe comme le rapport des temps caractéristiques de transport de matière par diffusion et convection sur une distance de l'ordre de L .

Transport d'énergie thermique, nombre de Prandtl

Pour les transferts d'énergie thermique, les mêmes comparaisons peuvent être effectuées entre transport convectif et transport diffusif, ce qui conduit à définir, comme au paragraphe précédent, un nombre de Péclet thermique par :

$$Pe_\theta = \frac{UL}{\kappa}$$

où κ est la diffusivité thermique introduite au chapitre 1. Pour évaluer l'efficacité relative du transport diffusif d'énergie thermique et celui de quantité de mouvement, on a recours au *nombre de Prandtl* qui est le rapport entre les coefficients de viscosité cinématique et de diffusivité thermique :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} = \frac{Pe_\theta}{Re}. \quad (2.17)$$

En d'autres termes, le nombre Pr représente le rapport des temps caractéristiques L^2/κ et L^2/ν de diffusion des variations spatiales de température et celles de vitesse sur une même distance L . Des valeurs typiques de ce nombre sont données au tableau 1.2 de la fin du chapitre 1. De manière similaire, le *nombre de Lewis*, $Le = D_m/\kappa$, représente le rapport entre les temps de diffusion thermique et massique; il intervient dans les phénomènes de combustion que nous étudierons à la section 10.9. Le tableau 2.1, à la fin de cette section, résume les définitions des différents nombres sans dimension qui font intervenir les coefficients de diffusion.

Pour les gaz, les coefficients de diffusivité thermique κ , de diffusion massique D_m et de viscosité cinématique ν sont du même ordre, comme nous l'avons vu à la section 2.2.1. Le nombre de Prandtl et le nombre de Lewis sont donc de l'ordre de l'unité. Dans un problème de dynamique des gaz, où interviennent simultanément les transports de masse et de quantité de mouvement, les nombres de Péclet et de Reynolds sont aussi du même ordre. En revanche, dans les liquides, le nombre de Prandtl peut prendre des valeurs très différentes suivant les mécanismes de conduction thermique qui interviennent. Ainsi, pour les métaux liquides, c'est le transport d'énergie thermique par les électrons de conduction qui domine; il conduit à une forte diffusivité thermique et à une faible valeur du nombre de Prandtl. Au contraire, dans les liquides isolants électriques de forte viscosité (comme les huiles organiques), la diffusivité thermique varie peu d'une huile à l'autre, alors que la viscosité et, par suite, le nombre de Prandtl, peuvent prendre des valeurs très grandes.

On définit de même un nombre de Prandtl massique $Sc = \nu/D_m$, appelé *nombre de Schmidt*. Si l'on se reporte à l'évaluation du coefficient D_m pour les liquides réalisée à la section 1.3.3, on voit que, lorsque l'on augmente la viscosité ν du milieu, on diminue D_m dans le même temps. Il est donc facile d'obtenir des grandes valeurs de Sc dans des liquides très visqueux (pour

l'eau, pourtant peu visqueuse, le nombre de Schmidt Sc est déjà de l'ordre de 10^3). Dans ces conditions, même à des nombres de Reynolds très petits, le transport convectif des traceurs sera plus efficace que le transport diffusif. Sauf à des vitesses très faibles, l'étalement d'une tache de traceur (un colorant par exemple), sous l'effet des gradients de vitesse d'écoulement, est beaucoup plus important que celui dû à la diffusion moléculaire.

Note. Dans les visualisations d'écoulements instationnaires utilisant des traceurs, la distribution du colorant ne représente pas la configuration instantanée de l'écoulement, mais elle dépend de toute l'histoire de l'évolution de celui-ci (section 3.1.4).

L'étalement des traceurs dans les milieux poreux (étudiés dans la section 9.7) est un exemple d'application des phénomènes de dispersion convective. Dans ces milieux, les tailles des canaux d'écoulement sont très petites et le nombre de Reynolds Re est en général petit. En raison des fortes variations de la vitesse d'un point à un autre, associées à la géométrie aléatoire du milieu, l'étalement des traceurs sous l'effet de ces gradients de vitesse induira un coefficient de dispersion qui jouera le rôle d'une diffusivité pour le problème : ce coefficient est généralement bien supérieur au coefficient de diffusion moléculaire D_m . *A fortiori*, pour les écoulements turbulents dans lesquels la vitesse en un point donné varie au cours du temps, le transport convectif est dominant, sauf sur les toutes petites distances, pour lesquelles le mélange par diffusion moléculaire s'effectue plus rapidement que le mélange par convection.

Quelques exemples de ces problèmes seront analysés au chapitre 9, qui traite des écoulements rampants, et au chapitre 10, qui concerne l'étude des couches limites.

Remarque. Nous avons défini, dans cette section, plusieurs nombres sans dimension caractérisant les écoulements (nombres de Reynolds, de Prandtl, de Péclet . . .). Une méthode classique de définition de tels nombres consiste à rechercher, une combinaison sans dimension des paramètres qui interviennent dans un écoulement (sous forme d'un produit de puissances de ceux-ci). Dans le cas du nombre de Reynolds, c'étaient la viscosité, la masse volumique, la vitesse et une échelle de taille. En tenant compte du fait que la masse n'intervient que dans η et ρ , on suppose une forme du type $(\eta/\rho)^\alpha U^\beta L^\gamma$. La seule forme adimensionnelle possible est obtenue pour $\beta = \gamma = -\alpha$ (en effet la dimension de η/ρ est UL). Cette méthode, dite de *Vaschy-Buckingham*, fournit une approche systématique pour suggérer des combinaisons sans dimension et déterminer le nombre de combinaisons indépendantes possibles ; en revanche, elle n'aide pas à dégager leur signification physique, ni à choisir les combinaisons qui caractérisent le mieux un phénomène donné.

TAB. 2.1 – Nombres sans dimension caractérisant l'importance relative des différents mécanismes de diffusion et de convection.

Nombre de Reynolds	$Re = \frac{UL}{\nu}$	$\frac{\text{temps de diffusion de la quantité de mouvement}}{\text{temps de convection de la quantité de mouvement}}$
Nombre de Péclet	$Pe = \frac{UL}{D_m}$	$\frac{\text{temps de diffusion de la masse}}{\text{temps de convection de la masse}}$
Nombre de Péclet thermique	$Pe_\theta = \frac{UL}{\kappa}$	$\frac{\text{temps de diffusion thermique}}{\text{temps de convection thermique}}$
Nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$	$\frac{\text{temps de diffusion thermique}}{\text{temps de diffusion de la quantité de mouvement}}$
Nombre de Schmidt	$Sc = \frac{\nu}{D_m}$	$\frac{\text{temps de diffusion de la masse}}{\text{temps de diffusion de la quantité de mouvement}}$
Nombre de Lewis	$Le = \frac{D_m}{\kappa}$	$\frac{\text{temps de diffusion thermique}}{\text{temps de diffusion de la masse}}$

2.4 Description de différents régimes d'écoulement

Au cours de ce chapitre, nous avons montré que, suivant les vitesses et les géométries des écoulements ou, encore, la viscosité des fluides, le transport de la quantité de mouvement d'un fluide peut être dominé par des phénomènes diffusifs ou convectifs ; l'ordre de grandeur relatif de ces termes de transport est le nombre de Reynolds Re . Nous allons maintenant analyser, à partir d'observations expérimentales, comment les variations des processus de transport, associées aux variations du nombre de Reynolds influencent les écoulements et comment s'opère la transition entre les différents régimes.

La vie courante donne de nombreux exemples de la diversité de ces régimes : il y a de très grandes différences entre l'écoulement (« turbulent ») perpétuellement changeant d'une rivière dans un rapide et celui très stable (« laminaire ») d'une huile visqueuse. Il existe aussi des cas intermédiaires, où l'écoulement n'est turbulent que par intermittence ou bien encore varie en fonction du temps de façon périodique. Ainsi en est-il de l'écoulement de l'air derrière un fil téléphonique (« le fil qui chante ») ou derrière un pont suspendu ; s'il a été mal conçu, ce dernier peut entrer en résonance avec les oscillations de la vitesse de l'écoulement et se briser, comme ce fut le cas pour le pont de Tacoma aux États-Unis.

2.4.1 Écoulements dans un tube cylindrique : l'expérience de Reynolds

Dans un article fondateur publié en 1883, O. Reynolds, reprenant des études antérieures de Poiseuille, décrit la transition d'un écoulement de l'eau dans un tube cylindrique d'un régime laminaire (« *direct* ») à turbulent (« *sinuous* »). Il introduit dès le début de cet article le nombre qui porte son nom et effectue un ensemble très complet de mesures où il fait varier séparément les paramètres de l'écoulement : la viscosité (en changeant la température), le diamètre et la vitesse. Il démontre expérimentalement, en complément de son analyse théorique, que la transition se fait dans ces divers cas pour une même valeur Re_c de ce paramètre. Il démontre aussi que la transition laminaire-turbulent s'accompagne d'un changement de la loi de variation de la différence de pression entre les extrémités du tube en fonction du débit du fluide. Reynolds constate également que le tube doit être plus long qu'une certaine « longueur d'entrée » pour qu'un profil de vitesse stationnaire (dans ce cas le « profil de Poiseuille ») puisse s'établir. Enfin, il met en évidence l'importance du contrôle des perturbations qui déclenchent la transition et influencent la valeur de Re_c : afin de les réduire, il adapte à l'entrée du tube une sorte d'entonnoir assurant une variation continue de la section. Ces différentes caractéristiques seront discutées plus en détail à la section 11.4.3.

L'article de Reynolds discute également des visualisations réalisées par injection ponctuelle de colorant à l'entrée du tube. Des observations réalisées avec un dispositif similaire sont reproduites sur la figure 2.8. Aux basses vitesses ($Re < Re_c$) (cas a), le colorant injecté à l'entrée reste localisé pendant une très grande distance sur un filet rectiligne qui, comme la vitesse du fluide, est parallèle à l'axe. C'est cette absence de mélange et la stabilité de l'écoulement qui le font qualifier d'écoulement laminaire. Au-dessus du nombre de Reynolds Re_c (cas b et c), lorsque l'écoulement est turbulent, apparaissent des composantes de vitesse transverses variant aléatoirement avec le temps et la distance : elles induisent un important mélange de colorant entre le centre et les zones proches des parois. Enfin, pour Re voisin de Re_c , Reynolds met en évidence un régime intermédiaire avec des bouffées turbulentes qui se propagent avec l'écoulement et sont séparées par des phases d'écoulement laminaire.

2.4.2 Écoulement derrière un cylindre

On observe, sur les figures 2.9a-d, des étapes différentes de transition vers la turbulence dans le cas d'un écoulement de vitesse U croissante autour d'un cylindre circulaire de diamètre d . L'écoulement est dirigé suivant la direction Ox et le cylindre suivant la direction perpendiculaire Oz . Les images ont été obtenues en éclairant le cylindre par une nappe lumineuse située dans le plan xOy de la figure et en injectant en amont du cylindre un colorant fluorescent. Le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement est pris égal à



FIG. 2.8 – Reproduction de l'expérience historique de Reynolds ; visualisation dans un tube circulaire de colorant injecté ponctuellement à l'entrée de celui-ci dans un écoulement en (a) régime laminaire, (b) apparition de mouvements transverses du fluide, (c) régime turbulent (docs. N.H. Johannesen et C. Lowe, *An Album of Fluid Motion*).

Ud/ν . À la section 11.1 consacrée aux instabilités, nous étudierons un modèle dit de Landau de l'apparition de rouleaux contrarotatifs derrière le cylindre au voisinage d'un nombre de Reynolds critique ($Re_c = 47$).

Note. On peut réaliser une expérience simplifiée en utilisant un bac rempli d'une couche de quelques centimètres d'eau, contenant de fines particules allongées en suspension ; ces particules s'alignent dans l'écoulement et réfléchissent la lumière de manière anisotrope. En déplaçant dans le liquide une baguette cylindrique verticale de quelques millimètres de diamètre, on peut observer les différents régimes de la figure 2.9.

- *Aux faibles vitesses* ($Re < 1$) (Fig. 2.9a), l'écoulement est laminaire et parfaitement symétrique entre l'amont et l'aval du cylindre. Cette caractéristique découle de la réversibilité des écoulements aux faibles nombres de Reynolds, qui seront étudiés au chapitre 9 (lorsque l'on inverse le sens de la vitesse, les lignes de courant restent inchangées).

- *À partir d'un nombre de Reynolds Re de l'ordre de 5*, on observe deux tourbillons contrarotatifs fixes en aval du cylindre (écoulement de recirculation). La longueur L de la zone de recirculation croît avec Re (Fig. 2.9b).

- *Au-delà d'une valeur critique Re_c de l'ordre de 47*, l'écoulement cesse d'être stationnaire et la vitesse du fluide dépend du temps : des tourbillons sont émis périodiquement en aval de l'écoulement (Fig. 2.9c). Ils forment

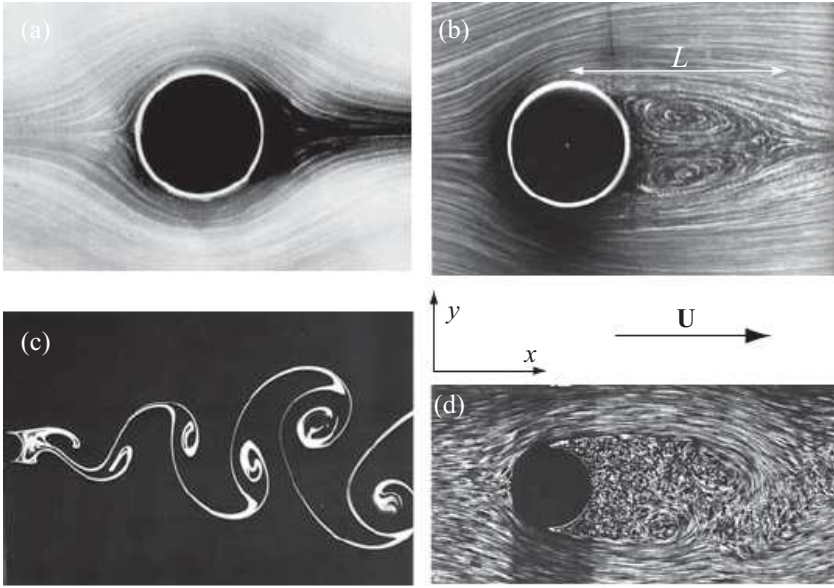


FIG. 2.9 – Visualisation d'un écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds ; (a) écoulement quasiment symétrique entre amont et aval à petit nombre de Reynolds ($Re = 0,16$) ; (b) présence de deux zones de recirculation fixes en arrière du cylindre ($Re = 26$) ; (c) émission périodique de tourbillons formant une allée de Bénard-von Karman ($Re = 200$) ; (d) sillage turbulent ($Re = 0,8 \times 10^4$) (docs. a, b et c : S. Taneda, d : H. Werlé).

une double rangée de tourbillons, appelée *allée de Bénard-von Karman*. La fréquence d'émission de ces tourbillons est caractérisée par le nombre sans dimension, appelé *nombre de Strouhal* :

$$Sr = f \frac{d}{U} \quad (2.18)$$

qui est approximativement constant avec U et de l'ordre de l'unité. La fréquence f est donc proportionnelle à la vitesse U .

Note. Les phénomènes de type « fil qui chante » (lignes télégraphiques) ou « harpe éolienne » du roi David apparaissent quand une fréquence de résonance mécanique d'un fil tendu en travers d'un écoulement d'air coïncide avec la fréquence f d'émission des tourbillons.

– Aux très grands nombres de Reynolds (Fig. 2.9d), il apparaît des mouvements turbulents incohérents, à des échelles spatiales plus faibles, d'autant plus petites que Re est grand (en pratique leur taille minimale décroît comme $Re^{-1/2}$). Cependant, l'émission périodique de grands tourbillons superposés à ces fluctuations subsiste. Ils sont d'ailleurs encore observés à des nombres de Reynolds extrêmement élevés dans des écoulements océanographiques ou atmosphériques, derrière des obstacles de grande taille (Fig. 2.10 CC).

Remarque. Les approches actuelles de la turbulence prennent en compte simultanément les grandes structures, qui dépendent de la nature de l'écoulement, les mouvements désordonnés aux petites échelles, qui en sont indépendants, ainsi que le transfert de l'énergie cinétique de l'écoulement d'une échelle de mouvement à l'autre. Ces concepts importants de la *turbulence statistique* seront illustrés, au cours du chapitre 7, par des exemples de dynamique des tourbillons, puis étudiés en détail au chapitre 12.

2.4.3 Écoulement derrière une sphère

Les figures 2.11a-g CC montrent que des régimes d'écoulement qui diffèrent sur plusieurs points des précédents sont observés derrière une sphère de diamètre d dans un écoulement de nombre de Reynolds $Re = Ud/\nu$ ($\mathbf{U}$ est la vitesse de l'écoulement suffisamment loin en amont de la sphère).

- **Pour $Re < 212$** , on observe un écoulement axisymétrique et stationnaire avec, en aval de la sphère, un tourbillon toroïdal d'axe parallèle à la vitesse $\mathbf{U}$ (Fig. 2.11a). Ce tourbillon joue le rôle des deux zones symétriques de recirculation observées pour le cylindre.

- **Pour $212 < Re < 280$** , il apparaît deux tourbillons parallèles à l'axe de l'écoulement, symétriques par rapport à ce dernier et avec des sens contraires de rotation (Figs. 2.11b et 2.11e). Lorsque le nombre de Reynolds augmente, ces tourbillons sont d'abord stationnaires ($Re < 267$) puis oscillent pour $Re > 267$ (Figs. 2.11c et 2.11f).

- Enfin, **pour $Re > 280$** , l'écoulement devient tout d'abord périodique avec émission régulière de tourbillons en forme d'« épingles à cheveux » (Figs. 2.11d et 2.11g) : deux tourbillons longitudinaux apparaissent comme précédemment mais, au bout d'une distance finie, ils se déforment et sont connectés par un segment transverse de tourbillon. Pour des nombres de Reynolds encore plus élevés, on aura, comme précédemment, apparition de mouvements plus complexes, puis de la turbulence (voir Fig. 12.13).

De façon générale, donc, l'importance croissante des termes inertiels lorsque le nombre de Reynolds augmente, dans une géométrie d'écoulement donnée, fait d'abord apparaître des structures stationnaires venant se superposer à l'écoulement laminaire de base. Ensuite, suivant les cas, on pourra observer différents modes de perturbations périodiques ou, directement, des bouffées turbulentes.

This page intentionally left blank

Chapitre 3

Cinématique des fluides

CE CHAPITRE est consacré à l'étude des mouvements d'un fluide, en particulier à l'analyse de ses déformations. Les causes de ces mouvements seront examinées au chapitre suivant. Nous commençons par indiquer les méthodes d'analyse du mouvement d'un fluide (section 3.1) (définition de la vitesse d'une particule de fluide; descriptions eulérienne et lagrangienne; accélération; lignes caractéristiques d'un écoulement), puis nous analysons les déformations dans un fluide (section 3.2); cette analyse présente de nombreuses analogies avec les problèmes de déformation en mécanique des solides. La section 3.3 est consacrée à l'établissement de la relation de conservation de la masse et de l'hypothèse d'incompressibilité d'un fluide (condition vérifiée tout au long de ce livre). Nous mentionnons également différents types d'analogies qui peuvent être faites avec l'électromagnétisme et qui seront précisées dans les chapitres suivants. Nous introduisons ensuite la fonction de courant pour les écoulements plans ou axisymétriques (section 3.4) et donnons quelques exemples d'écoulements plans et de réseaux de lignes de courant correspondants. Nous terminons (section 3.5) par la description de quelques méthodes expérimentales de visualisation d'écoulements et de détermination du champ de vitesse d'un fluide.

3.1 Description du mouvement d'un fluide

3.1.1 Échelles de longueur et hypothèse de continuité

On définit une particule de fluide comme un élément de fluide de volume V tel que sa taille $a \approx V^{1/3}$ soit :

- très petite devant les échelles de longueur caractéristiques L de l'écoulement (largeur d'un canal, rayon d'un tube, taille d'un obstacle) ;
- très grande devant le libre parcours moyen ℓ des molécules. Dans le cas contraire, les molécules pourraient traverser le volume de la particule sans échange d'énergie et de quantité de mouvement ; une répartition moyenne

significative de la vitesse ne pourrait donc être définie sur une telle échelle de longueur.

L'échelle supérieure L peut descendre jusqu'à une fraction de millimètre pour un capillaire sanguin, ou un micromètre dans le cas des canaux d'un milieu poreux. Le libre parcours moyen ℓ (échelle inférieure) est de l'ordre d'un micromètre pour un gaz aux pressions usuelles et se trouve très inférieur à L dans la plupart des applications. En revanche, dans le cas d'un gaz sous très faible pression (pression inférieure à 10^{-4} Pa) ou encore pour des échelles supérieures L assez faibles, le libre parcours moyen devient du même ordre de grandeur que les dimensions macroscopiques du récipient. Dans ce régime moléculaire, dit *régime de Knudsen*, l'étude des écoulements se ramène à un problème de mécanique d'objets discrets que l'on peut décrire en termes de chocs entre objets et parois. Ce régime a été évoqué à la section 1.3.2 en relation avec la définition des coefficients de diffusion dans les gaz.

Remarque. Il faut se garder de confondre la particule de fluide avec les molécules (ou atomes) constituant le fluide ; une particule de fluide contiendra toujours, d'après ce qui précède, un très grand nombre de molécules. La figure 2.7 montre clairement la différence entre la vitesse des molécules individuelles (a) et la vitesse moyenne du fluide (b).

Lorsque le modèle de particules de fluide est utilisable, il est possible de décrire le fluide comme un *milieu continu*. On définit alors la vitesse locale $\mathbf{v}$ du fluide, ou vitesse d'une particule de fluide, comme la moyenne des vitesses des molécules situées à l'intérieur d'un petit volume de fluide. Cette moyenne ne dépend pas de la taille a de la particule dès lors que l'hypothèse $a \gg \ell$ est vérifiée et que a est petite devant les longueurs caractéristiques macroscopiques de l'écoulement

3.1.2 Descriptions eulérienne et lagrangienne du mouvement d'un fluide

L'ensemble des vitesses $\mathbf{v}$ des particules de fluide de position $\mathbf{r}$ à l'instant t ($\mathbf{r} = \mathbf{OM}$) définit un champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Dans la *description eulérienne* du mouvement d'un fluide, on s'intéresse à la vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ d'une particule de fluide qui coïncide à l'instant t avec le point *fixe* M de vecteur position $\mathbf{r}$; à chaque instant, on regarde donc les vitesses de particules *différentes*. À un instant ultérieur t' , la vitesse au même point $\mathbf{r}$ sera devenue $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t')$. Ce point de vue est celui d'un observateur au repos par rapport au référentiel dans lequel est mesurée la vitesse $\mathbf{v}$ et correspond aux études expérimentales réalisées avec des *sondes fixes* par rapport au mouvement du fluide ; ces techniques seront décrites à la section 3.5. C'est la vitesse eulérienne que nous percevons lorsque nous regardons l'écoulement d'une rivière du haut d'un pont : les particules de fluide qui passent à un endroit donné (marquées par exemple par des poussières à la surface) sont

différentes à chaque instant. Leur vitesse est fonction, d'une part, de l'instant d'observation et, d'autre part, du point $\mathbf{r}$ (fixe par rapport au pont) que nous observons. La description eulérienne présente cependant l'inconvénient d'introduire des termes non linéaires dans l'expression de l'accélération, comme nous le verrons à la section 3.1.3.

Dans la *description lagrangienne*, on suit une particule de fluide au cours de son mouvement, en spécifiant sa position $\mathbf{r}_0$ ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{OM}_0$) à un instant de référence donné t_0 . La vitesse du fluide est alors caractérisée par le vecteur $\mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t)$ qui est fonction des deux variables $\mathbf{r}_0$ et t . Dans la description imagée de la rivière qui s'écoule, ce point de vue est celui d'un observateur sur une barque entraînée par le courant : la vitesse de la barque représente la vitesse lagrangienne. Le point de vue lagrangien correspond à des mesures faites avec des instruments qui suivent le fluide dans son mouvement, tels que des ballons-sondes dans l'atmosphère ou des particules marquées (section 3.5).

Remarque. La notation en majuscules que nous utilisons pour la vitesse lagrangienne $\mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t)$ souligne la distinction avec le champ de vitesse eulérien $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

3.1.3 Accélération d'une particule de fluide

Considérons une particule de fluide située au point $M_1(\mathbf{r}_1)$ à l'instant t (Fig. 3.1) ; sa vitesse à cet instant est $\mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)$. À un instant ultérieur $t' = t + \delta t$, cette particule de fluide parvient au point $M_2(\mathbf{r}_2)$ tel que $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)\delta t + O(\delta t^2)$ et sa vitesse est devenue $\mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t')$. La variation de vitesse $\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)$ de cette particule de fluide, dans l'intervalle de temps δt , est associée :

- d'une part, à la variation explicite du champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ avec le temps, si l'écoulement n'est pas stationnaire (contribution égale à $[\mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)]$) ;
- d'autre part, à l'exploration du champ de vitesse par la particule ; cet effet ne donne une contribution à l'accélération que si ce champ n'est pas uniforme (contribution égale à $[\mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t')]$).

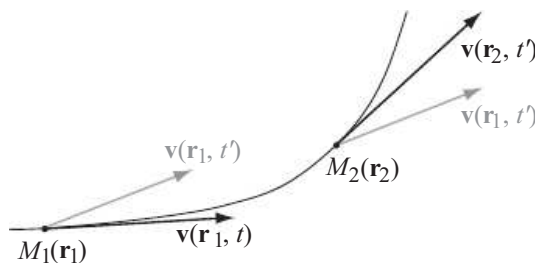


FIG. 3.1 – Contributions à l'accélération d'une particule de fluide dans un écoulement instationnaire.

La variation résultante de vitesse $\delta \mathbf{v}$ s'écrit donc à l'aide d'un développement au premier ordre de chacun des deux termes :

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \delta z$$

où δx , δy et δz sont les composantes du vecteur $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. L'accélération de la particule de fluide vaut donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta t} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \end{aligned}$$

ou, sous une forme plus compacte :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}. \quad (3.1)$$

La forme symbolique du deuxième terme au second membre fait intervenir un produit scalaire entre le vecteur $\mathbf{v}$ et l'opérateur **grad** de composantes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$. Les figures 3.2a et 3.2b illustrent les deux types de contributions de ce produit scalaire à l'accélération totale dans un écoulement stationnaire (tel que $\partial \mathbf{v}/\partial t = \mathbf{0}$).

Dans le premier cas (a), il existe une composante non nulle du gradient de vitesse $\partial v_x/\partial x$ selon la direction de l'écoulement. Par conséquent, une particule entraînée par ce dernier subit une accélération égale à $v_x (\partial v_x/\partial x)$. Dans le deuxième cas (b), il existe un gradient transverse $\partial v_x/\partial y$ non nul de la composante de la vitesse de l'écoulement selon Ox . Supposons qu'il existe, de plus, une composante non nulle v_y de la vitesse dans la direction Oy . Il en résulte une variation de la vitesse v_x le long de la trajectoire d'une particule dont la dérivée temporelle est égale à $v_y (\partial v_x/\partial y)$. Ces deux termes sont inclus dans l'expression $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})v_x$ qui est la composante suivant x du vecteur $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$.

Remarque. Dans la suite, nous utiliserons la notation d/dt pour désigner la dérivée totale obtenue en accompagnant les particules de fluide dans leur mouvement (on rencontre aussi la notation D/Dt).

On peut écrire l'équivalent de l'équation (3.1) pour exprimer la variation d'autres grandeurs que la vitesse le long de la trajectoire d'une particule de fluide : on peut, par exemple, exprimer ainsi la variation de la température $T(\mathbf{r}, t)$ de la particule ou de la concentration $C(\mathbf{r}, t)$ d'une espèce chimique. Ainsi, la variation de température d'une particule le long de sa trajectoire vérifie :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})T \quad (3.2)$$

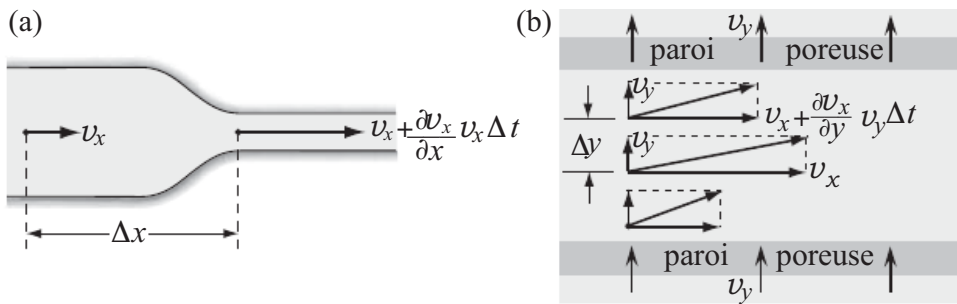


FIG. 3.2 – Deux contributions à l’effet d’accélération convective en écoulement stationnaire ; (a) accélération des particules de fluide dans un écoulement où des gradients de vitesse longitudinaux sont présents ; (b) accélération des particules de fluide en présence d’une composante de vitesse transverse à l’écoulement moyen produite, par exemple, par un écoulement à travers des parois poreuses.

où $\partial T/\partial t$ est la dérivée temporelle de la température du fluide en un point fixe donné. Le second terme traduit la variation de T due à l’écoulement du fluide dans la direction du gradient de température (cette équation se démontre comme la relation (3.1)).

3.1.4 Lignes et tubes de courant, trajectoires, lignes d’émission

– Les **lignes de courant** sont les lignes du champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$; elles sont définies comme étant les tangentes en chaque point au vecteur vitesse $\mathbf{v}(x, y, z, t_0)$ à un instant donné t_0 . Un tube de courant est l’ensemble des lignes de courant s’appuyant sur un contour fermé. On peut visualiser *expérimentalement* les lignes de courant en faisant une photo, en légère pose, d’un ensemble de particules : la direction des segments obtenus donne la direction du vecteur vitesse ; les lignes de courant sont tangentes aux segments ainsi déterminés, et la longueur des segments est proportionnelle au module de la vitesse. Nous donnerons à la section 3.5 quelques éléments sur les méthodes de visualisation et de mesure des écoulements.

Mathématiquement, ces lignes sont définies comme les courbes auxquelles le vecteur vitesse est tangent. En notant $d\mathbf{M}(dx, dy, dz)$ un petit déplacement le long de la ligne d’un point $M(x, y, z)$, on a :

$$d\mathbf{M} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{soit} \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

On obtient l’équation des lignes de courant par intégration de ces deux équations différentielles.

– La **trajectoire** d’une particule de fluide est définie comme le chemin suivi par cette particule au cours du temps, c’est-à-dire l’ensemble des positions successives de cette particule au cours de son mouvement. On peut

la visualiser en photographiant avec une *pose prolongée* le déplacement d'un traceur émis pendant un temps très court en un point du fluide (colorant, particules diffusant la lumière, bulles d'hydrogène, ...). On l'obtient mathématiquement, par intégration temporelle du champ de vitesse lagrangien $\mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t)$, c'est-à-dire du système d'équations :

$$\frac{dx}{dt} = V_x(\mathbf{r}_0, t), \quad \frac{dy}{dt} = V_y(\mathbf{r}_0, t), \quad \frac{dz}{dt} = V_z(\mathbf{r}_0, t).$$

En effet, soit $\mathbf{r}$ la position de la particule de fluide à l'instant t et $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ sa position à l'instant $t + dt$; on a, par définition de la vitesse lagrangienne $\mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t)$ (particule suivie dans son mouvement) :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{d'où, par intégration : } \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t') dt'.$$

– Une **ligne d'émission** représente l'ensemble des positions successives d'une particule de fluide ayant coïncidé à un instant antérieur avec un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Elle est obtenue expérimentalement par émission continue d'un traceur (colorant par exemple) au point M_0 et par photographie *instantanée* de ce traceur.

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, le champ de vitesse ne dépend pas explicitement du temps et on a $\partial \mathbf{v} / \partial t = \mathbf{0}$. Dans ce cas, les lignes de courant, les trajectoires et les lignes d'émission coïncident. En effet, les différentes particules « marquées » émises d'un même point au cours du temps ont les mêmes trajectoires : elles représentent donc en même temps les lignes d'émission. Par ailleurs, le vecteur vitesse local (indépendant du temps) est tangent en chaque point aux trajectoires qui représentent donc également les lignes de courant.

Au contraire, dans le cas d'un écoulement non stationnaire (par exemple dans le cas d'un obstacle qui se déplace dans un récipient où le fluide est au repos loin de l'obstacle), ces différentes lignes sont en général distinctes et la correspondance entre elles n'est pas directe. Pratiquement, on s'intéresse alors le plus souvent aux lignes de courant.

3.2 Déformations dans les écoulements

Nous analysons ici la déformation d'une particule de fluide. Cette discussion est nécessaire pour l'évaluation (qui sera faite au chapitre 4) de la force exercée par les particules voisines. Une démarche analogue est utilisable pour l'analyse des déformations d'un solide élastique, qui ne peut cependant subir que des déformations d'amplitude finie. Les notions de déformation et de rotation du solide remplacent alors celles de taux de déformation et de taux de rotation (le terme « taux » signifie ici variation de la quantité considérée par unité de temps).

3.2.1 Décomposition des variations du champ de vitesse au voisinage d'un point

Considérons, à un instant t , une particule de fluide située en un point $\mathbf{r}$ et dont la vitesse est $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$; celle d'une particule voisine située au point $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ est $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$. Pour chaque composante δv_i ($i = x, y, z$) de $\delta\mathbf{v}$, l'accroissement de vitesse s'écrit, au premier ordre par rapport aux composantes δx_j ($j = x, y, z$) du déplacement :

$$\delta v_i = \sum_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \delta x_j. \quad (3.3)$$

Le fait de ne s'intéresser qu'à la variation de vitesse entre deux points voisins revient à s'affranchir du mouvement de translation d'ensemble des particules qui ne fait pas apparaître de déformation. Les quantités $G_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j)$ sont les éléments d'un tenseur de rang deux, le *tenseur des taux de déformation* (ou des *gradients de vitesse*) du fluide.

Il s'écrit sous la forme d'une matrice 3×3 (ou 2×2) à trois (respectivement deux) dimensions, qui peut être décomposée en une partie symétrique et une partie antisymétrique, sous la forme :

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.4)$$

ou en posant :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.5a)$$

et :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.5b)$$

$$G_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij}. \quad (3.6)$$

De par leur définition même, les tenseurs e_{ij} et ω_{ij} sont respectivement symétrique et antisymétrique. Nous allons maintenant étudier leur signification physique dans les sections 3.2.2 et 3.2.3. Nous nous plaçons, pour simplifier, dans le cas des déformations à deux dimensions. On pourrait les observer en marquant la surface libre d'un liquide avec des petites particules. Pratiquement, nous étudierons la déformation et la rotation d'un objet test constitué d'un carré $ABCD$ de petites dimensions, δx et δy , représenté sur la figure 3.3a.

Pour un point quelconque P du carré test, nous calculons la variation du vecteur $\mathbf{AP}$ durant un intervalle de temps δt . En notant A' et P' les positions des points A et P après l'intervalle de temps δt , cette variation s'écrit :

$$\mathbf{A}'\mathbf{P}' - \mathbf{AP} = \mathbf{PP}' - \mathbf{AA}' = \mathbf{v}(P) \delta t - \mathbf{v}(A) \delta t \approx \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \delta y \right) \delta t. \quad (3.7a)$$

Le membre de droite de la dernière égalité ci-dessus représente le terme du premier ordre du développement de $\mathbf{v}(P) - \mathbf{v}(A)$ donné par l'équation (3.3).

Cette approximation est justifiée pour des intervalles de temps δt et des gradients de vitesse $\partial v_i / \partial x_j$ suffisamment faibles pour que le produit $(\partial v_i / \partial x_j) \delta t$ soit petit devant l'unité, c'est-à-dire pour des *petites déformations* (le cas des *grandes déformations* sera examiné à la section 3.2.5). En explicitant les composantes v_x et v_y de la vitesse ($\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ représentent les vecteurs unitaires sur les axes, x et y respectivement), la relation précédente peut également s'écrire en regroupant les dérivées avec $i = j$ et celles avec $i \neq j$:

$$\mathbf{A}'\mathbf{P}' - \mathbf{A}\mathbf{P} \approx \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x \mathbf{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y \mathbf{e}_y \right) \delta t + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y \mathbf{e}_x + \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x \mathbf{e}_y \right) \delta t. \quad (3.7b)$$

Nous allons utiliser cette relation pour étudier successivement l'évolution de chacun des côtés AB et AC du carré sous l'effet des différents termes G_{ij} du tenseur des gradients de vitesse.

3.2.2 Composante symétrique du tenseur des taux de déformation : déformation pure

Cette composante symétrique est le tenseur e_{ij} défini par l'équation (3.5a). Il comporte, dans le cas général, à la fois des termes diagonaux ($i = j$) et non diagonaux ($i \neq j$). Nous allons regarder successivement l'effet de chacun de ces deux termes sur le carré test défini plus haut (Fig. 3.3a).

Déformations induites par des termes diagonaux du tenseur $\mathbf{e}_{ij}$

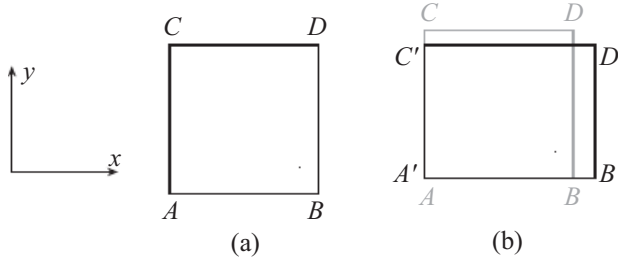


FIG. 3.3 – Déformation d'un carré dans un écoulement dont le champ de gradients de vitesse ne comporte que des termes diagonaux du type $(\partial v_i / \partial x_i)$; (a) carré non déformé à l'instant t ; (b) état du carré à l'instant ultérieur $t + \delta t$.

Sous l'effet d'un champ de gradients de vitesse ne comportant que des *termes diagonaux* (termes du type $\partial v_i / \partial x_i$), le carré $ABCD$ subira, après le temps δt , la transformation montrée par la figure 3.3b. D'après la relation établie à la section 3.2.1 et en prenant le point P en B , nous pouvons écrire, pour l'évolution du côté $\mathbf{AB}$ ($\delta y = 0$), au premier ordre en $(\partial v_x / \partial x) \delta t$:

$$\mathbf{A}'\mathbf{B}' - \mathbf{A}\mathbf{B} \approx \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x \delta t \right) \mathbf{e}_x.$$

Le côté **AB** ne tourne donc pas (il reste parallèle à l'axe Ox). Son allongement relatif est :

$$\frac{\delta(AB)}{AB} \approx \frac{(\partial v_x / \partial x) \delta x \delta t}{\delta x} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta t.$$

Il est positif si $\partial v_x / \partial x$ est positif (cas de la figure 3.3). De même, pour l'évolution du vecteur **AC** ($\delta x = 0$), nous pouvons écrire :

$$\mathbf{A}'\mathbf{C} - \mathbf{AC} \approx \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y \delta t \right) \mathbf{e}_y.$$

Le côté **AC** ne tourne donc pas sous l'effet de ce gradient de vitesse. Son allongement relatif est :

$$\frac{d(AC)}{AC} \approx \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta t.$$

Ainsi, les côtés du carré restent parallèles à eux-mêmes et, dans le cas de la figure, il subit une dilatation (respectivement contraction) dans la direction Ox (respectivement Oy). Cela montre que les *termes diagonaux* du tenseur de composantes $\partial v_i / \partial x_j$ représentent la vitesse d'élongation, ou *taux d'élongation*, de l'élément de fluide dans la direction correspondante (direction x pour AB). Évaluons maintenant la variation relative de surface du carré $ABCD$:

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{\delta(AB)}{AB} + \frac{\delta(AC)}{AC} \simeq \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \delta t = (\operatorname{div} \mathbf{v}) \delta t. \quad (3.8a)$$

En effet, la trace du tenseur $[\mathbf{e}]$ (égale à celle du tenseur $[\mathbf{G}]$), qui est la somme des éléments diagonaux ($\partial v_i / \partial x_i$), s'identifie à la divergence du champ de vitesse et représente le taux d'expansion de l'élément de fluide considéré. Dans notre exemple pris dans un plan, cette expansion correspond à un accroissement de surface. Plus généralement, pour un écoulement avec des variations de vitesse dans les trois directions, la variation relative du volume V d'un parallélépipède s'écrit :

$$\frac{\delta V}{V} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \delta t = (\operatorname{div} \mathbf{v}) \delta t. \quad (3.8b)$$

Ainsi, le taux d'expansion du volume d'un élément matériel de fluide vaut également $\operatorname{div} \mathbf{v}$. Pour un fluide incompressible, ce volume doit rester constant ($\delta V / V = 0$) ; le champ de vitesse doit donc être de divergence nulle.

Remarque. Dans les relations précédentes et suivantes, nous utilisons la convention, dite d'Einstein, de sommation sur les indices muets : si deux indices sont répétés dans une expression, la sommation est faite implicitement sur ces indices. Ainsi, l'écriture $(\partial v_i / \partial x_i)$ signifie : $\partial v_i / \partial x_i = \sum_i (\partial v_i / \partial x_i)$.

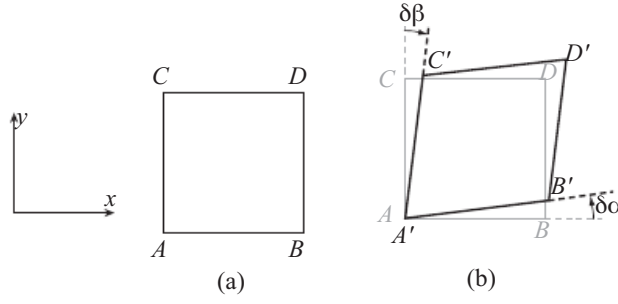


FIG. 3.4 – Déformation d'un carré induite par un écoulement tel que $e_{xx} = e_{yy} = 0$ et $\omega_{xy} = 0$; (a) avant déformation à l'instant t ; (b) géométrie à l'instant $t + \delta t$.

Déformations induites par les termes non diagonaux du tenseur e_{ij}

Étudions maintenant les déformations du même carré $ABCD$ aux côtés parallèles à l'axe lorsque seuls les termes non diagonaux du tenseur e_{ij} (termes formés de dérivées $\partial v_i / \partial x_j$ avec $i \neq j$) sont non nuls. Écrivons à cet effet les variations des vecteurs $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{AC}$. Reprenant la même démarche que précédemment, on obtient pour le vecteur $\mathbf{AB}$ ($\delta y = 0$) :

$$\mathbf{A'B'} - \mathbf{AB} \approx (\partial v_y / \partial x) \delta x \delta t \mathbf{e}_y.$$

Le côté $\mathbf{AB}$ ne reste donc pas parallèle à l'axe Ox , mais tourne d'un angle :

$$\delta\alpha \simeq \frac{(\partial v_y / \partial x) \delta x \delta t}{\delta x} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta t \quad \text{d'où :} \quad \frac{\delta\alpha}{\delta t} \simeq \frac{\partial v_y}{\partial x}. \quad (3.9a)$$

L'angle $\delta\alpha$ est positif dans le cas de la figure 3.4, tandis que la longueur de $\mathbf{AB}$ reste constante. En calculant de même la variation du vecteur $\mathbf{AC}$, on obtient :

$$\mathbf{A'C'} - \mathbf{AC} \simeq \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y \delta t \right) \mathbf{e}_x \quad \text{d'où} \quad \frac{\delta\beta}{\delta t} \simeq -\frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (3.9b)$$

L'angle de rotation $\delta\beta$ est négatif dans le cas de la figure 3.4 pour laquelle on a supposé que $\partial v_x / \partial y > 0$. Si les deux composantes $\partial v_x / \partial y$ et $\partial v_y / \partial x$ du gradient de vitesse sont égales, la composante antisymétrique ω_{xy} sera évidemment nulle tandis que les angles $\delta\beta$ et $\delta\alpha$ seront opposés. La variation temporelle de l'angle γ entre les côtés $\mathbf{A'B'}$ et $\mathbf{A'C'}$ vérifie donc :

$$\frac{\delta\gamma}{\delta t} = -\frac{(\delta\alpha - \delta\beta)}{\delta t} \simeq -\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -2 e_{xy} \quad (3.10)$$

Remarque. Du fait que la quantité ci-dessus représente la dérivée temporelle de l'angle γ , on rencontre souvent la notation $\dot{\gamma}$ pour cette quantité, appelée *taux de cisaillement*. Nous aurons l'occasion de retrouver cette notion au chapitre 4, notamment dans la description des différents types de réponses d'un fluide à un écoulement.

On peut donc interpréter les termes croisés e_{xy} comme une *vitesse de déformation angulaire locale*.

Relation entre les déformations induites par les termes diagonaux et non diagonaux du tenseur e_{ij}

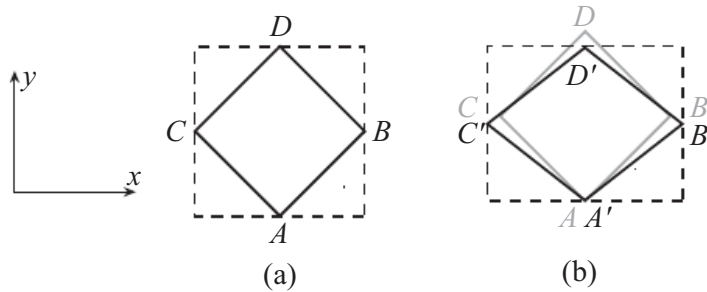


FIG. 3.5 – Déformation d'un carré (diagonales orientées suivant les axes) sous l'effet d'un écoulement dont le champ de gradient de vitesse ne comprend que des éléments diagonaux du type $(\partial v_i / \partial x_i)$; (a) carré non déformé à l'instant t ; (b) déformation après un intervalle de temps δt .

En fait, si la trace du tenseur e_{ij} est nulle et si l'on suppose pour simplifier que $\omega_{ij} = 0$, on a équivalence entre les déformations associées à un tenseur diagonal et non diagonal, comme on le voit dans l'exemple de la figure 3.5. Supposons de nouveau que le tenseur e_{ij} ne comporte que des termes diagonaux et considérons un élément de fluide $ABCD$, toujours carré au départ mais avec ses diagonales (et non plus ses côtés) orientés suivant Ox et Oy . Les déformations de ce dernier sont montrées dans la figure 3.3 avec celles du carré $EFGH$ de côtés parallèles à Ox et Oy et à l'intérieur duquel le premier carré est inscrit. Les sommets du carré $A'B'C'D'$ resteront au milieu des côtés de $E'F'G'H'$ et, comme on le voit sur la figure, la longueur de ses côtés ne varie pas (au moins au premier ordre) tandis que l'angle entre ces côtés varie (on obtient finalement un losange). On a une déformation du même type que si l'on avait choisi des axes parallèles aux côtés AB et AC et un tenseur e_{ij} non diagonal.

En fait, le cas d'un tenseur e_{ij} non diagonal se ramène à celui du tenseur diagonal en recherchant les vecteurs propres de e_{ij} et en effectuant une rotation d'axes de façon à rendre e_{ij} diagonal dans ce nouveau repère.

Démonstration. Évaluons tout d'abord les variations des vecteurs $\mathbf{AD}$ et $\mathbf{CB}$ correspondant aux diagonales du losange. On peut écrire respectivement :

$$\mathbf{A'D'} - \mathbf{AD} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y \delta t \mathbf{e}_y \quad \text{et} \quad \mathbf{C'B'} - \mathbf{CB} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x \delta t \mathbf{e}_x.$$

Ainsi, les diagonales $\mathbf{AD}$ et $\mathbf{CB}$ restent respectivement parallèles aux axes Oy et Ox , bien que les angles entre les côtés varient. L'aire S du losange qui est égale à la moitié du produit $CB \cdot AD$, subit la variation suivante :

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{\delta(AD)}{AD} + \frac{\delta(CB)}{CB} = \frac{(\partial v_y / \partial y) \delta y \delta t}{\delta y} + \frac{(\partial v_x / \partial x) \delta x \delta t}{\delta x} = (\text{div } \mathbf{v}) \delta t.$$

On retrouve bien l'expression (3.8a) de la variation d'aire et sa proportionnalité à la divergence de la vitesse. ■

Cette analyse de l'effet de chacun des termes du champ de gradient de vitesse (termes diagonaux et termes non diagonaux) suggère l'intérêt d'une décomposition du tenseur symétrique e_{ij} , appelé globalement *tenseur des taux de déformation*. Écrivons-le sous forme d'une somme d'un tenseur diagonal t_{ij} à trois composantes t_{ii} identiques et d'un terme d_{ij} de trace $d_{\ell\ell}$ (somme des termes diagonaux de la matrice) nulle :

$$e_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{\ell\ell} + \left[e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{\ell\ell} \right] = t_{ij} + d_{ij}. \quad (3.11)$$

Le tenseur diagonal t_{ij} est associé à la *dilatation volumique* des éléments de fluide. Le tenseur d_{ij} , appelé *déviateur*, est associé à leurs déformations sans changement de volume.

3.2.3 Composante antisymétrique du tenseur des taux de déformation : rotation pure

Considérons maintenant le terme antisymétrique $\omega_{ij} = (1/2) (\partial v_i / \partial x_j - \partial v_j / \partial x_i)$, défini à la section 3.2.1 (Éq. 3.5b) et supposons que seules ses composantes sont différentes de zéro tandis que toutes celles du tenseur e_{ij} sont nulles. Reprenons l'analyse de la déformation d'un carré élémentaire (Fig. 3.6) ; le terme ω_{ij} n'introduit aucune elongation de ses côtés, puisque cette dernière est associée aux termes diagonaux du tenseur e_{ij} qui sont tous nuls. En utilisant les relations (3.9a) et (3.9b), on trouve également que la condition $e_{ij} = 0$ entraîne des variations identiques $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ des angles des côtés avec les axes : l'angle entre les côtés reste, par conséquent, de $\pi/2$ et le carré ne change ni de forme ni de taille. En revanche, il tourne en bloc d'un angle égal à la valeur commune de $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ et donc à celle de leur demi-somme. Toujours en utilisant les équations (3.9a) et (3.9b), la vitesse angulaire de rotation du carré vaut donc :

$$\frac{\delta\alpha}{\delta t} = \frac{\delta\beta}{\delta t} = \frac{\delta\alpha + \delta\beta}{2\delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \omega_{yx}. \quad (3.12)$$

Le terme ω_{ij} représente donc la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ de *rotation locale sans déformation* de l'élément de fluide.

Nous pouvons également remplacer le tenseur antisymétrique de terme général ω_{ij} par le pseudo-vecteur ω tel que :

$$\omega_k = -\varepsilon_{ijk} \omega_{ij} \quad (3.13)$$

avec $\varepsilon_{ijk} = +1$ dans une permutation directe des indices i, j et k , $\varepsilon_{ijk} = -1$ pour une permutation inverse de ces indices, et $\varepsilon_{ijk} = 0$ si deux indices au

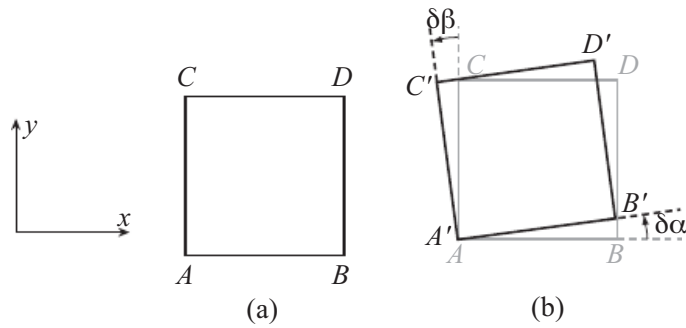


FIG. 3.6 – Rotation d'un carré élémentaire sous l'effet de la partie antisymétrique ω_{ij} du tenseur G_{ij} des taux de déformation ; (a) position initiale du carré à l'instant t ; (b) configuration après un intervalle de temps δt .

moins, sur les trois, sont égaux. Ce vecteur $\boldsymbol{\omega}$ (appelé *vorticité* de l'écoulement) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{v}. \quad (3.14)$$

Notons en particulier que, pour des écoulements plans, le vecteur vorticité est perpendiculaire à ce plan. La notion de vorticité est très importante en mécanique des fluides et sera étudiée au chapitre 7 qui lui est entièrement consacré. Le vecteur $\boldsymbol{\Omega} = (1/2) \mathbf{rot} \mathbf{v}$, appelé *vecteur tourbillon*, représente la vitesse angulaire de rotation locale d'un élément de fluide ; ainsi, dans l'exemple précédent, nous avons vu que $d\alpha/dt = \Omega = \omega_{yx} = (1/2) \omega_z$.

Considérons de même, à trois dimensions, un champ de vitesse de rotation « solide » autour de l'axe Oz perpendiculaire à un plan xOy ; notant $\boldsymbol{\Omega}$ la vitesse angulaire de rotation, le champ de vitesse $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}$ a pour composantes $v_r = 0$, $v_\theta = \Omega r$, $v_z = 0$. Son rotationnel vaut :

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_z = 2 \Omega \mathbf{e}_z = 2 \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.15)$$

On peut mettre en évidence expérimentalement la rotation locale d'un fluide (et donc la vorticité), en suivant la rotation d'un ensemble rigide de deux bâtonnets, disposés en croix et flottant à la surface d'un liquide. D'autres mesures plus élaborées seront décrites à la section 3.5.4.

Pour résumer les résultats des sections 3.2.2 et 3.2.3 en rassemblant les formules (3.6) et (3.11), on retiendra que le tenseur gradient de vitesse $G_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$ peut toujours être décomposé en trois termes sous la forme :

$$G_{ij} = t_{ij} + d_{ij} + \omega_{ij} ; \quad (3.16)$$

– t_{ij} est proportionnel au tenseur unité et représente la *variation de volume* (ou de surface à deux dimensions) des éléments de fluide (il est nul pour un fluide incompressible) ;

- d_{ij} est un tenseur de trace nulle et symétrique. Il est associé aux *déformations* des éléments de fluide, sans variation de volume ;
- ω_{ij} est un tenseur antisymétrique qui traduit la *rotation* en bloc des éléments de fluide.

La décomposition de G_{ij} sous la forme (3.16) intervient dans l'étude des contraintes qui apparaissent dans un fluide en réponse à sa mise en écoulement, que nous étudierons au prochain chapitre. Nous verrons que seule intervient la partie de G_{ij} correspondant à des déformations (termes t_{ij} et d_{ij}).

3.2.4 Application

Prenons l'exemple de l'écoulement bidimensionnel caractérisé par le champ de vitesse stationnaire $\mathbf{v}(x, y)$ tel que $v_x = \alpha x + 2\beta y$ et $v_y = -\alpha y$, où α et β sont deux constantes. Nous allons montrer qu'il combine les différents types de déformation et d'étirement des éléments de fluide que nous venons d'étudier. Il s'agit d'un champ sans écoulement moyen, pour lequel la vitesse est nulle à l'origine $O(0, 0)$, et le champ de vitesse symétrique par rapport à O .

Le tenseur $[\mathbf{G}]$ des gradients de vitesse, défini par l'équation (3.4), permet de caractériser ces déformations et s'écrit :

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} \alpha & 2\beta \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}. \quad (3.17a)$$

Décomposons-le en utilisant l'expression (3.16) :

$$[\mathbf{G}] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{dilatation}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}}_{\text{déformation}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}}_{\text{rotation}}. \quad (3.17b)$$

La composante de dilatation est nulle, ce qui traduit l'incompressibilité de l'écoulement ($\text{div } \mathbf{v} = 0$). Notons que la composante de rotation représente seulement la rotation en bloc des éléments matériels. La composante de déformation induit, elle aussi, des déplacements angulaires des vecteurs matériels $\delta \mathbf{r}$ et, de plus, fait varier leur longueur ; ces déplacements dépendent de l'orientation des vecteurs $\delta \mathbf{r}$. Il n'y aura dilatation sans rotation que dans deux directions propres, qui sont obtenues mathématiquement en diagonalisant le tenseur déformation. Écrivons que le déterminant $(\lambda^2 - \alpha^2) - \beta^2$ de la matrice $\begin{bmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \beta & -\alpha - \lambda \end{bmatrix}$ s'annule ; on obtient les valeurs propres :

$$\lambda = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (3.18a)$$

Les vecteurs propres correspondants représentent les directions suivant lesquelles il n'y a pas de rotation induite. Ces directions sont représentées par des droites perpendiculaires d'équations :

$$(\alpha - \lambda)x + \beta y = 0 \quad (3.18b)$$

soit :

$$y = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} x. \quad (3.18c)$$

– Le cas particulier $\alpha \neq 0, \beta = 0$ correspond à une déformation pure, sans rotation globale des éléments de fluide, telle que nous l'avons représentée sur la figure 3.3. Les deux directions propres sont les directions x et y des axes de départ. Un carré orienté suivant l'axe Ox se transforme en rectangle orienté suivant les mêmes axes ; la condition d'incompressibilité entraîne, au premier ordre, des variations de longueur opposées des deux côtés.

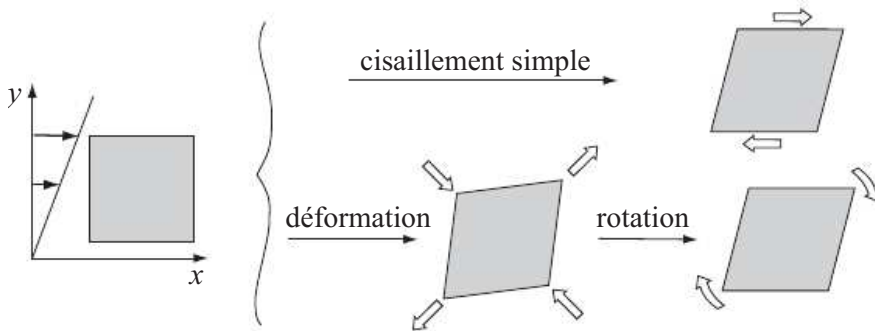


FIG. 3.7 – La déformation d'un élément de volume dans un écoulement de cisaillement simple de Couette peut être décomposée en une élongation sans rotation et une rotation.

– Le cas $\alpha = 0, \beta \neq 0$ correspond à un écoulement de *cisaillement simple* (ou de *Couette plan*) (Fig. 3.7) ; il résulte de la composition d'une déformation et d'une rotation telles que celles représentées par les figures 3.4 et 3.6. Nous avons alors $v_x = 2\beta y$: la vitesse n'a de composante non nulle que suivant l'axe Ox et ne varie que dans la direction perpendiculaire à cet axe. Ce type de champ de vitesse est obtenu en mettant en mouvement relatif, parallèlement à leur plan, deux plaques parallèles entre lesquelles est placé un fluide visqueux. Remarquons que les directions propres de la composante de déformation sont orientées à $\pm 45^\circ$ de la direction de cisaillement (les droites correspondantes ont, en effet, pour équation : $y = \pm x$ d'après la formule générale établie plus haut).

Pour mieux percevoir la différence entre ces deux derniers écoulements, analysons le comportement d'une goutte liquide, placée dans un liquide non miscible où l'un de ces écoulements a été établi (la goutte est supposée centrée sur l'origine O) :

- Dans le cas de la déformation pure, l'élongation de la goutte est maximale le long de l'axe Ox (si α est positif), qui est un axe propre de l'écoulement ; les forces capillaires, qui tendent à minimiser la surface de la goutte, s'opposent alors à cette déformation. Comme le point O est un point de vitesse nulle, la goutte reste fixe ; elle dispose donc d'un

temps suffisant pour s'allonger (et éventuellement se casser en émettant des petites gouttes à sa pointe) si les forces capillaires, qui assurent sa cohésion sont insuffisantes. Un tel écoulement peut être produit par les dispositifs représentés à la section 3.4.2 (Fig. 3.13).

- Dans le cas du cisaillement simple, l'élongation la plus forte est à 45° de la direction de l'écoulement de cisaillement (comme nous venons de le voir) et tend à déformer la goutte. Cependant, cette dernière tourne aussi à cause de la composante rotationnelle de l'écoulement ; l'effet d'étirement est donc en grande partie neutralisé et la goutte n'éclatera pas sauf pour des gradients de vitesse élevés. Aux vitesses élevées, on peut même montrer qu'elle atteint un état stationnaire, avec une ellipticité de 0,25.

3.2.5 Cas des grandes déformations

Traitions maintenant, sur un exemple, le cas des grandes déformations pour lesquelles l'hypothèse selon laquelle la vitesse en chaque point reste constante au cours du déplacement de ce point, n'est plus valable. Elles correspondent à l'évolution d'un liquide sur de grands intervalles de temps ou au cas de solides très déformables. Ce cas se rencontre notamment dans les déformations de matériaux géologiques qui se font sur de grands intervalles de temps.

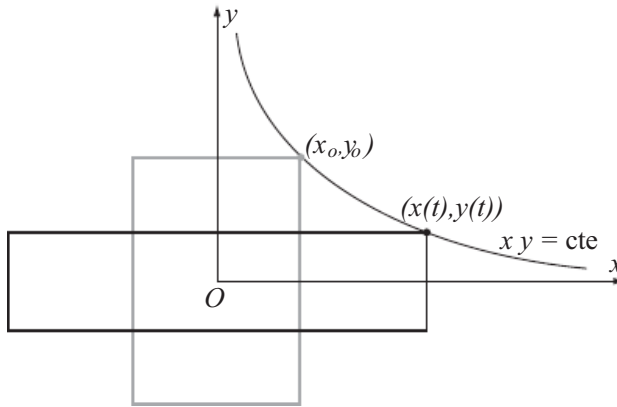


FIG. 3.8 – Grande déformation d'un élément de fluide sous l'effet d'un écoulement incompressible ne comportant que de la déformation pure.

Considérons le champ de vitesse $v_x = \alpha x$, $v_y = -\alpha y$ (Fig. 3.8). La vitesse est de divergence nulle et le gradient ne comprend que des termes diagonaux : ce champ de vitesse correspond donc à des élongations des éléments de fluide sans changement de volume.

On trouve alors (démonstration ci-dessous) que la variation des composantes $\delta x(t)$ et $\delta y(t)$ du déplacement par rapport à la position initiale est,

sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} - 1 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha t} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = [\mathbf{D}] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Pour des grandes déformations, le déplacement ne varie donc plus linéairement ni avec le temps, ni avec le tenseur $[\mathbf{G}]$ des gradients de vitesse ; la condition d'incompressibilité reste cependant satisfaite. Dans l'approximation des petites déformations ($\alpha t \ll 1$), on trouve, par un développement limité des exponentielles :

$$\begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta y(t) \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = [\mathbf{G}] t \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

ce qui correspond à une variation linéaire des déformations avec le temps et avec le tenseur $[\mathbf{G}]$ des gradients de vitesse.

Démonstration. Pour traiter ce problème, il faut tenir compte de la variation de vitesse des éléments de fluide pendant leur déplacement. L'équation de mouvement d'un point matériel s'écrit alors :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \quad \text{au lieu de} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$$

comme dans le cas des petites déformations vu aux sections ci-dessus. On a donc :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \quad (3.21a)$$

et :

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y \quad (3.21b)$$

soit, après intégration :

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} \quad (3.22a)$$

et :

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha t}. \quad (3.22b)$$

Le produit des deux expressions est : $x(t)y(t) = x_0 y_0$, les trajectoires des particules sont donc des branches d'hyperboles (Fig. 3.8). Remarquons que, pour un rectangle dont la diagonale a pour position initiale $\mathbf{OM}_0(x_0, y_0)$, l'aire au temps t est égale à $x(t)y(t)$ (le point O est fixe) et reste donc constante. Les composantes $\delta x(t)$ et $\delta y(t)$ du déplacement sont donc : $\delta x(t) = x_0 (e^{\alpha t} - 1)$ et $\delta y(t) = y_0 (e^{-\alpha t} - 1)$ d'où résulte l'équation (3.19). ■

3.3 Conservation de la masse dans un fluide en écoulement

En écrivant le bilan global de masse de fluide à l'intérieur d'un volume *fixe*, nous allons obtenir une équation *locale* de conservation de la masse. La même démarche sera suivie au chapitre 5, pour établir la loi de conservation d'autres grandeurs (énergie, quantité de mouvement), que nous intitulerons également *équation de bilan*.

3.3.1 Équation de conservation de la masse

Nous considérons un volume ($\mathcal{V}$) quelconque, fixe par rapport au référentiel utilisé pour décrire l'écoulement du fluide et limité par une surface fermée ($\mathcal{S}$) (Fig. 3.9). À chaque instant, du fluide entre et sort de ce volume ; la variation de la masse totale m qu'il contient est opposée au flux sortant à travers la surface.

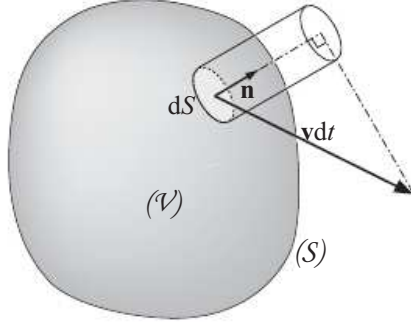


FIG. 3.9 – Évaluation du bilan de masse de fluide à l'intérieur du volume fixe ($\mathcal{V}$). Le vecteur unitaire normal $\mathbf{n}$ est orienté vers l'extérieur du volume ($\mathcal{V}$) car nous évaluons le flux sortant de ce dernier. Le flux de masse sortant par unité de temps est égal à $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$.

Remarque. Dans le cas présent, où l'on s'intéresse à un bilan global de masse, il n'y a pas de terme « source » correspondant à la création ou la disparition de cette grandeur. En revanche, en présence d'une réaction chimique et si l'on s'intéresse au bilan d'une espèce déterminée, il existe un terme de ce type.

Nous avons donc :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{\mathcal{V}} \rho dV \right) = - \iint_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.23)$$

Le vecteur unitaire $\mathbf{n}$ normal à la surface ($\mathcal{S}$) est orienté vers l'extérieur du volume ($\mathcal{V}$). Permutons la dérivée temporelle avec l'intégration sur le volume ($\mathcal{V}$) (cette opération est possible car ce volume est fixe). En appliquant le théorème d'Ostrogradski au second membre de l'équation (3.23), nous obtenons :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0. \quad (3.24)$$

Cette équation est vérifiée quel que soit le volume ($\mathcal{V}$) ; en faisant tendre sa taille vers 0, on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.25)$$

Remarque. On peut noter le parallélisme entre cette équation et l'équation de conservation de la charge en électromagnétisme. Cette dernière s'écrit $\partial\rho/\partial t + \text{div } \mathbf{j} = 0$, où ρ et $\mathbf{j}$ représentent respectivement la densité volumique de charges électriques et la densité de courant.

On peut développer le terme $\text{div}(\rho\mathbf{v})$ de l'équation (3.25) sous la forme :

$$\text{div}(\rho\mathbf{v}) = \rho \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho$$

ce qui permet de récrire cette équation sous la forme :

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho \right) + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3.26)$$

Remarquons que le terme entre parenthèses représente justement la variation ($d\rho/dt$) de masse volumique au cours du temps pour un élément de fluide que l'on suit au cours de l'écoulement (dérivée convective correspondant à une description lagrangienne). On peut donc récrire la relation (3.26) sous la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (3.27)$$

qui est une autre forme de l'équation de conservation de la masse.

3.3.2 Condition d'incompressibilité d'un fluide

Pour un fluide incompressible, c'est-à-dire tel que la masse volumique de chaque élément reste constante au cours du mouvement ($d\rho/dt = 0$), l'équation de conservation de la masse prend la forme simple suivante :

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3.28)$$

Remarque.

- (i) Ce résultat n'est pas surprenant, car nous avons vu à la section 3.2.2 que la quantité $\text{div } \mathbf{v}$, qui est la trace du tenseur des gradients de vitesse, représente le taux d'expansion volumique local de l'élément de fluide.
- (ii) Reprenons l'équation (3.27) en remplaçant $\text{div } \mathbf{v}$ par le taux d'expansion volumique $(1/V)(\delta V/\delta t)$ auquel elle est égale d'après l'équation (3.8b). On vérifie bien que ce taux d'expansion est l'opposé du taux de variation de la masse volumique car $(1/\rho)(\delta\rho/\delta t) + (1/V)(\delta V/\delta t) = 0$.

Les conditions dans lesquelles un fluide peut être considéré comme incompressible peuvent se réduire dans la plupart des cas à l'inégalité :

$$U \ll c \quad (3.29)$$

où U représente l'échelle de vitesse caractéristique de l'écoulement et c la célérité des ondes de pression dans le fluide considéré (ondes acoustiques par

exemple). En effet, dans le cas d'un écoulement dominé par les effets d'inertie du fluide, l'ordre de grandeur des variations de pression dues à l'écoulement est $\delta p \approx \rho U^2$. Ce terme représente en effet le flux convectif de la quantité de mouvement à travers une surface unité. Ce résultat sera discuté plus en détail au chapitre 5, en relation avec l'équation de Bernoulli. Si χ est la compressibilité du fluide, les variations relatives de densité correspondantes sont $(\delta\rho/\rho) \approx \chi \delta p \approx \chi \rho U^2$. On pourra donc négliger la compressibilité du fluide si $\delta\rho/\rho \ll 1$, soit $U \ll 1/\sqrt{\chi\rho}$ où $1/\sqrt{\chi\rho}$ n'est autre que la célérité c du son.

On peut écrire la condition (3.29) sous une forme adimensionnelle en utilisant le nombre de Mach M qui est précisément égal au rapport U/c :

$$M \ll 1. \quad (3.30)$$

Cette condition n'est manifestement pas vérifiée dans l'étude de la dynamique des gaz à grande vitesse (aéronautique, ondes de chocs) : négliger la compressibilité d'un fluide revient en effet à supposer que la vitesse des ondes sonores est infinie.

Remarque. Dans le cas où l'écoulement est dominé par les effets de la viscosité (c'est le cas des écoulements aux petits nombres de Reynolds qui seront étudiés spécifiquement au chapitre 9), la condition (3.29) est remplacée par la condition plus restrictive : $M \ll \sqrt{Re}$, où Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement. Dans ce cas, en effet, les variations de pression dans l'écoulement sont de l'ordre de $\delta p \approx \eta U/L = \rho U^2/Re$.

Discutons maintenant le cas d'un écoulement non stationnaire, de temps caractéristique de variation T (période d'une onde acoustique par exemple) ; la condition (3.29) doit alors être complétée par une relation entre le temps T et le temps caractéristique L/c de propagation d'une perturbation de pression sur l'échelle de longueur L . Cette condition s'écrit :

$$T \gg \frac{L}{c}. \quad (3.31)$$

Pour un écoulement périodique de période temporelle T , l'équation (3.31) peut être écrite sous la forme d'une relation entre la longueur d'onde $\lambda = cT$ et l'échelle spatiale L :

$$\lambda \gg L. \quad (3.32)$$

Pour terminer, examinons une conséquence de la condition d'incompressibilité (3.28) sur les écoulements tridimensionnels au voisinage d'un point de stagnation. On peut écrire le tenseur des déformations e_{ij} dans des axes de coordonnées correspondant à ses directions propres. Comme la trace du tenseur n'est pas modifiée par le changement d'axes, la condition d'incompressibilité (trace nulle du tenseur) entraîne que : soit deux valeurs propres sont négatives et une positive, soit une valeur propre et une seule est négative. Ces deux types de déformations locales correspondent à deux types d'écoulements bien

différents. Dans le premier cas (Fig. 3.10a), le fluide tend à se concentrer autour de l'origine à partir de directions situées dans le plan des valeurs propres négatives et il est étiré dans la troisième direction : une particule allongée placée dans cet écoulement s'alignera le long de cette dernière direction. Dans l'autre cas (Fig. 3.10b), on peut penser qu'une molécule en forme d'assiette s'alignera dans la direction du plan des valeurs propres positives. À côté de cet effet d'orientation, on peut également observer un effet de déformation en plaçant une goutte au point O : son allongement dans le premier cas, ou son aplatissement dans le second, traduisent la forme très différente du champ de vitesse dans les deux cas.

Remarque. Si l'on reprend l'exemple de l'écoulement à deux dimensions traité à la section 3.2.4, il n'y a plus lieu de considérer les deux types d'écoulement que nous venons de discuter car il n'existe que deux valeurs propres opposées du tenseur des déformations. Il n'y a donc qu'un seul type possible de déformation d'une goutte : elle prendra la forme d'une ellipse dont le grand axe sera orienté dans la direction correspondant à la valeur propre positive.

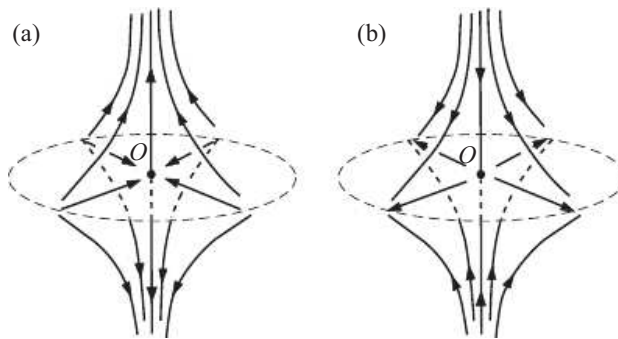


FIG. 3.10 – Écoulement tridimensionnel autour d'un point de stagnation tel que deux valeurs propres du tenseur des gradients de vitesse soient négatives (a) (respectivement positives (b)).

3.3.3 Écoulements rotationnels ; écoulements potentiels

De façon très générale, il est possible de représenter un champ de vecteurs $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ quelconque comme la somme de trois termes :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_3(\mathbf{r}). \quad (3.33)$$

– Le champ $\mathbf{v}_1(\mathbf{r})$ est de divergence nulle et son rotationnel correspond à une rotation locale avec une vitesse angulaire $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/2$ ($\boldsymbol{\omega}$ est la vorticité de l'écoulement). Ce champ vérifie :

$$\text{div } \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.34a)$$

et :

$$\mathbf{rot} \mathbf{v}_1(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}. \quad (3.34b)$$

Il existe une analogie avec le magnétisme dans l'approximation des régimes quasi permanents : elle sera développée au chapitre 7 consacré à la vorticité et aux écoulements *rotationnels*.

– Le champ $\mathbf{v}_2(\mathbf{r})$ est à la fois de divergence nulle et de rotationnel nul. Il satisfait donc simultanément les relations :

$$\text{div } \mathbf{v}_2(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.35a)$$

et

$$\mathbf{rot} \mathbf{v}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (3.35b)$$

La deuxième relation montre que l'on peut introduire une fonction potentielle Φ , appelée *potentiel des vitesses*, telle que $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \Phi$. Les écoulements correspondants sont appelés *écoulements potentiels*. Ils seront étudiés au chapitre 6, ainsi que l'analogie avec l'électrostatique.

– Enfin, le champ $\mathbf{v}_3(\mathbf{r})$ prend en compte les effets de dilatation volumique $(1/V)(\delta V/\delta t)$. Il n'est non nul que dans le cas d'un fluide compressible avec :

$$\text{div } \mathbf{v}_3(\mathbf{r}) = \text{div } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \frac{\delta V}{\delta t} \quad (3.36a)$$

et :

$$\mathbf{rot} \mathbf{v}_3(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (3.36b)$$

3.4 Fonction de courant

3.4.1 Introduction et signification de la fonction de courant

La fonction de courant permet de ramener l'étude du champ vectoriel de vitesse d'un fluide incompressible à un champ scalaire dans le cas où le champ de vitesse ne dépend que de deux coordonnées (écoulement plan ou écoulement avec un axe de symétrie de révolution).

Considérons un fluide *incompressible* en écoulement. La conservation de la masse se traduit par la relation (3.28) : $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Plaçons-nous dans le cas général d'un écoulement à trois dimensions où aucune des trois composantes de la vitesse n'est nulle ; on peut alors introduire une fonction vectorielle $\mathbf{A}$ telle que :

$$\mathbf{v} = \mathbf{rot} \mathbf{A}. \quad (3.37)$$

Le potentiel vecteur des vitesses $\mathbf{A}$, associé à la condition d'incompressibilité, est l'analogue du potentiel vecteur introduit en magnétisme des courants et associé à la condition $\text{div } \mathbf{B} = 0$ (l'analogie sera développée à la section 7.1.3).

L'intérêt pratique d'une telle fonction reste cependant limité car on remplace le champ de vitesse $\mathbf{v}$ à déterminer par un autre champ vectoriel $\mathbf{A}$. En revanche, lorsque la vitesse ne dépend que de deux coordonnées, le champ de vitesse peut s'exprimer directement à partir d'une seule composante du potentiel vecteur $\mathbf{A}$; ce sera le cas pour les écoulements plans, ou bien pour les écoulements axisymétriques (avec une symétrie de révolution autour d'un axe). Prenons le cas d'un écoulement plan (le cas des écoulements axisymétriques sera traité à la section 3.4.3) : le vecteur vitesse est supposé invariant par translation le long de l'axe Oz et sans composante suivant cette direction ($\mathbf{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y), 0)$). La relation $\text{div } \mathbf{v} = 0$ se traduit alors à chaque instant par :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

D'après cette équation, il existe donc une fonction scalaire Ψ telle que :

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (3.38a)$$

$$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.38b)$$

En identifiant ces relations avec l'équation (3.37), on obtient :

$$\Psi \equiv A_z. \quad (3.38c)$$

La fonction scalaire $\Psi(x, y)$ (appelée *fonction de courant*) représente donc la composante du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ suivant la direction perpendiculaire au plan de l'écoulement (ici Oz). Remarquons que l'on peut introduire une fonction de courant Ψ pour tous les écoulements incompressibles à deux dimensions, qu'ils soient visqueux ou non ; au contraire, on ne peut introduire de fonction potentiel de vitesse Φ que pour des fluides parfaits sans viscosité.

Si des coordonnées polaires (r, θ) sont utilisées dans le plan de l'écoulement, les relations entre les composantes de la vitesse et la fonction de courant Ψ s'écrivent :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}. \quad (3.39a)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (3.39b)$$

Donnons maintenant les propriétés de la fonction de courant, ce qui nous permettra d'en dégager la signification.

– Les lignes $\Psi = \text{cte}$ coïncident avec les lignes de courant.

Justification dans le cas d'un écoulement plan (la même démarche s'applique aux écoulements axisymétriques). Évaluons le produit scalaire $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \Psi$ en utilisant les relations (3.38a-b) :

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \Psi = v_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0. \quad (3.40)$$

Or, les lignes $\Psi = \text{cte}$ sont orthogonales en tout point au champ de vecteurs **grad** Ψ . En effet, pour un déplacement $d\mathbf{M}$, la variation $d\Psi$ de cette fonction vérifie $d\Psi = \mathbf{grad} \Psi \cdot d\mathbf{M}$; on a donc $d\Psi = 0$ lorsque $d\mathbf{M}$ est perpendiculaire à **grad** Ψ (Fig. 3.11); la propriété indiquée est donc établie.

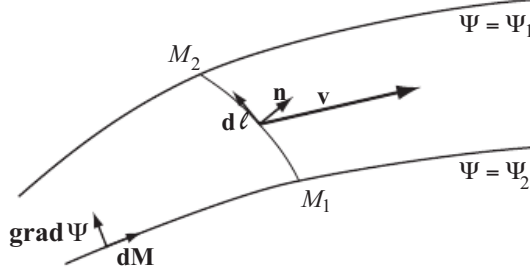


FIG. 3.11 – Les lignes de courant d'un écoulement bidimensionnel incompressible (tangentes en chaque point au vecteur vitesse) sont confondues avec les lignes suivant lesquelles la fonction de courant Ψ est constante.

- Toujours dans le cas d'un écoulement plan, la quantité $\Delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$ représente le débit Q de fluide dans le tube de courant de section rectangulaire, compris entre les lignes de courant $\Psi = \Psi_1$ et $\Psi = \Psi_2$ et d'épaisseur unité dans la direction Oz .

Démonstration. Pour établir cette propriété, évaluons le débit volumique Q de fluide dans un tel écoulement. Pour une épaisseur unité dans la direction Oz , on a :

$$Q = \int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\ell.$$

Or, si $d\mathbf{\ell} = (dx, dy, 0)$ de sorte que $(d\mathbf{\ell} \mathbf{n}) = (dy, -dx, 0)$, on a :

$$Q = \int_{M_1}^{M_2} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) (-dx) \right] = \int_{M_1}^{M_2} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1. \quad (3.41)$$

On vérifie bien que, dans cet écoulement incompressible, le débit volumique dans un tel tube de courant est constant le long du tube. ■

3.4.2 Fonctions de courant d'écoulements plans

Les écoulements élémentaires (écoulements uniformes, tourbillons, sources et leurs combinaisons) seront analysés au chapitre 6. Nous étudierons seulement ici, à titre d'exemple, la famille des écoulements plans dont la fonction de courant est de la forme :

$$\Psi(x, y) = ax^2 + by^2 \quad (3.42a)$$

où a et b sont des constantes réelles. Les composantes de la vitesse du champ d'écoulement vérifient donc :

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 2by, \quad (3.42b)$$

$$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -2ax \quad (3.42c)$$

et les lignes de courant sont données par l'équation :

$$\Psi(x, y) = \text{cte}. \quad (3.42d)$$

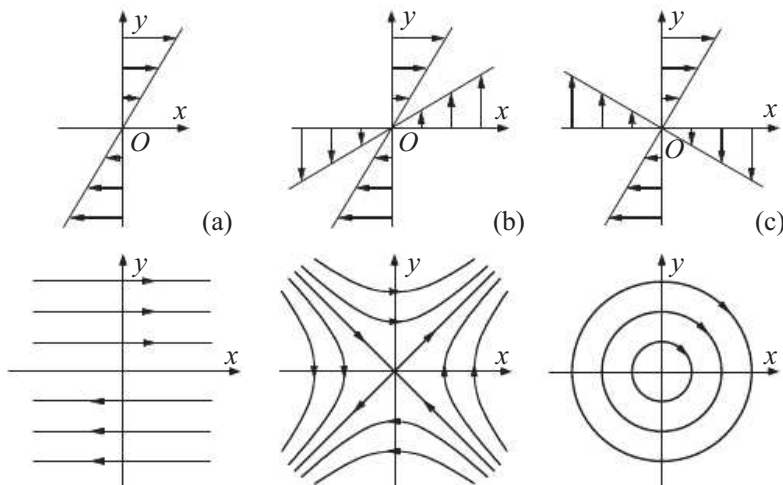


FIG. 3.12 – Lignes de courant (bas) et profils de vitesse le long des axes x et y (haut) pour des écoulements plans de fonction de courant $\Psi(x, y) = ax^2 + by^2$ pour trois valeurs particulières du rapport a/b ; (a) cisaillement simple $a/b = 0$; (b) cisaillement pur $a/b = -1$; (c) rotation pure $a/b = 1$.

La figure 3.12 regroupe des profils de vitesse et des lignes de courant correspondant à trois différentes valeurs du rapport (a/b).

– **Cas $a/b = 0$** (Fig. 3.12a). Nous avons alors :

$$v_x = 2by. \quad (3.43a)$$

$$v_y = 0. \quad (3.43b)$$

Nous avons déjà rencontré de tels écoulements de *cisaillement simple* aux sections 2.1.2 et 3.2.4. Ce type d'écoulement est obtenu dans un fluide visqueux placé entre deux plaques parallèles, situées à une distance d l'une de l'autre et se déplaçant parallèlement à leur plan avec une vitesse relative U . Le champ de vitesse est caractérisé par la valeur du gradient de vitesse, ou taux de cisaillement $\dot{\gamma} = \partial v_x / \partial y$ (il vaut ici $2b$), qui est homogène à l'inverse d'un temps. Les lignes de courant correspondent aux droites $y = \text{cte}$ et sont parallèles aux plaques.

– **Cas $a/b = -1$** (Fig. 3.12b). Les lignes de courant ont pour équation :

$$\Psi = a(x^2 - y^2) = \text{cte.} \quad (3.44a)$$

Elles forment un faisceau d'hyperboles équilatères dont les asymptotes sont les bissectrices de chacun des quadrants ($y = \pm x$). Le champ de vitesse correspondant a pour composantes :

$$v_x = -2ay \quad (3.44b)$$

$$v_y = -2ax. \quad (3.44c)$$

Calculons le rotationnel du champ de vitesse :

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z = 0. \quad (3.44d)$$

Ce champ d'écoulement est donc irrotationnel ; il correspond au champ de déformation pure sans rotation que nous avons déjà abordé dans la section 3.2.

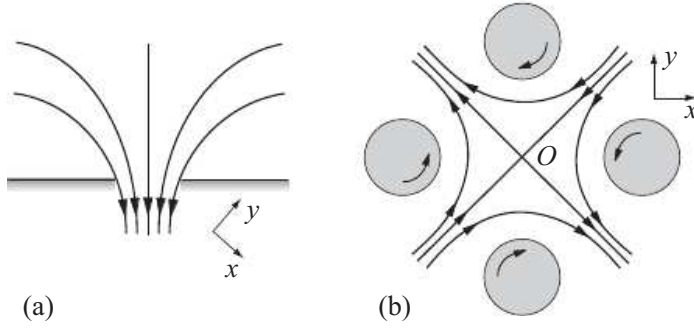


FIG. 3.13 – Forme des lignes de courant dans le cas de l'écoulement élongationnel d'un fluide ; (a) à travers un orifice en forme de fente ; (b) entre quatre cylindres contrarotatifs.

Remarque. Ce type de champ de vitesse est caractérisé par la présence de composantes *élongationnelles*, qui étirent les particules de fluide dans le sens de l'écoulement ; on le rencontre, par exemple, dans l'écoulement d'un fluide à travers un orifice en forme de fente (Fig. 3.13a) ou encore entre quatre cylindres en rotation de sens alternés (Fig. 3.13b). Dans ce dernier cas, on peut remarquer que le point central O est un point d'arrêt : cela présente un intérêt pour étudier la déformation d'un objet non rigide qui n'est pas globalement entraîné par l'écoulement.

– **Cas $a/b = 1$** (Fig. 3.12c). Les composantes de vitesses sont :

$$v_x = 2ay \quad (3.45a)$$

et :

$$v_y = -2ax. \quad (3.45b)$$

Le rotationnel de ce champ de vitesse vaut :

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = -4a \mathbf{e}_z. \quad (3.45c)$$

Cet écoulement correspond à une rotation pure du fluide autour de l'axe Oz perpendiculaire au plan de l'écoulement ; le module de la vitesse angulaire vaut $\Omega = |(\mathbf{rot} \mathbf{v})/2| = 2a$ (ce cas a été discuté à la section 3.2.3). On en déduit que les lignes de courant sont des cercles concentriques dont l'équation est de la forme :

$$\Psi = a(x^2 + y^2) = \text{cte}. \quad (3.45d)$$

Dans le cas général où les coefficients a et b de la relation $\Psi(x, y) = ax^2 + by^2$ ne sont pas égaux en valeur absolue, on peut écrire Ψ sous la forme :

$$\Psi(x, y) = \frac{b+a}{2} (x^2 + y^2) + \frac{b-a}{2} (y^2 - x^2) = \Psi_{\text{rot}} + \Psi_{\text{cis}} \quad (3.46)$$

où :

- la fonction de courant Ψ_{cis} correspond à un *cisaillement pur* (les coefficients de x^2 et y^2 sont opposés) ;
- la fonction de courant Ψ_{rot} correspond à une *rotation pure* (les coefficients de x^2 et y^2 sont en effet égaux). Le module Ω de la vitesse de rotation angulaire est alors égal à $b + a$.

Comme la relation entre la fonction courant Ψ et le champ de vitesse est linéaire (dérivation), ce dernier est la somme des champs de vitesse correspondant à une rotation pure et à un cisaillement pur, soit :

$$v_x = (b + a)y + (b - a)y \quad (3.47a)$$

et :

$$v_y = -(b + a)x + (b - a)x. \quad (3.47b)$$

Ces équations générales permettent, bien entendu, de retrouver, pour $b = a$ et $b = -a$, les cas limites des écoulements de cisaillement et de rotation purs déjà décrits précédemment.

3.4.3 Fonctions de courant des écoulements axisymétriques

Il s'agit des écoulements présentant un axe de rotation autour duquel le champ de vitesse est invariant. Pour vérifier identiquement l'équation de conservation de la masse, nous allons introduire, de la même manière que précédemment, une fonction scalaire (dite *fonction de courant de Stokes*) que nous noterons également Ψ .

- Dans le cas d'un problème à *symétrie cylindrique*, nous écrivons en coordonnées cylindriques (r, θ, x) l'équation de conservation de la masse ($\text{div} \mathbf{v} = 0$) pour un fluide incompressible. On obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (3.48)$$

Le champ de vitesse d'un écoulement axisymétrique est indépendant de θ , et l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + r \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (3.49)$$

Cette équation est vérifiée identiquement en introduisant la fonction courant Ψ , telle que :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.50a)$$

$$v_x = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (3.50b)$$

– Pour un problème à *symétrie sphérique*, on utilise des coordonnées sphériques (r, φ, θ) qui respectent la symétrie du problème. L'équation de conservation de la masse s'écrit dans ce cas :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial (\sin \varphi v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (3.51a)$$

Pour un écoulement axisymétrique invariant par rotation autour de l'axe Ox , les composantes de vitesse sont indépendantes de θ , et l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{\partial (r^2 \sin \varphi v_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r \sin \varphi v_\varphi)}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.51b)$$

Cette relation exprime l'existence d'une nouvelle fonction courant (également notée Ψ) telle que :

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}. \quad (3.52a)$$

$$v_\varphi = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (3.52b)$$

En comparant ces relations avec les composantes du rotationnel du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ dont dérive le champ de vitesse (relation 3.37), on identifie la fonction de courant Ψ à la quantité $(r \sin \varphi A_\theta)$.

Remarque. Le choix opéré pour la fonction de courant Ψ dans le cas des écoulements axisymétriques entraîne le fait que sa dimension est différente de celle du cas des écoulements plans : elle est ici homogène au produit d'une vitesse par une surface ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$), au lieu d'une vitesse par une longueur dans le cas précédent ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).

Plusieurs exemples d'utilisation de cette fonction de courant seront donnés aux sections 6.2.3, 6.2.4 et 9.4.1. En annexe A-2 du chapitre 6, nous résumerons l'ensemble des relations entre les composantes de la vitesse et la fonction de courant.

3.5 Visualisations et mesures de vitesse et de gradient de vitesse dans les écoulements

Nous décrirons d'abord quelques méthodes de visualisation d'écoulements (section 3.5.1), puis leur extension à des mesures quantitatives de dispersion et de mélange (section 3.5.2), ensuite quelques méthodes de mesures de vitesse locale (section 3.5.3) et, enfin, des mesures de champs de vitesse d'écoulements et de quantités caractéristiques comme les gradients de vitesse et la vorticité (section 3.5.4).

3.5.1 Visualisation des écoulements

Un premier type de visualisation des écoulements utilise des traceurs qui se déplacent en suivant le mouvement du fluide. D'autres techniques utilisent des variations d'indice dues à des variations de température et/ou de densité dans l'écoulement.

Traçage par colorants, bulles (liquides), fumées (gaz) et particules

Dans le cas des liquides, on visualise souvent les écoulements en injectant une solution de colorant en différents points du liquide en amont d'un obstacle. Dans certains cas, on émet le colorant à partir de l'obstacle lui-même afin d'observer l'écoulement en son proche voisinage. On observe ainsi des lignes d'émission de colorant qui peuvent être visibles sur de grandes distances dans les écoulements laminaires (Fig. 3.14 CC).    la section 3.1.4, nous avons montré que ces lignes co  incident avec les lignes de courant pour les écoulements stationnaires, comme celui de cette figure.

Une autre approche consiste à créer, par électrolyse de l'eau en écoulement, des microbulles d'hydrogène sur un fil conducteur de petit diamètre (10 à 100 μm) alternativement isolé et dénudé pour délimiter les zones d'émission (Fig. 3.15). Le diamètre des bulles est de l'ordre de celui des fils. On détermine ainsi les lignes d'émission (et donc de courant pour un écoulement stationnaire). On peut, de plus, créer des éléments de longueur contrôlée en modulant l'émission des bulles au cours du temps (Fig. 3.15) : on visualise de ce fait directement la déformation des éléments de fluide discutée dans la section 3.2 (Figs. 3.3    3.7).

On peut utiliser également, pour la visualisation, des particules légères en suspension dans le fluide qui suivent localement le mouvement de ce dernier ; la densité des particules est prise aussi proche que possible de celle du fluide pour éviter la sédimentation. Pour éviter que les images des particules situées à différentes distances de l'observateur ne se superposent, on éclaire l'écoulement par un plan lumineux de faible épaisseur perpendiculaire à la

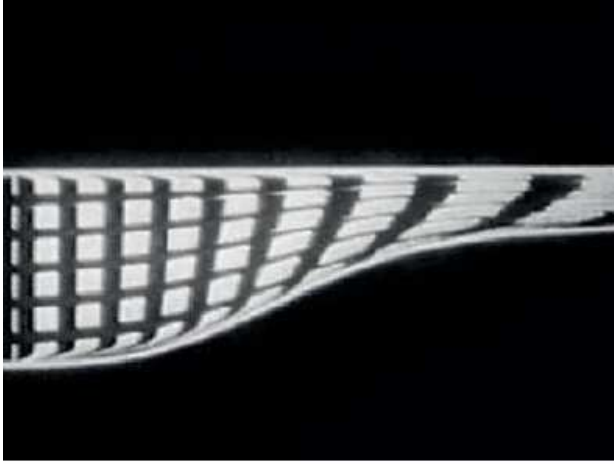


FIG. 3.15 – Visualisation effectuée par émission pulsée de microbulles d’hydrogène dans un canal se rétrécissant. Les bulles sont émises par électrolyse sur un fil perpendiculaire à l’écoulement situé à gauche de la figure. La déformation du quadrillage peut être rapprochée de celles étudiées dans la section 3.2 (extrait de *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*, MIT Press).

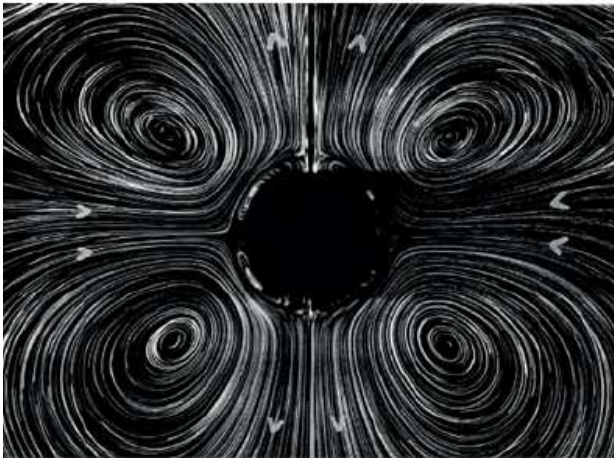


FIG. 3.16 – Écoulement induit par l’oscillation verticale de faible amplitude (1,4 mm) d’une sphère (12 mm de diamètre) située au centre de la figure dans un fluide. L’écoulement est visualisé grâce à des microsphères de verre en suspension dans le fluide, éclairées par un plan lumineux coïncidant avec celui de la photographie. Le temps de pose (30 s) est long devant la période des oscillations de la sphère (15 ms) de sorte que les traits lumineux marquent les lignes de courant de l’écoulement induit. Les flèches blanches indiquent la direction de l’écoulement moyen (doc. J. Badro et L. Petit).

direction d’observation, comme dans la figure 3.16 : on parle alors de *tomographie optique*. Pour générer ce plan, on utilise le plus souvent comme source

lumineuse un laser dont on élargit le faisceau dans la direction du plan par une lentille cylindrique de très courte distance focale ; une autre lentille, de focale beaucoup plus longue permet d'amincir le plan dans la zone de mesure. On parle alors de visualisation par *plan* ou *nappe laser* (voir figure 3.20).

Pour un gaz, on peut marquer l'écoulement par des fumées très fines produites par la réaction entre des gaz introduits dans l'écoulement (par exemple des fumées de chlorure d'ammonium (NH_4Cl) obtenues par réaction d'ammoniac et de gaz chlorhydrique). On peut aussi utiliser de la fumée d'encens ou des fines gouttelettes d'huile et effectuer, comme dans les liquides, des tomo-graphies optiques en éclairant l'écoulement par un plan lumineux. C'est le cas dans la figure 10.27 CC montrant un front de flamme séparant un mélange de gaz frais (en amont) et de gaz brûlés (en aval). La lumière est diffusée en amont par des grains réfractaires injectés dans le mélange, ce qui donne une zone lumineuse bleutée ; en aval, elles sont à plus basse température et l'on a une région orangée. La zone blanche conique correspond à la plus haute température de la flamme (voir à la section 10.9.3).

Visualisation à l'aide de particules réfléchissantes anisotropes

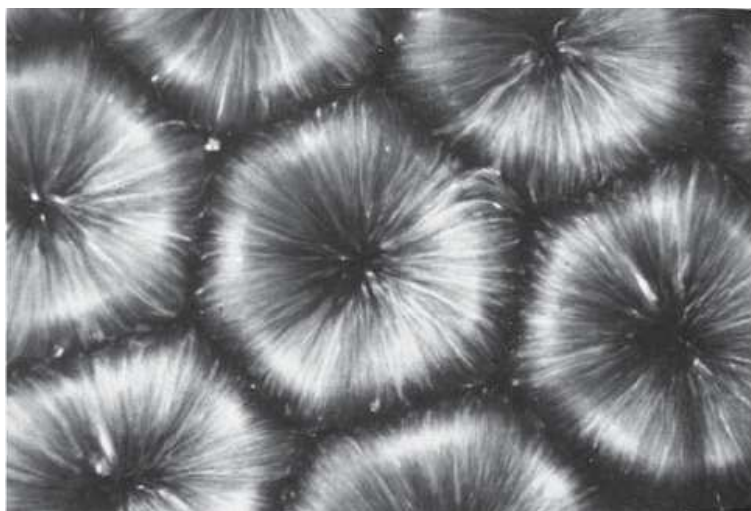


FIG. 3.17 – Vue de dessus d'un écoulement cellulaire dans une couche liquide chauffée par au-dessous et dont la surface supérieure est libre. L'écoulement est visualisé par des paillettes d'aluminium en suspension dans le liquide : ce dernier monte par le centre des cellules hexagonales et redescend sur les côtés. Cet écoulement résulte de l'instabilité de Bénard-Marangoni induite par les variations de la tension superficielle avec la température et étudiée à la section 11.3.1 (doc. J. Salan).

Cette méthode est intéressante lorsque l'on a des variations significatives de la direction de l'écoulement d'un point à un autre. On peut utiliser des paillettes d'aluminium (telles que celles qui existent dans les peintures

aluminisées) ou des suspensions de particules en forme de plaquettes allongées de faible épaisseur (ces fluides, appelés rhéoscopiques, sont disponibles commercialement, notamment sous la marque KalliroscopeTM). Quand ces particules sont en suspension dans le liquide en écoulement, elles s'alignent sous l'effet des gradients de vitesse : il en résulte des contrastes de réflexion de la lumière qui permettent de visualiser les écoulements. La figure 3.17 montre l'application de cette technique à la visualisation d'un écoulement cellulaire dans une couche liquide.

Visualisation des variations d'indice par la méthode du schlieren

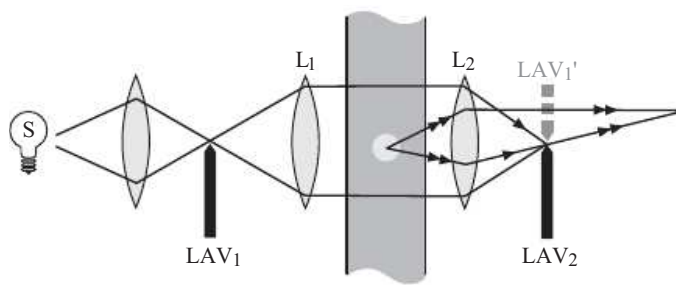


FIG. 3.18 – Principe de la méthode du schlieren pour la visualisation des variations d'indice dans un écoulement. Le faisceau lumineux issu d'une source (S) est focalisé pour obtenir une source presque ponctuelle : cette dernière est transformée en un faisceau presque parallèle par une première lentille (L_1), puis refocalisé par une seconde (L_2) sur une lame à arête vive (LAV2) qui supprime la transmission du faisceau direct. Seule est visible sur l'écran (ou par une caméra) la lumière réfractée par les variations d'indice optique.

Il existe un large éventail de méthodes optiques qui utilisent la déviation des rayons lumineux par des variations locales de l'indice de réfraction : ces dernières peuvent résulter de variations de température, qui induisent des gradients de densité et d'indice comme pour les phénomènes de convection thermique ; elles peuvent aussi être associées à des variations de masse volumique dues aux effets de compressibilité, comme dans les gaz à grande vitesse, ou encore à des variations de composition chimique.

La *méthode du schlieren* est un exemple de ces techniques basées sur des variations d'indice. Son principe (Fig. 3.18) consiste à réaliser une image de la zone d'écoulement avec un dispositif optique qui arrête les rayons lumineux qui se propagent en ligne droite dans la zone étudiée ; seuls apparaissent sur l'image les rayons qui ont été réfractés par les variations d'indice, ce qui permet de visualiser ces dernières. On utilise souvent des miroirs au lieu de lentilles dans ces dispositifs : leur diamètre peut être en effet plus facilement important (il doit correspondre à la taille de la zone étudiée) et ils permettent de réduire les effets des aberrations chromatiques. La figure 3.19 CC montre la visualisation par cette méthode des mouvements de l'air au-dessus d'un

chalumeau à butane et d'une tige de verre chaude. Dans ce cas, ce sont les variations d'indice dues aux variations de température de l'air qui causent la déviation des faisceaux lumineux.

3.5.2 Mesures de concentrations

Les applications industrielles ou environnementales ont souvent recours au mélange de fluides injectés séparément, puis brassés par l'écoulement : ce peuvent être, par exemple, des composés chimiques que l'on fera ensuite réagir. Il est souvent très important de déterminer les concentrations relatives de chaque composant : cela peut être effectué par des sondes locales (par exemple, des microsondes de résistivité ou électrodes spécifiques pour déterminer des concentrations d'ions dans les liquides).

Une technique particulièrement puissante est la *fluorescence induite par laser*. Elle consiste, pour des écoulements de liquides, à mettre en solution dans l'un d'entre eux un colorant fluorescent de concentration donnée : on éclaire ensuite l'écoulement par un faisceau lumineux de longueur d'onde λ_o voisine du maximum d'absorption du colorant. La lumière réémise par fluorescence dans toutes les directions correspond à des longueurs d'onde $\lambda_f > \lambda_o$; son intensité est proportionnelle à la concentration C de colorant, tant que cette dernière n'est pas trop élevée, ce qui permet la mesure de C . On utilise souvent un éclairage par un plan laser de faible épaisseur (section 3.5.1). Cela permet d'analyser le détail de la structure locale de la zone de mélange (Fig. 3.20) ; de plus, comme la longueur d'onde du laser est bien définie, on peut éliminer par

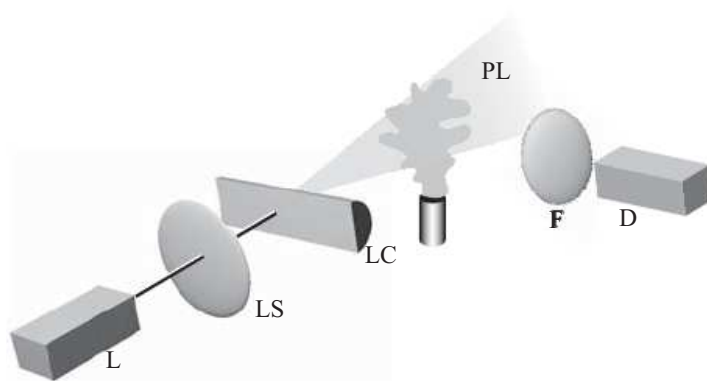


FIG. 3.20 – Principe de la technique de fluorescence induite par laser. Le faisceau d'un laser L est élargi en un plan (PL) par une lentille cylindrique (LC) après avoir été focalisé par une lentille (LS) pour être le plus mince possible au moment du passage dans l'écoulement à étudier (ici un jet vertical). La lumière diffusée par le colorant fluorescent est observée par une caméra (D) munie d'une optique (F) réglée sur le plan laser.

un filtre interférentiel la lumière parasite réfléchi ou transmise à la longueur d'onde λ_o et ne conserver que la composante de fluorescence.

La figure 3.21 CC montre la visualisation du mélange dans un jet turbulent à l'aide de cette technique. L'utilisation d'impulsions laser de courte durée permet d'obtenir des vues très détaillées et nettes, même pour des écoulements rapides. On peut étendre cette technique à la détermination de la distribution tridimensionnelle des fluides en déplaçant très rapidement le plan lumineux dans la direction perpendiculaire et en utilisant une caméra rapide. La technique est aussi applicable aux gaz si l'un de ceux utilisés est fluorescent.

3.5.3 Quelques méthodes de mesure de la vitesse locale d'un fluide

Vélocimétrie laser Doppler

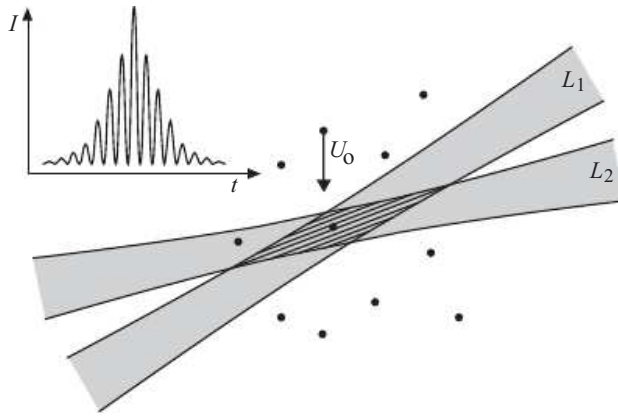


FIG. 3.22 – Représentation schématique de vélocimétrie laser Doppler montrant les deux faisceaux laser qui forment une figure d'interférences dans leur zone de recouvrement et des particules entraînées par un jet de fluide qui traverse cette zone ; en encart, variation de l'intensité modulée par le passage d'une particule dans la zone d'interférence.

La vélocimétrie laser Doppler utilise les variations d'intensité de la lumière diffusée par des particules entraînées par l'écoulement dans une zone d'éclairement périodique spatialement. On utilise deux faisceaux issus du même laser qui se croisent dans un petit volume de mesure (Fig. 3.22). Les deux faisceaux y interfèrent et il se forme un réseau de franges (les plans des franges sombres et brillantes sont perpendiculaires au plan des deux faisceaux). Lorsque des particules diffusantes placées dans un fluide traversent le système de franges d'interférence en suivant l'écoulement, elles sont alternativement claires et sombres. En formant l'image des franges sur un photomultiplicateur, on détecte des paquets d'oscillations reflétant la modulation de l'intensité de la lumière diffusée par chaque particule (encart de la figure 3.22) : leur fréquence est mesurée par un compteur ou un analyseur de spectres. Cette fréquence est

reliée à la composante perpendiculaire aux franges de la vitesse de la particule par l'équation :

$$f = \frac{2U_0}{\lambda_0} n \sin \frac{\varphi}{2} \quad (3.53)$$

où φ est l'angle entre les faisceaux à l'intérieur du fluide, n l'indice du fluide et λ_0 la longueur d'onde de la lumière dans le vide. En supposant que la vitesse des particules coïncide avec celle du fluide, on obtient une valeur de celle-là moyennée sur le domaine des franges qui peut être très petit (quelques micromètres). Les vitesses maximales mesurables atteignent 100 m.s^{-1} .

Démonstration. À la section 1.5.3 (Éq. 1.90), nous avons montré que l'inter-frange Λ , qui correspond à la géométrie de faisceaux de la figure 3.22, vérifie :

$$\Lambda = \lambda_0 / (2n \sin (\varphi/2)). \quad (3.54)$$

Si une particule se déplace avec une composante de vitesse U_0 normalement au plan des franges, la fréquence des variations d'éclairement de la particule, donc de l'intensité diffusée par celle-ci, est $f = U_0/\Lambda$, d'où l'on déduit l'équation (3.53). Typiquement, pour $U_0 = 20 \text{ mm.s}^{-1}$, $\varphi = 30^\circ$, $n = 1,33$ et $\lambda_0 = 0,5 \text{ }\mu\text{m}$, on trouve $f \approx 22,5 \text{ kHz}$. La valeur de f est identique au déplacement de fréquence qui serait observé si la particule mobile émettait un rayonnement lumineux : c'est pourquoi cette technique est appelée *anémométrie laser Doppler* (ou LDA pour Laser Doppler Anemometry). ■

- Avantages des anémomètres laser Doppler

La mesure n'est pas perturbatrice : les poussières présentes naturellement dans un liquide sont souvent suffisantes pour donner un signal facilement mesurable. Dans le cas des gaz, il est en général nécessaire d'ensemencer l'écoulement avec de petites particules.

La mesure de vitesse réalisée est absolue et indépendante des fluctuations de température ou des variations de composition du fluide (une calibration n'est pas nécessaire).

On peut déterminer simultanément les trois composantes de vitesse avec un laser à trois couleurs.

On peut détecter le sens de l'écoulement en faisant défiler continûment les franges par un système de retard optique variable (le décalage de fréquence est lié à la vitesse relative des particules par rapport aux franges et, de ce fait, n'est pas le même pour deux particules dont les vitesses sont de signes opposés).

Les mesures sont possibles dans des flammes et des milieux réactifs.

- Inconvénients et limitations On ne mesure pas directement la vitesse du fluide mais celle des particules diffusantes (des particules de $0,25 \text{ }\mu\text{m}$ suivent les variations de vitesse jusqu'à 10 kHz ; des particules de $4 \text{ }\mu\text{m}$ ne permettent pas de dépasser 1 ou 2 kHz); de plus, le fait d'avoir à ensemencer

le fluide par des particules requiert une compatibilité de ces dernières avec le fluide.

Les mesures sont difficiles près des parois à cause de l'agglomération de particules et des réflexions parasites de la lumière.

Les mesures sont impossibles dans les fluides opaques.

Vélocimètres à ultrasons

Dans le cas de liquides opaques, on peut employer des vélocimètres acoustiques : ces derniers mesurent soit des variations de temps de vitesse du son suivant qu'il se propage dans le sens ou en sens inverse de l'écoulement, soit des variations de fréquence par effet Doppler lorsque le son est rétrodiffusé par des petites particules ou bulles entraînées par l'écoulement. On utilise souvent, au lieu d'une onde sonore continue, des trains d'ondes de courte durée : en sélectionnant un intervalle de temps entre l'émission et la fenêtre de réception, on choisit la distance à laquelle la mesure est effectuée et l'on obtient ainsi une mesure locale. Avec une électronique à plusieurs fenêtres de mesure, on peut obtenir alors un profil instantané de la vitesse. Cette technique est très utilisée en médecine pour mesurer la vitesse du sang dans le cœur (on combine la mesure de vitesse avec une imagerie par échographie) ou dans des vaisseaux sanguins. La méthode a été plus récemment étendue à des mesures industrielles ou de laboratoire.

Anémomètres à fil chaud Ils déterminent la vitesse d'un écoulement gazeux à partir du refroidissement par ce dernier d'un fil chauffé électriquement (Fig. 3.23). Cette technique est intrusive (la présence de la sonde peut perturber l'écoulement) ; par ailleurs, la variation du signal avec la vitesse est non linéaire et doit être calibrée (voir section 10.8.1). En revanche, le diamètre du fil peut être très petit (quelques microns) : le temps de réponse descend alors à quelques microsecondes, ce qui est plus court que pour les autres méthodes. Aussi, ce dispositif est souvent utilisé pour l'analyse fine des fluctuations de vitesse turbulentes.

Principe de la mesure : On tire parti de la variation de la résistance du film ou du fil avec la température. Un circuit d'asservissement applique un courant de chauffage variable afin de maintenir constante la température du fil ; la mesure du courant de chauffage donne la vitesse. Cette technique a l'avantage, par rapport à une mesure de résistance qui utiliserait un chauffage à courant constant, de supprimer la constante de temps associée à l'échauffement et au refroidissement du fil et d'atteindre une réponse en fréquence de plusieurs centaines de kHz. Les fils chauds ne sont sensibles qu'aux composantes de vitesse perpendiculaires à leur longueur : en utilisant trois fils perpendiculaires et en combinant leur lecture, il est alors possible de déterminer les trois composantes de la vitesse. Dans les liquides, on utilise plutôt, pour des raisons de robustesse, des films chauds déposés à la surface de la pointe d'une sonde et protégés par une fine couche isolante.



FIG. 3.23 – Extrémité d'un anémomètre à trois fils chauds (cliché TSI).

Tubes de Pitot miniatures

Ils fournissent une méthode simple (bien que moins performante) de mesure de vitesse locale à partir des variations de pression induites par l'écoulement ; cette technique sera décrite à la section 5.3.3 en tant qu'application de la relation de Bernoulli.

3.5.4 Mesures de champ de vitesse d'écoulements et de gradients de vitesse

Vélocimétrie par images de particules (PIV)

- Principe de la mesure

Grâce aux développements récents des outils d'analyse et de traitement d'images, il est maintenant possible de déterminer les champs de vitesse des écoulements à partir d'images de particules entraînées par le fluide : l'intérêt de cette *vélocimétrie par images de particules* est de fournir en une seule étape le champ de vitesse instantané dans le champ d'observation et pas seulement la vitesse en un point comme les techniques décrites à la section 3.5.3. Nous utiliserons l'abréviation courante PIV (pour *particle image velocimetry*).

Comme dans les techniques de tomographie optique, l'écoulement est illuminé par un plan lumineux (généralement laser) et le fluide estensemencé par des particules fluorescentes ou simplement réfléchissantes (Fig. 3.24). Une caméra digitale à haute résolution capture deux images successives de ces particules séparées par un court intervalle de temps δt . Une analyse de corrélation (précisée ci-dessous) détermine le déplacement $\delta \mathbf{r}$ des particules dans les différentes régions de l'écoulement, d'où l'on déduit les vitesses locales $\mathbf{v} = \delta \mathbf{r} / \delta t$. On obtient alors des champs de vitesse du type de ceux de la figure 3.25 CC, qui correspondent à l'écoulement près d'un petit calmar en mouvement, ou de la figure 3.26 CC (écoulement vers un point de stagnation sur une paroi dans un microcanal).

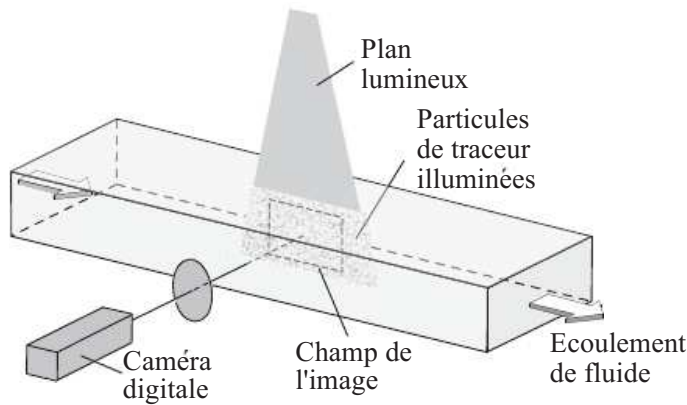


FIG. 3.24 – Principe de la mesure de vitesse par la méthode de vélocimétrie par images de particules.

- Détermination pratique des champs de vitesse

Pour les liquides, on utilise des particules d'une taille de quelques microns et d'une densité aussi proche que possible de celle du liquide pour éviter la sédimentation (par exemple, des billes de verre creuses de diamètre $10\ \mu\text{m}$ et de masse volumique $1,1\ \text{g.cm}^{-3}$). Pour les gaz, le contraste de densité est toujours élevé et l'on doit, pour ralentir la sédimentation, prendre des particules plus petites, comme des gouttelettes d'huile ou des sphères de silice d'une taille de l'ordre du μm .

Pratiquement, on utilise souvent, pour générer le plan lumineux, un laser pulsé fournissant deux impulsions courtes (quelques ns) séparées de l'intervalle δt : on obtient ainsi des images plus lumineuses qu'avec un laser continu, et nettes grâce à la faible durée de l'éclairement. L'épaisseur du plan lumineux doit être suffisamment grande pour que les particules restent à l'intérieur pendant l'intervalle entre les deux impulsions lumineuses.

Les images digitales peuvent être considérées comme des matrices $I(x_i, y_j)$, où x_i et y_j sont les coordonnées des pixels et I l'intensité lumineuse correspondante ; elles sont divisées en fenêtres d'interrogation. Pour chaque fenêtre de la première image I_1 , on calcule la fonction de corrélation $C(\delta\mathbf{r}) = \sum_{i,j} I_1(x_i, y_j) I_2(x_i + \delta x, y_j + \delta y)$ avec la seconde image I_2 (δx et δy sont les composantes du décalage $\delta\mathbf{r}$). La valeur de $\delta\mathbf{r}$, pour laquelle la fonction de corrélation C est maximum, correspond alors au déplacement du fluide dans la fenêtre considérée pendant l'intervalle de temps δt . Le décalage $\delta\mathbf{r}$ peut être déterminé avec une résolution inférieure à l'intervalle entre pixels voisins, à condition que la taille des particules soit un peu plus grande que cet intervalle. On répète ensuite l'opération dans toutes les fenêtres pour avoir le champ complet. La concentration des particules et la taille des fenêtres d'interrogation doivent être choisies de manière à avoir un nombre suffisant de particules dans chaque fenêtre tout en évitant les recouvrements. On utilise habituellement des tailles de fenêtres allant de 16×16 à 64×64 pixels suivant que l'on souhaite privilégier le nombre de points de mesure ou leur précision. Il faut noter que, dans tous les cas, la résolution spatiale de la mesure est de l'ordre de la taille de la fenêtre :

comme les images contiennent (en 2011) entre 10^6 et 4×10^6 pixels au total, les champs de vitesse mesurables actuellement contiennent donc seulement entre 10^3 et 10^4 points typiquement.

- Micro vélocimétrie

La même technique est maintenant appliquée à des écoulements à très petites échelles, par exemple dans les canaux utilisés en microfluidique. On choisit dans ce cas des particules fluorescentes comme traceurs. En effet, un problème lié à ces petits dispositifs est l'importance des réflexions parasites à la longueur d'onde du laser d'éclairage. Comme nous l'avons vu à la section 3.5.2, on peut les éliminer grâce à un filtre interférentiel tout en conservant la lumière émise par fluorescence par les particules. La figure 3.26 CC compare un champ de vitesse d'écoulement obtenu de cette manière (b) aux lignes de courant obtenues par une simple pose longue sur les particules en mouvement (a).

Remarque. Il est difficile d'avoir des plans lumineux de très faible épaisseur. Aussi dans cette méthode de micro-PIV, le plan de mesure est sélectionné par la distance de mise au point en tirant parti de la très faible profondeur de champ des microscopes utilisés pour les observations.

- Limitations et extensions récentes des applications de la PIV

Une première limitation importante est le fait que la PIV mesure seulement les composantes de la vitesse dans le plan d'éclairage. Cette difficulté peut être surmontée en utilisant deux caméras orientées obliquement par rapport au faisceau lumineux plan, au lieu d'une seule perpendiculaire comme précédemment (technique de *stéréo-PIV*).

Principe. Les deux caméras visent la même zone de mesure, leurs lignes de visée sont symétriques par rapport à la normale au plan lumineux et font un angle $\pm\alpha$ avec celle-là; on prend le plan des lignes de visées comme plan (x, y) où x est perpendiculaire au plan lumineux (y, z) . Pour chaque caméra, c'est la composante de vitesse perpendiculaire à la ligne de visée d'une particule diffusante qui est mesurée. Les composantes v_z mesurées sont les mêmes pour les deux caméras. En revanche, pour la composante dans le plan (x, y) , une des caméras mesure une vitesse $v_y \cos \alpha + v_x \sin \alpha$ et l'autre une vitesse $v_y \cos \alpha - v_x \sin \alpha$. On détermine donc toutes les composantes de la vitesse en combinant des différentes mesures. En revanche, les variations des composantes de la vitesse dans la direction perpendiculaire au plan de mesure ne peuvent toujours pas être déterminées de cette manière.

Pour mesurer le champ de vitesse tridimensionnel, on peut effectuer des séries de mesures en déplaçant le plan lumineux parallèlement à lui-même à chaque nouvelle acquisition. On peut aussi éclairer globalement un volume de fluide et déterminer les trois coordonnées des particules en combinant les images de plusieurs (typiquement quatre) caméras (tomographie PIV).

Une autre limitation de la technique, outre sa résolution spatiale limitée, était au départ la faible cadence de mesure des champs de vitesse (quelques

unités par seconde) : cette limitation venait à la fois de la cadence d'acquisition des caméras et du taux de répétition des lasers. Grâce à de nouveaux lasers et à des caméras possédant leur propre mémoire rapide, des cadences de quelques kHz sont atteintes à l'heure actuelle (2011).

Détermination de gradients de vitesse locaux

Un problème important, en particulier pour l'analyse des écoulements turbulents, est la détermination des gradients de vitesse dans un écoulement et, plus particulièrement, de leur partie rotationnelle que nous avons introduite à la section 3.2.3 de ce chapitre.

Quand la technique de PIV est utilisée, la composante de la vorticité perpendiculaire au plan de mesure est calculée simplement à partir des variations spatiales de la vitesse. On voit sur la figure 3.25b CC que l'on met bien en évidence ainsi la présence de deux zones de vorticité élevée (on verra à la section 7.4.3 que cela correspond à la création d'un anneau de tourbillon). La détermination des autres composantes de la vorticité requiert l'utilisation d'un système tridimensionnel tel que ceux décrits plus haut.

Nous discuterons à la section 10.8.2 une autre technique, la *polarographie*, qui permet la mesure des gradients de vitesse au voisinage d'une paroi solide.

Une autre méthode de mesure de la vorticité consiste à ensemencer le fluide avec des particules sphériques qui sont réfléchissantes sur une partie seulement de leur surface. Sous l'effet de la composante rotationnelle de l'écoulement, les particules sont mises en rotation à une vitesse angulaire Ω égale à la moitié de la vorticité locale du fluide ($\Omega = (1/2)\text{rot } \mathbf{v}$) (section 3.2.3) ; il faut cependant qu'elles soient assez légères pour suivre la rotation locale du fluide. Les particules sont éclairées par un faisceau lumineux et le réfléchissent périodiquement : on tire la vitesse de rotation des particules, et donc la vorticité du fluide, de la fréquence de ces éclats lumineux.

Citons enfin la technique de *diffusion Rayleigh forcée* introduite à la section 1.5.3, qui permet de déterminer la vorticité à partir de la rotation du réseau d'interférences cr   au sein du fluide en écoulement.

Chapitre 4

Dynamique des fluides visqueux, rhéologie, écoulements parallèles

À PRÈS avoir étudié au chapitre 3 les déformations d'un fluide en écoulement, nous présentons ici la manière dont l'on peut produire ces déformations en appliquant une contrainte (force extérieure, pression...). En mécanique des solides, il existe une relation de proportionnalité entre les déformations et les contraintes tant que ces dernières sont peu importantes. Cette relation a été exprimée en premier par Robert Hooke qui, il y a trois cent cinquante ans, écrivit la loi « *ut tensio, sic vis* » (de telle façon est la déformation, ainsi est la force). La relation correspondante pour les fluides visqueux indique la proportionnalité entre les vitesses de déformation, introduites au chapitre 3, et les contraintes : elle s'applique aux écoulements aux faibles nombres de Reynolds et aux fluides dits newtoniens.

Nous écrirons tout d'abord (section 4.1) l'expression des forces en surface qui agissent sur un élément matériel de fluide (forces de pression et forces de viscosité). Nous établirons ensuite (section 4.2) l'équation du mouvement d'un fluide (équation de Navier-Stokes), dans des situations où les effets de la viscosité du fluide ne peuvent être négligés (fluide réel). Nous discuterons ensuite (section 4.3) les conditions aux limites sur les frontières limitant le fluide en écoulement. Puis nous aborderons (section 4.4) le cas des fluides non newtoniens, pour lesquels la relation entre la contrainte et la déformation n'est plus linéaire et instantanée. Nous analyserons enfin plusieurs cas d'écoulements parallèles de fluides newtoniens (section 4.5), ou non (section 4.6), dans lesquels les termes d'accélération convective ($\mathbf{v} \cdot \text{grad}$) $\mathbf{v}$ introduits au chapitre 3 sont identiquement nuls.

4.1 Forces de surface

4.1.1 Expression générale des forces de surface.

Contraintes dans un fluide

Considérons un élément de surface d'aire dS dans un fluide. On analyse la force exercée par la fraction de fluide située d'un côté de l'élément sur celle

située de l'autre côté : la contrainte est la *valeur de la force qui s'exerce sur l'unité de surface*. Dans un fluide au repos, elle est *normale* aux éléments de surface et sa norme est indépendante de l'orientation de ces dernières. La contrainte étant isotrope, il suffit d'un seul nombre pour en caractériser la valeur en chaque point ; c'est la *pression hydrostatique*.

Dans un fluide en mouvement, il apparaît, en outre, des contraintes *tangentes* à l'élément de surface dS . Ces contraintes reflètent les forces de frottement entre des couches de fluide glissant les unes par rapport aux autres et sont dues à la viscosité du fluide. En effet, nous avons vu, au chapitre 2, que la viscosité était un coefficient de transport qui traduisait le transfert de quantité de mouvement des zones de plus grandes vitesses vers les zones de plus faibles vitesses. Pour préciser ces forces, il est nécessaire de connaître :

- l'orientation de la surface dS dans l'espace ; elle est définie à l'aide du vecteur unitaire $\mathbf{n}$ normal à la surface (on notera $d\mathbf{S}$ le vecteur de norme dS et orienté suivant $\mathbf{n}$) ;
- les valeurs des trois composantes de la force par unité de surface suivant les axes Ox , Oy , Oz d'un trièdre de référence, pour trois orientations de surfaces unités perpendiculaires à ces axes.

Cela conduit à neuf coefficients σ_{ij} qui sont les composantes du *tenseur des contraintes* $[\sigma]$ dans le fluide considéré. Ce tenseur de rang deux s'écrit comme une matrice trois sur trois ; l'élément σ_{ij} du tenseur ($i = 1 \text{ à } 3, j = 1 \text{ à } 3$) représente la composante suivant i de la contrainte, ou force par unité de surface, exercée sur une surface dont la normale est orientée suivant j . Ainsi :

- σ_{yx} est la composante suivant Oy de la force exercée sur une surface unité dont la normale est orientée suivant Ox (Fig. 4.1a) ; c'est une *contrainte tangentielle ou de cisaillement* ;
- σ_{xx} est la composante suivant Ox de la force exercée sur une surface perpendiculaire à la même direction Ox ; c'est une *contrainte normale*.

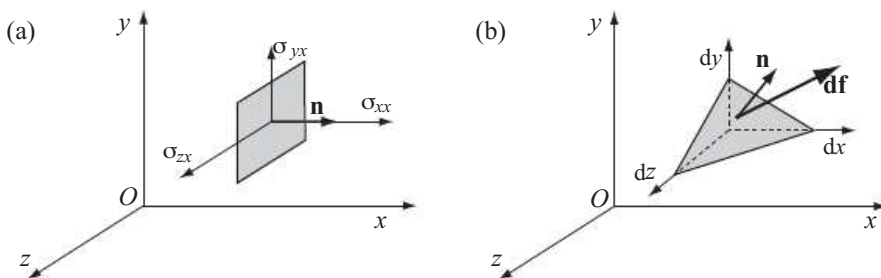


FIG. 4.1 – Composantes σ_{xx} , σ_{yx} et σ_{zx} de la contrainte exercée sur une surface d'aire dS : (a) de normale $\mathbf{n}$ orientée suivant Ox ; (b) de normale $\mathbf{n}$ d'orientation quelconque. En raison de l'existence de contraintes tangentielles sur la surface, la force résultante $d\mathbf{f}$ n'est en général pas colinéaire au vecteur $\mathbf{n}$.

Déterminons maintenant la contrainte $\sigma_{\mathbf{n}}$ exercée sur une surface dS de normale $\mathbf{n}$ quelconque (Fig. 4.1b). Analysons pour cela les forces exercées sur un tétraèdre dont trois des arêtes sont parallèles aux directions Ox , Oy et Oz , et de longueurs dx , dy et dz ; la face bordée par les trois autres arêtes a une normale dirigée suivant le vecteur unitaire $\mathbf{n}$ de composantes n_x , n_y et n_z ; $\mathbf{n}$ est dirigé vers l'extérieur du volume du tétraèdre.

Notons $\sigma_{x\mathbf{n}} dS$, $\sigma_{y\mathbf{n}} dS$ et $\sigma_{z\mathbf{n}} dS$ les composantes suivant Ox , Oy et Oz de la force de contrainte exercée sur la surface dS de normale $\mathbf{n}$. Déterminons, par exemple, $\sigma_{x\mathbf{n}}$ en écrivant l'équilibre de l'ensemble des forces exercées sur les faces du tétraèdre.

Les composantes suivant Ox des forces exercées sur les faces perpendiculaires à Ox , Oy et Oz sont respectivement :

$$(-\sigma_{xx})n_x dS, \quad (-\sigma_{xy})n_y dS \quad \text{et} \quad (-\sigma_{xz})n_z dS.$$

On a utilisé les définitions des composantes de contrainte normales et de cisaillement, et le fait que les surfaces dS_x , dS_y et dS_z auxquelles ces contraintes s'appliquent sont égales au produit de dS par les cosinus directeurs n_x , n_y et n_z de $\mathbf{n}$ selon les trois axes. Les signes négatifs proviennent du fait que les normales à ces trois surfaces sont orientées extérieurement au volume du tétraèdre. La contrainte totale sur l'ensemble des quatre faces du tétraèdre a donc pour composante suivant Ox :

$$\sigma_{x\mathbf{n}} dS - \sigma_{xx} n_x dS - \sigma_{xy} n_y dS - \sigma_{xz} n_z dS = (\sigma_{x\mathbf{n}} - \sigma_{xx} n_x - \sigma_{xy} n_y - \sigma_{xz} n_z) dS. \quad (4.1)$$

Écrivons la loi de Newton en notant dV le volume de l'élément, ρ sa masse volumique, d^2x/dt^2 son accélération suivant Ox et f_x la composante suivant x d'une éventuelle force en volume comme, par exemple, la gravité; on trouve :

$$(\sigma_{x\mathbf{n}} - \sigma_{xx} n_x - \sigma_{xy} n_y - \sigma_{xz} n_z) dS + f_x dV = \rho dV \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (4.2)$$

Faisons maintenant tendre la taille de l'élément vers zéro en réduisant de manière homothétique chacune de ses dimensions, ce qui permet de conserver l'orientation de $\mathbf{n}$. dV tend alors vers zéro comme $dS^{3/2}$. Les deux derniers termes qui contiennent dV dans l'équation (4.2) tendent vers zéro plus rapidement que le terme qui contient dS et ne peuvent donc le compenser. Il en résulte que ce dernier doit être identiquement nul, ce qui conduit à l'égalité :

$$\sigma_{x\mathbf{n}} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z. \quad (4.3)$$

En utilisant la symétrie entre les indices, on trouve une relation équivalente pour les deux autres composantes $\sigma_{y\mathbf{n}}$ et $\sigma_{z\mathbf{n}}$. On obtient ainsi l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x\mathbf{n}} \\ \sigma_{y\mathbf{n}} \\ \sigma_{z\mathbf{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

qui peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{df}{dS} = \sigma_n = [\sigma] \cdot \mathbf{n}. \quad (4.5)$$

L'expression $[\sigma] \cdot \mathbf{n}$ traduit l'opération du produit du tenseur $[\sigma]$ d'ordre 2 par le vecteur $\mathbf{n}$; on peut également utiliser la notation :

$$\sigma_{in} = \sigma_{ij} n_j \quad (4.6)$$

où l'on effectue une sommation implicite sur l'indice j (convention de sommation d'Einstein).

Forces de pression et tenseur des contraintes de viscosité

On peut extraire du tenseur des contraintes $[\sigma]$ la partie qui correspond aux contraintes de pression, qui sont les seules présentes en l'absence de gradients de vitesse (fluide au repos ou en mouvement global de translation). Cette composante est purement diagonale (contraintes exclusivement normales) et isotrope (les trois coefficients diagonaux ont la même valeur); on décompose le tenseur sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p \delta_{ij} \quad (4.7)$$

où p est la pression et δ_{ij} représente le tenseur de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Le signe négatif apparaissant devant p traduit le fait que le fluide au repos est généralement en compression : la contrainte est donc de sens opposé au vecteur $\mathbf{n}$ normal à la surface, qui pointe vers l'extérieur. Le terme σ'_{ij} est l'élément générique du tenseur des contraintes de viscosité : c'est la partie de σ_{ij} résultant de la déformation des éléments de fluide.

Remarque. (i) Les termes diagonaux du tenseur des contraintes $[\sigma]$ proviennent à la fois de la pression et du tenseur $[\sigma']$: ces composantes, appelées *contraintes normales*, résultent de l'écoulement du fluide et s'annulent s'il est au repos. Elles existent aussi pour des fluides newtoniens (section 4.1.3) mais sont souvent particulièrement importantes dans les fluides visco-élastiques comme on le verra dans la section 4.4.5.

(ii) Le terme de pression utilisé pour désigner le paramètre p de la relation (4.7) doit être compris dans le sens d'une pression mécanique, définie à partir des contraintes mécaniques exercées sur un élément de fluide. Sa différence par rapport à la pression thermodynamique reflète l'écart par rapport à l'équilibre thermodynamique.

4.1.2 Caractéristiques du tenseur des contraintes de viscosité

Montrons d'abord que le tenseur $[\sigma']$ est symétrique : pour cela, analysons l'équilibre des moments des forces sur un petit élément de volume cubique de côtés dx , dy et dz parallèles aux axes (Fig. 4.2).

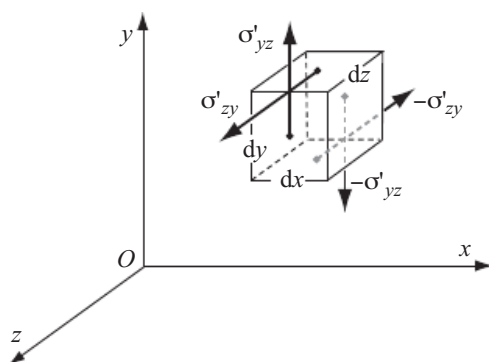


FIG. 4.2 – Couples associés aux forces de viscosité exercées sur les faces d'un cube à l'intérieur d'un fluide.

Dans le raisonnement, nous nous limiterons à la rotation autour d'un axe parallèle à la direction Ox , passant par le centre du cube, ainsi qu'aux composantes σ'_{yz} et σ'_{zy} des forces de surface qui sont seules à contribuer au moment résultant Γ_x par rapport à cet axe (Fig. 4.2) ; le même raisonnement s'applique aux autres composantes. Les autres forces exercées sur les faces du cube sont parallèles à l'axe de rotation, ou le rencontrent, et ne contribuent pas à Γ_x . On obtient l'expression :

$$\Gamma_x = \sigma'_{zy}(dx \, dz) \frac{dy}{2} - \sigma'_{yz}(dx \, dy) \frac{dz}{2} = (\sigma'_{zy} - \sigma'_{yz}) \frac{dV}{2} \quad (4.8)$$

où $dV = dx \, dy \, dz$ est le volume de l'élément. Si $d^2\Omega_x/dt^2$ est l'accélération angulaire de l'élément et dI son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, on a $\Gamma_x = dI(d^2\Omega_x/dt^2)$. Faisons tendre dV vers zéro, comme nous l'avons fait pour établir l'équation (4.3) : dI , qui est de l'ordre de $dV(dy^2 + dz^2)$, décroît plus vite que dV (comme $dV^{5/3}$). On doit donc avoir $\sigma'_{zy} = \sigma'_{yz}$ pour que l'accélération angulaire reste finie (notons que, même s'il existe un mécanisme de création de couple en volume, le couple global sur l'élément de volume sera lui aussi proportionnel à dV et n'interviendra pas). Cette égalité se généralise aux autres composantes sous la forme :

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}. \quad (4.9)$$

Cette relation reflète simplement l'équilibre des moments exercés sur les volumes de fluide.

Remarque. Dans le calcul du moment, on n'a pas pris en compte les termes correspondant à la variation des forces de surface d'une face à l'autre. En effet, dans l'équation (4.8), ces termes donnent des contributions d'ordre supérieur, du type $(\partial\sigma'_{xy}/\partial y)dy \, dV$, qui sont négligeables quand on fait tendre les dimensions de l'élément de volume vers 0.

Précisons maintenant la relation entre les contraintes de viscosité (tenseur $[\sigma']$) apparaissant dans un fluide et les déformations de ce fluide. Ces contraintes s'annulent quand un élément du fluide se déplace sans se déformer et ne dépendent, de ce fait, ni de la vitesse (translation globale) ni de la rotation locale. Cette dernière est représentée par le tenseur antisymétrique ω_{ij} défini par l'équation (3.5b). Le tenseur $[\sigma']$ des contraintes de viscosité est, en revanche, symétrique et dépendra uniquement des composantes e_{ij} de la partie symétrique $[e]$ du tenseur des gradients de vitesse, de composantes :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.10)$$

4.1.3 Tenseur des contraintes de viscosité pour un fluide newtonien

Dans la suite de cet ouvrage, nous étudierons le plus souvent les fluides qualifiés de *newtoniens* : pour ceux-ci, les composantes σ'_{ij} du tenseur des contraintes de viscosité dépendent linéairement des valeurs instantanées des déformations. Lorsque l'on suppose, de plus, que le milieu est isotrope, cela se traduit par :

$$\sigma'_{ij} = 2A e_{ij} + B \delta_{ij} e_{ll} \quad (4.11)$$

où A et B sont des constantes réelles caractéristiques du fluide considéré.

Justification de la relation entre σ'_{ij} et e_{ij} . Au premier ordre, les composantes du tenseur $[\sigma']$ dépendent linéairement des composantes de déformation e_{ij} : ces composantes doivent en effet changer de sens quand on inverse celui de la déformation. σ'_{ij} s'écrit donc :

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl} e_{kl} \quad (4.12)$$

où A_{ijkl} représente un tenseur de rang quatre pour un milieu isotrope, dont on peut montrer que la forme générale est : $A_{ijkl} = A \delta_{ik} \delta_{jl} + A' \delta_{il} \delta_{jk} + B \delta_{ij} \delta_{kl}$.

Le tenseur $[\sigma']$ étant symétrique ($\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$), A_{ijkl} doit être symétrique en i et j , ce qui impose $A = A'$; on a donc :

$$\sigma'_{ij} = A (\delta_{ik} \delta_{jl} e_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk} e_{kl}) + B \delta_{ij} \delta_{kl} e_{kl} = A (e_{ij} + e_{ji}) + B \delta_{ij} e_{ll} \quad (4.13)$$

soit :

$$\sigma'_{ij} = 2A e_{ij} + B \delta_{ij} e_{ll}.$$

Nous utiliserons la relation (4.11) sous la forme équivalente :

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(2e_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} e_{ll} \right) + \zeta (\delta_{ij} e_{ll}) \quad (4.14)$$

qui utilise la décomposition du tenseur des déformations de l'équation (3.11). Le premier terme correspond à une déformation sans changement de volume, le second correspond à une dilatation isotrope ; il est nul pour un fluide incompressible.

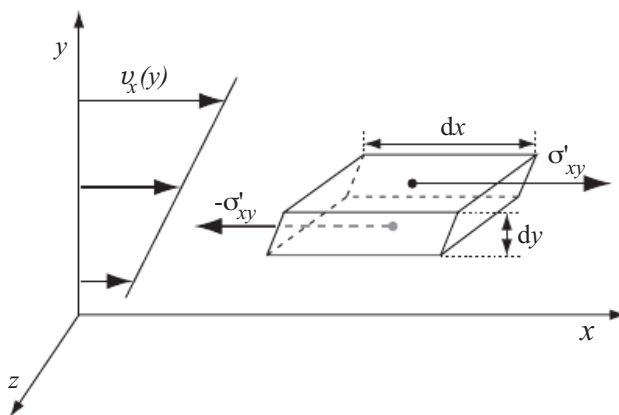


FIG. 4.3 – Contrainte de cisaillement dans un écoulement de cisaillement simple.

Vérifions d'abord que η est identique au coefficient de viscosité de cisaillement introduit au chapitre 2, dans le cas du mouvement de cisaillement simple utilisé à la section 2.1.2. Supposons, par exemple, que le vecteur vitesse est orienté suivant la direction Ox et que la composante correspondante v_x ne varie que dans la direction perpendiculaire Oy (Fig. 4.3). Les seuls termes non nuls de $[\sigma']$ sont, d'après la relation (4.14) :

$$\sigma'_{xy} = \sigma'_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (4.15)$$

On retrouve bien l'équation (2.2) pour le terme σ'_{xy} représentant les contraintes tangentielles dues au glissement relatif des différentes couches de fluide.

L'autre coefficient ζ apparaissant dans la relation (4.14) est appelé *deuxième viscosité* ou *viscosité de volume* ; les contraintes correspondantes (termes diagonaux du tenseur $[\sigma']$ de la forme $\zeta \operatorname{div} \mathbf{v}$) sont associées aux variations de volume du fluide par compression. Ce terme n'apparaît pas dans l'étude des fluides incompressibles, car $\operatorname{div} \mathbf{v}$ est nul dans ce cas (les conditions dans lesquelles le fluide peut être considéré comme incompressible ont été discutées à la section 3.3.2). La relation (4.14) devient alors :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta e_{ij}. \quad (4.16)$$

Les coefficients de viscosité η et ζ introduits ici sont tous deux positifs ; nous le justifierons à la section 5.3.1 dans le cas du coefficient η . En annexe au présent chapitre, nous donnons l'expression du tenseur des contraintes $[\sigma']$ dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.

Remarque. Le coefficient ζ intervient uniquement dans les phénomènes d'atténuation du son à haute fréquence : la propagation du son dans un fluide s'accompagne, en effet, nécessairement d'un phénomène de compression ; dans le cas contraire, la vitesse du son serait infinie.

4.2 Équation du mouvement d'un fluide

4.2.1 Équation de la dynamique d'un fluide dans le cas général

Nous appliquons la relation fondamentale de la dynamique à un volume de fluide ($\mathcal{V}$) en écrivant l'égalité entre la variation temporelle de sa quantité de mouvement et l'ensemble des forces (de volume et de surface) exercées sur ($\mathcal{V}$). Le volume ($\mathcal{V}$) est constitué d'éléments matériels dont il suit les déplacements

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} d\tau \right] = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\tau + \iint_{\mathcal{S}} [\boldsymbol{\sigma}'] \cdot \mathbf{n} d\Sigma. \quad (4.17)$$

Dans cette relation, $d\tau$ représente le volume d'un élément matériel de fluide, $d\Sigma$ est un élément de la surface fermée ($\mathcal{S}$) limitant le volume ($\mathcal{V}$) et $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal à cet élément. Le tenseur $[\boldsymbol{\sigma}]$ prend en compte l'ensemble des forces de surface (pression et viscosité) s'exerçant sur l'élément $d\Sigma$. La force en volume $\mathbf{f}$ appliquée à l'unité de masse du fluide est, par exemple, la pesanteur, ou la force électrostatique sur un fluide chargé.

La dérivée lagrangienne (d/dt) est calculée dans un référentiel qui suit le mouvement du fluide (ces notions ont été discutées à la section 3.1.2). Dans ce référentiel, le produit $\rho d\tau$, qui représente la masse d'un élément matériel de fluide, est une constante : en effet, tout élément de fluide contient, par définition, toujours les mêmes molécules qui suivent le champ de vitesse local de l'écoulement. Ce résultat essentiel nous permet d'appliquer la dérivation temporelle uniquement au facteur $\mathbf{v}$ dans le premier terme de l'équation (4.17) et d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} d\tau \right] = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau. \quad (4.18)$$

En toute rigueur, un calcul complet du bilan des variations de quantité de mouvement dans le volume ($\mathcal{V}$) serait nécessaire, mais le raisonnement simplifié ci-dessus contient l'essentiel de la physique du problème.

Par ailleurs, la composante totale de la force de surface dans la direction i peut s'écrire :

$$\left[\iint_{\mathcal{S}} [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} d\Sigma \right]_i = \iint_{\mathcal{S}} \sigma_{ij} n_j d\Sigma. \quad (4.19)$$

Elle représente donc le flux du vecteur de composantes $(\sigma_{ix}, \sigma_{iy}, \sigma_{iz})$ à travers la surface ($\mathcal{S}$). La relation (4.19) peut se transformer en intégrale de volume à l'aide du théorème d'Ostrogradsky :

$$\iint_{\mathcal{S}} \sigma_{ij} n_j d\Sigma = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau \quad (4.20)$$

(dans les deux intégrales, on a omis le signe Σ_i en utilisant la convention de sommation sur des indices répétés). L'équation (4.17) peut donc être mise

sous la forme :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\tau + \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}] d\tau. \quad (4.21)$$

L'expression $\operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}]$ représente ici le vecteur de composantes $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j$. Rappelons que, dans l'équation (4.21), les intégrales portent sur un volume ($\mathcal{V}$) qui suit le mouvement du fluide en se déformant. En faisant tendre ce volume vers zéro et en divisant par l'élément de volume, on obtient l'équation locale de mouvement d'une particule de fluide :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}]. \quad (4.22)$$

En toute rigueur, comme nous l'avons vu à la section 3.1.1, le volume minimal d'intégration (représentant celui d'une particule de fluide) est le volume au-dessous duquel l'hypothèse de continuité n'est plus vérifiée; cette limite ne jouera de rôle que dans des cas très particuliers, comme ceux de gaz à très faible pression.

Dans $[\boldsymbol{\sigma}]$, séparons, comme dans la relation (4.7), la partie correspondant aux forces de pression de celle qui se rapporte aux forces de viscosité avec : $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$; cette forme rappelle que la pression n'intervient que par des contraintes normales. On obtient :

$$(\operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}])_i = (\operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}'])_i - \frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} = (\operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}'])_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (4.23)$$

L'équation (4.22) devient alors :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}']. \quad (4.24)$$

Cette équation est valable pour tous les fluides car aucune hypothèse concernant la forme du tenseur des contraintes de viscosité $[\boldsymbol{\sigma}']$ n'a encore été introduite. On écrit le plus souvent cette équation en décomposant $d\mathbf{v}/dt$ en $\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$, comme nous l'avons montré à la section 3.1.3, soit :

$$\rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}']. \quad (4.25)$$

- Le premier terme du membre de gauche de l'équation (4.25) représente l'accélération d'une particule de fluide due à la variation explicite de sa vitesse avec le temps dans un repère eulérien fixe (accélération dans un champ homogène instationnaire $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$);
- le second terme correspond à la variation de vitesse associée à l'exploration du champ de vitesse par la particule de fluide au cours de son mouvement. Cette accélération sera présente même dans un champ de vitesse stationnaire $\mathbf{v}(\mathbf{r})$;

- le terme $\rho \mathbf{f}$ du membre de droite regroupe l'ensemble des forces en volume appliquées au fluide ;
- le terme $-\mathbf{grad} p$ correspond aux forces de pression et peut être non nul même en l'absence de mouvement (pression hydrostatique). Pour un fluide immobile ($\mathbf{v} = 0$), l'équation (4.25) se réduit à l'équation fondamentale de l'hydrostatique :

$$\rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p = 0 ; \quad (4.26)$$

- enfin, le dernier terme $\text{div}[\boldsymbol{\sigma}']$ correspond aux forces de viscosité dues à la déformation des éléments de fluide. Il contient à la fois les contraintes tangentielles et les contraintes normales qui peuvent intervenir au cours du mouvement d'un fluide compressible ou élastique.

4.2.2 Équation de Navier-Stokes du mouvement d'un fluide newtonien

Reportons l'expression (4.14) du tenseur $[\boldsymbol{\sigma}']$ dans le terme $\text{div}[\boldsymbol{\sigma}']$ de l'équation (4.25) ; on obtient, pour la composante des forces de viscosité suivant la direction i :

$$(\text{div}[\boldsymbol{\sigma}'])_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right). \quad (4.27)$$

Remarque. On a supposé implicitement que les variations spatiales $\partial\eta/\partial x_j$ et $\partial\zeta/\partial x_j$ des coefficients de viscosité η et ζ étaient négligeables, ce qui est vérifié pour des fluides homogènes. Cela n'est pas toujours le cas, comme par exemple pour les suspensions (section 9.6) où les variations spatiales de concentration entraînent des variations de viscosité.

L'équation (4.27) s'écrit sous la forme vectorielle :

$$\text{div}[\boldsymbol{\sigma}'] = \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \mathbf{grad} (\text{div} \mathbf{v}). \quad (4.28)$$

En reportant cette expression dans l'équation (4.25), on obtient, pour l'équation de mouvement d'un fluide newtonien compressible ou non :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \mathbf{grad} (\text{div} \mathbf{v}). \quad (4.29)$$

Lorsque l'écoulement du fluide est tel que l'on peut négliger les effets de compressibilité, $\text{div} \mathbf{v} = 0$ et le second coefficient de viscosité ζ s'élimine. On obtient alors l'équation de Navier-Stokes que nous utiliserons largement dans la suite de cet ouvrage :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (4.30)$$

On trouvera, en annexe à ce chapitre, l'écriture de cette équation dans différents systèmes de coordonnées usuels.

Remarque. Dans l'équation (4.30), c'est la combinaison $\rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p$ de la force en volume et du gradient de pression qui induit l'écoulement : on a d'ailleurs vu que, lorsque $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, prendre cette somme égale à 0 revient à écrire l'équation de l'hydrostatique. On peut parfaitement créer un écoulement avec un gradient de pression nul à condition que $\rho \mathbf{f} \neq 0$. Nous verrons plus loin que c'est le cas, par exemple, pour un film liquide s'écoulant sous l'effet de la gravité sur un plan vertical ou incliné ou, encore, pour un tube rectiligne rempli de liquide, ouvert à ses extrémités et incliné par rapport à l'horizontale.

4.2.3 Équation d'Euler pour un fluide parfait

L'équation de mouvement pour un fluide parfait (pour lequel les effets de viscosité sont négligeables) et incompressible est *l'équation d'Euler*. C'est un cas particulier de l'équation de Navier-Stokes (4.30), dans laquelle nous posons $\eta = 0$, pour obtenir :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p. \quad (4.31)$$

Cette équation est strictement valable pour les fluides parfaits, c'est-à-dire de viscosité nulle. Les écoulements des fluides parfaits sont fréquemment (mais pas toujours) *potentiels* (le champ de vitesse dérive d'un potentiel) : ce type d'écoulements sera défini et décrit au chapitre 6. Certains écoulements de fluides visqueux peuvent être décrits par l'équation d'Euler, au moins dans une partie de leur volume : les conditions d'observation de tels écoulements seront discutées dans la section 6.1.

Remarque. Le seul fluide qui puisse être considéré comme parfait est l'hélium liquide. Son isotope 4 voit sa viscosité s'annuler complètement lorsqu'il est refroidi à une température inférieure à 2,17 K. Les propriétés d'écoulement de ce fluide très particulier seront discutées en annexe du chapitre 7.

4.2.4 Forme adimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes

Nous allons écrire l'équation de Navier-Stokes (4.30) à l'aide de combinaisons sans dimension (que nous noterons par des « primes ») des différentes quantités qui y interviennent. Soient L et U les échelles respectives de taille et de vitesse de l'écoulement ; on a :

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad t' = \frac{t}{L/U}, \quad p' = \frac{p - p_0}{\rho U^2}.$$

Nous avons introduit dans p' la valeur p_0 que prend la pression en l'absence d'écoulement (pression hydrostatique). L'équation de Navier-Stokes devient, après division des deux membres par $\rho U^2 / L$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{grad}') \mathbf{v}' = - \mathbf{grad}' p' + \frac{\eta}{\rho U L} \Delta' \mathbf{v}'.$$

Nous voyons apparaître, en facteur du terme $\Delta' \mathbf{v}'$, l'inverse du nombre de Reynolds $Re = (UL/\nu)$ associé à l'écoulement ; ce nombre représente le rapport des termes non linéaires $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$ aux termes de viscosité $\nu \Delta \mathbf{v}$, comme nous l'avons vu au chapitre 2 (section 2.3.1).

D'après la forme de l'équation ci-dessus, nous pouvons dire que les champs de vitesse $\mathbf{v}'$ et de pression p' , solutions de cette équation et satisfaisant les conditions aux limites, se mettront sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \mathbf{F}(x', y', z', t', Re) \\ p' &= G(x', y', z', t', Re)\end{aligned}$$

où $\mathbf{F}$ et G sont des fonctions dépendant de l'écoulement considéré.

Remarque. Le choix de L/U pour la normalisation du temps et de ρU^2 pour celle de la pression est bien adapté aux écoulements pour lesquels les termes non linéaires sont dominants. Pour les écoulements contrôlés par la viscosité, nous proposerons à la section 9.2.4 une autre façon de mettre l'équation de Navier-Stokes sous une forme adimensionnelle incluant cependant toujours le nombre de Reynolds.

4.3 Conditions aux limites dans les écoulements fluides

La détermination complète du mouvement d'un fluide (champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$) nécessite d'une part l'intégration de l'équation du mouvement des particules de fluide, d'autre part la donnée des conditions aux limites, c'est-à-dire la valeur des champs de vitesse et de contraintes à la frontière du domaine qui limite le fluide. Deux cas sont à envisager, selon que le milieu qui limite le fluide est un corps solide ou un autre fluide.

4.3.1 Conditions aux limites à la surface d'un corps solide

La non-pénétration du fluide dans le solide impose l'égalité des composantes perpendiculaires à la surface de séparation des vitesses $\mathbf{v}_s$ et $\mathbf{v}_f$ du solide et du fluide, soit :

$$\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}.$$

Cette condition découle directement de l'équation de continuité $\text{div } \mathbf{v} = 0$ démontrée à la section 3.3.2. Pour l'obtenir, il suffit d'intégrer cette relation dans un volume dV limité par deux éléments de surface voisins, situés de part et d'autre de la surface du solide et parallèles à cette dernière (Fig. 4.4). La condition aux limites précédente exprime que le flux du vecteur vitesse sortant du solide est nul dans le référentiel où le solide est au repos.

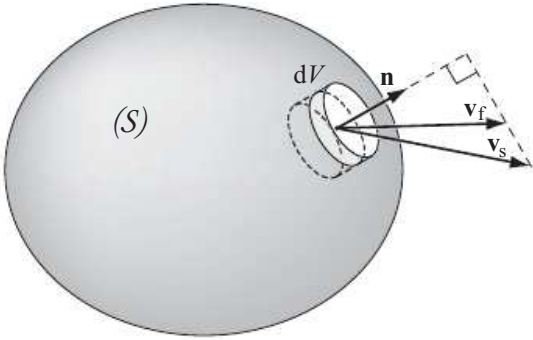


FIG. 4.4 – Conditions aux limites sur les composantes de la vitesse d’écoulement à la surface de séparation entre un solide et un fluide parfait.

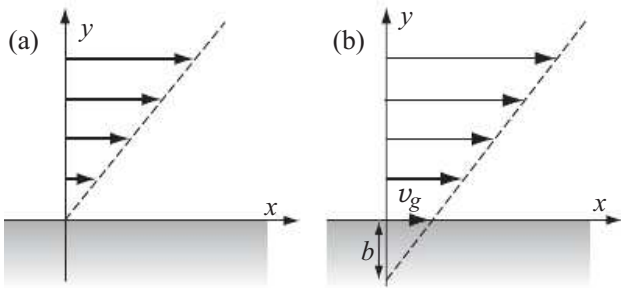


FIG. 4.5 – Profil de vitesse d’un fluide visqueux près de la surface d’un solide au repos (a) vitesse de glissement nulle (b) vitesse de glissement non nulle.

Pour un *fluide parfait* (viscosité nulle), aucune condition n’est à imposer sur la composante tangentielle de la vitesse ; cela implique que le glissement du fluide parallèlement à la paroi solide est possible (cas de la figure 4.4).

En revanche, dans le cas d’un *fluide réel*, on admet souvent que les composantes tangentielles des vitesses du fluide et du solide doivent être égales, ce qui, ajouté à la condition d’égalité des composantes normales, conduit à la relation :

$$\mathbf{V}_{\text{fluide}} = \mathbf{V}_{\text{solide}} \tag{4.32}$$

soit $\mathbf{v}_{\text{fluide}} = 0$ si la paroi est immobile (Fig. 4.5a). Cette condition ne peut pas être démontrée théoriquement mais peut, néanmoins, être considérée comme valable pour des fluides simples et à l’échelle des expériences courantes. Des effets significatifs de glissement à la paroi sont cependant observables pour des fluides complexes et, même pour les fluides simples, à des échelles submicro-niques. Il peuvent donc avoir une influence très importante sur les dispositifs de micro- et nanofluidique qui connaissent actuellement un fort développement.

Longueur de glissement. On caractérise souvent ces effets par une longueur de glissement b , aussi appelée *longueur de Navier* : elle représente la distance à la paroi

où l'extrapolation de la vitesse à l'intérieur du solide est nulle (Fig. 4.5b). Si la vitesse de glissement à la paroi est v_g et si x et y sont les coordonnées respectivement parallèle à la vitesse et perpendiculaire à la paroi, b est reliée au gradient de vitesse à la paroi par :

$$b = \frac{v_g}{\partial v_x / \partial y}.$$

On peut interpréter b en supposant que le glissement s'accompagne d'une force de friction $F_f = k v_g$ qui équilibre la force de frottement visqueuse $\eta \partial v_x / \partial y$: b serait alors égale à η/k et indépendante de v_g . Cette hypothèse est souvent vérifiée expérimentalement : cela justifie l'utilisation de b plutôt que de la vitesse v_g de glissement pour caractériser ce dernier.

L'existence d'une valeur non nulle de b est connue depuis longtemps pour les solutions de polymères : une interprétation possible est la présence, près de la paroi, d'une couche de solvant sans macromolécules de très faible épaisseur δ et de viscosité η_s . On a alors $F_f \approx \eta_s v_g / \delta$, soit : $b \approx \delta \eta / \eta_s$: comme η_s est beaucoup plus faible que la viscosité η de la solution (voir section 4.4.2), on a donc $b \gg \delta$. Des macromolécules formant un « tapis » à la surface peuvent aussi jouer un rôle important. Pour de tels liquides complexes, les longueurs de glissement atteignent une fraction de micromètre. Pour les liquides simples, des longueurs de glissement, non nulles mais encore plus faibles (nanométriques), ont été également mesurées, en particulier sur des parois non mouillantes. Dans la suite de ce livre, nous négligerons ces effets en supposant la vitesse de glissement nulle.

4.3.2 Conditions aux limites entre deux fluides – effet de la tension superficielle

En plus de la condition (4.32) de continuité sur les vitesses, il faut exprimer une condition sur les contraintes à la surface de séparation entre les deux fluides. En effet, on doit avoir équilibre entre les contraintes à l'intérieur de chacun des deux liquides et les contraintes localisées sur la surface.

Remarque. La condition d'égalité des contraintes est également valable à la surface de séparation entre un fluide et un solide. Elle fournira en particulier des informations intéressantes pour une paroi solide fortement déformable, comme un gel ou un caoutchouc : elle permettra, en effet, d'évaluer sa déformation sous l'effet de l'écoulement en écrivant l'égalité entre la contrainte élastique, correspondant à la déformation du solide, et la contrainte visqueuse exercée par le fluide. Par contre, l'égalité des contraintes n'a pas à être prise en compte en pratique pour les solides rigides dont les déformations sont très faibles.

– À l'interface entre deux fluides, la condition sur les contraintes normales (pression) s'exprime par la loi de Laplace (Éq. 1.58). On a, entre les pressions p_1 et p_2 dans chaque fluide, la relation :

$$p_1 - p_2 = \gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (4.33)$$

γ est le coefficient de tension superficielle entre le fluide 1 et le fluide 2, et R et R' sont les rayons de courbure principaux de l'interface. Rappelons que la pression est plus élevée du côté de la concavité de l'interface.

– Par ailleurs, l'équilibre des contraintes tangentielles à l'interface s'exprime par :

$$\left([\boldsymbol{\sigma}]^{(1)} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{t} = \left([\boldsymbol{\sigma}]^{(2)} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{t}. \quad (4.34)$$

Dans cette relation, les produits tensoriels $[\boldsymbol{\sigma}]^{(1)} \cdot \mathbf{n}$ et $[\boldsymbol{\sigma}]^{(2)} \cdot \mathbf{n}$ représentent les contraintes qui s'exercent sur l'interface de normale $\mathbf{n}$: leur produit scalaire par le vecteur unitaire $\mathbf{t}$ tangent à l'interface donne les composantes tangentielles de ces contraintes. Les indices (1) et (2) se rapportent aux deux fluides de part et d'autre de l'interface.

L'équation (4.34) exprime l'équilibre au niveau de l'interface entre l'action exercée par chaque fluide sur l'autre et la réaction qu'il en reçoit.

Pour un fluide newtonien incompressible, la relation (4.16) entre contraintes et gradient de vitesse prend la forme : $\sigma'_{ij} = \eta (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$. La condition de continuité (4.34) devient alors (Fig. 4.6) :

$$\eta_1 \left(\left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i} \right) n_i \right) t_j = \eta_2 \left(\left(\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(2)}}{\partial x_i} \right) n_i \right) t_j, \quad (4.35)$$

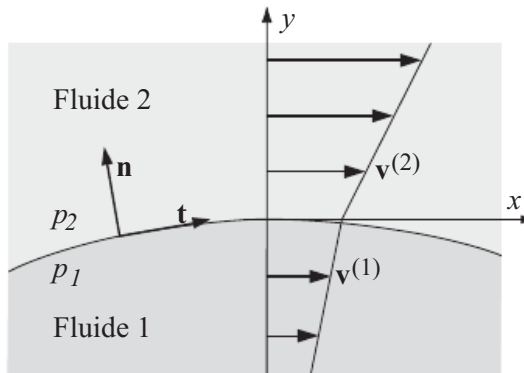


FIG. 4.6 – Conditions à l'interface entre deux fluides visqueux (1) et (2).

où t_i (resp. n_i) représente les composantes d'un vecteur unitaire $\mathbf{t}$ (resp. $\mathbf{n}$) quelconque, tangent (resp. normal) à l'interface. Supposons plus particulièrement que l'on remplace l'interface entre les deux fluides près du point O par un plan xOz et que la vitesse $\mathbf{v}$ soit localement parallèle à Ox et fonction uniquement de la distance y (Fig. 4.6). La contrainte tangentielle sur l'interface se réduit au terme $\sigma_{xy} = \eta \partial v_x / \partial y$ où $v_x(y)$ est la composante non nulle de la vitesse. La condition d'égalité des contraintes tangentielles devient alors :

$$\eta_1 \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y} = \eta_2 \frac{\partial v_x^{(2)}}{\partial y} \quad (4.36)$$

ce qui signifie simplement que les gradients de vitesse à l'interface sont dans le rapport inverse des viscosités dynamiques.

La relation (4.36) se simplifie encore davantage lorsque l'un des deux fluides est un gaz (l'interface est alors qualifiée de *surface libre*) ; la faible viscosité des gaz permet alors, dans le cas d'un gaz immobile ou en écoulement à faible vitesse, d'écrire la nullité de la contrainte tangentielle dans le liquide à l'interface, avec (comme pour un fluide parfait) :

$$([\sigma']^{(\text{liquide})} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (4.37)$$

soit, dans l'exemple décrit plus haut, $\partial v_x / \partial y = 0$ pour le liquide.

4.4 Les fluides non newtoniens

Jusqu'à présent, nous nous sommes limités au cas des *fluides* dits *newtoniens*, pour lesquels on a proportionnalité à tout instant entre les contraintes et les gradients de vitesse. Nous allons ici discuter le cas des *fluides non newtoniens* pour lesquels cette relation n'est plus linéaire et peut, de plus, dépendre de l'histoire de l'écoulement. Ces propriétés proviennent souvent de la présence dans le fluide d'objets de taille grande par rapport à l'échelle atomique (tout en restant très petits par rapport à la dimension globale de l'écoulement) : des macromolécules dans les solutions de polymères, des particules dans les suspensions, des gouttelettes ou des vésicules (liquide entouré d'une membrane) dans des émulsions, et des fluides biologiques. Ces objets peuvent eux-mêmes former des structures encore plus grandes qui influencent considérablement les propriétés d'écoulement, comme des agrégats de plaquettes dans les argiles, des amas de particules ou des macromolécules enchevêtrées. Ces fluides sont très répandus tant dans la nature (neige, boue, sang, crème...) que dans la vie courante (peinture, mousse à raser, mayonnaise, yaourt, cosmétiques...) ou l'industrie (ciment...).

La compréhension de ces caractéristiques d'écoulement nécessite de comprendre la réponse des fluides à une contrainte imposée. C'est le but de la *rhéologie* : ce terme date seulement des années 1920 et a été proposé par E.C. Bingham, considéré, avec M. Reiner, comme le fondateur de cette science. Rappelons à ce propos l'affirmation d'Héraclite : *panta rhei* (tout s'écoule).

4.4.1 Mesures des caractéristiques rhéologiques

Pour des fluides newtoniens ou des fluides non newtoniens aux caractéristiques indépendantes du temps, il suffit de mesurer la relation entre le taux de déformation du fluide et la contrainte à l'origine de cette déformation. Dans le cas newtonien, un seul point expérimental suffit en principe, alors que l'ensemble de la courbe est nécessaire pour les fluides non newtoniens. De plus, pour les fluides dépendant du temps et les fluides visco-élastiques, il faut analyser la réponse temporelle du fluide à une excitation variable dans le temps. On parle de viscosimètres pour les appareils mesurant la viscosité

d'un fluide newtonien et de rhéomètres pour ceux mesurant l'ensemble des caractéristiques rhéologiques de fluides plus complexes.

Les approches expérimentales peuvent être très simples : mesure de débit à travers un tube sous une pression donnée, ou mesure de vitesse de la chute d'une bille dans un fluide ; la mesure du temps de vidange d'un certain volume de fluide à travers un entonnoir fournit aussi un test de terrain acceptable dans de nombreux cas. Cependant, le taux de cisaillement auquel sont soumis les fluides n'est pas constant dans de tels systèmes. De telles mesures ne sont donc quantitatives que pour des fluides newtoniens (après une calibration soignée avec des fluides bien connus).

Les rhéomètres de laboratoire utilisent des géométries où le taux de cisaillement est le mieux connu et le plus constant possible dans le volume de mesure. La figure 4.7 montre deux des géométries les plus courantes.

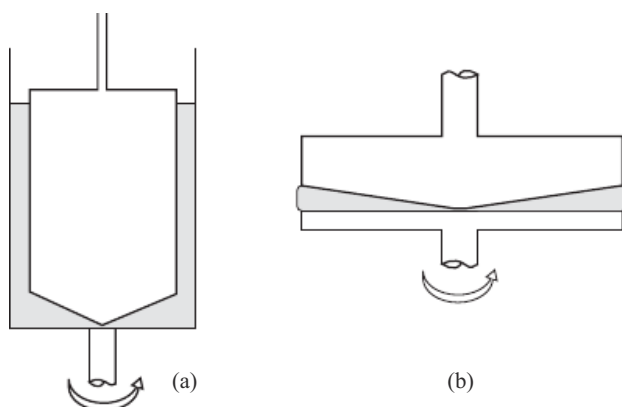


FIG. 4.7 – (a) Rhéomètre de Couette cylindrique ; (b) rhéomètre cône-plan. La rotation est imposée à l'un des solides et le couple mesuré sur ce dernier ou sur la surface lui faisant face.

Dans le *viscosimètre de Couette* à cylindres coaxiaux (Fig. 4.7a), le fluide est placé entre deux cylindres concentriques dont un seul est en mouvement. Pour les appareils les plus simples (dits à *cisaillement imposé*), on mesure le couple sur l'un des cylindres et l'on impose la vitesse de rotation de l'autre. Au contraire, on peut imposer le couple et mesurer la vitesse de rotation ainsi obtenue ; cette dernière configuration (dite à *contrainte imposée*) est bien adaptée aux fluides à seuil (section 4.4.2). Le taux de cisaillement est à peu près constant dans tout le volume entre les cylindres si l'intervalle entre eux est faible devant leur rayon. Des instabilités peuvent apparaître à forte vitesse (section 11.3.2), ce qui limite le domaine de taux de cisaillement accessible. Par ailleurs, on a également des effets parasites dus à des écoulements secondaires sur le fond horizontal des cylindres, ce qui justifie le choix d'une forme conique pour le bas du cylindre intérieur. De tels dispositifs peuvent être très sensibles pour des mesures sur des fluides peu visqueux. Les appareils les plus sensibles permettent également d'atteindre des domaines de taux de cisaillement suffisamment faibles pour ne pas perturber la structure interne

des fluides. Les rayons des cylindres varient de un à quelques centimètres et les entrefers de un dixième à quelques millimètres (mais des dispositifs de plus grande taille sont nécessaires pour analyser des suspensions de grosses particules). Dans le cas où les rayons intérieur R_1 et extérieur $R_2 = R_1 + \Delta R$ sont proches ($\Delta R \ll R_2$) et pour des cylindres de hauteur h , le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ et la contrainte σ vérifient approximativement :

$$\sigma = \frac{M}{2\pi R^2 h} \quad (4.38a)$$

et

$$\dot{\gamma} = \frac{R}{\Delta R} \omega_0 \quad (4.38b)$$

(M est le moment du couple appliqué aux cylindres, ω_0 la vitesse angulaire de rotation et R la moyenne des rayons).

Le *rhéomètre cône-plan* (Fig. 4.7b) nécessite peu de liquide et il est plus facile d'emploi. Les cônes sont d'angle α très faible ($\alpha \leq 4^\circ$). On fait tourner le cône supérieur en laissant le plan inférieur fixe ou l'inverse : le taux de cisaillement est presque constant dans le volume (sauf près de la pointe qui est légèrement tronquée) si le sommet du cône coïncide parfaitement avec le plan inférieur : en effet, l'épaisseur et la vitesse tangentielle augmentent tous deux linéairement avec la distance à l'axe de rotation. Avec les mêmes notations que pour les équations (4.38a-b), on trouve :

$$\sigma = \frac{3M}{2\pi R^3} \quad (4.39a)$$

et

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega_0}{\alpha}. \quad (4.39b)$$

Là encore, les instabilités hydrodynamiques peuvent être une gêne à haute vitesse, ainsi que la présence d'une surface libre sur le côté qui favorise l'évaporation. Les dispositifs cône-plan sont en général moins sensibles et ne permettent d'étudier que des viscosités et/ou des taux de cisaillement plus élevés que les rhéomètres de Couette. Certains rhéomètres permettent la mesure des contraintes normales aux surfaces en déplacement. Cette mesure permet, en particulier, de détecter les éventuelles propriétés élastiques des fluides (section 4.4.5).

4.4.2 Fluides non newtoniens indépendants du temps

En général, on caractérise les propriétés rhéologiques par la variation de la contrainte de cisaillement σ avec le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ ($\dot{\gamma} = \partial v_x / \partial y$ pour un écoulement de cisaillement simple). La figure 4.8 montre, en échelle linéaire, des variations typiques pour différents types de fluides non newtoniens. Dans cette figure, on a supposé implicitement que la relation entre σ et $\dot{\gamma}$ est indépendante du temps. Pour une bonne partie des fluides auxquels nous nous référerons dans la section 4.4.3, cette condition n'est pas vérifiée.

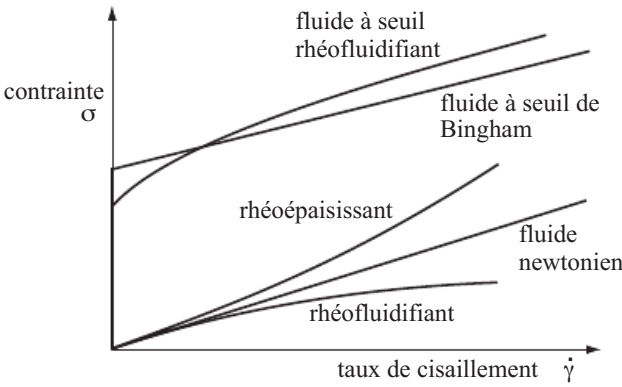


FIG. 4.8 – Relation entre la contrainte visqueuse et le taux de cisaillement, pour différents types de fluides.

Fluides rhéofluidifiants

Ces fluides s'écoulent même sous une contrainte faible, mais ils ont une viscosité effective $\eta_{\text{eff}} = \sigma/\dot{\gamma}$ qui diminue lorsque la contrainte croît (*shear-thinning fluids* en anglais ; l'appellation de *fluides pseudoplastiques* est aussi rencontrée). Dans la suite de ce chapitre, la viscosité effective η_{eff} sera simplement notée η . De nombreuses solutions diluées de polymères de masse moléculaire élevée présentent ce type de comportement : il est alors attribué à des macromolécules entremêlées qui se séparent progressivement et s'alignent sous l'effet du cisaillement.

Certaines suspensions diluées de particules solides sont également rhéofluidifiantes : l'origine, dans ce cas, est la destruction par l'écoulement des structures créées par l'attraction entre les particules. D'autres exemples sont le shampoing ou les concentrés de jus de fruits. De même, les encres d'imprimerie formées de pigments solides en suspension dans des liquides complexes ont des caractéristiques similaires.

La figure 4.9 montre des caractéristiques rhéologiques typiques obtenues pour des solutions de différentes concentrations d'un polymère (scléroglycane de la famille des polysaccharides) produit industriellement par fermentation bactérienne ; ce polymère est utilisé dans de nombreuses applications chimiques et agroalimentaires. Au lieu de tracer la contrainte σ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, comme sur la figure 4.8, on a porté en coordonnées logarithmiques la variation de la viscosité effective $\eta = \sigma/\dot{\gamma}$ en fonction du taux de cisaillement. Un tel tracé permet de mettre en évidence les déviations par rapport au comportement newtonien : la caractéristique de l'eau apparaîtrait comme une droite horizontale correspondant à une viscosité constante de l'ordre de 1 mPa.s.

Aux faibles valeurs de $\dot{\gamma}$, la viscosité tend vers une valeur constante η_0 (palier newtonien) : η_0 est d'autant plus forte que la concentration est plus élevée et peut être plusieurs milliers de fois supérieure à la viscosité du solvant (l'eau). La diminution de la viscosité effective $\eta = \sigma/\dot{\gamma}$ avec $\dot{\gamma}$ suit une loi de

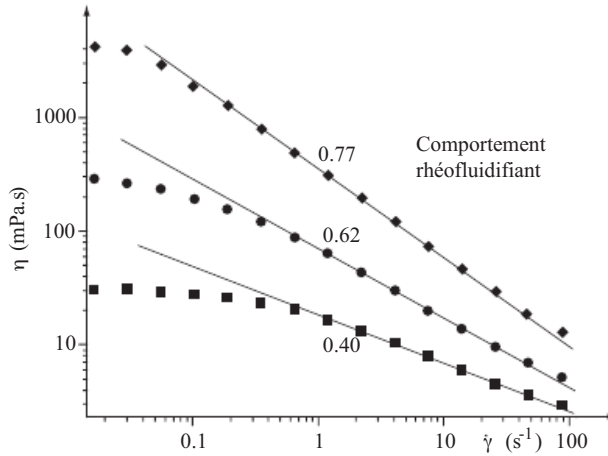


FIG. 4.9 – Mesures de la viscosité effective $\eta = \sigma/\dot{\gamma}$ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ réalisées en écoulement continu dans un viscosimètre de Couette pour des solutions aqueuses de polymère de concentration relative en masse croissante de bas en haut (de 5×10^{-4} à 3×10^{-3}). Les chiffres reportés sur chaque courbe correspondent à l'exposant α de la variation de la viscosité avec $\dot{\gamma}$ (doc. C. Allain, A. Paterson et A. d'Onofrio).

puissance :

$$\eta = D \dot{\gamma}^{-\alpha} \quad (4.40)$$

(représentée par une droite en coordonnées logarithmiques) sur une gamme de taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ d'autant plus large que la concentration de la solution est forte. De plus, la limite inférieure du domaine de valeurs de $\dot{\gamma}$, où la loi de puissance est valable, est d'autant plus faible que l'exposant α est élevé. Aux plus forts taux de cisaillement, la viscosité de la solution reste, de toute manière, supérieure à celle du solvant.

Comme pour presque tous les fluides non newtoniens, la variation de la viscosité reflète une évolution de la structure interne du fluide (ici un réarrangement des macromolécules). Les caractéristiques rhéologiques des solutions correspondant à la figure 4.9 varient peu lorsque l'on les soumet à des cycles d'augmentation et de diminution du taux de cisaillement. Ce comportement n'est pas général, et les caractéristiques rhéologiques des fluides complexes évoluent fréquemment de façon marquée au fur et à mesure des cycles de variation de contrainte.

Fluides rhéoépaississants

Ce sont des fluides qui n'ont pas de seuil d'écoulement et dont la viscosité augmente cette fois avec la contrainte appliquée (on les appelle *shear thickening* ou *dilatant* en anglais). Certaines solutions de polymères présentent ce comportement : quand les macromolécules sont initialement enroulées sur

elles-mêmes, les contraintes associées à l'écoulement peuvent les dérouler en longues chaînes, ce qui augmente la viscosité. D'autres fluides présentent une séquence de régimes rhéofluidifiants puis rhéoépaississants lorsque l'on augmente le taux de cisaillement ; on peut ainsi commencer par dérouler et aligner des chaînes polymériques, ce qui diminue la viscosité, jusqu'à ce qu'elles commencent à interagir, ce qui l'augmente de nouveau.

Fluides à seuil

Les fluides à seuil sont tels qu'ils ne s'écoulent pas tant que la contrainte appliquée ne dépasse pas une valeur critique σ_c (on trouve également le qualificatif de *fluides plastiques*). De nombreuses suspensions concentrées de solides dans un liquide et certaines solutions de polymères présentent un seuil d'écoulement, au-delà duquel le taux de cisaillement n'est plus nul et croît avec la contrainte. Le modèle théorique de *fluide de Bingham* suppose que cette dernière variation est linéaire. Pour les fluides réels, on obtient souvent une variation plus proche d'une loi de puissance au-dessus du seuil.

Appliquons une différence de pression croissante à un tel fluide qui remplit un tube cylindrique : on observe, juste au-dessus d'une valeur seuil, un écoulement en bloc de presque tout le fluide, avec une vitesse indépendante de la distance aux parois. Les gradients de vitesse sont localisés dans le voisinage immédiat de ce dernières car c'est le seul endroit où l'on atteint la contrainte nécessaire pour créer un écoulement de cisaillement. On parle, dans ce cas, d'*écoulement bouchon*. En augmentant la contrainte, le gradient de vitesse devient progressivement non nul dans tout le volume. Nous présenterons, dans la section 4.6.3, le calcul quantitatif de ces profils.

On peut interpréter ces comportements par la destruction des structures tridimensionnelles internes du fluide qui se forment au repos : les argiles ont une structure microscopique en plaquettes. En l'absence d'écoulement, les plaquettes forment des empilements rigides, maintenus par des liaisons faibles qui résistent jusqu'à un certain seuil de contrainte. Au-dessus de ce seuil, la structure est en partie détruite et l'écoulement devient possible : plus la vitesse augmente, plus la structure se détruit, tandis que les plaquettes s'alignent dans la direction du mouvement. Il en résulte une augmentation de la contrainte avec le taux de cisaillement plus lente que celle que donnerait une relation linéaire. On parle alors de *fluides à seuil rhéofluidifiants* (souvent représentés par les modèles de *Herschel-Bulkley* ou encore de *Casson*). Certaines suspensions de particules colloïdales ont aussi ces propriétés ; de même, les peintures doivent s'étaler quand elles sont soumises à un cisaillement avec un pinceau, mais elles ne doivent pas couler spontanément une fois appliquées.

Les boues de forage constituent un exemple particulièrement illustratif d'une utilisation pratique de ces fluides : elles sont injectées au fond du puits au niveau du trépan à travers un train de tiges creuses qui entraînent la rotation de ce dernier depuis la surface, puis elles remontent ensuite vers la surface dans le forage. Elles doivent pouvoir couler facilement quand une pression de pompage est appliquée,

mais doivent aussi être assez résistantes pour entraîner les débris de roches vers la surface et empêcher leur chute quand la circulation est arrêtée.

Parmi les autres fluides à seuil dont les applications pratiques sont importantes, on peut citer les crèmes et émulsions utilisées, par exemple, dans l'industrie des cosmétiques et des pâtes à dentifrice. Un autre exemple est le ciment frais (contrainte seuil de l'ordre de quelques dizaines de pascals) ainsi que de nombreux produits de l'industrie alimentaire.

La mesure précise du seuil de tels fluides peut être réalisée en analysant leur *fluage* : on impose par paliers des contraintes de plus en plus élevées et l'on cherche pour quelle valeur de ces dernières le taux de cisaillement en régime stationnaire cesse d'être nul.

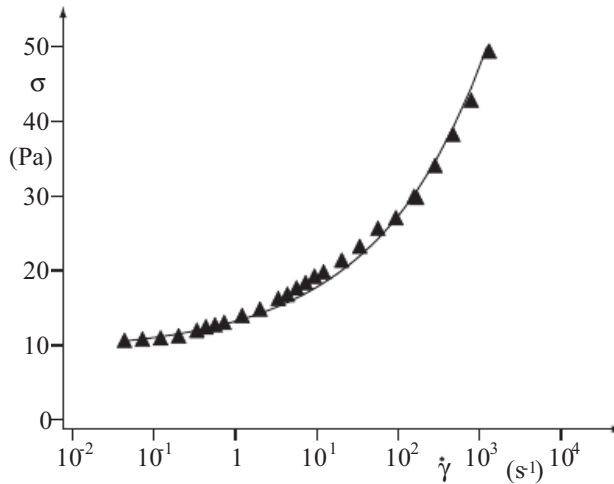


FIG. 4.10 – Relation contrainte-taux de cisaillement (en coordonnées semi-logarithmiques) mesurée sur un mélange eau-kaolin. Les triangles pleins représentent les données expérimentales. La ligne continue correspond à un ajustement avec l'équation (4.43) avec les valeurs : $\sigma_c = 9$ Pa, $n = 0,32$ et $K = 4,2$ Pa.s^{-0,32} (doc. P. Coussot).

La figure 4.10 montre la relation contrainte-taux de cisaillement en coordonnées semi-logarithmiques pour un mélange eau-kaolin qui correspond à une suspension de particules d'argile : lorsque la contrainte est progressivement augmentée à partir de zéro, aucun écoulement ne se produit jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur de l'ordre de 10 Pa.

Lois rhéologiques approchées

Pour de nombreuses applications pratiques, il faut disposer de lois analytiques approchées reliant la contrainte et le taux de cisaillement. Comme nous venons de le voir, une variation en loi de puissance du type de celle de l'équation (4.40) – initialement proposée par Ostwald – fournit une première approximation valable dans certains cas. Un exposant $\alpha > 0$ correspond à

des fluides rhéofluidifiants (les plus fréquents), alors que $\alpha < 0$ correspond à des fluides rhéoépaississants. Pour $\alpha > 0$, la relation (4.40) prédit que la viscosité effective η devient infinie quand le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ tend vers 0, alors que l'on observe que η tend au contraire vers une valeur limite constante (appelée souvent *palier newtonien*) comme on l'observe sur la figure 4.9. Pour représenter l'ensemble de la courbe et, en particulier, les limites aux valeurs de $\dot{\gamma}$ faibles et élevées, on utilise des formules plus complexes du type :

$$\frac{\eta(\dot{\gamma}) - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = f(\dot{\gamma}) \quad (4.41)$$

où la fonction $f(\dot{\gamma})$ est, par exemple, de la forme $f(\dot{\gamma}) = (1 + \beta^2 \dot{\gamma}^2)^{-p}$ (loi de Carreau).

Les lois précédentes prédisent une viscosité finie pour $\dot{\gamma} = 0$ et elles ne s'appliquent donc pas aux fluides à seuil. Il faut donc utiliser d'autres équations, dont la plus simple est celle de Bingham, qui suppose que le taux de cisaillement est proportionnel à la différence $\sigma - \sigma_c$ au-dessus de la valeur seuil σ_c de la contrainte σ . Peu de fluides suivent une telle caractéristique et la relation contrainte-taux de cisaillement présente en général une courbure dirigée vers le bas (fluides à seuil rhéofluidifiants). On représente souvent un tel comportement par des lois combinant effet de seuil et lois de puissance, comme la loi d'Herschel-Bulkley :

$$\sigma \leq \sigma_c : \dot{\gamma} = 0 \quad (4.42)$$

et

$$\sigma > \sigma_c : \sigma = \sigma_c + K \dot{\gamma}^n. \quad (4.43)$$

Cette loi représente très bien la caractéristique rhéologique du mélange eau-kaolin portée sur la figure 4.10.

4.4.3 Différents types de fluides dépendant du temps

Thixotropie et temps caractéristiques

La thixotropie est caractérisée par une viscosité qui diminue au cours du temps, même sous une contrainte appliquée constante. Après suppression de cette contrainte, on ne retrouve la viscosité initiale qu'au bout d'un certain temps. De nombreuses solutions concentrées de polymères et de suspensions de particules sont thixotropes.

De fait, aussi bien la thixotropie que les propriétés rhéofluidifiantes impliquent une évolution de la structure interne du fluide quand ce dernier s'écoule (de nombreux fluides sont d'ailleurs à la fois rhéofluidifiants et thixotropes) : la distinction entre ces deux notions se fait à partir des valeurs relatives des temps caractéristiques τ_{De} de réarrangement de cette structure et T de variation de la contrainte appliquée. Le rapport :

$$De = \frac{\tau_{De}}{T} \quad (4.44)$$

de ces deux temps est appelé *nombre de Deborah*.

Remarque. Marcus Reiner, l'un des pères de la rhéologie avec Eugene C. Bingham, a défini le *nombre de Deborah* en référence à la prophétesse Deborah qui, selon la *Bible* (livre des Juges 5:5), chanta après une victoire sur les Philistins : « les montagnes coulèrent devant le Seigneur ». Si, à l'échelle humaine, les montagnes paraissent intangibles, elles finissent nécessairement par se déformer, puis par disparaître, pendant la durée – infinie – d'une observation divine. Tout n'est qu'une question d'échelle de temps caractéristique !

Lorsque De est très petit devant l'unité, le fluide a le temps de se réarranger lorsque l'on fait varier la contrainte (ou bien le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ imposé). Pour un fluide rhéofluidifiant, la viscosité apparente diminuerait avec $\dot{\gamma}$, et la valeur obtenue serait indépendante de la durée de la mesure ; de plus, si l'on décrit des cycles d'augmentation et de diminution de taux de cisaillement, la relation contrainte-taux de cisaillement est toujours la même. On peut alors bien tracer des courbes du type de celles de la figure 4.8. En pratique, cependant, cette description ne s'applique qu'à certains fluides et pour des écoulements permanents ou lentement variables.

Au contraire, pour un nombre De très supérieur à l'unité, les propriétés rhéologiques mesurées évoluent pendant un temps de l'ordre de τ_{De} au fur et à mesure du changement de structure des fluides. De même, lorsque l'on décrit une suite d'augmentations et de diminutions du taux de cisaillement, on observe un effet d'hystérésis et l'on finit par décrire, après un régime transitoire, un cycle limite où les courbes caractéristiques correspondant à une variation dans un sens et dans l'autre ne coïncident pas. De tels comportements sont des manifestations de la thixotropie.

Remarque. On rencontre souvent également, dans la littérature à propos de tels fluides, le nombre de Weissenberg We défini comme le produit $\dot{\gamma} \tau_{De}$. Ce nombre caractérise plutôt des processus où le fluide évolue au cours du temps sous l'effet d'un taux de cisaillement constant $\dot{\gamma}$.

Pour les polymères, la thixotropie reflète souvent, à l'échelle microscopique, le désenchevêtrement d'amas de macromolécules. Pour les suspensions, on peut avoir destruction d'édifices de particules liées par des forces d'attraction électrostatiques ou des forces de Van der Waals. Certaines solutions d'argile (bentonites), évoquées dans la section précédente, se comportent de même. Ainsi, le couple à exercer pour maintenir une vitesse de rotation constante diminue avec le temps sur des durées de plusieurs minutes ou dizaines de minutes. En réduisant alors progressivement la vitesse de rotation jusqu'à zéro, on mesure une caractéristique contrainte-taux de déformation différente de la courbe initiale : la structure du fluide a été modifiée ; on ne retrouve la courbe de départ qu'en le laissant au repos pendant plusieurs heures. Cette évolution de la structure interne du fluide en écoulement est d'autant plus marquée que les gradients de vitesse appliqués sont plus élevés.

Les fluides thixotropes ont de nombreuses applications pratiques : les peintures et les boues de forage déjà évoquées sont fortement thixotropes, ce

qui vient renforcer l'effet des caractéristiques rhéofluidifiantes que nous avons vues plus haut ; des composés alimentaires, comme les concentrés de tomate, doivent être secoués avant de pouvoir les verser.

Quelques fluides ont des caractéristiques inverses des précédentes et deviennent plus visqueux au cours du temps quand on les soumet à un cisaillement : on parle alors de fluides *antithixotropes* dont la pâte de gypse est un exemple. On rencontre également le terme de *rhéopexie* : il caractérise plutôt la solidification progressive de certains fluides lorsqu'ils sont agités).

Viscoélasticité

La *viscoélasticité* correspond à un comportement intermédiaire entre celui d'un solide élastique (déformation proportionnelle à la contrainte et reliée à celle-la par les coefficients d'élasticité) et celui d'un liquide (taux de déformation croissant avec la contrainte). Un exemple particulièrement spectaculaire de tels fluides (Fig. 4.11) est fourni par certaines pâtes silicones qui, mises en forme de boule, rebondissent élastiquement sur le sol comme des solides, mais s'étalent comme des liquides quand on les laisse posées assez longtemps sur un plan : quand la vitesse de variation des contraintes est élevée (comme dans le cas d'un impact), la structure interne de la substance n'a pas le temps de se réarranger dans le temps du choc et le matériau réagit comme un solide élastique. L'énergie correspondante sera, par exemple, stockée en modifiant l'orientation des macromolécules dans le cas des polymères.

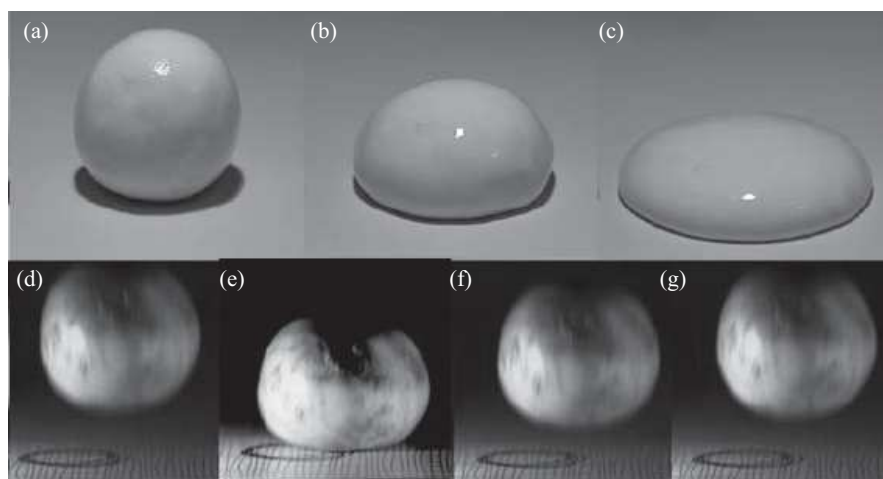


FIG. 4.11 – Une boule de certaines pâtes silicones se comporte très différemment suivant la variation temporelle des contraintes auxquelles elle est soumise. (a,b,c) : Elle s'étale comme un liquide si on la laisse reposer quelques minutes sur une table ; (e,f,g,h) : elle rebondit comme une balle élastique (f,g) si on la laisse tomber (d) en la soumettant ainsi à une contrainte brève et intense qui la déforme au moment de l'impact (c) (docs. R. Lehoucq (a–c) et auteurs (d–g)).

Mais si l'on pose le corps sur une surface, la contrainte est alors constante et le corps s'étale comme un liquide par suite des réarrangements de structure interne sur une échelle de temps correspondant à τ_{De} . Ces caractéristiques diffèrent de celles des fluides thixotropes qui se comportent aux temps courts comme des liquides très visqueux.

Les solutions concentrées aqueuses de polymères (solution de polyoxyéthylène à des concentrations en masse de quelques pour mille), la pâte à pain, les solutions utilisées pour la fabrication de fibres textiles artificielles (nylon, kevlar...) sont d'autres exemples de fluides viscoélastiques. Parfois, les caractéristiques des matériaux viscoélastiques sont proches de celles des solides. C'est le cas, par exemple, des gelées et de certaines mousses.

Enfin, les fluides viscoélastiques présentent généralement des différences entre les composantes normales parallèles et perpendiculaires au plan du cisaillement. Cet effet – aussi observable dans d'autres types de fluides – sera analysé à la section 4.4.5.

Autres types d'influences des variations temporelles des contraintes

On observe aussi des comportements dépendant du temps sur des substances de caractéristiques rhéologiques très différentes et pas nécessairement viscoélastiques. Ainsi, une solution concentrée de farine de maïs (maïzena) dans l'eau réagit comme un solide élastique si on la frappe sèchement avec le dos d'une cuillère, alors que l'on pourra y enfoncer facilement cette même cuillère en la déplaçant plus lentement (ou même en la laissant posée). Dans cet exemple, le temps de relaxation des structures est très court. Il est beaucoup plus élevé pour le manteau terrestre, qui se comporte comme un fluide visqueux dans les mouvements convectifs tectoniques, mais qui est bien évidemment un solide aux échelles de temps usuelles.

4.4.4 Élasticité et viscosité complexes des fluides viscoélastiques

Mesures des caractéristiques dépendant du temps des fluides viscoélastiques

Une première approche consiste à imposer une brusque variation de contrainte (resp. de taux de cisaillement) et à suivre les variations correspondantes du taux de cisaillement (resp. de la contrainte). Augmentons brusquement (Fig. 4.12a) le couple Γ appliqué à l'un des cylindres d'un viscosimètre de Couette. Pour un fluide newtonien classique, la vitesse de rotation se stabiliserait presque instantanément à une nouvelle valeur constante après la variation de couple. Pour un fluide viscoélastique, au contraire, la vitesse de rotation ω du cylindre augmente souvent d'abord fortement, puis relaxe vers une valeur plus faible constante (Fig. 4.12b) ou plus lentement vers une valeur variable. L'effet inverse est observé en réduisant brusquement le couple

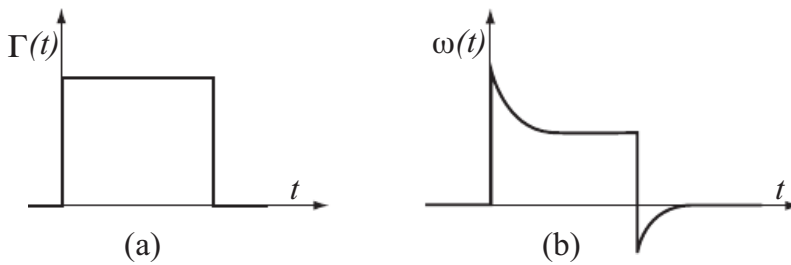


FIG. 4.12 – Réponse (simplifiée) d'un fluide viscoélastique à des variations brusques de la contrainte appliquée dans un viscosimètre de Couette. (a) Variation brusque du couple Γ appliqué par un rhéomètre ; (b) variations correspondantes de la vitesse de rotation ω .

à zéro : on pourra voir le cylindre tourner légèrement en sens inverse, avant de s'immobiliser comme s'il était tenu par un fil de torsion en caoutchouc représentant l'élasticité du liquide (phénomène de *recouvrance*). La détermination du temps de réponse aux excitations dans de telles mesures permet de caractériser le temps τ_{De} d'adaptation de la structure.

Le type de réponse observée dépend de plusieurs temps caractéristiques : le (ou les) temps caractéristique(s) de réponse de la structure du fluide, le temps caractéristique de variation de la contrainte (ou du taux de cisaillement), l'inverse du taux de cisaillement. Suivant leurs valeurs relatives (et les non-linéarités des caractéristiques du fluide), l'un ou l'autre type de comportement pourra être observé.

Enfin, une autre technique d'étude des fluides dépendant du temps consiste à leur faire subir des variations sinusoïdales de contraintes (ou de taux de cisaillement) et à mesurer les variations correspondantes de l'autre variable en fonction du temps. Dans le cas de petites déformations, celles-ci sont également sinusoïdales mais présentent un déphasage variable par rapport à l'excitation : il est donc nécessaire de mesurer aussi bien l'amplitude que la phase du signal pour une excitation donnée. La réponse à ces excitations sinusoïdales que nous allons détailler maintenant est très variable suivant les ordres de grandeur relatifs de la période de l'excitation et des temps de réarrangement de la structure interne (donc suivant le nombre de Deborah) ; elle dépend aussi de l'amplitude des déformations réalisées.

Définition des coefficients caractéristiques

Les mesures sous excitation sinusoïdale permettent de déterminer le module complexe $\bar{G}(\omega)$ qui relie la contrainte complexe $\bar{\sigma}(t) = \sigma_0(\omega)e^{i(\omega t + \varphi)}$ et la déformation complexe $\bar{\gamma}(t) = \gamma_0(\omega)e^{i\omega t}$ avec :

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{G}(\omega)\bar{\gamma}(t) = (G'(\omega) + iG''(\omega))\bar{\gamma}(t) \quad (4.45)$$

(à noter que $\bar{\gamma}(t)$ est la déformation et non pas le taux de cisaillement qui est sa dérivée temporelle). $\bar{G}(\omega)$ est appelé *module de rigidité complexe* : sa partie réelle, directement reliée à l'élasticité du matériau, est le *module de conservation* et sa partie imaginaire, liée à la viscosité, est le *module de perte*. Pour un solide élastique :

$$G'(\omega) = G \quad (4.46a)$$

et :

$$G''(\omega) = 0 \quad (4.46b)$$

où G est le module de cisaillement du matériau. Pour un fluide visqueux newtonien, on a, en notation complexe : $\bar{\dot{\gamma}}(t) = i\omega \bar{\gamma}(t)$. En identifiant avec la relation habituelle $\bar{\sigma} = \eta \bar{\dot{\gamma}}(t)$, on a :

$$G'(\omega) = 0 \quad (4.47a)$$

et :

$$G''(\omega) = \eta \omega. \quad (4.47b)$$

Pour des fluides ayant un caractère essentiellement visqueux avec une faible composante viscoélastique, il est plus significatif (mais équivalent) d'introduire une viscosité complexe :

$$\bar{\eta}(\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \frac{\bar{\sigma}(t)}{\bar{\dot{\gamma}}(t)} = \frac{\bar{\sigma}(t)}{i\omega \bar{\gamma}(t)} = \frac{\bar{G}(\omega)}{i\omega} = \frac{G''(\omega)}{\omega} - i\frac{G'(\omega)}{\omega}. \quad (4.48)$$

Avec de telles définitions, on obtient les relations :

$$\eta'(\omega) = \frac{G''(\omega)}{\omega} \quad (4.49a)$$

et :

$$\eta''(\omega) = \frac{G'(\omega)}{\omega}. \quad (4.49b)$$

Pour un fluide purement visqueux (sans élasticité), on retrouve bien $\eta'(\omega) = \eta$ et $\eta''(\omega) = 0$.

Les coefficients $G'(\omega)$, $G''(\omega)$, $\eta'(\omega)$ et $\eta''(\omega)$ dépendent de la fréquence, mais aussi de l'amplitude de l'excitation. Une étude de ces fluides implique l'analyse de l'influence de ces deux paramètres. Ainsi, la fréquence de transition entre les régimes visqueux à basse fréquence ($De \ll 1$) et élastique à haute fréquence donne une estimation du nombre de Deborah, et permet d'évaluer les temps caractéristiques de réponse de la structure interne du fluide.

Modèles mécaniques de fluides viscoélastiques

Comme pour la relation contrainte-déformation des fluides indépendants du temps, il est utile de disposer d'expressions analytiques approchées. On peut caractériser la variation de G' et G'' avec la fréquence ω d'excitation

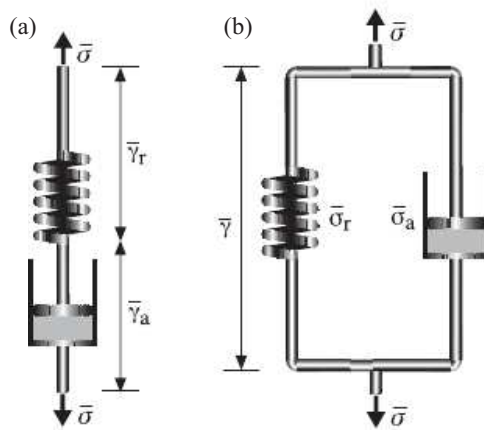


FIG. 4.13 – (a) Modèle mécanique d'un liquide de Maxwell avec un ressort et un amortisseur en série ; (b) modèle mécanique d'un solide de Kelvin-Voigt.

avec des modèles linéaires de type mécanique, tels que le modèle du *liquide de Maxwell*, qui ne visent pas à rendre compte de la structure interne du matériau.

Le modèle de Maxwell rend compte du cas d'un fluide viscoélastique linéaire se comportant comme un liquide de viscosité η à des fréquences angulaires ω faibles et comme un solide de module élastique G lorsqu'elles sont plus élevées (qualitativement, cela correspond au comportement des pâtes de silicone évoquées plus haut). Du point de vue des relations contrainte-déformation, le matériau se comporte comme un ressort (contrainte $\bar{\sigma}$ proportionnelle à la déformation avec $\bar{\sigma} = G\bar{\gamma}$) en série avec un amortisseur (contrainte $\bar{\sigma} = \eta \dot{\bar{\gamma}} = i\omega\eta\bar{\gamma}$ proportionnelle au taux de cisaillement $\dot{\bar{\gamma}}$) (Fig. 4.13a).

Pour les excitations de fréquence élevée, l'amortisseur n'a pas le temps de réagir et le système se comporte comme un ressort ; aux fréquences très basses, le ressort est à peine déformé et seul l'amortisseur intervient. Soulignons toutefois qu'il ne s'agit que d'un modèle analogique mécanique, qui ne vise nullement à décrire la structure interne du matériau, mais uniquement à reproduire son comportement global. Dans ce système, on retrouve la contrainte appliquée $\bar{\sigma}$, aussi bien sur le ressort que sur l'amortisseur ; les deux déformations $\bar{\gamma}_{\text{ressort}}$ et $\bar{\gamma}_{\text{amortisseur}}$ s'ajoutent avec :

$$\bar{\gamma}_{\text{Maxwell}} = \bar{\gamma}_{\text{ressort}} + \bar{\gamma}_{\text{amortisseur}} = \frac{\bar{\sigma}}{G} + \frac{1}{i\omega\eta} \bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{G' + iG''}. \quad (4.50)$$

On a donc :

$$\bar{G} = G' + iG'' = \frac{i\omega\eta}{1 + i\omega(\eta/G)} = \frac{i\omega\eta}{1 + i\omega\tau} \quad (4.51a)$$

où $\tau = \eta/G$ correspond au temps caractéristique de relaxation du fluide, qui détermine la fréquence ω de transition entre les régimes de fréquence où le fluide apparaît comme un liquide ($\omega \ll 1/\tau$ soit $De \ll 1$), et comme un solide élastique ($\omega \gg 1/\tau$ soit $De \gg 1$). En utilisant les relations (4.49a-b), l'équation (4.51a) peut être réécrite en faisant intervenir la viscosité complexe sous la forme :

$$\bar{\eta}(\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \frac{\eta}{1 + i\omega\tau}. \quad (4.51b)$$

Le modèle du *solide de Kelvin-Voigt* se comporte au contraire comme un solide élastique (module élastique G) pour des variations lentes d'excitation et comme un liquide visqueux (viscosité η) sous des excitations brèves. Le matériau peut aussi être modélisé par un ressort, mis cette fois-ci en parallèle avec un amortisseur (Fig. 4.13b). En procédant comme précédemment, l'expression du module élastique complexe $\tilde{G}$ est cette fois :

$$G' + iG'' = G + i\omega\eta = G(1 + i\omega\tau). \quad (4.52)$$

Les fluides réels correspondent rarement à ces deux cas limites et font souvent intervenir plusieurs temps caractéristiques de réarrangement de leur structure. Des modèles plus complexes ont été élaborés pour décrire leur comportement et, en particulier, pour prendre en compte l'effet de l'amplitude des déformations.

Exemple de caractéristiques d'un fluide viscoélastique

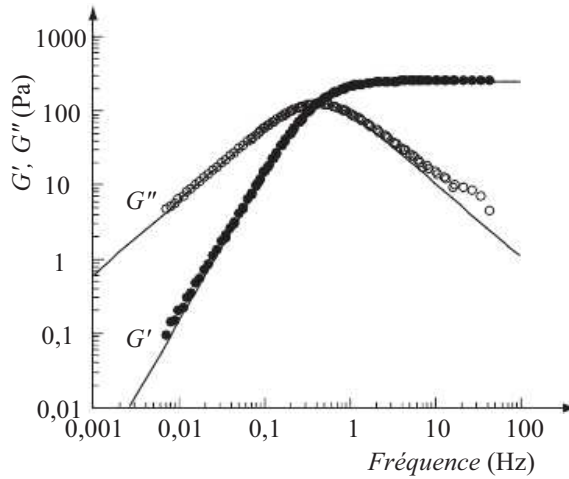


FIG. 4.14 – Variation en fréquence (échelle log-log) des modules rhéologiques G' et G'' d'une solution de micelles géantes. La ligne continue correspond à un ajustement par le modèle de Maxwell (Éqs. 4.51) avec les valeurs de paramètres $\tau = 0,38$ s et $G = 249$ Pa (doc. J.-F. Berret, G. Porte et J.-P. Decruppe).

La figure 4.14 montre les caractéristiques rhéologiques d'un fluide contenant des micelles géantes : il s'agit de solutions de molécules de composés tensioactifs qui se groupent en structures vermiciformes de très faible diamètre (deux tailles moléculaires) et de grande longueur. Ces structures sont dites « vivantes » car elles se coupent et se rattachent en permanence de manière dynamique. Sur la figure, on distingue clairement deux comportements, suivant la fréquence de l'écoulement. Aux fréquences inférieures à 0,2 Hz, les solutions se comportent essentiellement comme des fluides visqueux avec un module de perte G'' croissant linéairement avec la fréquence (ce qui correspond

à la partie imaginaire de la relation (4.51)) ; l'influence du module de perte est alors dominante par rapport à celle du module de conservation G' qui varie comme le carré de la fréquence. Aux fréquences supérieures à 2 Hz, le module de conservation G' est pratiquement constant et le module de perte G'' décroît avec la fréquence comme f^{-1} . Dans ce domaine, le comportement du fluide se rapproche de celui d'un solide élastique. Aux fréquences encore supérieures (au-dessus de 10 Hz), la composante G'' dévie vers le haut par rapport à la relation (4.51a) à cause de nouveaux mécanismes de perte d'énergie.

4.4.5 Anisotropie des contraintes normales

Nous avons traité jusqu'à présent les différents types de relations contrainte-déformation, dépendant ou non du temps, observées sur les fluides non newtoniens en n'analysant que le comportement de la viscosité de cisaillement. Nous allons maintenant décrire d'autres phénomènes, reflétant l'anisotropie des contraintes normales ou la viscosité élongationnelle, et qui font intervenir d'autres composantes du tenseur des contraintes ou d'autres types d'écoulement.

Dans un fluide newtonien en écoulement parallèle, il n'apparaît pas de contrainte normale due à l'écoulement. Prenons en revanche, un fluide viscoélastique qui s'écoule dans un tube. On observe souvent, au sortir du tube (extrusion), une contrainte normale de traction dans la direction parallèle à l'écoulement et de pression vers l'extérieur dans la direction perpendiculaire. La différence entre ces contraintes normales est la cause du *gonflement des jets* de certains polymères en solution ou fondus (liquides sans solvant à température élevée) à la sortie d'un orifice. Le diamètre final du jet augmente avec la vitesse d'écoulement (Figs. 4.15a-b) et peut atteindre plusieurs fois le diamètre de départ. Au-delà d'une certaine vitesse d'écoulement, on peut observer des effets de retard, où le jet ne commence à gonfler qu'après avoir

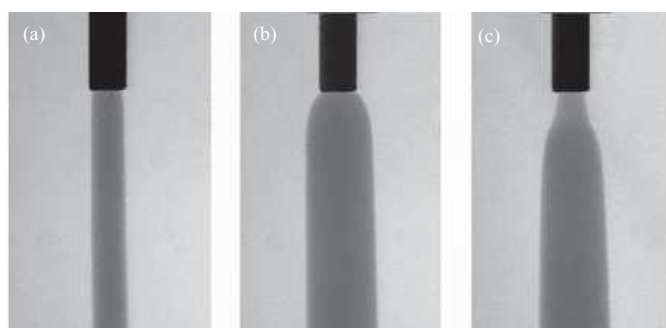


FIG. 4.15 – Gonflement à la sortie d'un tube capillaire d'un jet de solution aqueuse de polymère injecté dans une solution d'eau et de sel de même densité. Les débits sont de (a) : 5 ml h^{-1} , (b) 80 ml h^{-1} , (c) 120 ml h^{-1} (doc. C. Allain, P. Perrot et D. Senis).

parcouru une certaine distance (Fig. 4.15c). Lors de la fabrication de fils ou de tubes par extrusion, ou pour la réalisation de pièces de plastique par injection dans un moule, il faut tenir compte de ces effets pour le choix de la taille de l'orifice.

L'effet *Weissenberg* est une autre manifestation classique des différences de contraintes normales. Un fluide viscoélastique comme le blanc d'œuf (ou les pâtes à pain) remonte le long de l'axe d'un batteur rotatif (Fig. 4.16 CC) : là encore, cette montée est due à la répartition des contraintes normales. Pour un fluide newtonien, on observe, au contraire, un creusement de la surface libre dû à la force centrifuge.

Analyse qualitative de l'effet Weissenberg. Le blanc d'œuf est constitué principalement d'albumine, qui est une protéine constituée d'une chaîne assez longue d'atomes qui confère au blanc d'œuf un caractère élastique : sous l'effet d'une contrainte, les chaînes sont étirées et/ou déroulées et mettent un « certain » temps à retrouver leur forme d'équilibre. Lorsque le blanc d'œuf est mis en rotation, les macromolécules qui le constituent sont mises en extension autour de l'axe de rotation, comme des bandes élastiques étirées qui l'entoureraient. Cette mise en tension a pour effet « d'étrangler » le fluide en le poussant vers l'axe, ce qui reflète bien une anisotropie des contraintes normales. Si l'élasticité du fluide est suffisamment importante, ce phénomène peut compenser, et même dépasser, l'effet de la force centrifuge en créant une surpression près de l'axe tournant au lieu d'une dépression. Cette surpression conduit alors à une remontée du fluide le long de cet axe. Une explication similaire s'applique au gonflement des jets de solutions de polymères : les « bandes élastiques » sont étirées au passage dans l'orifice d'extrusion et retrouvent leur longueur et leur forme avec augmentation du diamètre à la sortie pour conserver le volume.

Enfin, si les anisotropies de contraintes normales sont souvent importantes dans les solutions viscoélastiques de polymères, elles peuvent aussi être observées dans d'autres fluides, comme les suspensions de particules anisotropes non browniennes (par exemple, des bâtonnets de taille supérieure au micromètre) ou les solutions de micelles géantes (comme celles utilisées pour obtenir les courbes de la Fig. 4.14).

Quantitativement, considérons un écoulement de cisaillement à deux dimensions $v_x(y)$. Dans l'écoulement d'un fluide newtonien isotrope, les contraintes normales σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} sont toutes identiques. En revanche, dans les écoulements de certains fluides non newtoniens, la différence :

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \quad (4.53a)$$

appelée *première différence des contraintes normales*, a souvent une valeur importante et positive (dans certains cas, elle atteint dix fois la contrainte de cisaillement). La *seconde différence* des contraintes normales est définie par :

$$N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz}. \quad (4.53b)$$

Elle a, en général, une valeur beaucoup plus faible (moins de 10 % de N_1) et négative, et elle est considérée comme nulle dans certains modèles classiques (Weissenberg). N_1 et N_2 s'annulent à cisaillement nul et varient souvent selon une loi de puissance en fonction de taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ (généralement en $\dot{\gamma}^2$). Enfin, des effets dépendant du temps peuvent également être observés sur la variation des contraintes normales : ainsi, dans l'expérience de la figure 4.15, le jet n'augmente de diamètre qu'au-delà d'une vitesse seuil d'écoulement et à une distance en aval de l'orifice augmentant avec la vitesse.

Certains rhéomètres permettent de mesurer N_1 dans la géométrie classique cône-plan. Les effets provoqués par les différences de contraintes normales peuvent également être utilisés pour estimer plus indirectement ces dernières (gonflement d'un jet, ascension d'un fluide autour d'un axe tournant). Il est à noter que ces différences de contraintes normales ne dépendent pas du sens de la déformation, en accord avec leur variation en $\dot{\gamma}^2$: on observe une ascension de la surface du fluide quel que soit le sens de rotation !

4.4.6 Viscosité élongationnelle

L'écoulement d'un fluide à travers un petit orifice illustre les effets de viscosité élongationnelle où les gradients de vitesse le long de l'écoulement doivent être pris en compte. Considérons ici le cas de l'écoulement dit *élongationnel* entre deux disques identiques parallèles et coaxiaux que l'on éloigne l'un de l'autre. La figure 3.10a donne une vue schématique d'un écoulement de ce type. La vitesse s'annule sur l'axe à mi-distance entre les disques (point O). En dehors du plan médian ($x = 0$), la composante axiale est dirigée vers le disque le plus proche alors que la composante radiale est orientée vers l'axe Ox . Un champ de vitesse de la forme :

$$v_x = \dot{\epsilon} x \quad (4.54a) \quad v_y = -\dot{\epsilon} \frac{y}{2}, \quad (4.54b)$$

$$v_z = -\dot{\epsilon} \frac{z}{2} \quad (4.54c)$$

représente bien, de manière approchée, un tel écoulement (il vérifie, d'autre part, $\text{div } \mathbf{v} = 0$). Pour un tel champ de vitesse avec une symétrie de révolution autour de l'axe Ox , on définit une viscosité élongationnelle (aussi appelée *viscosité de Trouton*) par :

$$\eta_{el} = \frac{\sigma_{xx} - (\sigma_{yy}/2) - (\sigma_{zz}/2)}{\dot{\epsilon}}. \quad (4.55)$$

Pour un fluide newtonien, on a simplement $\sigma_{xx} = 2\eta \dot{\epsilon}$, $\sigma_{yy} = -\eta \dot{\epsilon}$, $\sigma_{zz} = -\eta \dot{\epsilon}$ et l'on trouve que $\eta_{el} = 3\eta$. En revanche, pour certains fluides non newtoniens, en particulier viscoélastiques, nous venons de voir que les différences de contraintes normales, qui interviennent dans cette définition, peuvent être importantes. La viscosité élongationnelle est alors beaucoup plus élevée que

le triple de la viscosité de cisaillement. On appelle ce phénomène *rhéodurcissement* (ou durcissement provoqué par la déformation) : à l'échelle microscopique, il résulte, pour un fluide polymérique, d'un alignement des macromolécules, puis d'un comportement élastique de ces dernières lorsque les chaînes moléculaires ont été très fortement étirées. La viscosité η_{el} est difficile à mesurer car, contrairement aux cas précédents, on peut difficilement réaliser des écoulements élongationnels stationnaires.

Ce résultat a des conséquences pratiques importantes pour l'industrie des textiles synthétiques. Lorsque l'on étire un jet d'un liquide simple, les forces de capillarité amplifient les fluctuations de diamètre qui apparaissent spontanément et coupent finalement le jet en gouttes (instabilité de Rayleigh-Plateau décrite à la section 8.3.2). Par contre, la viscosité élongationnelle des polymères viscoélastiques liquides utilisés pour la préparation des fibres synthétiques est très forte : cela freine le développement des instabilités et permet d'obtenir un diamètre uniforme en ralentissant l'étirement dans les zones les plus amincies. Un « fil » d'un tel fluide tiré vers le haut à partir d'une surface libre sans support solide peut ainsi être enroulé sur une bobine tournante placée au-dessus (Fig. 4.17 CC).

Signalons enfin que certains écoulements font intervenir simultanément les différents effets décrits à la présente section : les écoulements d'extrusion font apparaître des effets d'anisotropie de contrainte normale, mais présentent aussi une composante élongationnelle.

4.4.7 **Résumé des principaux types de fluides non Newtoniens**

Catégorie	Dénomination	Caractéristique
Newtonien	Newtonien	$\eta_{\text{eff}} = \sigma / \dot{\gamma}$ constant avec $\dot{\gamma}$
Relations contrainte-taux de déformation non linéaires	Rhéofluidifiant	η_{eff} diminue avec $\dot{\gamma}$
	Fluide à seuil	$\dot{\gamma} = 0$ en dessous d'un seuil σ_c
	Rhéopaisissant	η_{eff} augmente avec $\dot{\gamma}$
Évolution sous contrainte au cours du temps	Thixotrope	$\eta_{\text{eff}} \downarrow$ au cours du temps sous contrainte constante
	Rhéopexique	$\eta_{\text{eff}} \uparrow$ au cours du temps sous contrainte constante
Comportement mixte fluide-solide	Viscoélastique	Réponse élastique ou visqueuse suivant le temps caractéristique d'excitation. Fortes contraintes normales

TAB. 4.1 – Différents types de fluides non newtoniens.

La table 4.1 résume les propriétés rhéologiques, que nous venons de définir, pour décrire les propriétés des fluides complexes tels que (parmi d'autres) : les

colloïdes, les suspensions et les polymères. Certains de ces fluides, à seuil et viscoélastiques par exemple, ont, comme nous l'avons vu, un comportement très proche des solides sous des contraintes faibles et/ou de courte durée. Inversement, certains solides très déformables (les gels par exemple) peuvent « couler » sous des contraintes fortes et/ou prolongées ; ils peuvent aussi présenter une viscosité quand on les déforme (voir, par exemple, le modèle de Kelvin-Voigt à la section 4.4.4) ou même des effets de tension superficielle.

On parle souvent de *matière molle*, un terme introduit à la suite des travaux du physicien français Pierre-Gilles de Gennes pour désigner l'ensemble de tous ces matériaux : leur structure microscopique et leurs caractéristiques physicochimiques sont généralement la clé de la compréhension de leurs propriétés mécaniques et d'écoulement.

4.5 Écoulements unidirectionnels de fluides visqueux newtoniens

4.5.1 Équation de Navier-Stokes pour les écoulements unidirectionnels

L'équation de Navier-Stokes (4.30), qui décrit le mouvement d'un fluide newtonien visqueux incompressible, résulte d'hypothèses simplificatrices que nous avons évoquées plus haut. Elle ne peut cependant être, en général, résolue analytiquement. Cela est dû, en particulier, à la présence d'un terme non linéaire convectif $\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$ qui traduit l'exploration des variations spatiales du champ de vitesse par les particules de fluide.

Ce problème disparaît pour les écoulements unidirectionnels (souvent également appelés parallèles). Nous supposons, par la suite, que la vitesse est partout parallèle à Ox avec :

$$v_y(x, y, z, t) = v_z(x, y, z, t) = 0. \quad (4.56)$$

Compte tenu de ces égalités, la condition d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{v} = 0$ se réduit alors à :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (4.57)$$

d'où :

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v} \equiv 0 \quad (4.58)$$

car $\mathbf{v}$ a alors pour composantes $(v_x(y, z, t), 0, 0)$. L'équation de Navier-Stokes devient alors :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (4.59a)$$

et :

$$\rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (4.59b)$$

Les deux égalités (4.59b) reflètent simplement un équilibre hydrostatique (dans la plupart des cas, f_x, f_y et f_z sont les composantes de l'accélération $\mathbf{g}$ de la pesanteur). Dans ce cas, $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ est constant dans le volume de fluide. En dérivant l'équation (4.59b) par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0.$$

Le gradient de pression $\partial p / \partial x$ dans la direction de l'écoulement est donc indépendant de y et de z ; par ailleurs, d'après l'équation (4.59a) et du fait que v_x est indépendant de x , il est aussi constant avec x . On a donc :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{cte} \quad (4.60)$$

dans tout le volume des écoulements unidirectionnels (mais $\partial p / \partial x$ peut varier au cours du temps pour des écoulements instationnaires).

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, le premier membre de l'équation (4.22) est nul. D'après la discussion de la section 4.2.1, cela reflète alors le fait que la résultante des forces sur un élément de volume de fluide (gravité + pression + contraintes visqueuses) est nulle à tout instant dans les écoulements unidirectionnels stationnaires : en effet, la quantité de mouvement d'un tel élément de volume doit rester constante pendant son déplacement à la fois dans l'espace (caractère unidirectionnel) et dans le temps (stationnarité).

Les quatre premiers exemples d'écoulements que nous allons analyser sont de ce dernier type. Nous verrons ensuite l'écoulement de Couette cylindrique, qui constitue un exemple de détermination possible d'un champ de vitesse en présence de termes non linéaires. Le fait que nous trouvions une solution pour ces écoulements ne signifie pas que celui-là soit le seul observable. De façon générale, pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés, ces écoulements parallèles deviennent instables et il se développe des écoulements turbulents dont les champs de vitesse sont beaucoup plus complexes et instationnaires.

Il n'y a pas que les écoulements parallèles pour lesquels le terme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ est négligeable : ce sera aussi le cas pour les écoulements à faible nombre de Reynolds ($Re \ll 1$) que nous traiterons au chapitre 9. Dans ce cas, ce terme non linéaire est négligeable, même pour une géométrie quelconque, devant la composante $\eta \Delta \mathbf{v}$ représentant les forces de frottement visqueux. Ces écoulements vérifient aussi une équation de mouvement linéaire ou *équation de Stokes*. Enfin, pour les écoulements quasi unidirectionnels discutés au chapitre 8, l'équation de mouvement devient également linéaire, à condition que le nombre de Reynolds (tout en étant supérieur à 1) ne soit pas trop élevé (la limite dépend de la géométrie de l'écoulement). On parle alors de *lubrification*.

4.5.2 Écoulement de Couette entre deux plans parallèles

Nous avons précédemment évoqué à la section 2.1.2 cet écoulement entre deux plans parallèles à distance constante et en mouvement relatif, en relation avec la diffusion de la quantité de mouvement.

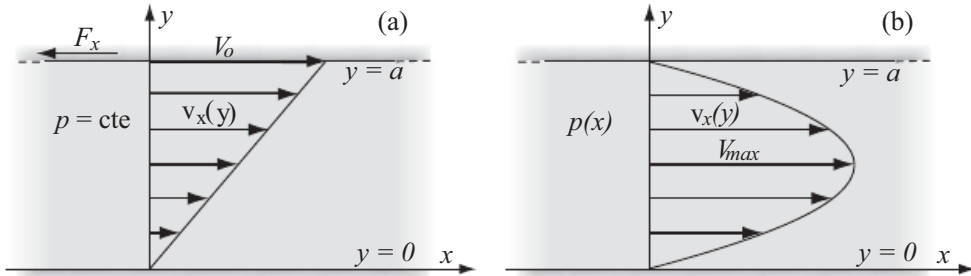


FIG. 4.18 – Écoulements plans. (a) Écoulement de Couette. Le plan inférieur est fixe et le plan supérieur est déplacé à vitesse constante V_0 dans la direction Ox . (b) Écoulement de Poiseuille : les deux plans sont fixes et l'on applique un gradient de pression (comparer ce dernier profil à celui de la Fig. 2.7b).

Nous déterminons ici le profil de vitesse $v_x(y)$ entre un plan inférieur ($y = 0$) fixe et un plan supérieur ($y = a$) qui se déplace parallèlement à lui-même à une vitesse constante $\mathbf{V}_0$ (Fig. 4.18a). On suppose qu'aucun gradient de pression n'est appliqué parallèlement aux plaques (soit $\partial p / \partial x = 0$ dans tout le volume d'après l'équation (4.60)), que l'écoulement est établi, stationnaire ($\partial v_x / \partial t = 0$), invariant suivant Oz et que les plans sont horizontaux (seule la composante $g_y = -g$ de la gravité est non nulle). Les équations (4.59) deviennent :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g, \quad (4.62)$$

où g est la valeur absolue de l'accélération de la pesanteur (l'axe y est dirigé vers le haut). Comme $\partial p / \partial x = 0$, l'équation (4.61) devient :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \quad (4.63)$$

qui s'intègre en :

$$v_x = V_0 \frac{y}{a} \quad (4.64)$$

en tenant compte des conditions aux limites de vitesse relative nulle par rapport aux plans. La pesanteur crée simplement un gradient de pression hydrostatique vertical, mais n'influence pas l'écoulement. La force de frottement

visqueux par unité de surface sur chacun des plans vaut :

$$|F_x| = |\sigma_{xy}| = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\eta V_0}{a}. \quad (4.65)$$

Notons que F_x est indépendante de la distance y aux plans et que la force résultante d'origine visqueuse $\eta(\partial^2 v_x / \partial y^2)$ sur un volume unité d'un élément matériel de fluide en mouvement est nulle. Cela est nécessaire pour avoir une résultante globale nulle suivant Ox des forces sur cet élément : en effet, les forces de pression et de gravité ont également une composante suivant Ox égale à zéro.

4.5.3 Écoulements de Poiseuille

Nous traitons maintenant l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible entre deux plans parallèles fixes, puis dans un tube de section circulaire ; ces écoulements sont induits par une différence de pression appliquée entre les deux extrémités du tube ou des plans. Nous nous plaçons assez loin de l'entrée du canal pour pouvoir considérer le profil d'écoulement comme indépendant de x ; les problèmes d'établissement de profils de vitesse seront traités dans la section 10.2, en liaison avec la variation d'épaisseur des couches limites avec la distance.

Écoulement entre deux plans parallèles fixes

Nous étudions d'abord l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux entre deux plans horizontaux, fixes et parallèles d'équations $y = 0$ et $y = a$ (Fig. 4.18b). L'écoulement est induit par un gradient de pression $\partial p / \partial x = -K = -(\Delta p / L)$ suivant x . K est positif pour un écoulement dans la direction des x positifs et, d'après l'équation (4.60), il est constant dans tout le fluide. L'équation (4.59a) devient alors :

$$\eta \frac{d^2 v_x}{dy^2} + K = 0.$$

En intégrant par rapport à y , et compte tenu des conditions aux limites sur les parois ($v_x = 0$ pour $y = \pm a/2$), on trouve :

$$v_x = \frac{K}{\eta} \frac{y(a-y)}{2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\eta} y(a-y) = V_{\max} \frac{4y(a-y)}{a^2}. \quad (4.66)$$

L'écoulement correspondant est appelé *écoulement de Poiseuille plan*. Son profil de vitesse est parabolique, avec une valeur maximale $V_{\max}$ dans le plan de symétrie du canal ($y = 0$) qui vaut :

$$V_{\max} = K \frac{a^2}{8\eta} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \frac{a^2}{8\eta}. \quad (4.67)$$

Le débit volumique de fluide Q , par unité de largeur du canal dans la direction Oz , vérifie alors en valeur algébrique :

$$Q = \int_{-a/2}^{a/2} v_x(y) dy = K \frac{a^3}{12\eta} = \frac{\Delta p}{L} \frac{a^3}{12\eta} \quad (4.68)$$

où $\Delta p = p(x) - p(x + L)$ est la chute de pression sur une distance L . Le débit Q est donc proportionnel à a^3 pour une chute de pression Δp donnée, et croît beaucoup plus rapidement que la section de l'écoulement (qui varie comme a).

On définit, à partir du débit Q , la vitesse moyenne d'écoulement U par la relation $U = Q/a$, d'où :

$$U = K \frac{a^2}{12\eta} = \frac{2V_{\max}}{3}. \quad (4.69)$$

Superposition d'écoulements de Couette et de Poiseuille entre deux plans

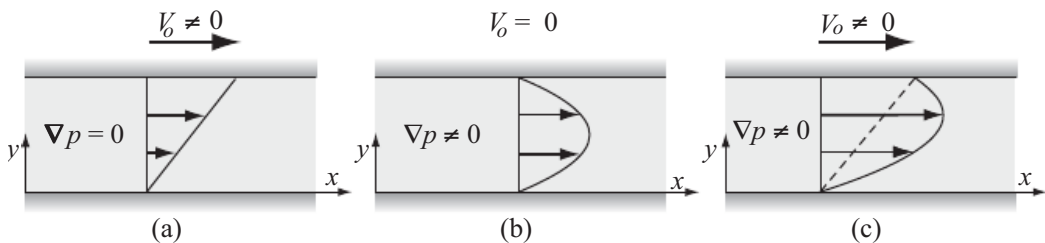


FIG. 4.19 – Superposition d'un écoulement de cisaillement (a) et d'un écoulement de Poiseuille plan (b) ; on obtient un troisième écoulement (c), où coexistent un cisaillement et un gradient de pression le long de l'écoulement.

Prenons maintenant un écoulement stationnaire entre deux plans horizontaux, distants de a et parallèles à l'axe Ox : le plan inférieur $y = 0$ est pris comme référence et le plan supérieur se déplace à la vitesse $v_x = V_0$, parallèlement à lui-même. À la différence du cas de la section 4.5.2, on applique en plus un gradient de pression $\partial p / \partial x$ indépendant du temps et de x , y et z parallèlement aux plans. En intégrant l'équation (4.59a), on trouve que :

$$v_x(y) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2\eta} + Cy + D. \quad (4.70)$$

Le coefficient D est égal à 0 puisque la vitesse s'annule sur le plan $y = 0$; le coefficient C peut être déterminé en écrivant que la vitesse vaut V_0 sur le plan supérieur. On obtient alors :

$$v_x(y) = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{y(a-y)}{2\eta} + V_0 \frac{y}{a}. \quad (4.71)$$

Le champ de vitesse résultant est donc la superposition d'un champ de vitesse parabolique de Poiseuille, qui correspond au premier terme du membre de droite de l'équation (4.71), et d'un champ de vitesse de Couette représenté par le second terme.

La figure 4.19 donne l'allure des différents profils de vitesse possibles. Suivant les cas, ils présentent ou non un maximum entre les deux plans. Le débit résultant par unité de longueur suivant Oz est obtenu par intégration directe de l'équation (4.71) suivant y :

$$Q = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{a^3}{12\eta} + \frac{V_0 a}{2}. \quad (4.72)$$

On remarque qu'il correspond lui aussi à la somme des débits respectifs des composantes de Poiseuille et de Couette. La possibilité d'additionner les champs de vitesse et les débits résulte de la linéarité de l'équation (4.59a).

Nous rencontrerons de tels écoulements au chapitre 8, lors de l'étude des écoulements induits par deux plans en mouvement relatif et fornant entre eux un petit angle, ou par des variations de température à la surface libre d'un liquide (*effet Marangoni*).

Écoulement dans un tube cylindrique

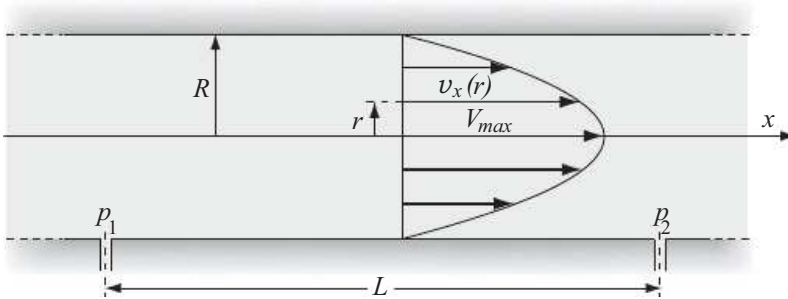


FIG. 4.20 – Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique de rayon R , induit par une différence de pression $\Delta p = p_1 - p_2$ sur une longueur L .

On étudie l'écoulement induit par une différence de pression Δp sur une longueur L d'un tube cylindrique horizontal de rayon R (Fig. 4.20). On suppose que seule la composante v_x de la vitesse suivant l'axe est non nulle et qu'elle dépend uniquement de la distance r à celui-ci. Nous résolvons l'équation de Navier-Stokes en notant, comme précédemment, le coefficient de perte de charge $K = (\Delta p/L) = -(\partial p/\partial x) = \text{cte}$.

(i) Champ de vitesse de l'écoulement

En coordonnées cylindriques (r, θ, x) où $r = 0$ coïncide avec l'axe du tube, l'équation de Navier-Stokes (4.59a-b) peut être réécrite sous la forme :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho g \cos \theta, \quad (4.73a)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g \sin \theta, \quad (4.73b)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right] = K + \frac{\eta}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right]. \quad (4.73c)$$

Remarque.

- On a pris $\theta = 0$ pour le rayon vecteur vertical dirigé vers le haut à l'opposé de l'accélération $\mathbf{g}$ de la pesanteur.
- La composante v_θ correspondrait à une rotation transitoire du fluide autour de l'axe du tube, qui disparaîtrait en régime stationnaire, comme nous l'avons vu au chapitre 2 (section 2.1.1) et peut donc être supposée nulle.
- Si $v_\theta = 0$ et que v_x est seulement fonction de r , l'équation d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{v} = 0$ se réduit à $(1/r) (\partial/\partial r) (r v_r) = 0$. Compte tenu de la condition aux limites $v_r = 0$ sur la paroi du tube, cela impose que $v_r \equiv 0$.
- Il est possible d'établir directement l'équation (4.73c) en considérant un bilan de forces. On écrit pour cela l'égalité à zéro de la force résultante sur un volume limité par deux cylindres concentriques de rayon r et $r + dr$ auxquels sont appliquées les contraintes visqueuses, et deux sections distantes de dx entre lesquelles s'exerce le gradient de pression. On obtient alors :

$$2\pi (r + dr) dx (\sigma'_{xr})_{r+dr} - 2\pi r dx (\sigma'_{xr})_r = 2\pi r dr dx \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.74)$$

Cette équation se réduit bien à l'expression (4.73c) en effectuant un développement de Taylor au premier ordre et en divisant par $2\pi r dr dx$; on utilise l'expression $\sigma'_{xr} = \eta \partial v_x / \partial r$ donnée dans l'annexe A1 du présent chapitre.

Les relations (4.73a) et (4.73b) montrent que le seul effet de la pesanteur est d'établir dans la section du tube un gradient de pression hydrostatique sans influence sur l'écoulement. Comme dans le cas de l'écoulement de Poiseuille plan, le gradient $\partial p / \partial x = -K$ doit alors être constant dans le volume d'écoulement :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = -\frac{K}{\eta}. \quad (4.75)$$

En intégrant cette équation et en tenant compte des conditions aux limites sur les parois du tube ($v_x = 0$ pour $r = R$), on obtient :

$$v_x = \frac{K}{4\eta} (R^2 - r^2) = V_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (4.76) \quad \text{avec} \quad V_{\max} = \frac{KR^2}{4\eta}$$

où $V_{\max}$ est la valeur maximale de la vitesse, obtenue sur l'axe du tube ($r = 0$).

Le débit volumique de fluide Q dans le tube s'écrit donc :

$$Q = \int_0^R v_x(r) 2 \pi r dr = \frac{\pi K R^4}{8\eta} = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.77)$$

En exprimant le débit en fonction du diamètre d du tube, de sa longueur L et de la chute de pression Δp entre les deux extrémités, on obtient enfin :

$$Q = \frac{\pi}{128 \eta} \frac{\Delta p}{L} d^4. \quad (4.78)$$

Ce résultat, qui constitue la *loi de Poiseuille*, montre que le débit varie comme la puissance quatrième du diamètre d'un tube circulaire, c'est-à-dire comme le carré de la section du tube. Comparons, par exemple, les débits Q induits par un même gradient de pression dans un tube de diamètre R et dans cent tubes de diamètre $R/10$ en parallèle, représentant la même section totale : le débit sera cent fois plus faible dans le dernier cas ! Ce résultat est très différent de celui obtenu dans un problème de transport de courant électrique : si les deux systèmes de tubes sont remplis d'un même fluide conducteur, la valeur de la résistance électrique est la même dans les deux cas. La différence entre les deux problèmes vient de la condition aux limites de vitesse nulle sur les parois pour l'écoulement des fluides visqueux, qui n'existe pas pour le transport de courant électrique. À cause de cette condition, les gradients de vitesse transverses et, par suite, les forces de frottement visqueuses, augmentent fortement quand la taille des canaux diminue.

Remarque. Nous avons toujours supposé jusqu'à présent que l'accélération de la pesanteur a une composante nulle suivant la direction Ox de l'écoulement, ce qui revient à supposer un écoulement horizontal. Dans le cas contraire, et pour une géométrie de tube cylindrique, l'équation (4.73c) devient :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma'_{xr}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \eta \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right].$$

C'est donc la somme $-\partial p/\partial x + \rho g_x$, et pas simplement le gradient $-\partial p/\partial x$, qui est le terme moteur de l'écoulement. Prenons un tube parallèle à Ox , ouvert à la pression atmosphérique à ses deux extrémités et incliné par rapport à l'horizontale d'un angle θ (il peut, par exemple, relier les surfaces libres de deux réservoirs de niveaux différents). Le gradient de pression $-\partial p/\partial x$ est alors nul, puisqu'il est constant le long du tube et que l'on a la même pression (égale à la pression atmosphérique) aux deux extrémités. L'écoulement est donc uniquement dû à la composante

$$\rho g_x = \rho g \sin \theta$$

et l'équation (4.78) devient :

$$Q = \frac{\pi}{128} \frac{\rho}{\eta} g_x d^4.$$

On peut faire, bien entendu, des raisonnements du même type pour les autres géométries d'écoulement.

(ii) Force de frottement sur les parois d'un tube circulaire

La force de frottement exercée par le fluide sur le tube peut être calculée en intégrant la contrainte sur les parois :

$$\mathbf{F} = \iint_{(\text{paroi})} [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.79)$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal à la paroi. La composante F_x dans la direction Ox de l'écoulement est donc :

$$F_x = \iint_{(\text{paroi})} [\sigma'_{xr} r]_{r=R} d\theta dx = \int_0^L dx \int_0^{2\pi} [\sigma'_{xr} r]_{r=R} d\theta. \quad (4.80)$$

En utilisant de nouveau l'expression $\sigma'_{xr} = \eta (\partial v_x / \partial r)$, on obtient, pour la force f_x par unité de longueur de tube :

$$f_x = 4\pi \eta V_{\max}. \quad (4.81)$$

Remarque. On peut aussi calculer f_x en écrivant qu'elle doit être opposée à la différence $-\pi R^2 (\partial p / \partial x)$ entre les forces de pression sur deux sections de tube espacées d'une distance unité (il faut, en effet, avoir une résultante nulle des forces sur le fluide).

On définit, par ailleurs, fréquemment un coefficient de frottement sans dimension C_d en normalisant la force f_x par la quantité $(1/2) \rho V_{\max}^2 R$. Comme nous le verrons à la section 5.3.2, le terme $(1/2) \rho V_{\max}^2$ correspond à une pression dynamique ou encore, avec un facteur 0,5 supplémentaire, à un flux convectif de la quantité de mouvement. On obtient alors :

$$C_d = \frac{f_x}{(1/2) \rho V_{\max}^2 R} = 8\pi \left(\frac{\eta}{\rho V_{\max} R} \right) = \frac{8\pi}{Re} \quad (4.82)$$

où l'on a défini le nombre de Reynolds associé à l'écoulement par $Re = (\rho V_{\max} R) / \eta$. Ce type de variation du coefficient de frottement en $(1/Re)$ est caractéristique des écoulements dans lesquels les effets convectifs associés aux termes $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$ sont nuls ou négligeables. Au contraire, dans la limite opposée des grands nombres de Reynolds (en particulier dans les écoulements turbulents), on obtient en général un coefficient C_d qui varie peu avec le nombre de Reynolds (Figs. 12.9 et 12.14). Le coefficient C_d caractérisera donc mieux ce dernier type d'écoulement.

4.5.4 Écoulements oscillants dans un fluide visqueux**Écoulement de cisaillement près d'un plan oscillant parallèlement à sa surface**

On étudie maintenant l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible au-dessus d'un plan horizontal infini, animé d'un mouvement d'oscillation sinusoïdale parallèlement à lui-même suivant l'axe Ox (Fig. 4.21). Le déplacement instantané $\Delta x(t)$ du plan à un temps t est $A \sin \omega t$ où A est l'amplitude

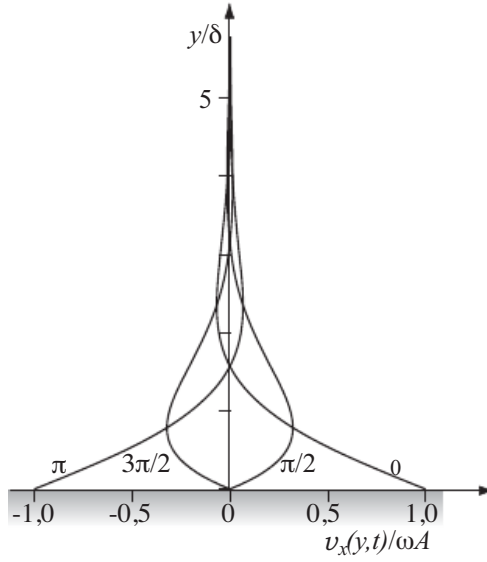


FIG. 4.21 – Profils instantanés de la vitesse $v_x(y, t)$ induite par l'oscillation d'un plan rigide xOz parallèlement à lui-même dans la direction Ox , avec une amplitude A pour différentes phases du mouvement de la plaque $y = 0$.

du mouvement et ω sa pulsation. Ce problème est la version *harmonique* de la brusque mise en mouvement d'un plan infini à vitesse constante, déjà analysée à la section 2.1.2).

On recherche la solution des équations de mouvement la plus simple qui respecte les symétries du problème et les conditions aux limites sur le plan et à l'infini (on suppose le fluide immobile à grande distance). Pour cela, on suppose que l'écoulement est unidirectionnel avec une composante de vitesse $v_x(y, t)$ invariante dans les directions x et z du plan (en accord avec les conditions aux limites). D'après l'équation (4.59b), la composante suivant y de l'équation de mouvement se réduit à l'équation de l'hydrostatique :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (4.83a)$$

et, de plus : $\partial p / \partial z = 0$. D'autre part, $\partial p / \partial x$ doit être constant dans tout le volume de fluide (Éq. 4.60) et sera nul si l'on n'a pas de gradient de pression horizontal imposé à grande distance. La pression est donc indépendante de x et z . On peut alors récrire l'équation (4.59a) sous la forme :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (4.83b)$$

où $\nu = \eta / \rho$. On retrouve l'équation de diffusion de la quantité de mouvement établie à la section 2.1.2. Cherchons maintenant une solution périodique $v_x(y, t)$ de l'équation (4.83b) de la forme :

$$v_x(y, t) = f(y) \cos(\omega t + \varphi) = \Re(f(y) e^{i\omega t}) \quad (4.84)$$

où $f(y)$ est une fonction complexe (le symbole $\Re$ signifie que l'on prend la partie réelle de la quantité considérée). En reportant cette expression dans l'équation (4.83b), nous obtenons :

$$i\omega f(y) = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (4.85)$$

dont la solution générale est :

$$f(y) = C_1 e^{-(1+i)ky} + C_2 e^{(1+i)ky} \quad \text{où l'on a posé :} \quad k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \quad (4.86)$$

On en tire :

$$v_x(y, t) = \Re \left\{ C_1 e^{-ky} e^{i(\omega t - ky)} + C_2 e^{ky} e^{i(\omega t + ky)} \right\}. \quad (4.87)$$

La vitesse doit s'annuler lorsque y tend vers l'infini, ce qui impose $C_2 = 0$. D'autre part, la condition à la limite sur la surface du plan oscillant s'écrit : $v_x(y = 0, t) = \omega A \cos \omega t$, ce qui permet de déterminer la constante d'intégration $C_1 = \omega A$; on en déduit :

$$v_x(y, t) = \omega A e^{-ky} \cos(\omega t - ky). \quad (4.88)$$

Cela montre que l'oscillation de vitesse imposée à la surface du plan se propage à l'intérieur du fluide (facteur $\cos(\omega t - ky)$) en s'amortissant exponentiellement (facteur e^{-ky}). On a ainsi propagation d'une onde transverse atténuée dans le fluide visqueux.

On définit la *profondeur de pénétration* δ de l'oscillation comme la distance par rapport au plan oscillant pour laquelle l'amplitude de la vitesse est réduite par un facteur $1/e$, soit :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}. \quad (4.89)$$

Exemple. Pour un mouvement d'oscillation à une fréquence de 2 Hz dans un fluide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-3} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ (mille fois la viscosité de l'eau), nous obtenons $\delta \approx 10^{-2} \text{m}$.

Le résultat principal de cette étude est l'impossibilité de propager, à grande distance, une onde de cisaillement dans un liquide. L'onde acoustique correspondante est dite *amortie critiquement*. On a là une différence essentielle entre les liquides et les solides dans lesquels on peut propager, en plus de l'onde de compression, deux modes d'oscillations transverses à la direction de propagation qui correspondent à deux polarisations orthogonales : *les ondes de cisaillement*. Des résultats intermédiaires, avec possibilité de propager des ondes de cisaillement sur des distances significatives peuvent être obtenus avec des fluides viscoélastiques, ils seront décrits à la section 4.6.4.

Remarque. Ce problème est l'analogie de l'effet de peau en électricité ou de la pénétration des variations saisonnières de température dans le sol. L'équivalent du coefficient de viscosité est la résistivité du conducteur dans le cas de l'effet de peau (au facteur μ_0 près) et la diffusivité thermique dans le cas du problème des variations de température du sol. Dans tous ces cas, on a une profondeur de pénétration δ variant comme $1/\sqrt{\omega}$ et un vecteur d'onde complexe $\mathbf{k}$ de module égal à l'inverse de δ . Ces deux variations sont caractéristiques de tous les phénomènes de propagation diffusive.

La force de frottement F_x sur le plan oscillant s'écrit :

$$F_x = \iint_{(\text{plan})} \sigma_{xy} \, dx \, dz = \iint_{(\text{plan})} \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} \, dx \, dz. \quad (4.90)$$

En combinant les équations (4.86), (4.88) et (4.90), on obtient la valeur f_x de la force de frottement par unité de surface :

$$f_x = (A\sqrt{2}\omega k\eta) \cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right) = A\omega^{3/2}\sqrt{\rho\eta} \cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (4.91)$$

Ainsi, f_x a un retard de phase de trois huitièmes de période sur la vitesse $\mathbf{v}(0, t)$ du plan. Comme nous l'avons fait dans le cas du tube circulaire, normalisons l'amplitude de la force f_x par la pression dynamique $(1/2) \rho A^2 \omega^2$ construite avec la valeur crête $U = \omega A$ de la vitesse. Nous obtenons le coefficient de frottement :

$$C_d = \frac{A\omega^{3/2}\sqrt{\rho\eta}}{\rho A^2 \omega^2 / 2} = 2\sqrt{\frac{\nu}{\omega A^2}} = \frac{2}{\sqrt{Re}} \quad (4.92)$$

où $Re = (\omega A^2)/\nu$ est le nombre de Reynolds de l'écoulement construit à partir de la vitesse U et de la longueur A . Cette fois, C_d est proportionnel à la racine carrée de l'inverse du nombre de Reynolds. Cette variation est plus lente que la variation en $1/Re$ obtenue pour les écoulements stationnaires unidirectionnels (section 4.5.3). Nous retrouverons un même type de variation au chapitre 10, pour les écoulements de couches limites.

Application en géophysique. Un sismographe, placé à une certaine distance d'un point où a eu lieu une secousse sismique naturelle ou provoquée, détecte trois pics correspondant aux trois types d'ondes qui se propagent dans le sol (une de compression puis deux de cisaillement). Néanmoins, si la source et le détecteur sont disposés au voisinage des antipodes, le sismographe ne détecte qu'un seul signal d'onde de compression ; en effet, les ondes de cisaillement ne se propagent pas à travers le noyau terrestre central dont la partie périphérique (à des distances du centre allant de 2 800 à 5 100 km) est liquide.

Écoulement induit entre deux plans par un gradient de pression oscillant

Lorsque l'on module le débit d'un écoulement, l'effet de l'inertie du liquide augmente avec la fréquence de modulation. Près des parois d'un tube capillaire, il peut apparaître des couches limites oscillantes comme celles discutées dans l'exemple précédent. Au contraire de celui-là cependant, les parois sont immobiles et le gradient de pression n'est plus nul dans la direction de l'écoulement. Analysons ces phénomènes dans le cas simple d'un écoulement unidirectionnel entre deux plans horizontaux $y = \pm a/2$, où la vitesse locale $v_x(y, t)$ est dirigée suivant l'axe Ox (Fig. 4.22) et invariante dans la direction Oz .

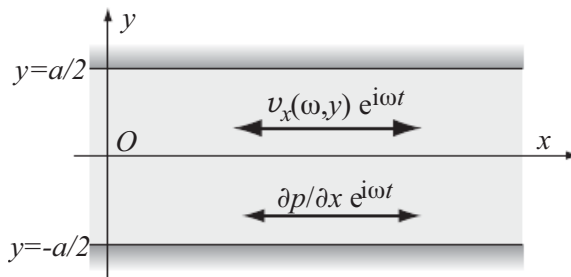


FIG. 4.22 – Écoulement oscillant induit entre deux plans parallèles fixes par un gradient de pression sinusoïdal parallèle aux plans.

Supposons le gradient longitudinal de pression $(\partial p/\partial x)$ modulé sinusoïdalement à une pulsation ω avec, en notation complexe, $(\partial p/\partial x)(t) = (\partial p/\partial x)(\omega) e^{i\omega t}$. Écrivons l'équation (4.59a) en incluant le terme d'accélération $\partial v_x/\partial t$ et le gradient de pression. En cherchant pour v_x une solution sinusoïdale à la pulsation ω , on obtient en notation complexe :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = i \omega v_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}(\omega) e^{i\omega t} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

La fonction complexe $v_x(\omega, y) e^{i\omega t}$, solution de cette équation différentielle linéaire, qui satisfait aux conditions aux limites $v_x = 0$ pour $y = \pm a/2$ est :

$$v_x(\omega, y) = \frac{i}{\rho \omega} \frac{\partial p}{\partial x}(\omega) \left[1 - \frac{\text{ch}(k(\omega)y)}{\text{ch}(k(\omega)a/2)} \right] \quad (4.93a)$$

avec :

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \quad (4.93b)$$

On en déduit, par intégration sur la variable y , l'amplitude complexe des variations de la vitesse moyenne :

$$U(\omega) = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} v_x(\omega, y) dy = \frac{i}{\rho \omega} \frac{\partial p}{\partial x}(\omega) \left[1 - \frac{\tanh(k(\omega)a/2)}{k(\omega)a/2} \right]. \quad (4.94)$$

On remarque que $k(\omega)$ est également le vecteur d'onde complexe de l'onde de cisaillement amortie, qui se propage à partir d'un plan oscillant parallèlement à lui-même dans un fluide visqueux (Éq. 4.86) ; la quantité $\delta(\omega) = 1/|k(\omega)| = \sqrt{\nu/\omega}$ donne donc l'ordre de grandeur de la distance sur laquelle se fait sentir l'influence des parois en régime oscillant à pulsation ω . La réponse du système sera très différente suivant que $\delta(\omega)$ est plus grande ou plus faible que la distance a entre plaques :

– $|k(\omega)|a \ll 1$ (i.e. $\delta(\omega) \gg a$) : régime des basses fréquences $\rightarrow$ effets visqueux dominants.

Par un développement limité de $\tanh(ka/2)$ au voisinage de $ka = 0$; on obtient :

$$U(\omega) = -\frac{a^2}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x}(\omega) \left(1 - i \frac{a^2 \omega}{10\nu} \right). \quad (4.95)$$

Le premier terme domine : il représente simplement la vitesse moyenne en écoulement stationnaire ; l'écoulement n'est que peu influencé par les forces d'inertie auxquelles correspond le second terme (en quadrature de phase à cause du facteur i).

Le facteur correctif contient le rapport $Nt_\nu = a^2\omega/\nu$ du temps a^2/ν de diffusion par viscosité sur la distance a et de la période $2\pi/\omega$ de l'oscillation (divisée par 2π) ; Nt_ν représente aussi le rapport des effets d'instationnarité de l'écoulement (terme en $\rho (\partial \mathbf{v}/\partial t)$ dans l'équation du mouvement) à ceux de viscosité (termes en $\eta \Delta \mathbf{v}$). Dans le cas d'une géométrie plus complexe, où il faudrait faire intervenir également les termes en $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$, l'écoulement dépendrait également d'un *nombre de Strouhal* de la forme $Sr = \omega L/U$ (U , vitesse et L , longueur caractéristiques). Ce nombre, défini à la section 2.4.2, représente le rapport des termes d'instationnarité et convectifs.

Remarque. Si $L = a$, le quotient Nt_ν/Sr correspond au nombre de Reynolds $Re = UL/\nu$.

– $|k(\omega)|a \gg 1$ (i.e. $\delta(\omega) \ll a$) : régime des hautes fréquences $\rightarrow$ effets d'inertie dominants.

Développons la tangente du nombre complexe $(ka)/2$; on obtient, en notant $\alpha = (1/2)\sqrt{\omega a^2/2\nu}$ et en utilisant l'identité $\tanh(ix) = i \tan(x)$, vraie quel que soit x réel :

$$\tanh \frac{k(\omega)a}{2} = \tanh[\alpha(1+i)] = \frac{\tanh \alpha + i \tan \alpha}{1 + i \tanh \alpha \tan \alpha}.$$

Or, pour α grand devant l'unité, $\tanh \alpha$ est de l'ordre de l'unité ; on en déduit :

$$\tanh \frac{k(\omega)a}{2} \approx 1 \quad \text{et donc} \quad : \quad U(\omega) \approx \frac{i}{\rho\omega} \frac{\partial p}{\partial x}(\omega) \left(1 - (1-i)\sqrt{\frac{2\nu}{\omega a^2}} \right). \quad (4.96)$$

Le terme dominant $(i/\rho\omega)(\partial p/\partial x)$ correspond à une oscillation en bloc de la masse de fluide en quadrature de phase avec la variation de pression et d'amplitude uniquement limitée par l'inertie du fluide. C'est seulement sur une épaisseur de l'ordre de grandeur de $\delta(\omega)$ que les effets de la viscosité dominent et causent une dissipation qui se traduit par la partie réelle du terme correctif. L'ordre de grandeur relatif $\sqrt{2\nu/(\omega a^2)}$ du second terme (correctif) de l'équation (4.96) par rapport au premier correspond d'ailleurs au rapport entre l'épaisseur de cette couche visqueuse et la largeur totale du canal.

4.5.5 Écoulement parallèle créé par une variation horizontale de densité

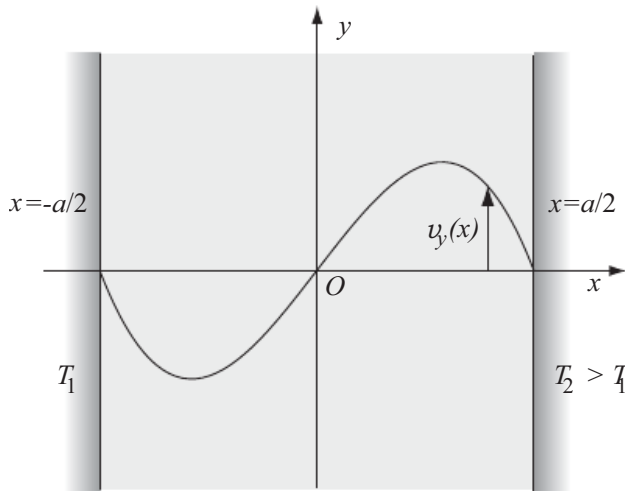


FIG. 4.23 – Profil de vitesse de l'écoulement d'un fluide induit par une différence de température entre deux plaques verticales infinies.

Nous nous intéressons ici à un écoulement stationnaire entre deux plaques verticales parallèles $x = \pm a/2$ infiniment étendues, induit par un gradient de densité dans la direction horizontale Ox .

À titre d'exemple, on se place dans le cas où la variation de densité est obtenue en portant les deux plaques à des températures constantes différentes T_1 et T_2 (Fig. 4.23). On suppose la température invariante dans les directions y et z , et une variation linéaire de la température suivant Ox . On a alors :

$$T(x) = T_0 + \Delta T \frac{x}{a} \quad (4.97)$$

avec
$$T_0 = (T_1 + T_2)/2 \quad \text{et} \quad \Delta T = T_2 - T_1.$$

Justification. Nous nous limitons ici au cas où seule la composante verticale v_y de la vitesse est non nulle : on n'a donc pas de transport thermique par l'écoulement d'une plaque vers l'autre dans la direction x et ce transport résulte uniquement de la conductivité thermique k du liquide. Si k est supposée constante avec la température et la pression, le flux d'énergie thermique par unité de surface $J_Q = -k(\partial T/\partial x)$ et, donc, le gradient $\partial T/\partial x$ doivent être constants avec x . De plus, l'équation (4.97) implique que la température $T(x)$ est indépendante de y et de z . L'écoulement, parallèle aux plaques, transporte donc le fluide suivant des trajectoires de température constante et n'assure donc pas de transfert d'énergie thermique.

Supposons maintenant que la variation de la densité ρ du fluide avec la température vérifie :

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)] \quad (4.98)$$

(T_0 est la température en $x = 0$ et α le coefficient de dilatation qui est généralement positif) et que la densité ρ est indépendante de la pression. On obtient alors pour la variation de la densité avec la distance :

$$\rho(x) = \rho_0 + \delta\rho(x) = \rho_0 [1 - \alpha (T(x) - T_0)] = \rho_0 \left[1 - \alpha \Delta T \frac{x}{a} \right]. \quad (4.99)$$

Les surfaces d'égale masse volumique $\rho(x)$ (ou *isochores*) sont donc les plans verticaux $x = \text{cte}$. Il est alors impossible d'avoir un équilibre hydrostatique dans lequel le fluide reste immobile ($\mathbf{v} = 0$) : si c'était le cas, la pression p devrait en effet vérifier l'équation fondamentale de l'hydrostatique :

$$\mathbf{grad} p = \rho \mathbf{g}. \quad (4.100)$$

Les lignes d'égale pression (*isobares*) seraient alors perpendiculaires à $\mathbf{g}$ et donc (comme habituellement) horizontales avec $p = p(y)$. Il est alors impossible de satisfaire l'équation (4.100) car ses membres dépendent de deux variables différentes, y (pour la pression) et x (pour la masse volumique). Le fluide doit donc se mettre en mouvement.

En supposant l'écoulement stationnaire de vitesse verticale $v_y(x)$, l'équation de mouvement pour la vitesse devient (voir justification ci-dessous) :

$$[\rho(x) - \rho_0] g = \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \quad (4.101a)$$

soit :

$$-\alpha \rho_0 g \Delta T \frac{x}{a} = \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}. \quad (4.101b)$$

L'équation (4.101a) indique que l'écoulement est induit par une force en volume variable avec x et proportionnelle à l'écart entre la densité locale et la densité moyenne. En intégrant l'équation (4.101b), on obtient alors :

$$v_y(x) = -\frac{\alpha \rho_0 g}{\eta} \frac{\Delta T}{a} \frac{x}{6} \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right). \quad (4.102)$$

Le profil est antisymétrique par rapport à $x = 0$ avec un débit global nul (Fig. 4.23). Le choix de la valeur de $\partial p / \partial y$ qui a été effectué correspond donc à un système qui serait fermé aux deux extrémités (on aurait, cependant, en pratique près de ces dernières deux courtes zones perturbées avec un écoulement transverse de recirculation).

Justification. Compte tenu de la symétrie du problème, on peut supposer que v_y est invariant dans la direction z . Par ailleurs, si $(v_x = v_z = 0)$, l'équation $\text{div } \mathbf{v} = 0$ se résume à $\partial v_y / \partial y = 0$ et v_y ne dépend que de x . Sous ces conditions, et en tenant compte du fait que la vitesse est orientée suivant l'axe Oy , on peut récrire les équations (4.59a-b) sous la forme :

$$\rho(x) g + \frac{\partial p}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \quad (4.103a)$$

et :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (4.103b)$$

Le gradient de pression $\partial p / \partial y$ est donc indépendant de x et de z car, en dérivant l'équation (4.103b) par rapport à y , on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0.$$

Par ailleurs, $\partial p / \partial y$ ne dépend pas non plus de y car les autres termes de l'équation (4.103a) n'en dépendent pas : ce gradient est donc une constante dans tout l'écoulement. En supposant cette constante égale au gradient de pression hydrostatique $-\rho_0 g$ associé à la densité moyenne ρ_0 du fluide ce qui, comme on l'a vu, correspond à un tube fermé à ses extrémités, on obtient l'équation (4.101a). Si l'on prenait une autre valeur pour $\partial p / \partial y$, cela reviendrait à superposer un écoulement de type Poiseuille correspondant au gradient résultant $\partial p / \partial y + \rho_0 g$.

Nous avons supposé ici que l'écoulement était induit par un gradient horizontal de température. En fait, la variation de densité peut avoir d'autres origines comme, par exemple, un gradient de concentration de soluté (sel dans l'eau par exemple). D'autre part, bien que le profil de vitesse (4.102) vérifie l'équation de mouvement quelle que soit la valeur de la différence de température ΔT , d'autres solutions plus complexes seront observées expérimentalement lorsque ΔT augmente comme, par exemple, des cellules de recirculation de hauteur plus faible que celle des plaques et avec une composante non nulle de vitesse suivant Ox .

4.5.6 Écoulement de Couette cylindrique

On considère l'écoulement permanent d'un fluide incompressible de viscosité η , compris entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 tournant autour de leur axe avec des vitesses angulaires respectives Ω_1 et Ω_2

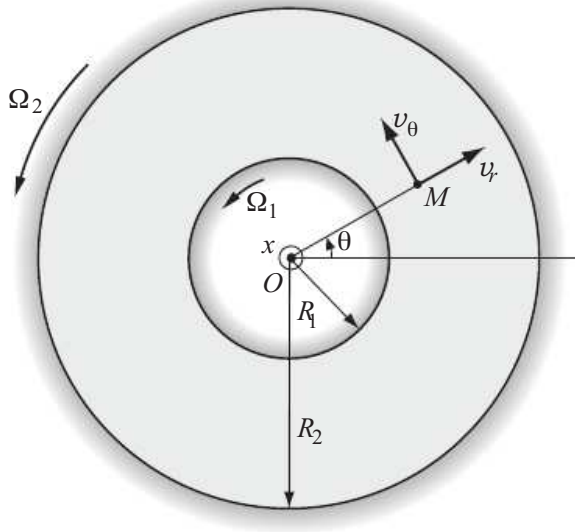


FIG. 4.24 – Écoulement de Couette entre deux cylindres concentriques en rotation, vu dans la direction de l'axe des cylindres.

(Fig. 4.24). On suppose qu'aucun gradient de pression n'est appliqué extérieurement. On choisit le système de coordonnées cylindriques (r, θ, x) où l'axe Ox est confondu avec celui des cylindres et l'on cherche à déterminer les composantes v_r , v_θ et v_x de la vitesse.

Nous nous intéressons ici à l'écoulement le plus simple possible, qui correspond à des champs de vitesse et de pression indépendants de x et θ ; c'est celui qui est observé aux faibles vitesses. Dans ce cas, compte tenu de la symétrie du problème par rapport aux plans perpendiculaires à Ox et de l'absence de gradient de pression axial, on a $v_x = 0$. Par ailleurs, dans la configuration d'écoulement la plus simple, v_θ est indépendant de θ par symétrie. L'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible ($\text{div } \mathbf{v} = 0$), que l'on trouvera écrite en coordonnées cylindriques en fin de chapitre (annexe A-1), donne :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = 0. \quad (4.104)$$

v_r ne peut donc être que de la forme $v_r = (C/r)$ où C est une constante. Or, les conditions aux limites sur les parois solides imposent que $v_r(r = R_1) = v_r(r = R_2) = 0$; v_r sera donc nulle dans tout le fluide.

L'équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (voir annexe A-1), donne :

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4.105a)$$

$$\nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) = 0. \quad (4.105b)$$

Dans la première équation, le terme (v_θ^2/r) correspond simplement à la force d'inertie centrifuge due à la courbure des trajectoires des particules de fluide. Bien que ce terme fasse intervenir le carré de la vitesse, il n'influence pas l'écoulement car il est équilibré par le gradient de la pression dans la direction radiale ; il représente donc une forme généralisée de pression hydrostatique, tout comme le terme de pesanteur dans les écoulements unidirectionnels horizontaux étudiés précédemment. Les termes de la deuxième équation correspondent aux différents termes du laplacien de la vitesse en coordonnées cylindriques.

Remarque. L'équation (4.105b) peut aussi être obtenue en écrivant que le moment global des forces sur un volume limité par deux cylindres concentriques de hauteur unité et de rayons r et $r + dr$ est nul, soit :

$$2\pi(r^2\sigma_{\theta r})(r + dr) - 2\pi(r^2\sigma_{\theta r})(r) = 0 \quad (4.106a)$$

soit, quand

$$dr \rightarrow 0 : \frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma_{\theta r}) = 0. \quad (4.106b)$$

En effet, $\sigma_{\theta r}$ est la seule composante non nulle du tenseur des contraintes, compte tenu de la symétrie du champ de vitesse $\mathbf{v}(0, v_\theta(r), 0)$ (on le vérifie à partir des expressions du tenseur des contraintes en coordonnées cylindriques données dans l'annexe A-1). Elle s'écrit donc :

$$\sigma_{\theta r} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \quad (4.107)$$

(remarquons que $\sigma_{\theta r}$ s'annule bien pour une rotation en bloc du fluide avec $v_\theta = \omega r$). En reportant l'expression ci-dessus dans l'équation (4.106b) qui exprime l'absence de couple global sur un volume annulaire, on retrouve la relation (4.105b) sous la forme équivalente :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right) = 0. \quad (4.108)$$

En intégrant la relation (4.108), on trouve :

$$v_\theta = ar + \frac{b}{r}. \quad (4.109)$$

Les constantes a et b sont déterminées par les conditions aux limites :

$$v_\theta(r = R_1) = \Omega_1 R_1 \quad \text{et} \quad v_\theta(r = R_2) = \Omega_2 R_2.$$

On obtient alors :

$$v_\theta = \frac{(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \quad (4.110)$$

La distribution de pression s'en déduit par intégration de l'équation (4.105a). Examinons à présent quelques cas particuliers de valeurs des vitesses de rotation des cylindres et de leur rayon :

- lorsque le rayon des deux cylindres tend vers l'infini, tandis que la différence $R_2 - R_1 = d$ reste constante, nous retrouvons le champ de vitesse correspondant à l'écoulement de Couette plan ;
- si $\Omega_1 = \Omega_2$, alors $v_\theta = \Omega r$: on a un mouvement de rotation en bloc du fluide ;
- si $\Omega_2 = 0$ et $R_2 \rightarrow \infty$ (cela revient à supprimer le cylindre extérieur), alors $v_\theta = (\Omega_1 R_1^2)/r$. C'est le champ de vitesse d'un écoulement bidimensionnel tourbillonnaire irrotationnel, qui sera discuté à la section 6.2.3 ;
- si seul le cylindre intérieur tourne ($\Omega_1 \neq 0$, $\Omega_2 = 0$), l'écoulement de base calculé ci-dessus devient instable quand la vitesse de rotation Ω_1 est supérieure à une valeur critique Ω_c . Nous verrons à la section 11.3.2 qu'il apparaît alors un écoulement secondaire sous forme de rouleaux toroïdaux (*instabilité de Taylor-Couette*).

Calculons maintenant le moment des forces de viscosité exercées tangentiellement sur les cylindres. En utilisant la formule (4.107) pour calculer $\sigma_{\theta r}$, on trouve :

$$\sigma_{\theta r} = -\frac{2b\eta}{r^2} \quad (4.111)$$

où b est le coefficient du terme en $1/r$ du champ de vitesse dans l'équation (4.109). Calculons maintenant le moment des forces de frottement visqueux total Γ_1 exercé sur le cylindre de rayon R_1 , par unité de longueur suivant l'axe Ox . Γ_1 est égal au produit de $\sigma_{\theta r}(R_1)$ par la surface $2\pi R_1$ sur laquelle est exercée la contrainte et par la distance R_1 entre l'axe et le point d'application des forces. Ainsi, le moment des forces sur le cylindre intérieur est :

$$\Gamma_{R_1} = 2\pi R_1^2 \frac{2b\eta}{R_1^2} \mathbf{e}_x = -4\pi\eta b \mathbf{e}_x = 4\pi\eta \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \mathbf{e}_x \quad (4.112)$$

où $\mathbf{e}_x$ est le vecteur unitaire suivant l'axe Ox . On vérifie qu'une rotation solide globale des deux cylindres à la même vitesse angulaire ne fait pas apparaître de moment : une rotation relative ($\Omega_2 \neq \Omega_1$) est nécessaire pour cela.

L'équation (4.112) confirme la possibilité (déjà discutée à la section 4.4.1) d'une mesure du coefficient de viscosité η à partir de la mesure du moment résistant exercé par le fluide sur l'un des deux cylindres lorsqu'on leur impose une rotation relative (viscosimètre de Couette). Avec certains appareils, d'ailleurs, on impose un moment sur l'un des cylindres et l'on mesure la rotation résultante.

Remarque. En régime stationnaire, d'après l'équation (4.111), la contrainte de cisaillement varie en $1/r^2$ avec la distance à l'axe de rotation. Ce résultat, découlant des équations (4.106a-b), exprime l'équilibre des moments des forces entre les différentes couches de fluide et reste vérifié pour des fluides non newtoniens. La relation déformation-contrainte ne peut donc être déterminée directement pour de tels fluides que si la contrainte peut être considérée comme constante dans le volume de mesure, et donc si l'intervalle entre cylindres est très petit devant leur rayon moyen.

4.6 Écoulements unidirectionnels simples de fluides non newtoniens indépendants du temps

Pour les fluides non newtoniens, l'équation de Navier-Stokes n'est plus valable : il faut donc utiliser la forme générale (4.25) de l'équation de mouvement où le terme visqueux n'est plus égal à $\eta \Delta \mathbf{v}$ et repartir de la forme générale $\text{div} [\boldsymbol{\sigma}']$ des contraintes visqueuses.

Nous nous limiterons d'abord au cas de fluides de caractéristiques indépendantes du temps et isotropes, en supposant une relation entre le taux de cisaillement et les contraintes visqueuses qui soit définie et uniquement fonction du matériau. Cela revient à dire que l'on prend en compte les caractéristiques rhéofluidifiantes ou rhéoépaississantes, mais pas la thixotropie ou la viscoélasticité. Le taux de cisaillement $\dot{\gamma}_{xy} = \partial v_x / \partial y$ n'est alors pas simplement proportionnel à la contrainte visqueuse, mais présente une variation plus complexe $f(\sigma'_{xy})$ (Fig. 4.8). Pour un écoulement à symétrie radiale, on utilisera plutôt la relation taux de cisaillement-contrainte en coordonnées polaires $(r, \theta, x) : \partial v_x / \partial r = f(\sigma'_{xr})$.

Par ailleurs, on continue de considérer que le gradient de pression $\partial p / \partial x$ est constant entre les plans : cela est vérifié si l'on atteint un régime d'écoulement établi suivant Ox . En effet, même si des gradients de pression transverses apparaissent à cause des contraintes normales, ils sont constants avec la distance x et n'influenceront pas $\partial p / \partial x$ (le raisonnement de la section 4.5.1 reste valable).

4.6.1 Écoulement stationnaire de Couette plan

On considère un écoulement stationnaire parallèle, de même géométrie que celui de la figure 4.18a : une tranche de fluide située entre deux plans y et $y + \delta y$ doit être en équilibre mécanique ; cela impose que la condition $\sigma'_{xy}(y + \delta y) = \sigma'_{xy}(y)$ soit vérifiée pour toutes les valeurs de y et de δy , puisque ce sont les seules composantes de contraintes non nulles suivant Ox . La contrainte visqueuse σ'_{xy} doit donc être constante dans toute la couche fluide, ce qui impose que le taux de cisaillement $\partial v_x / \partial y = f(\sigma'_{xy})$ soit également constant. On a donc, comme pour un fluide newtonien, un écoulement

de cisaillement simple de vitesse $v_x = V_0 y/a$. Une telle géométrie serait théoriquement idéale pour mesurer directement la caractéristique rhéologique $f(\sigma'_{xy})$, puisque le taux de cisaillement aussi bien que la contrainte visqueuse sont parfaitement définis. Cette condition n'est vérifiée qu'approximativement dans les géométries pratiques décrites plus haut (rhéomètres cône-plan et de Couette cylindrique).

4.6.2 Écoulement unidirectionnel avec des parois fixes

Reprenons l'écoulement bidimensionnel stationnaire entre deux parois planes horizontales $y = a/2$ et $y = -a/2$, discuté dans la section 4.5.3 pour les fluides newtoniens. La projection sur la direction Ox de l'écoulement de l'équation de mouvement (4.25) devient :

$$\frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.113)$$

Dans le plan de symétrie $y = 0$ de l'écoulement, on a $\sigma'_{xy} = 0$ car le transport de quantité de mouvement n'a pas de raison de s'effectuer dans une direction plutôt que dans une autre. Par intégration de l'équation (4.113), on a alors :

$$\sigma'_{xy} = y \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.114)$$

En particulier, sur la paroi $y = a/2$ (indice w) :

$$\sigma'_w = \frac{a}{2} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.115)$$

Remarque. On vérifie bien que la force par unité de surface est la même en valeur absolue sur les deux parois. Comme nous l'avons noté dans la section 4.5.1 pour les fluides newtoniens, l'équation (4.114) reflète l'équilibre entre les composantes suivant Ox des contraintes visqueuses et des forces de pression sur des éléments de volume de fluide. Notons également que les gradients de vitesse aussi bien que les contraintes visqueuses partent de 0 dans le plan $y = 0$, pour devenir maximales en valeur absolue sur les parois (cela résulte de l'équation (4.114) et du fait que la fonction f est monotone et croissante).

Si $\dot{\gamma}_{xy} = \partial v_x / \partial y = f(\sigma'_{xy})$, on obtient, en utilisant l'expression (4.114) de σ'_{xy} et par intégration entre y et $a/2$, la vitesse $v_x(y)$ à la distance y avec :

$$v_x(y) = - \int_y^{a/2} f \left(u \frac{\partial p}{\partial x} \right) du. \quad (4.116)$$

Le débit Q entre les deux plans (par unité de longueur dans la troisième direction Oz) est obtenu par une nouvelle intégration suivant Oy :

$$Q = -2 \int_0^{a/2} \left[\int_y^{a/2} f \left(u \frac{\partial p}{\partial x} \right) du \right] dy \quad (4.117)$$

(on intègre sur une moitié de l'intervalle entre les plans et l'on prend le double du résultat). Une intégration par parties transforme alors l'intégrale en une forme plus simple :

$$Q = -2 \int_0^{a/2} y f \left(y \frac{\partial p}{\partial x} \right) dy. \quad (4.118)$$

Remarque. Dans le cas d'un fluide newtonien, la fonction $f(\sigma'_{xy})$ se réduit à $f(\sigma'_{xy}) = \sigma'_{xy}/\eta$, et l'on retrouve l'expression $Q = -(a^3/12\eta)(\partial p/\partial x)$ (Éq. 4.68). Par ailleurs, l'utilisation des expressions précédentes requiert simplement que la fonction f soit définie, monotone et intégrable. En particulier, il sera possible de traiter sans problème les cas où la fonction f a une expression différente de part et d'autre d'une valeur seuil de la contrainte.

Nous allons maintenant calculer le taux de cisaillement à la paroi $\dot{\gamma}_w = (\partial v_x / \partial y)_{y=a/2}$ à partir de la variation du débit Q avec le gradient de pression, sans faire intervenir la fonction f . En combinant les équations (4.114) et (4.115), on trouve d'abord :

$$y = \frac{a \sigma'_{xy}}{2 \sigma'_w}. \quad (4.119)$$

En remplaçant y par l'expression (4.119) et la fonction f par $\dot{\gamma}_{xy}$, l'équation (4.118) devient :

$$Q \sigma'^2_w = -\frac{a^2}{2} \int_0^{\sigma'_w} \sigma'_{xy} \dot{\gamma}_{xy} d\sigma'_{xy}. \quad (4.120)$$

En dérivant cette équation par rapport à σ'_w et en notant que Q est fonction de $\partial p / \partial x$ et donc de σ'_w , on obtient :

$$2Q + \sigma'_w \frac{dQ}{d\sigma'_w} = -\frac{a^2}{2} \dot{\gamma}_w \quad (4.121)$$

ou :

$$\dot{\gamma}_w = -\frac{2Q}{a^2} \left(2 + \frac{d \log Q}{d \log \Delta p} \right). \quad (4.122)$$

On remarque que l'équation (4.122), dite de Mooney-Rabinovitch, ne fait intervenir que des paramètres macroscopiques relativement faciles à mesurer (débit, différence de pression). Par ailleurs, la contrainte à la paroi σ'_w découle immédiatement de la relation : $\sigma'_w = (a/2) (\partial p / \partial x)$. La caractéristique rhéologique locale $\dot{\gamma}_{xy} = f(\sigma'_{xy})$ peut donc être déterminée à partir de la courbe de variation globale qui relie le débit et le gradient de pression suivant l'écoulement. Il est cependant nécessaire que la fonction f n'évolue pas au cours du temps.

Transposition aux capillaires cylindriques. À partir de l'équation (4.25) et en tenant compte du fait que la relation $\partial p / \partial r = 0$ reste vérifiée, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\sigma'_{xr} r) = r \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.123)$$

d'où :

$$\sigma'_{xr} = \frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.124)$$

On suppose de nouveau, pour passer de (4.123) à (4.124), que $\sigma'_{xr} = 0$ sur l'axe $r = 0$. En combinant (4.124) et la relation contrainte-taux de déformation $\partial v_x / \partial r = f(\sigma'_{xr})$, on obtient :

$$v_x(r) = - \int_r^R f\left(\frac{u}{2} \frac{\partial p}{\partial x}\right) du. \quad (4.125)$$

On calcule alors le débit Q par intégration de $2\pi r v_x(r)$ suivant r . Après intégration par parties, on obtient finalement l'équivalent de la relation (4.118) :

$$Q = -\pi \int_0^R r^2 f\left(\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial x}\right) dr. \quad (4.126)$$

En remplaçant, comme pour les deux plans, r et $(\partial p / \partial x)$ par σ'_{xr} et la contrainte σ'_w à la paroi, déduite en prenant $r = R$ dans l'équation (4.124), on obtient :

$$Q\sigma'^3_w = -\pi R^3 \int_0^{\sigma'_w} \sigma'^2_{xr} \dot{\gamma}_{xr} d\sigma'_{xr}. \quad (4.127)$$

En dérivant cette équation par rapport à σ'_w puis en divisant par σ'^2_w , on obtient finalement :

$$\dot{\gamma}_w = -\frac{Q}{\pi R^3} \left(3 + \frac{d \log Q}{d \log \Delta p} \right). \quad (4.128)$$

Là encore, cette équation, combinée avec la relation entre $\partial p / \partial x$, σ'_w et le rayon du tube, permet de déterminer la caractéristique rhéologique du fluide à partir de la relation débit-différence de pression. En pratique, on réalise plusieurs mesures sur des tubes de même diamètre, mais de longueurs différentes, pour pouvoir estimer et corriger l'influence des effets d'entrée. La comparaison des résultats obtenus sur des tubes de diamètres différents permet, en outre, de détecter des effets éventuels de glissement à la paroi.

4.6.3 Profils de vitesse pour des lois rhéologiques simples

Fluides en loi de puissance

D'après l'équation (4.40), la contrainte de cisaillement vérifie pour un écoulement unidimensionnel de vitesse $v_x(y)$: $\sigma'_{xy} = D(\partial v_x / \partial y)^{1-\alpha}$; cette loi se réduit à celle des fluides newtoniens pour $\alpha = 0$ avec $D = \eta$. Pour $\alpha < 0$, la viscosité apparente $\sigma'_{xy} / (\partial v_x / \partial y)$ augmente avec le taux de cisaillement (fluide rhéoépaississant). Pour $\alpha > 0$, la viscosité apparente diminue avec le taux de cisaillement (fluide rhéofluidifiant). On a alors : $f(u) = D^{-1/(1-\alpha)} u^{1/(1-\alpha)}$. En reportant cette expression dans les équations (4.116) et (4.125), on obtient, pour l'écoulement entre deux plans distants de a et symétriques par rapport à $y = 0$, le profil :

$$v_x(y) = \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \left[\frac{1}{D} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} - y^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \right) \quad (4.129a)$$

et, à l'intérieur d'un tube cylindrique :

$$v_x(r) = \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \left[\frac{1}{2D} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha} \right) \quad (4.129b)$$

(on multiplie ces expressions par -1 si $\partial p/\partial x > 0$). Les valeurs de débit correspondantes sont :

$$Q = \frac{2-2\alpha}{3-2\alpha} \left[\frac{1}{D} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{a}{2} \right)^{\frac{3-2\alpha}{1-\alpha}}, \quad (4.130a)$$

$$Q = \frac{\pi(1-\alpha)}{4-3\alpha} \left[\frac{1}{2D} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} R^{\frac{4-3\alpha}{1-\alpha}}. \quad (4.130b)$$

On constate que, pour $\alpha > 0$, l'exposant de la loi de variation du débit, avec l'ouverture des canaux à gradient de pression donné, est plus élevé que les lois de Poiseuille en a^3 ou en R^4 obtenues pour des fluides newtoniens (l'exposant de a peut en effet être récrit : $3 + \alpha/(1-\alpha)$, et celui de R : $4 + \alpha/(1-\alpha)$). Le rapport entre les débits dans deux canaux de sections différentes sous une différence de pression donnée est donc augmenté par les caractéristiques rhéofluidifiantes du fluide. Ce contraste est, au contraire, réduit pour un fluide rhéoépaississant.

Soit $v_m = Q/a$ et $v_m = Q/(\pi R^2)$ les valeurs moyennes respectives de la vitesse dans les deux cas ; on peut réécrire les profils de vitesse sous la forme :

$$\frac{v_x}{U} = \frac{3-2\alpha}{2-\alpha} \left[1 - \left(\frac{2y}{a} \right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \right] \quad (4.131a)$$

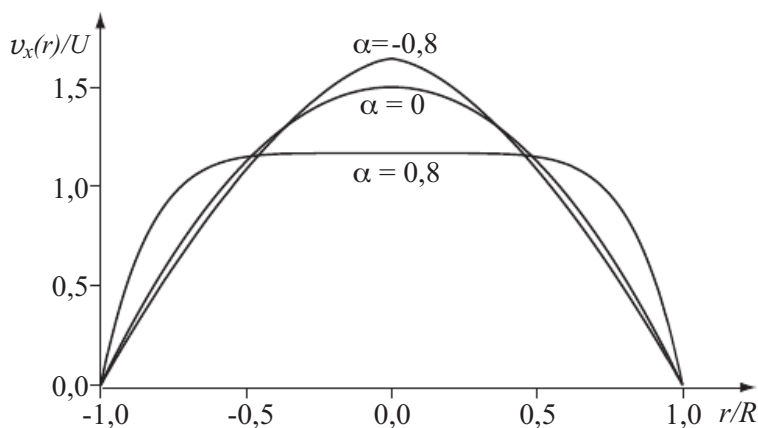


FIG. 4.25 – Profil diamétral du rapport de la vitesse locale et de la vitesse moyenne dans un tube cylindrique pour des fluides présentant une caractéristique rhéologique en loi de puissance $\sigma'_{xy} = D(\partial v_x/\partial y)^{1-\alpha}$; courbe supérieure : $\alpha = -0,8$ (fluide rhéoépaississant), courbe intermédiaire : $\alpha = 0$ (fluide newtonien), profil le plus aplati : $\alpha = 0,8$ (fluide rhéoéfluidifiant).

et

$$\frac{v_x}{U} = \frac{4-3\alpha}{2-\alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \right]. \quad (4.131b)$$

Comme on peut le voir sur la figure 4.25, les profils sont plus pointus pour les valeurs de $\alpha < 0$ (fluides rhéoépaississants) que pour un fluide newtonien ($\alpha = 0$) ; de plus, la courbure est infinie en $y = 0$ ou $r = 0$. Les profils de vitesse obtenus pour $\alpha > 0$ (fluides rhéofluidifiants) sont, en revanche, de plus en plus aplatis lorsque la valeur de α augmente.

Remarque. Qualitativement, la forme du profil augmente le gradient de vitesse près de la paroi et permet donc d'y bénéficier d'une viscosité encore plus faible (on aurait le contraire pour un fluide rhéoépaississant).

Fluide de Bingham entre deux plans parallèles

Comme nous l'avons vu plus haut, ce sont des fluides à seuil, pour lesquels on a une relation linéaire entre contrainte et déformation au-dessus du seuil σ_c . On suppose que :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{D}(\sigma'_{xy} - \text{signe}(\sigma'_{xy}) \sigma_c) \quad \text{si} \quad |\sigma'_{xy}| > \sigma_c > 0 \quad (4.132a)$$

et :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \text{si} \quad |\sigma'_{xy}| \leq \sigma_c. \quad (4.132b)$$

Ici, la fonction $f(\sigma'_{xy})$ vaut donc : $(1/D)(\sigma'_{xy} - \text{signe}(\sigma'_{xy}) \sigma_c)$ pour $|\sigma'_{xy}| > \sigma_c$ et 0 pour $|\sigma'_{xy}| \leq \sigma_c$. Par la suite, nous supposons que $\partial p / \partial x < 0$ et $v_x \geq 0$. La relation : $\sigma'_{xy} = y (\partial p / \partial x)$ reste par ailleurs valable et la contrainte σ'_{xy} s'annule pour $y = 0$. On a donc une zone près du plan de symétrie où σ'_{xy} est inférieure à σ_c , où $\partial v_x / \partial y$ est donc nul et la vitesse égale à une valeur constante $V_{\max}$. La limite $\pm y_0$ de cette zone vérifie :

$$y_0 = \sigma_c / \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|. \quad (4.133)$$

Si $y_0 > a/2$, la vitesse est nulle en tout point. Si $y_0 < a/2$, le profil de vitesse près de la paroi $y = a/2$ est obtenu par simple intégration de l'équation (4.132a) :

$$v_x(y) = \frac{1}{D} \int_y^{a/2} \left[u \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| - \sigma_c \right] du \quad (4.134)$$

et l'on a un profil symétrique près de la paroi $y = -a/2$. On obtient alors, à l'aide des relations (4.132a-b), les profils :

$$v_x(y) = \frac{1}{2D} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \left[\frac{a}{2} - y \right] \left[\frac{a}{2} + y - 2y_0 \right] \quad (4.135)$$

et :

$$v_x(y) = V_{\max} = \frac{1}{2D} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \left[\frac{a}{2} - y_0 \right]^2 \quad (4.136)$$

respectivement pour $y > y_0$ et $0 < y \leq y_0$ (on a une distribution de vitesse symétrique dans la région $y < 0$). Qualitativement, on observe les formes de profils de vitesse de la figure 4.26.

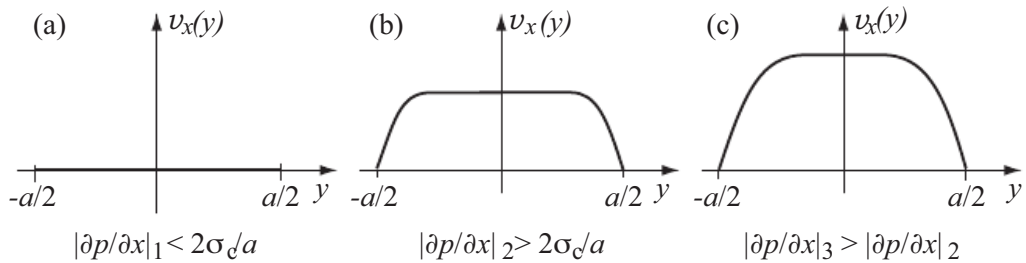


FIG. 4.26 – Profils de vitesse observés pour un fluide de Bingham avec diverses valeurs du gradient de pression longitudinal (noter la continuité de pente aux points de raccordement entre la partie plate et les variations de chaque côté de celle-ci).

Lorsque la contrainte σ'_{xy} est partout inférieure à la contrainte seuil, le fluide est à l'arrêt (profil de gauche). Lorsque le gradient de pression appliqué augmente, on observe des profils de vitesse avec une partie plate au centre (zone d'écoulement bouchon) dont l'étendue diminue au fur et à mesure que l'on augmente le gradient de pression appliqué (profils du milieu et de droite). Plus généralement, on remarque, d'après les figures 4.25 et 4.26, que l'existence d'un effet de seuil ou d'une diminution de la viscosité avec la contrainte de cisaillement (qui joue un peu le même rôle) conduit dans les deux cas à un aplatissement du profil de vitesse.

Fluide de Bingham dans un tube cylindrique

Le cas d'un fluide de Bingham dans un tube cylindrique est résolu comme celui de l'écoulement entre deux plans, en utilisant, cette fois, la relation (4.124) : $\sigma'_{xr} = (r/2) (\partial p / \partial x)$. Dans la région centrale du profil, le gradient de vitesse $\partial v_x / \partial r$ est nul jusqu'à un rayon $r_0 = 2\sigma_c / |\partial p / \partial x|$. Dans cette zone, on a une vitesse constante $V_{\max}$ qui est nulle si $r_0 > R$. Si $r_0 < R$, le profil de vitesse près de la paroi vérifie :

$$v_x(r) = \frac{1}{D} \int_r^R \left[\frac{u}{2} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| - \sigma_c \right] du. \quad (4.137)$$

On obtient alors les profils de vitesse, respectivement pour $r > r_0$ et $r < r_0$:

$$v_x(r) = \frac{1}{4D} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| [R - r] [R + r - 2r_0] \quad (4.138a)$$

et :

$$v_x(r) = V_{\max} = \frac{1}{4D} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| [R - r_0]^2. \quad (4.138b)$$

Ces profils sont qualitativement similaires à ceux de la figure 4.26.

4.6.4 Écoulement d'un fluide viscoélastique près d'un plan oscillant

Nous avons étudié, dans la section 4.5.4, l'écoulement d'un fluide newtonien près d'un plan solide oscillant parallèlement à lui-même, avec une pulsation ω . Supposons maintenant que le fluide est un fluide viscoélastique de Maxwell de caractéristiques rhéologiques décrites par l'équation (4.51b). Pour analyser ce problème, nous reprenons la même démarche que précédemment, en supposant que la vitesse v_x parallèlement au plan vérifie $v_x(y, t) = f(y) \cos(\omega t + \varphi) = \Re(f(y)e^{i\omega t})$ (Éq. 4.84). On remplace, dans l'équation (4.85), la viscosité ν par la viscosité complexe $\bar{\nu} = \bar{\eta}/\rho$ vérifiant, d'après l'équation (4.51b) :

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + i\omega\tau}. \quad (4.139)$$

Le temps caractéristique τ du fluide est relié au module élastique G et à la viscosité dynamique $\eta = \nu\rho$ par $\tau = \eta/G$. En résolvant l'équation (4.85) en utilisant l'expression (4.139) de la viscosité, on trouve que les solutions sont du type :

$$f(y) = C_1 e^{-(\beta + ik)y} + C_2 e^{(\beta + ik)y} \quad (4.140)$$

où, contrairement au cas newtonien (Éq. 4.86), on n'a plus nécessairement $\beta = k$ et où β et k vérifient :

$$i\omega = \nu \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} (\beta^2 - k^2 + 2i\beta k). \quad (4.141)$$

Si l'on se limite aux écoulements dans le demi-espace infini $y > 0$, on peut prendre (comme pour le fluide newtonien) $C_2 = 0$ avec $\beta > 0$. Les parties réelles et imaginaires de l'équation (4.141) fournissent les deux relations :

$$(\beta^2 - k^2) + 2\beta k\omega\tau = 0 \quad (4.142a)$$

et

$$\omega(1 + \omega^2\tau^2) = 2\beta\nu k - \nu\omega\tau(\beta^2 - k^2). \quad (4.142b)$$

En reportant la valeur de $\beta^2 - k^2$ d'une équation dans l'autre, on trouve la relation :

$$\beta k = \frac{\omega}{2\nu}. \quad (4.143)$$

Cette expression impose donc $k > 0$ si $\beta > 0$. En la reportant dans l'équation (4.142a), et en prenant la racine positive de la relation ainsi obtenue, on obtient finalement l'expression de k :

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\tau}{\nu} + \frac{\tau}{\nu} \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}} \right]. \quad (4.144)$$

On en déduit immédiatement l'expression de β à l'aide de la relation (4.141). Aux faibles fréquences telles que $\omega\tau \ll 1$, l'expression (4.144) se réduit à $k^2 = \omega/2\nu$ et l'on obtient la même valeur pour β d'après (4.143). Ce comportement est identique à celui d'un fluide newtonien (Éq. 4.86) : cela était attendu puisque la viscosité complexe $\bar{\nu}$ devient égale à ν , d'après la relation (4.139). Dans le cas opposé où $\omega\tau \gg 1$ (période de l'excitation sinusoïdale courte devant le temps caractéristique τ du fluide viscoélastique), l'équation (4.144) devient :

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{\tau}{\nu} = \frac{\rho}{G} = \frac{1}{c_s^2}. \quad (4.145)$$

Le rapport ω/k est alors égal à la vitesse de propagation c_s des ondes transverses de cisaillement dans un solide de module élastique de cisaillement G et de densité ρ : pour les hautes fréquences d'excitation, le corps se comporte bien comme un solide élastique (le module complexe $\bar{G}$ de l'équation (4.51) se réduit alors à G) où peuvent se propager de telles ondes, contrairement à un fluide newtonien dans lequel elles s'atténuent très rapidement.

Remarque. La distance $1/\beta$ représente la distance caractéristique d'atténuation des oscillations de vitesse induites par le plan ; le rapport k/β représente donc l'ordre de grandeur du nombre de longueurs d'onde sur lesquelles s'effectue l'atténuation. À l'aide des relations (4.143) et (4.145), et en utilisant la définition (4.89) de la profondeur de pénétration $\delta(\omega)$ des oscillations pour un fluide newtonien, on obtient :

$$2k^2\delta^2(\omega) = 4\omega\tau \quad (4.146)$$

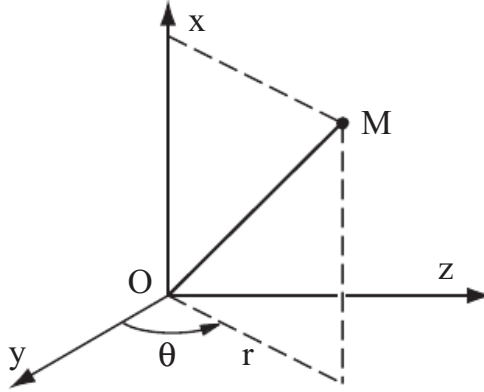
et :

$$\frac{k}{\beta} = \frac{k^2}{\omega/2\nu} = k^2\delta^2(\omega). \quad (4.147)$$

La condition $\omega\tau \gg 1$ (comportement élastique du fluide) entraîne donc nécessairement $k\delta(\omega) \gg 1$ (longueur d'onde faible devant la profondeur de pénétration visqueuse), $k/\beta \gg 1$ (grand nombre de longueurs d'ondes dans la distance d'atténuation des oscillations de vitesse). Comme la relation (4.143) peut être réécrite sous la forme : $\beta\delta(\omega) = 1/(\delta(\omega)) \ll 1$, on en déduit également que la distance d'atténuation $1/\beta$ dans le régime élastique est très supérieure à la distance de pénétration $\delta(\omega)$ qui résulterait des seuls effets de la viscosité (il faut cependant noter que, avec des fluides réels tels que ceux qui correspondent à la figure 4.14, les déviations par rapport à la loi de Maxwell observées à haute fréquence réduiront en pratique la distance de propagation).

Annexe A-1

Expression du tenseur des contraintes, équations de conservation de la masse et de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (r, θ, x)



Tenseur des contraintes

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, & \sigma_{r\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\ \sigma_{xx} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \sigma_{xr} &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), & \sigma_{\theta x} &= \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} \right).\end{aligned}$$

Équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible ($\text{div } \mathbf{v} = 0$)

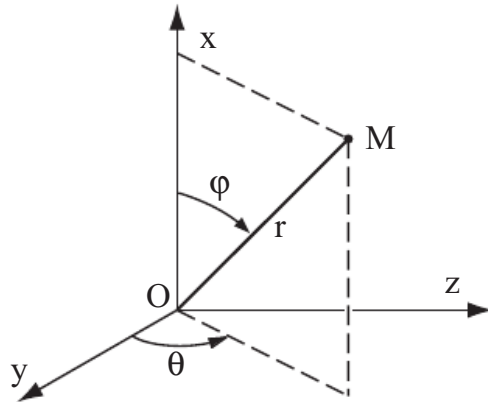
$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.$$

Équation de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) + \rho f_r, \\
 & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \\
 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \rho f_\theta, \\
 & \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \rho f_x.
 \end{aligned}$$

Annexe A-2

Expression du tenseur des contraintes, équations de conservation de la masse et de Navier-Stokes en coordonnées sphériques (r, φ, θ)



Tenseur des contraintes

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\
 \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\varphi \cotan \varphi}{r} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), \\
\sigma_{r\varphi} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\
\sigma_{\varphi\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta \cotan \varphi}{r} \right), \\
\sigma_{\theta r} &= \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right).
\end{aligned}$$

Équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible ($\text{div } \mathbf{v} = 0$)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial(\sin \varphi v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

Équation de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}
&\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} \right) \\
&= -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r v_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cotan \varphi}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 v_r}{r^2} - \frac{2 \cotan \varphi}{r^2} v_\varphi \right) + \rho f_r, \\
&\rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\varphi}{r} - \frac{v_\theta^2 \cotan \varphi}{r} \right) \\
&= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r v_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cotan \varphi}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2 \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \right) + \rho f_\varphi, \\
&\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\varphi v_\theta \cotan \varphi}{r} \right) \\
&= -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r v_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cotan \varphi}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \varphi} \right) + \rho f_\theta.
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Équations de bilan

CE CHAPITRE traite les différentes équations de bilan pour un fluide en mouvement : bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Le bilan de la circulation de la vitesse (associée au moment cinétique) sera traité en détail au chapitre 7. Le bilan de masse, déjà établi au chapitre 3, ne sera que rappelé ici (section 5.1).

L'équation de mouvement des fluides réels a été établie au chapitre précédent. Associée à l'équation de bilan de masse, elle nous permettra d'établir l'équation de bilan de la quantité de mouvement (section 5.2). En utilisant cette équation et en l'appliquant à un volume convenablement choisi de fluide, dit volume de contrôle, nous analyserons les échanges de quantité de mouvement dans des écoulements simples.

Puis, nous établirons l'équation de bilan de l'énergie que nous mettrons sous la forme de l'équation de Bernoulli (section 5.3). Nous l'appliquerons ensuite à quelques exemples classiques (tube de Pitot, tube de Venturi).

Nous terminerons (section 5.4) en traitant quelques problèmes plus complexes, qui montreront comment on peut analyser quantitativement des écoulements à l'aide des équations de bilan, sans avoir à déterminer complètement le champ de vitesse du fluide.

5.1 Équation de bilan de masse

Cette équation de bilan a été établie à la section 3.3.1. Rappelons seulement ici les deux écritures équivalentes qui correspondent aux points de vue eulérien et lagrangien :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (5.1)$$

(point de vue eulérien ; Éq. (3.25)),

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.2)$$

(point de vue lagrangien ; Éq. (3.27)).

La dérivée lagrangienne (ou convective) $d\rho/dt$ se rapporte à la variation de masse volumique d'un élément matériel de fluide que l'on suit dans son mouvement (comme précédemment, nous utilisons la convention d'Einstein en effectuant une somme implicite sur les indices apparaissant deux fois dans des facteurs différents d'un même terme).

Supposons qu'il existe un terme de production du fluide (cas d'un écoulement réactif dans lequel une espèce chimique A peut se former au sein de l'écoulement). Notons ρ_A la masse volumique partielle de cette espèce chimique ; l'équation (5.1) devient :

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = -\operatorname{div} (\rho_A \mathbf{v}) + q_A \quad (5.3)$$

où q_A désigne le taux algébrique de production de masse de l'espèce considérée par unité de volume. L'équation (5.3) exprime l'équilibre entre le taux de variation $\partial \rho_A / \partial t$ de la masse volumique d'une part, la divergence du courant de masse $\rho_A \mathbf{v}$ et un terme q_A de source en volume d'autre part.

Remarque. La présence d'un gradient spatial de la concentration de l'espèce A crée en plus un flux diffusif proportionnel à ce gradient : $\mathbf{J}_{DA} = -D_A \mathbf{grad} C_A$. Il faudra ajouter $\mathbf{J}_{DA}$ à $\rho_A \mathbf{v}$ dans le premier terme du second membre. Nous verrons que l'expression ainsi obtenue reflète la forme générale des équations de bilan.

5.2 Bilan de quantité de mouvement

5.2.1 Expression locale

La quantité de mouvement par unité de volume de fluide est égale à $\rho \mathbf{v}$; calculons la dérivée temporelle de sa $i^{\text{ème}}$ composante

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (5.4)$$

Combinons l'équation (5.4) avec l'équation (5.1) (après avoir multiplié cette dernière par v_i) et avec la forme générale suivante de l'équation (4.25) de mouvement d'un fluide projetée sur l'axe x_i :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad (5.5)$$

où ρf_i est une force par unité de volume et σ'_{ij} le tenseur des contraintes visqueuses. On obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = -v_i \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} - \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma'_{ij}) + \rho f_i. \quad (5.6)$$

Nous avons fait entrer le terme de pression $\partial p / \partial x_i$ dans la dérivation sous la forme $\partial(p \delta_{ij}) / \partial x_j$. Cette équation générale est valable pour tous les fluides, newtoniens ou non, incompressibles ou non. Nous y trouvons un terme $\partial(\rho v_i) / \partial t$ de variation de la quantité de mouvement par unité de volume, la divergence d'un flux $(\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma'_{ij})$ et un terme de source ρf_i . Pour dégager plus précisément la signification physique de ces différents termes, nous allons donner une expression globale de l'équation (5.6), en l'intégrant sur un volume macroscopique de fluide.

5.2.2 Forme intégrale de l'équation de bilan de quantité de mouvement

Intégrale de l'équation de bilan de quantité de mouvement

Reprenons l'équation plus haut. Nous obtenons par intégration sur un volume $\mathcal{V}$ fixe dans l'espace (les particules de fluide peuvent donc traverser la frontière qui le limite) :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} dV = - \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma'_{ij}) dV + \iiint_{\mathcal{V}} \rho f_i dV. \quad (5.7)$$

En transformant la première intégrale du second membre à l'aide du théorème de la divergence, on obtient :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} dV = - \iint_{\mathcal{S}} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma'_{ij}) n_j dS + \iiint_{\mathcal{V}} \rho f_i dV. \quad (5.8)$$

$\mathcal{S}$ représente la surface limitant le volume d'intégration $\mathcal{V}$. En utilisant le fait que le volume d'intégration $\mathcal{V}$ est fixe, on peut donc écrire la dérivée temporelle de la composante i de la quantité de mouvement totale dans $\mathcal{V}$, sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{\mathcal{V}} \rho v_i dV \right) = - \iint_{\mathcal{S}} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma'_{ij}) n_j dS + \iiint_{\mathcal{V}} \rho f_i dV. \quad (5.9)$$

Soit, sous forme vectorielle, avec la normale $\mathbf{n}$ orientée vers l'extérieur du volume $\mathcal{V}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} dV \right) = - \iint_{\mathcal{S}} (\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n} - [\boldsymbol{\sigma}'] \cdot \mathbf{n}) dS + \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} dV. \quad (5.10)$$

– La première intégrale du second membre représente la contribution à la variation de quantité de mouvement du flux de cette dernière à travers la surface ($\mathcal{S}$). La quantité de mouvement étant une grandeur vectorielle, le flux correspondant est un tenseur de rang deux de composante générale :

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma'_{ij}. \quad (5.11)$$

Π_{ij} est un tenseur qui représente le flux de quantité de mouvement par unité de surface : c'est le flux dans la direction j de la composante de la quantité de mouvement suivant i . Il comprend trois termes :

- $\rho v_i v_j$, le transport de la composante ρv_i dans la direction i de la quantité de mouvement par les particules en déplacement dans la direction j ;
- $p \delta_{ij}$, le transport de quantité de mouvement associé aux forces de pression ;
- $-\sigma'_{ij}$, le transport de quantité de mouvement associé aux forces de frottement visqueux.

L'intégrale $-\iint_{\mathcal{S}} p \cdot \mathbf{n} \, dS$ est la résultante des forces de pression exercées normalement à la surface ($\mathcal{S}$). L'intégrale $\iint_{\mathcal{S}} [\boldsymbol{\sigma}'] \cdot \mathbf{n} \, dS$ est associée à la force de frottement visqueux exercée sur la surface ($\mathcal{S}$).

- La seconde intégrale du second membre représente la production de quantité de mouvement par unité de temps, dû au champ de forces extérieures $\mathbf{f}$, dans le volume considéré.

En utilisant la notation $[\boldsymbol{\Pi}]$ pour le tenseur flux de quantité de mouvement, on obtient la forme plus compacte suivante de l'équation (5.10) :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} \, dV \right) = - \iint_{\mathcal{S}} [\boldsymbol{\Pi}] \cdot \mathbf{n} \, dS + \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} \, dV. \quad (5.12)$$

Les équations (5.10) et (5.12) ont la forme classique de toute équation de conservation : la variation temporelle d'une grandeur quelconque (ici la quantité de mouvement du fluide situé dans le volume d'intégration) apparaît comme la somme d'un terme de *flux* et d'un terme de *source*. L'intérêt de cette équation est de permettre, dans certains cas, de déterminer les paramètres d'un écoulement sans avoir à le caractériser en détail à l'intérieur d'un volume $\mathcal{V}$: il suffit de connaître cet écoulement à la *frontière* du volume. En effet, supposons un écoulement stationnaire (champs de vitesse et de pression indépendants du temps) : le terme du premier membre de l'équation de conservation (5.10), qui est le seul à faire intervenir une intégration en volume sur le champ de vitesse du fluide, est alors identiquement nul. L'équation

prend la forme simplifiée (en supposant que la seule force en volume est la pesanteur $\mathbf{g}$) :

$$\iint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \iint_S p \mathbf{n} dS - \iint_S [\boldsymbol{\sigma}'] \cdot \mathbf{n} dS - \iiint_V \rho \mathbf{g} dV = 0. \quad (5.13)$$

Par un choix judicieux du volume d'intégration, appelé *volume de contrôle* (limité, par exemple, par les parois d'un canal dans lequel s'écoule le fluide ou par des surfaces confondues avec des tubes de courant ou perpendiculaires à ces derniers), on peut déterminer assez aisément la force exercée sur les parois de ce volume par le fluide en écoulement (nous traiterons quelques exemples utilisant cette propriété dans la section 5.4).

Remarque. On peut écrire l'expression (5.10) sous la forme alternative suivante (on prend aussi $\mathbf{f} = \mathbf{g}$) :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho \mathbf{v} dV \right) = - \iint_S (\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - [\boldsymbol{\sigma}'] \cdot \mathbf{n}) dS + \iiint_V (\rho \mathbf{g} - \mathbf{grad} p) dV. \quad (5.14)$$

Cette autre écriture fait mieux apparaître le fait que c'est l'écart du gradient de pression par rapport au gradient de pression hydrostatique (égal à $-\rho \mathbf{g}$), et non la pression elle-même, qui est source de quantité de mouvement. La variation de quantité de mouvement dans un volume de fluide est alors la différence entre cette contribution et les flux par diffusion visqueuse et par convection à travers les parois. Dans certaines simulations numériques, pour des raisons pratiques, on impose d'ailleurs une force en volume plutôt qu'un gradient de pression pour créer un écoulement.

Cas d'un fluide newtonien incompressible

Par la suite, nous nous limiterons à l'étude des fluides newtoniens incompressibles. On a, dans ce cas, la relation simple $[\boldsymbol{\sigma}'] = 2\eta[\mathbf{e}]$ entre le tenseur des contraintes $[\boldsymbol{\sigma}']$ et le tenseur des déformations $[\mathbf{e}]$ (Éq 4.16). L'équation (5.10) devient donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho \mathbf{v} dV \right) = - \iint_S (\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n} - 2\eta[\mathbf{e}] \cdot \mathbf{n}) dS + \iiint_V \rho \mathbf{f} dV. \quad (5.15)$$

Nous allons traiter maintenant quelques exemples d'écoulements simples, auxquels nous appliquerons les équations locales et intégrales de bilan de la quantité de mouvement.

Application des équations de bilan de quantité de mouvement à des écoulements simples

Dans la section 4.5, nous avons appliqué l'équation du mouvement d'un fluide visqueux à des écoulements parallèles simples, comme l'écoulement de Poiseuille ou l'écoulement de cisaillement de Couette entre deux plans. Nous

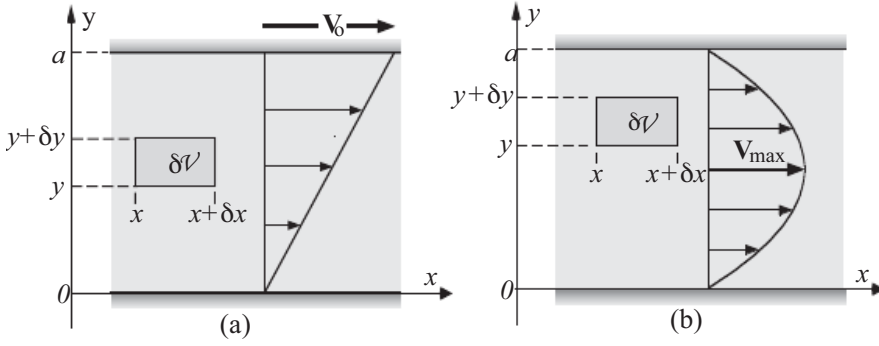


FIG. 5.1 – Définition de l'élément de volume δV pour le calcul du bilan de quantité de mouvement (a) pour un écoulement de cisaillement simple entre deux plans parallèles sans gradient de pression extérieur ; (b) pour un écoulement de Poiseuille entre deux plans $y = 0$ et $y = a$, induit par un gradient de pression horizontal $\partial p / \partial x$.

allons analyser ici ces écoulements en termes de conservation de la quantité de mouvement, plutôt qu'en termes d'équilibre de forces.

Prenons tout d'abord le cas d'un écoulement stationnaire de cisaillement d'un fluide newtonien incompressible entre deux plans $y = 0$ et $y = a$ en l'absence de gravité et sans gradient de pression appliqué (Fig. 5.1a) ; le plan inférieur est immobile et le plan supérieur se déplace parallèlement à lui-même à la vitesse constante V_0 dans la direction Ox . Comme nous l'avons démontré au chapitre 4, le champ de vitesse $\mathbf{v}$ a pour composantes $(V_0 y/a, 0, 0)$. Analysons le bilan d'échange de quantité de mouvement pour un élément de volume fixe δV , de profondeur unité suivant Oz et de dimensions δx et δy dans les deux autres directions. Comme le champ de vitesse est partout parallèle à Ox , seule la composante ρv_x suivant Ox de la quantité de mouvement par unité de volume est non nulle. Le flux algébrique de cette composante à travers les faces d'abscisses x et $x + \delta x$ de l'élément δV vaut, d'après (5.11) :

$$\Pi_{xx} n_x \delta y = (\rho v_x^2 + p) n_x \delta y.$$

Or, la vitesse v_x ne dépend que de y et la pression p est constante dans tout l'écoulement. La valeur du flux algébrique à travers la face d'abscisse $x + \delta x$ (où $n_x = 1$) est donc opposée à celle du flux à travers la face d'abscisse x (pour laquelle $n_x = -1$ en raison du changement d'orientation de la normale à la surface) : dans la direction x , il y a donc simplement transfert passif de la quantité de mouvement à travers l'élément δV .

Suivant y , le flux algébrique de la quantité de mouvement ρv_x à travers les faces d'ordonnées y et $y + \delta y$ s'écrit :

$$\Pi_{xy} n_y \delta x = -\sigma'_{xy} n_y \delta x = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} n_y \delta x. \quad (5.16)$$

Pour un gradient de vitesse du signe de celui de la figure, ce transfert de quantité de mouvement est orienté vers le bas car les couches de fluide situées près du plan en mouvement, où la vitesse est la plus grande, entraînent les autres. Là encore, comme le gradient de vitesse $\partial v_x / \partial y$ ne dépend pas de y , les flux algébriques à travers les faces d'ordonnées y et $y + \delta y$ sont opposés ($n_y = -1$ sur la face d'ordonnée y et $n_y = +1$ sur l'autre). On a donc également transfert passif de la quantité de mouvement dans la direction Oy (toujours pour l'écoulement de Couette).

Le résultat est différent dans le cas d'un écoulement stationnaire de Poiseuille, toujours en l'absence de gravité, induit par un gradient de pression ($\partial p / \partial x$) constant entre les deux plans parallèles fixes $y = 0$ et $y = a$ (Fig. 5.1b). Dans ce cas, la composante v_y reste nulle et v_x a un profil parabolique avec (Éqs. 4.66 et 4.67) :

$$v_x(y) = -\frac{a^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y(a-y)}{a^2}. \quad (5.17)$$

Comme précédemment, le gradient de pression suivant Oy reste nul ($p = p(x)$) et seule la composante ρv_x suivant Ox de la quantité de mouvement est non nulle. Son flux à travers les faces perpendiculaires à Ox de l'élément de volume $\delta\mathcal{V}$ est égal à :

$$\Pi_{xx} n_x \delta y = (\rho v_x^2(y) + p(x)) n_x \delta y.$$

Cette fois, ce flux varie à la fois suivant Ox (par suite du gradient de pression $\partial p / \partial x$) et suivant Oy (par suite de la variation de $\rho v_x^2(y)$). De même, le flux de quantité de mouvement à travers les faces d'ordonnées y et $y + \delta y$, toujours donné par l'équation (5.16), dépend de y . En revanche, la variation au cours du temps de la quantité de mouvement P_x de l'élément de volume $\delta\mathcal{V}$ doit rester nulle car l'écoulement est stationnaire. On obtient donc, en appliquant l'équation (5.12) et en développant le résultat dans la limite des faibles valeurs de δx et δy , la relation :

$$\frac{\partial P_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) \delta x \delta y = - \left[\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial y} \right] \delta x \delta y = 0, \quad (5.18)$$

qui peut être réécrite sous la forme : $[-\eta (\partial^2 v_x(y) / \partial y^2) + (\partial p / \partial x)] \delta x \delta y = 0$ qui est identique à l'équation de Navier-Stokes (4.59) en écoulement parallèle.

L'écriture de l'équation de conservation de la quantité de mouvement donne donc simplement un autre point de vue sur l'équation de mouvement. L'équation (5.18) signifie que l'apport de quantité de mouvement par le gradient de pression (terme $\partial \Pi_{xx} / \partial x$) est compensé par la variation $\partial \Pi_{xy} / \partial y$ du flux visqueux diffusif de quantité de mouvement $\Pi_{xy} = -\eta \partial v_x / \partial y$ dans la direction transverse y . Pour l'écoulement de Poiseuille, on trouve, en utilisant l'équation (5.17), que ce dernier flux vaut : $\Pi_{xy} = (a/2 - y) \partial p / \partial x$; il est donc nul pour $y = a/2$ (à mi-distance entre les deux plans) et maximum en

valeur absolue sur les parois. Pour $\partial p / \partial x < 0$, ce flux est dirigé vers la paroi la plus proche ; à une position transverse y donnée, il représente la quantité de mouvement apportée par unité de temps par le gradient de pression entre les plans $a/2$ et y .

5.3 Bilan d'énergie cinétique – équation de Bernoulli

Nous allons tout d'abord évaluer la variation temporelle de l'énergie cinétique de l'unité de volume d'un fluide en écoulement. Cela nous conduira, dans le cas particulier des fluides parfaits, à la relation de Bernoulli, qui constitue l'une des formes du bilan d'énergie. Nous discuterons enfin quelques applications de cette équation à des écoulements réels, où l'influence de la viscosité peut être cependant négligée.

5.3.1 Équation de bilan d'énergie cinétique dans un fluide incompressible en écoulement avec ou sans viscosité

Établissement de l'équation de bilan

Nous considérons le cas d'un fluide en écoulement incompressible. L'énergie cinétique de l'unité de volume du fluide s'écrit :

$$e_c = \frac{dE_c}{dV} = \frac{\rho v^2}{2}.$$

En calculant la dérivée eulérienne de e_c par rapport au temps en un point fixe, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \left[\mathbf{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} + p \right) - ([\boldsymbol{\sigma}'] \cdot \mathbf{v}) \right] + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} - \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (5.19)$$

Démonstration de l'équation (5.19). On peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) = \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (5.20)$$

En remplaçant le terme $\partial \mathbf{v} / \partial t$ par son expression, tirée de l'équation de mouvement du fluide (4.25) :

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad (5.21)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) &= -\rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \rho v_i f_i \\ &= -v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) - v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma'_{ij}) - \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho v_i f_i \end{aligned} \quad (5.22)$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) = (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \left(\frac{\rho v^2}{2} + p \right) + \text{div} ([\boldsymbol{\sigma}'] \cdot \mathbf{v}) - \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}. \quad (5.23)$$

En appliquant la relation générale $\text{div} (\alpha \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \alpha + \alpha \text{div} \mathbf{A}$, on trouve :

$$\text{div} \left[\mathbf{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} + p \right) \right] = \left(\frac{\rho v^2}{2} + p \right) \text{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \left(\frac{\rho v^2}{2} + p \right). \quad (5.24)$$

En combinant la condition d'incompressibilité $\text{div} \mathbf{v} = 0$ avec les équations (5.23) et (5.24), on retrouve bien alors l'équation (5.19).

Afin de se représenter plus aisément la signification des différents termes de l'équation locale (5.19), nous allons l'intégrer pour en donner une version globale. Choisissons un volume d'intégration $\mathcal{V}$ fixe dans l'espace et limité par une surface $\mathcal{S}$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\iiint_{\mathcal{V}} \rho \frac{v^2}{2} dV \right) &= - \iint_{\mathcal{S}} \rho \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad - \iint_{\mathcal{S}} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{\mathcal{S}} ([\boldsymbol{\sigma}'] \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS + \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV \\ &\quad - \iiint_{\mathcal{V}} \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV. \end{aligned} \quad (5.25)$$

– Le premier terme du second membre de l'équation (5.25) représente le flux global d'énergie cinétique $\rho v^2/2$ transportée par le fluide à travers la surface ($\mathcal{S}$).

– Les trois termes suivants de l'équation représentent le travail par unité de temps de l'ensemble des forces s'exerçant sur le volume ($\mathcal{V}$) considéré. Les deux premiers représentent le travail des forces de pression et des composantes des contraintes visqueuses exercées sur sa surface ($\mathcal{S}$). Le troisième correspond au travail des forces en volume (égales à $\rho \mathbf{f}$ par unité de volume). Ce dernier terme est positif lorsque $\rho \mathbf{f}$ et $\mathbf{v}$ sont de même sens ; par exemple, ce sera le cas pour un fluide s'écoulant vers le bas dans le champ de pesanteur terrestre ($\mathbf{f} = \mathbf{g}$). Si le champ de force $\mathbf{f}$ dérive d'un potentiel, on peut considérer que son travail reflète une variation de l'énergie potentielle correspondante.

– Enfin, nous allons voir que le terme $(\iiint_{\mathcal{V}} \sigma'_{ij} (\partial v_i / \partial x_j) dV)$ représente la dissipation irréversible d'énergie dans le fluide sous forme thermique.

Nous discutons maintenant plus en détail le rôle respectif des deux termes de l'équation (5.25) qui font intervenir les contraintes visqueuses $[\boldsymbol{\sigma}']$.

Dissipation d'énergie cinétique par viscosité dans un écoulement plan parallèle

Considérons un élément de volume $\delta\mathcal{V}$ de dimensions δx et δy suivant Ox et Oy , et de dimension unité dans la direction Oz dans un écoulement plan parallèle stationnaire de vitesse $v_x(y)$ tel que ceux des figures 5.1a-b. Supposons que seules les composantes $\sigma'_{xy} = \sigma'_{yx}$ du tenseur des forces de viscosité sont non nulles (comme ce sera le cas pour un fluide newtonien) et que la composante suivant Ox de la force en volume est nulle. Le travail total par unité de temps de ces forces sur les faces supérieure et inférieure de l'élément, c'est-à-dire le troisième terme du membre de droite de l'équation (5.25), vaut :

$$(\sigma'_{xy}(y + \delta y)v_x(y + \delta y) - \sigma'_{xy}(y)v_x(y)) \delta x = \frac{\partial}{\partial y}(\sigma'_{xy}(y)v_x(y)) \delta x \delta y.$$

La différence de signe vient du fait que la normale $\mathbf{n}$ est orientée vers les y positifs pour la face supérieure et vers les y négatifs pour la face inférieure. La dérivée du produit du second membre peut être décomposée en deux termes :

– le premier est égal à : $v_x(\partial\sigma'_{xy}(y)/\partial y) \delta x \delta y$. Il représente le travail par unité de temps de la résultante $(\sigma'_{xy}(y + \delta y) - \sigma'_{xy}(y))\delta x$ des contraintes visqueuses sur les faces inférieure et supérieure de l'élément supposé se déplacer sans déformation à la vitesse v_x . Ce travail induirait une variation d'énergie cinétique globale de l'élément mais, dans le cas présent, il est, d'après l'équation (4.113), opposé au travail des forces de pression sur ces faces de hauteur δy . Ce dernier travail vaut en effet : $(p(x) - p(x + \delta x))v_x\delta y = -(\partial p/\partial x)v_x\delta x \delta y$. L'énergie cinétique reste donc constante en accord avec la stationnarité de l'écoulement ;

– le second terme issu de la dérivée du produit vaut : $\sigma'_{xy}(y)(\partial v_x(y)/\partial y) \delta x \delta y$ et correspond, au contraire, uniquement à un travail de déformation. En effet, dans un repère se déplaçant à la vitesse moyenne $v_x(y)$, il représente le travail, par unité de temps, de la force $\sigma'_{xy}\delta x$ exercée sur la face supérieure de l'élément : le point d'application de cette force se déplace à la vitesse $(\partial v_x/\partial y)\delta y$ par rapport à la face inférieure. Si l'élément était solide, ce travail serait emmagasiné sous forme d'énergie potentielle de déformation élastique ; pour un fluide, il est dissipé sous forme d'énergie thermique et transformé en énergie interne.

L'équation (5.25) représente simplement la généralisation de la décomposition précédente à un écoulement et à des forces quelconques. Elle exprime le fait que les travaux des forces qui s'exercent sur un élément de volume et l'apport d'énergie cinétique par convection contribuent à la variation d'énergie cinétique dans le volume pour une part (premier membre de l'équation) et, pour une autre part, sont transformés en énergie thermique (dernier terme du second membre). Le taux de dissipation visqueuse d'énergie dans un volume $(\mathcal{V})$ de fluide est donc : $\delta E_c/\delta t = \iiint_{\mathcal{V}} \sigma'_{ij}(\partial v_i/\partial x_j) dV$.

Dissipation d'énergie cinétique dans un fluide newtonien

Dans le cas particulier d'un fluide newtonien incompressible, l'expression de ce taux de dissipation visqueuse devient :

$$\frac{\delta E_c}{\delta t} = \frac{\eta}{2} \iiint_V \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 dV = 2\eta \iiint_V e_{ij}^2 dV, \quad (5.26)$$

où e_{ij} est le tenseur des taux de déformation. Comme le terme $\delta E_c/\delta t$ correspond à une dissipation irréversible d'énergie et que la forme quadratique sous l'intégrale est positive, cette expression est cohérente avec le fait que la viscosité est nécessairement positive (voir section 4.1.3).

Démonstration. Récrivons l'intégrale : $\delta E_c/\delta t = \iiint_V \sigma'_{ij} (\partial v_i/\partial x_j) dV$; en utilisant la symétrie du tenseur σ'_{ij} ($\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$), on obtient : $\sigma'_{ij} (\partial v_i/\partial x_j) = (1/2) \sigma'_{ij} (\partial v_i/\partial x_j) + (1/2) \sigma'_{ji} (\partial v_i/\partial x_j)$. Comme, pour calculer $\delta E_c/\delta t$, on somme sur les deux indices i et j , on peut échanger ces derniers dans le second terme de la somme précédente pour obtenir, après avoir mis σ'_{ij} en facteur :

$$\frac{\delta E_c}{\delta t} = \eta \iiint_V \left[\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sigma'_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dV = \eta \iiint_V \sigma'_{ij} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] dV.$$

On reconnaît la composante e_{ij} du tenseur de déformation dans le facteur suivant σ'_{ij} . En remplaçant σ'_{ij} par sa valeur $2\eta e_{ij}$, on obtient l'équation (5.26). ■

5.3.2 Relation de Bernoulli

Nous étudions d'abord la relation de Bernoulli qui traduit le bilan d'énergie pour les fluides parfaits, incompressibles dans le cas où les forces en volume $\mathbf{f}$ dérivent d'un potentiel φ avec $\mathbf{f} = -\mathbf{grad} \varphi$. Nous discuterons ensuite le cas des écoulements potentiels, stationnaires ou non. Enfin, nous présenterons quelques applications de cette relation.

Équation de Bernoulli pour un écoulement stationnaire

Pour un fluide parfait en écoulement stationnaire, on peut négliger les pertes d'énergie par viscosité. L'équation (5.19) devient :

$$\text{div} \left[\mathbf{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} + p \right) \right] - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = \text{div} \left[\mathbf{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} + p \right) \right] + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \varphi = 0. \quad (5.27)$$

En utilisant la relation vectorielle générale : $\text{div} (\alpha \mathbf{A}) = \alpha \text{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \alpha$, la relation d'incompressibilité $\text{div} \mathbf{v} = 0$ et la propriété $\rho = \text{cte}$, l'équation (5.27) peut se mettre sous la forme :

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \left(\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho \varphi \right) = 0. \quad (5.28)$$

Le produit scalaire ci-dessus représente la dérivée temporelle lagrangienne $d\mathcal{P}/dt$ de la quantité $\mathcal{P} = \rho(v^2/2) + p + \rho\varphi$ au cours du déplacement d'une particule de fluide le long d'une ligne de courant (tangente en tout point au vecteur vitesse). En effet, comme l'écoulement est stationnaire, la dérivée eulérienne $\partial\mathcal{P}/\partial t$ est nulle et :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathcal{P} = 0. \quad (5.29)$$

Nous en déduisons la première forme de l'équation de Bernoulli :

$$\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho\varphi = \text{cte} \quad \text{le long d'une ligne de courant.} \quad (5.30)$$

La quantité $\rho v^2/2$, homogène à une pression, est appelée *pression dynamique*.

Remarque. Lorsque le potentiel φ correspond à la pesanteur, on rappelle que $\varphi = gy$ si g est l'accélération de la pesanteur (> 0) et y la coordonnée sur un axe vertical orienté vers le haut.

Analysons ce résultat en considérant un écoulement uniforme horizontal de vitesse $\mathbf{U}$ perpendiculaire à un obstacle (Fig. 5.2) : il apparaît un point de stagnation S , où la vitesse tangentielle est nulle, même dans un fluide parfait.

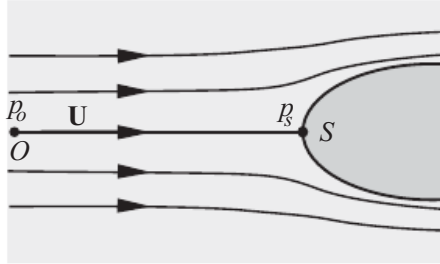


FIG. 5.2 – Écoulement au voisinage d'un point de stagnation S d'un fluide incident sur un obstacle. La mesure de la différence de pression entre la pression de stagnation p_s et celle loin de l'obstacle p_0 permet de déterminer la vitesse U .

Appelons p_0 la pression en un point O situé assez loin de l'obstacle sur la même ligne de courant horizontale que S (dans le cas du champ de pesanteur, φ est donc constante) et où la vitesse a la valeur $\mathbf{U}$. On a, entre p_0 et la pression p_s en S , la relation :

$$p_s = p_0 + \rho \frac{U^2}{2}.$$

Le fait que la vitesse soit nulle en S justifie le nom de p_s – *pression de stagnation* – qui sera donné par extension dans le cas général à la somme $p + (\rho v^2)/2$ (on utilise aussi la dénomination de *pression totale*).

L'équation (5.30) prédit qu'une augmentation de la vitesse en un point d'une ligne de courant s'accompagne d'une diminution de la pression en ce même point. Cet effet permet d'expliquer les phénomènes de *cavitation* : si la vitesse augmente suffisamment pour que la pression diminue jusqu'à la pression de vapeur saturante du fluide à la température correspondante, le fluide se vaporise. Les bulles de vapeur ainsi formées au sein du fluide et qui sont entraînées par son mouvement implosent ensuite sur des surfaces solides (pales de turbines, hélices ...) et provoquent, à la longue, des arrachements de matière très dommageables. Le bruit associé à ces émissions de bulles est également un problème sérieux pour la discrétion des sous-marins militaires. Par ailleurs, certaines crevettes peuvent refermer leurs pinces à une vitesse (20 m.s^{-1}) suffisante pour émettre une bulle de cavitation qui paralyse une proie située à faible distance ; compte tenu du nombre de ces crustacés, le bruit émis peut être, lui, suffisant pour interférer avec les détecteurs sonars.

Équation de Bernoulli pour des écoulements potentiels

Considérons à présent le cas où l'écoulement du fluide est potentiel (le chapitre 6 traite en détail ce type d'écoulements) ; le champ de vitesse $\mathbf{v}$ dérive alors d'un potentiel Φ tel que :

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi. \quad (5.32)$$

On continue de supposer l'écoulement incompressible, avec une masse volumique ρ constante et la présence de forces en volume $\mathbf{f}$ dérivant d'un potentiel φ ; en revanche, nous ne supposons plus le champ de vitesse stationnaire. Nous allons établir l'équation de Bernoulli directement à partir de l'équation d'Euler (4.31) :

$$\rho \frac{\partial \text{grad } \Phi}{\partial t} = \rho \text{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} - \text{grad } p - \text{grad} (\rho \varphi). \quad (5.33)$$

Utilisons l'identité vectorielle suivante, qui peut être démontrée en identifiant terme à terme chacune de ses composantes :

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \text{grad} \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{v}. \quad (5.34)$$

De plus, l'écoulement est irrotationnel puisque la vitesse dérive d'un potentiel. L'équation (5.33) devient donc :

$$\text{grad} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\text{grad} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) - \text{grad } p - \text{grad} (\rho \varphi) \quad (5.35)$$

soit, après intégration :

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + p + \rho \varphi = \text{cte}. \quad (5.36)$$

Cette relation constitue une deuxième forme de l'équation de Bernoulli. Pour un écoulement stationnaire tel que $\rho(\partial\Phi/\partial t) = 0$, cette équation est similaire à l'équation (5.30). La différence avec cette dernière vient du fait que la quantité $(\rho(v^2/2) + p + \rho\varphi)$ est constante *dans tout le volume de l'écoulement*, au lieu de l'être simplement le long d'une ligne de courant comme dans le cas précédent. En revanche, cette relation plus spécifique ne peut pas être démontrée seulement à partir d'un bilan d'énergie. De nouveau, on prend $\varphi = gy$ lorsque la force en volume se réduit à la pesanteur et pour une coordonnée verticale y orientée vers le haut.

5.3.3 Applications de l'équation de Bernoulli

La relation de Bernoulli est à la base d'un grand nombre d'effets dans lesquels une variation de vitesse dans un écoulement (due par exemple au rétrécissement d'un tube) entraîne une variation de pression en sens inverse. Les exemples qui suivent présentent quelques illustrations ou applications de ces effets. Par ailleurs, nous verrons comment on peut appliquer, au moins de manière approchée, l'équation de Bernoulli à des écoulements de fluides réels.

Rappel préliminaire : une propriété importante des écoulements unidirectionnels

Avant d'aborder ces exemples, rappelons un résultat clé que nous avons déjà rencontré pour les écoulements de Couette et de Poiseuille discutés au chapitre 4. Considérons un volume de fluide en écoulement, dans lequel la vitesse reste parallèle à une même direction Ox . Nous allons montrer que, dans ce cas, la variation transverse de la pression dans une section perpendiculaire à l'écoulement se réduit au gradient de pression hydrostatique : il n'apparaît pas de terme supplémentaire dû à l'écoulement. En effet, le terme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ de l'équation de mouvement est identiquement nul car $v_y = v_z = 0$, ce qui entraîne $\partial v_x / \partial x = 0$ (en utilisant la condition d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{v} = 0$). Par ailleurs, les forces de frottement visqueux sont parallèles à Ox ; l'équation de mouvement se réduit donc à :

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g = 0 \quad \text{dans la direction verticale } y \quad (5.37a)$$

$$\text{et : } \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{dans l'autre direction normale à l'écoulement.} \quad (5.37b)$$

En l'absence de pesanteur, la pression est donc constante dans une section normale à l'écoulement. Ce résultat est précieux pour de nombreux problèmes d'écoulements de fluides réels. En effet, à vitesse élevée, ils se comportent comme des fluides parfaits, sauf dans une couche mince proche des parois solides. C'est dans cette *couche limite*, qui sera étudiée en détail au chapitre 10, que se fait la transition entre la condition de vitesse tangentielle nulle sur la paroi et la vitesse d'un écoulement de fluide parfait loin de celle-la. Comme l'écoulement dans cette couche limite est localement pratiquement parallèle à

la paroi, on aura, d'après les équations (5.37), continuité de la pression entre la paroi et la zone juste à l'extérieur de la couche limite.

Le tube de Pitot

Le tube de Pitot est une application directe de l'équation de Bernoulli : il permet de déterminer la vitesse d'un écoulement fluide à partir d'une mesure de différence de pression. Dans l'exemple que nous considérerons plus bas, l'obstacle est fixe et le fluide est en mouvement ; dans de nombreux cas pratiques, le tube de Pitot est également utilisé pour mesurer la vitesse relative d'un véhicule (avion, bateau) par rapport à un fluide, immobile ou non. Ce dispositif est constitué de deux tubes concentriques (Fig. 5.3) : le tube intérieur est percé d'une ouverture S à son extrémité, placée face à l'écoulement, et l'autre tube est percé d'une série de petits orifices A répartis sur une couronne. Un manomètre différentiel relié à chacun des deux tubes permet de mesurer la différence de pression Δp entre les points S et A .

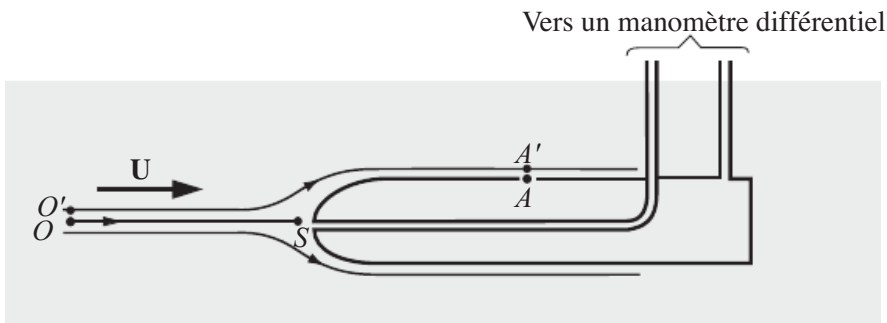


FIG. 5.3 – Principe du tube de Pitot. La relation de Bernoulli est appliquée le long des deux lignes de courant allant de O à S et de O' à A' .

Négligeons les effets de viscosité en les supposant seulement importants dans une mince couche limite près de la paroi des tubes ; nous pouvons appliquer l'équation (5.30) le long de la ligne de courant OS qui coïncide avec l'axe des tubes :

$$p_0 + \rho \frac{U^2}{2} = p_S. \quad (5.38)$$

Appliquons également la relation (5.30) le long de la ligne de courant $O'A'$ (le point A' est sur la même verticale que la prise de pression A , mais à l'extérieur de la couche limite) :

$$p_{O'} + \rho \frac{U^2}{2} = p_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2} = p_A + \rho \frac{v_{A'}^2}{2} = p_A + \rho \frac{U^2}{2}. \quad (5.39)$$

Comme nous venons de le voir, la pression reste en effet constante lorsque l'on traverse l'écoulement quasi unidirectionnel dans la couche limite normalement à l'écoulement et l'on a donc $p_A = p_{A'}$. Par ailleurs, la vitesse en A' est pratiquement égale à U , si A' est suffisamment en aval de S et si la section

du tube de Pitot est faible devant la taille du canal d'écoulement. Enfin, les pressions aux points O et O' , infiniment voisins l'un de l'autre et situés loin en amont de l'obstacle, ont la même valeur. On en déduit alors, en combinant les équations (5.38) et (5.39) :

$$\Delta p = p_S - p_A = \rho \frac{U^2}{2}. \quad (5.40)$$

Le module de la vitesse de l'écoulement découle donc de la mesure de la différence de pression Δp .

Le tube de Venturi

Le tube de Venturi permet de créer une dépression au niveau du rétrécissement d'un tube (Fig. 5.4) ; il est souvent utilisé en pratique (aspiration du mélange air-essence dans un carburateur de voiture, trompe à eau, mesure de débit, ...).

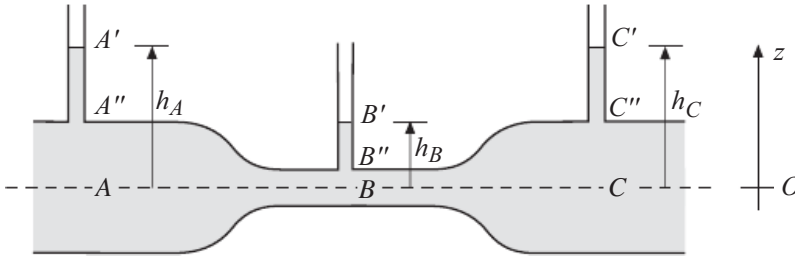


FIG. 5.4 – Dépression créée au niveau du rétrécissement dans un tube de Venturi.

Lorsqu'un écoulement est créé dans le système, il apparaît une différence de hauteur, proportionnelle au carré du débit, entre les niveaux h_A et h_B dans les tubes manométriques A et B ; en revanche, les niveaux h_A et h_C sont pratiquement les mêmes (h_C est légèrement plus faible que h_A si l'écoulement est dirigé de A vers C, par suite de la perte de charge dans le tube due à la viscosité, que nous négligeons dans ce traitement). À la surface du niveau liquide, dans les trois tubes manométriques, on a une pression égale à la pression atmosphérique p_0 :

$$p_{A'} = p_{B'} = p_{C'} = p_0. \quad (5.41)$$

Si les tubes manométriques sont suffisamment étroits, ils perturbent peu l'écoulement ; ce dernier reste donc parallèle dans les sections du tube où se trouvent les points A, B et C (si les prises de pression sont assez éloignées des zones de changement de section du tube pour que la vitesse soit uniforme). On peut donc appliquer les relations (5.37). Les gradients de pression entre A et A'', B et B'', C et C'' se réduisent au gradient de pression hydrostatique. L'écoulement ne pénètre pratiquement pas à l'intérieur des tubes manométriques et le gradient de pression y est aussi uniquement hydrostatique. On

peut donc écrire :

$$p_A = p_{A'} + \rho gh_A = p_0 + \rho gh_A. \quad (5.42)$$

$$\text{De même : } p_B = p_0 + \rho gh_B, \quad (5.43) \quad \text{et : } p_C = p_0 + \rho gh_C. \quad (5.44)$$

Supposons maintenant que l'écoulement soit uniforme dans chacune des sections, avec des vitesses v_A , v_B et v_C , sauf très près des parois solides ; la transition à la condition de vitesse tangentielle nulle sur la paroi solide s'effectue sur une mince couche limite sans gradient de pression transverse, comme nous l'avons montré plus haut. Si la perte d'énergie par frottement visqueux est assez faible devant l'énergie cinétique du fluide, on peut appliquer l'équation de Bernoulli (5.30) le long de la ligne de courant horizontale ABC avec :

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2 \quad (5.45)$$

soit en remplaçant p_A , p_B et p_C par leurs expressions données par les équations (5.42), (5.43) et (5.44), et en divisant le résultat par ρg :

$$h_A + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{g} = h_B + \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{g} = h_C + \frac{1}{2} \frac{v_C^2}{g}. \quad (5.46)$$

On prédit donc bien un niveau plus faible dans le tube manométrique B placé au niveau de la zone de plus forte vitesse, et une variation de la différence de niveau entre A et B proportionnelle à $(v_B^2 - v_A^2)$. Pour établir l'équation (5.45), nous avons supposé la vitesse uniforme dans chacune des sections A , B et C . Cette condition n'est pas réalisée en pratique, à cause de la condition aux limites de vitesse nulle aux parois ; il faudrait donc introduire un facteur correctif expérimental qui dépende du profil de vitesse.

Remarque. Dans tout ce qui précède, nous avons négligé les forces de viscosité ; il pourrait donc sembler que le modèle précédent corresponde à une approximation de fluide parfait. Or, nous allons montrer que, au contraire, le phénomène des tubes de Venturi ne serait pas observé dans un fluide parfait en écoulement potentiel et que la condition aux limites de vitesse nulle aux parois joue un rôle essentiel ! La raison de ce paradoxe apparent est le fait que l'hypothèse clé de notre raisonnement (c'est-à-dire le fait que le gradient de pression transverse se réduit à la pression hydrostatique) n'est plus vérifié. Écrivons l'équation de Bernoulli (5.36) en supposant que la seule force en volume est la pesanteur et que l'écoulement est *potentiel dans tout le fluide* :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cte}. \quad (5.47)$$

Si les tubes manométriques sont assez longs, l'influence de l'écoulement principal décroîtra suffisamment en remontant dans les tubes pour que l'on puisse écrire :

$$v_{A'} = v_{B'} = v_{C'} = 0. \quad (5.48)$$

Ainsi, en appliquant l'équation (5.47) aux points A' , B' et C' , où la pression p est égale à p_0 , on trouve :

$$gh_A = gh_B = gh_C \quad (5.49) \quad \text{soit : } h_A = h_B = h_C. \quad (5.50)$$

Il n'y aurait donc pas de différence de niveau entre les trois tubes ! On continue d'avoir une différence de pression entre les points A et B , mais cette dernière est compensée exactement en sens inverse par la variation de vitesse lorsque l'on remonte vers A'' et B'' à l'intérieur des tubes manométriques. En effet, comme on n'a plus la condition de vitesse tangentielle nulle aux parois, on a une remontée de l'écoulement à l'intérieur des tubes ; le champ de vitesse n'est donc plus parallèle au niveau des prises de pression et un gradient de pression transverse à l'écoulement moyen peut exister. Dans l'écoulement visqueux usuel, au contraire, la vitesse est nulle, ou très faible, aussi bien sur les parois qu'à l'intérieur des tubes manométriques : on peut donc avoir un écoulement pratiquement parallèle dès que l'on s'éloigne un peu de la paroi.

Écriture de l'équation de Bernoulli en écoulement courbe

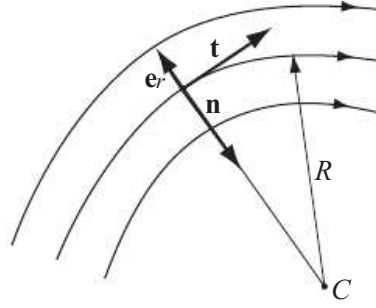


FIG. 5.5 – Variation de pression dans un écoulement dont les lignes de courant sont courbes.

Considérons un écoulement avec des lignes de courant de rayon de courbure R (Fig. 5.5). Supposons que l'on puisse négliger les forces de frottement visqueux et les forces en volume. L'équilibre entre le gradient de pression et l'accélération d'un élément matériel de fluide incompressible s'écrit :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\rho \frac{dv}{dt} \right) \mathbf{t} + \left(\rho \frac{v^2}{R} \right) \mathbf{n} = -\mathbf{grad} p. \quad (5.51)$$

$\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$ sont les vecteurs unitaires tangent et normal aux lignes de courant, $d\mathbf{v}/dt$ est l'accélération lagrangienne. En multipliant scalairement l'équation (5.51) par $\mathbf{t}$, on obtient, en notant s la coordonnée curviligne le long de la ligne de courant :

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} \quad (5.52)$$

qui est une forme locale de l'équation du mouvement (rappelons que $v = ds/dt$). De même, en multipliant scalairement la même équation (5.51) par $\mathbf{n}$, on obtient :

$$\rho \frac{v^2}{R} = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{grad} p) = -\frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (5.53)$$

($\mathbf{e}_r$ est le vecteur unitaire radial opposé à $\mathbf{n}$). La pression *augmente* donc lorsque l'on s'éloigne du centre de courbure C de la ligne de courant.

Effet Coanda

Le résultat précédent est à la base de *l'effet Coanda*, que l'on peut l'illustrer en plaçant un obstacle cylindrique sous un jet liquide, normalement à ce dernier, mais légèrement à côté de l'axe (Fig. 5.6a CC) : le jet est défléchi par l'obstacle et tend à se coller sous celui-ci. Dans le même temps, l'inclinaison des fils de suspension du cylindre par rapport à la verticale montre que ce dernier est attiré par le jet. D'après l'équation (5.53), la courbure des lignes de courant fait apparaître un gradient de pression $\partial p / \partial r > 0$: la pression au niveau du cylindre est plus faible qu'à l'extérieur du jet où règne la pression atmosphérique, ce qui explique l'attraction du jet et du cylindre l'un vers l'autre.

Justification. Pour calculer la force d'attraction correspondante, supposons que l'on a, au lieu d'un jet, une nappe liquide d'épaisseur e de plan parallèle à l'axe du cylindre (Fig. 5.6b CC). En prenant la pression égale à la pression atmosphérique p_{at} sur la surface extérieure de la nappe, elle sera égale, d'après l'équation (5.53) à $p_{at} - \rho v^2 e / R$ sur la face intérieure (si $e \ll R$). Alors, la composante F_p de la force exercée par le jet sur le cylindre par unité de longueur suivant Oz vérifie :

$$F_p = \rho \frac{v^2}{R} e \int_{-\theta_i}^{\theta_i} R \cos \theta d\theta = 2\rho e v^2 \sin \theta_i.$$

La force F_p est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle entre les directions d'écoulement avant et après les points de contact.

On retrouve le même résultat en analysant la variation de la quantité de mouvement du jet entre le point où il entre en contact avec le cylindre et le point où il le quitte. Prenons la composante suivant Oy de l'équation (5.13). La déflexion du jet correspond à une variation de vitesse $\Delta \mathbf{v} = (\mathbf{v}' - \mathbf{v})$ et à une différence entre les flux entrant et sortant de la composante suivant Oy de la quantité de mouvement égale à $2\rho e v^2 \sin \theta_i$ (par unité de longueur de cylindre). Si l'on néglige les forces de viscosité, pour assurer le bilan de quantité de mouvement on doit compenser cette différence par une force de pression résultante suivant Oy , qui est bien celle que nous venons de calculer.

Le même mécanisme permet d'expliquer comment une balle légère peut être maintenue en « lévitation » dans un jet d'air oblique arrivant un peu au-dessus d'elle. Comme pour le cylindre, la sustentation vient de la courbure des lignes de courant, qui crée une dépression, et non de l'impact du jet d'air. Un phénomène voisin est *l'effet théière* : le filet liquide sortant du bec d'une théière semble rester attaché à la surface de celle-là après avoir suivi la courbure du bec au lieu de couler dans la tasse.

Remarque. L'effet Coanda n'est pas le seul à intervenir dans ce dernier phénomène : des études récentes ont montré que le filet liquide reste beaucoup moins longtemps attaché à la surface si cette dernière est peu mouillante (recouverte d'une couche de téflon par exemple).

5.4 Applications des équations de bilan de quantité de mouvement et d'énergie

Dans cette section, nous allons décrire quelques écoulements que l'on peut analyser en utilisant les équations de bilan de la quantité de mouvement, de la masse et de l'énergie. On évite ainsi d'avoir à déterminer complètement le champ de vitesse du fluide, ce qui se révèle souvent impossible en pratique.

5.4.1 Jet incident sur un plan

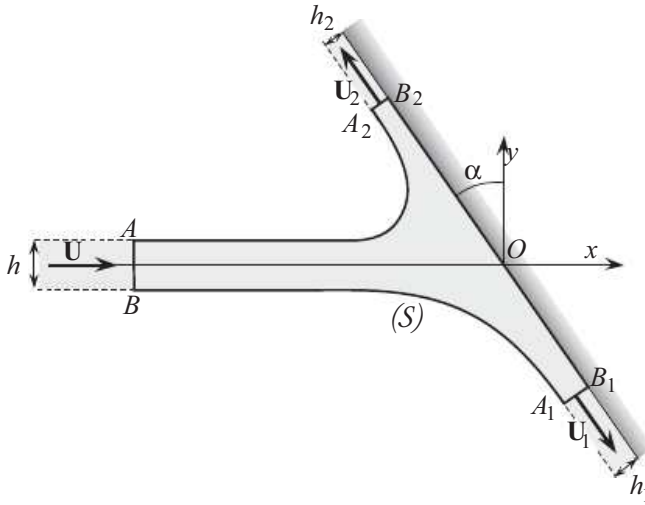


FIG. 5.7 – Schéma de la répartition de fluide et du volume de contrôle pour un jet bidimensionnel incident sur un plan.

Le problème que nous allons analyser se rapproche des observations simples que l'on peut faire lorsqu'un jet d'eau issu d'un robinet rencontre des obstacles de formes variées. Considérons un jet de liquide bidimensionnel en forme de lame d'épaisseur h (Fig. 5.7) et de largeur unité dans la direction Oz perpendiculaire au plan de figure. La vitesse U du fluide est supposée constante à travers la section. Ce jet se divise, en arrivant sur le plan, en deux lames d'épaisseurs et de vitesses respectives h_1 et h_2 , U_1 et U_2 . Nous montrerons que :

$$h_1 = (h/2) (1 + \sin \alpha), \quad (5.54a) \quad h_2 = (h/2) (1 - \sin \alpha). \quad (5.54b)$$

D'autre part, la composante de la force normale au plan par unité de largeur vaut :

$$F_{\perp} = F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha = \rho U^2 h \cos \alpha. \quad (5.55)$$

Nous retrouvons bien la forme habituelle des forces de résistance dans le cas où les phénomènes de viscosité sont négligés, c'est-à-dire une force de résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

Démonstration. Dans ce problème, on néglige les effets de la viscosité en supposant que l'on a un fluide parfait en écoulement potentiel. Nous négligerons aussi les effets de la pesanteur, ce qui est justifié par les faibles épaisseurs des lames de liquide rencontrées en pratique. La conservation de la masse, traduite en égalité des débits par unité de largeur de la lame liquide (suivant Oz), s'écrit :

$$h U = h_1 U_1 + h_2 U_2. \quad (5.56)$$

Si l'écoulement est potentiel, l'équation de Bernoulli (5.36) peut être utilisée dans tout le volume fluide avec :

$$p + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2. \quad (5.57)$$

Or, les lignes de courant sont parallèles dans les différentes sections AB , $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ de la lame liquide; la pression p ne varie donc pas à travers ces sections, ce qui entraîne :

$$p = p_1 = p_2 = p_0 \quad (\text{pression atmosphérique}). \quad (5.58)$$

En combinant les équations (5.57) et (5.58), on en déduit que la vitesse garde la même valeur partout dans la lame liquide :

$$U = U_1 = U_2. \quad (5.59)$$

Reportons ce résultat dans l'équation (5.56) de conservation du débit : on obtient une première relation entre les épaisseurs des lames de liquide :

$$h = h_1 + h_2. \quad (5.60)$$

L'équation (5.12) de conservation de la quantité de mouvement permet de calculer la force exercée par le jet sur le plan. Choisissons le volume de contrôle limité par la ligne en gras sur la figure 5.7 et de profondeur unité suivant Oz . En projetant cette équation vectorielle sur les deux axes Ox et Oy , nous obtenons (en négligeant les forces de pesanteur et les contraintes de viscosité) :

$$\rho (U_1^2 h_1 \sin \alpha - U_2^2 h_2 \sin \alpha - U^2 h) + \iint_{\text{plan}} (\delta p n_x) dS = 0 \quad (5.61a)$$

$$\text{et : } \rho (-U_1^2 h_1 \cos \alpha + U_2^2 h_2 \cos \alpha) + \iint_{\text{plan}} (\delta p n_y) dS = 0. \quad (5.61b)$$

Les deux intégrales de surface sont prises sur la portion du plan solide située entre les sections $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ (δp est égal à l'écart de pression $p - p_0$). Elles représentent les composantes F_x et F_y de la force totale $\mathbf{F}$ de pression sur le plan suivant les deux axes Ox et Oy . La pression atmosphérique p_0 intervient par des intégrales de la forme $\iint_{\mathcal{S}} (p_0 n_i) dS$, avec $i = x$ ou y ($\mathcal{S}$ est la surface globale qui limite le volume

de contrôle) ; ces intégrales sont identiquement nulles. En tenant compte de l'égalité des vitesses U , U_1 et U_2 , les équations (5.61) deviennent :

$$F_x = \rho U^2 (h - (h_1 - h_2) \sin \alpha), \quad (5.62a) \text{ et } : F_y = \rho U^2 (h_1 - h_2) \cos \alpha. \quad (5.62b)$$

Déterminons les épaisseurs h_1 et h_2 des deux lames liquides, en écrivant que la composante parallèle au plan de la force $\mathbf{F}$ est nulle (par hypothèse, en effet, on n'a pas de force de frottement visqueux, mais simplement des forces de pression). On obtient la condition :

$$F_{\parallel} = F_x \sin \alpha - F_y \cos \alpha = 0. \quad (5.63)$$

En utilisant les équations (5.62a) et (5.62b), on en déduit :

$$\rho U^2 (h - (h_1 - h_2) \sin \alpha) \sin \alpha - \rho U^2 (h_1 - h_2) \cos^2 \alpha = 0$$

d'où :

$$h_1 - h_2 = h \sin \alpha. \quad (5.64)$$

En combinant ce résultat avec l'équation (5.60), nous obtenons finalement les expressions (5.54) de h_1 et h_2 . On obtient alors l'équation (5.55) en calculant F_x et F_y à l'aide des équations (5.62) et (5.64). ■

5.4.2 Jet sortant d'un réservoir par un orifice

On s'intéresse à un récipient qui se vide par un petit orifice circulaire situé dans sa partie inférieure (Fig. 5.8a). Si la section S_0 de l'orifice n'est pas trop petite, on pourra négliger les pertes par viscosité à ce niveau. Nous appellerons p_0 la valeur de la pression atmosphérique au-dessus de la surface dans le récipient et à l'extérieur du jet de sortie.

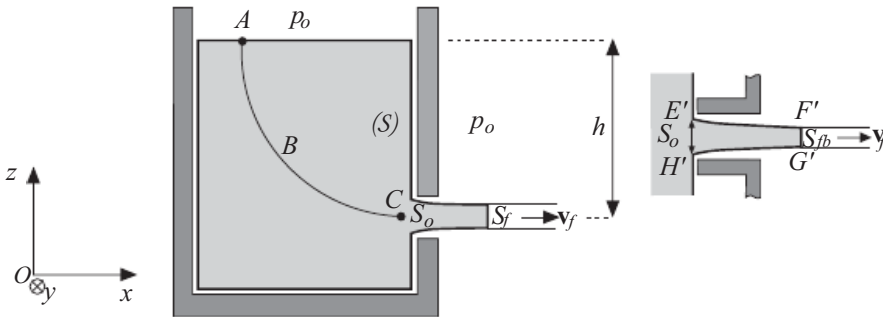


FIG. 5.8 – (a) Jet émergeant d'un réservoir par un orifice circulaire ; (b) ajutage rentrant, dit ajutage de Borda, pour lequel la section finale S_{fb} du jet est égale à la moitié de la section de sortie S_0 .

Détermination de la vitesse dans le jet de sortie

L'expérience montre que le jet se contracte à partir de l'orifice, jusqu'à une valeur minimale que nous notons S_f . Au niveau de cette section minimale, les lignes de courant sont parallèles. La pression a donc, d'après les

relations (5.37), la même valeur p_0 dans le jet qu'à l'extérieur (nous négligeons la variation de pression hydrostatique sur la largeur du jet). Par ailleurs, si la section du récipient est grande devant la section S_f , la vitesse de descente du niveau de liquide est très petite devant la vitesse dans le jet et peut être négligée (en raison de la conservation du débit, la vitesse varie, en effet, comme l'inverse du rapport des surfaces). Soit z_0 la cote correspondant au niveau du fluide dans le récipient et h la différence de niveau par rapport à l'orifice. L'écriture de l'équation de Bernoulli le long de la ligne de courant ABC représentée à la figure 5.8a conduit donc à :

$$p_0 + \rho g z_0 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_f^2 + \rho g (z_0 - h). \quad (5.65)$$

La vitesse v_f au niveau de la section minimale vaut donc :

$$v_f = \sqrt{2gh}. \quad (5.66)$$

On note que v_f a la même valeur que pour la chute d'un corps d'une hauteur h sous l'effet de la pesanteur en l'absence de frottement.

Calcul de la section contractée

La section contractée S_f ne peut être calculée que dans le cas particulier d'un tube rentrant à l'intérieur du récipient (*ajutage de Borda*, représenté à la Fig. 5.8b). Nous montrerons que l'on a alors :

$$S_{fb} = \frac{S_0}{2}. \quad (5.67)$$

Dans le cas d'un orifice percé directement dans la paroi (Fig. 5.8a), les mesures expérimentales montrent que le rapport de la section contractée S_f à la section S_0 de l'orifice vaut environ 0,6. Cette valeur est plus grande que dans le cas du tube rentrant ; cela est dû au fait qu'il existe une dépression sur la paroi au voisinage du point C dans le cas de la figure 5.8a. La force de réaction est donc plus grande que dans le cas de l'ajutage de Borda et le jet, dont le débit équilibre cette réaction et qui a la même vitesse, a une section plus large.

Démonstration. Appliquons l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.13) à l'intérieur d'un volume de contrôle délimité par une surface ($\mathcal{S}$) fixe. Cette dernière est constituée de la surface libre, des parois du récipient « mouillées » par le fluide, de la surface du jet jusqu'à sa section minimale S_{fb} et enfin de S_{fb} elle-même. La composante horizontale de la relation (5.13) s'écrit :

$$\iint_{\mathcal{S}} \rho v_x (v_j n_j) dS + \iint_{\mathcal{S}} p n_x dS = 0. \quad (5.68)$$

La première intégrale vaut simplement $(\rho S_{fb} v_{fb}^2)$. La deuxième peut être calculée grâce à l'hypothèse d'un ajutage de Borda rentrant. La pression p est en effet alors

partout égale à la pression hydrostatique, sauf au niveau de la surface latérale du jet et de sa section, où elle vaut p_0 . Si p avait partout été égale à la pression hydrostatique :

$$p_{\text{hydro}} = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

on aurait obtenu une intégrale $\iint_S p_{\text{hydro}} \mathbf{n} dS$ égale au poids $\mathbf{P}$ du fluide contenu dans (S) (z est la coordonnée verticale du point considéré). Donc la composante suivant Ox de cette intégrale est nulle :

$$\iint_S p_{\text{hydro}} n_x dS = 0. \quad (5.69)$$

Comme p ne diffère de p_{hydro} que sur la partie $E'F'G'H'$ de la surface d'intégration où p est égal à p_0 , on obtient :

$$\iint_S p n_x dS = \iint_S p_{\text{hydro}} n_x dS + \iint_{(E'F'G'H')} (p_0 - p_{\text{hydro}}) n_x dS$$

soit, en utilisant la relation (5.68) et l'équation donnant p_{hydro} :

$$\iint_S p n_x dS = p_0 S_0 - (p_0 + \rho g(z_0 - z)) S_0 = p_0 S_0 - (p_0 + \rho gh) S_0 = -\rho gh S_0. \quad (5.70)$$

La section S_0 de l'orifice est, en effet, égale à l'aire de la projection de la surface $E'F'G'H'$ sur un plan perpendiculaire à Ox ; on a supposé par ailleurs que la variation de $\rho g(z_0 - z)$ sur la section S_0 était négligeable. En reportant (5.70) dans l'équation (5.68), on obtient :

$$\rho S_{fb} v_{fb}^2 = \rho gh S_0. \quad (5.71)$$

L'expression (5.67) en résulte en tenant compte de la valeur de la vitesse v_f donnée par la formule (5.66). ■

Force exercée par le fluide sur le récipient

La force $\mathbf{F}$ exercée par le fluide sur l'ensemble du récipient est égale à l'intégrale des forces de pression sur la surface *mouillée* par le liquide. Pour évaluer sa composante F_x suivant Ox , nous utilisons l'équation (5.70) et nous soustrayons de l'intégrale la composante horizontale des forces de pression sur la partie $E'F'G'H'$ de (S) correspondant au jet libre.

$$F_x = \iint_{\text{parois}} p n_x dS = \iint_S p n_x dS - \iint_{(E'F'G'H')} p_0 n_x dS \quad (5.72)$$

$$\text{soit : } F_x = -(\rho S_{fb} v_f^2 + p_0 S_0) = -(\rho gh + p_0) S_0. \quad (5.73)$$

Il n'est pas surprenant de voir apparaître la pression p_0 dans cette force : en effet, la pression au-dessus de la surface libre intervient nécessairement. En revanche, cette pression extérieure n'apparaît plus dans l'écriture du bilan de toutes les forces exercées sur l'ensemble des parois du récipient, le fluide extérieur (de l'air par exemple) exerçant la pression antagoniste p_0 sur la face extérieure du récipient.

5.4.3 Force sur les parois d'une conduite de révolution de section variable

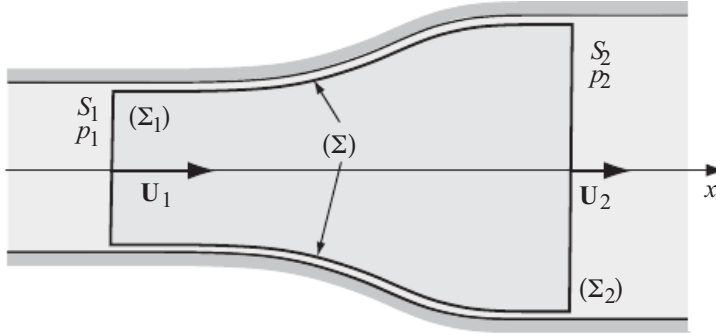


FIG. 5.9 – Détermination de la force exercée sur les parois d'une conduite de révolution à partir du bilan de la quantité de mouvement sur un volume de contrôle limité par l'ensemble (S) des surfaces Σ , Σ_1 et Σ_2 .

Supposons une conduite de révolution autour d'un axe horizontal Ox , terminée à chaque extrémité par des tronçons de sections S_1 et S_2 où les vitesses d'écoulement $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_2$ sont parallèles à Ox (Fig. 5.9). Nous allons montrer que la composante F_x , suivant Ox , des forces exercées sur les parois de la conduite vaut :

$$\begin{aligned} F_x &= p_1(S_1 - S_2) + \frac{1}{2} \rho U_1^2 S_1 \left(2 - \frac{S_2}{S_1} - \frac{S_1}{S_2} \right) \\ &= p_1(S_1 - S_2) - \frac{1}{2} \rho U_1^2 S_1 \left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.74)$$

où p_1 est la pression dans la section d'entrée. Cette équation permet, en utilisant les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, d'exprimer la force F_x simplement en fonction des variables p_1 et U_1 , sans avoir besoin de calculer complètement le champ de vitesse de l'écoulement. Comme précédemment, cette relation néglige l'influence de la viscosité et ne s'applique qu'approximativement aux fluides visqueux.

Démonstration. Choisissons un volume de contrôle fixe, limité par une surface de révolution (S) formée de deux sections normales à Ox (surfaces (Σ_1) et (Σ_2) situées dans les deux zones de section constante de la conduite) et de la portion de paroi située entre celles-la (surface (Σ)). Nous supposons l'écoulement stationnaire, ce qui permet d'utiliser la forme (5.13) de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. En la projetant suivant l'axe Ox , nous obtenons :

$$\iint_S \rho v_x (v_j \cdot n_j) dS + \iint_S p n_x dS - \iint_S \sigma'_{xj} n_j dS = 0. \quad (5.75)$$

Le terme de pesanteur a une projection nulle suivant la direction horizontale Ox et n'apparaît pas dans cette expression. L'intégrale contenant σ'_{xj} se réduit à la

contribution de la paroi latérale (Σ) ; nous négligeons dans la suite ces contributions dues à la viscosité. Séparons, dans le terme $\iint_S p n_x dS$, la contribution des parois du canal (surface (Σ)) de celle des sections (Σ_1) et (Σ_2). Notons $F_{px(\Sigma)}$ la composante suivant Ox de la résultante des forces de pression sur (Σ). On obtient, en regroupant les termes en p et ρv_x^2 intégrés sur une même surface :

$$F_{px(\Sigma)} = \iint_{\Sigma_1} (p + \rho v_x^2) dS - \iint_{\Sigma_2} (p + \rho v_x^2) dS. \quad (5.76)$$

Dans cette expression, on peut remarquer qu'il apparaît, à côté des termes de pression p , des termes de la forme (ρv_x^2) qui correspondent à des contraintes normales dues au mouvement du fluide ; elles représentent le flux $(\rho v_x)v_x$, dans la direction Ox , de la composante ρv_x de la quantité de mouvement suivant cette même direction. Pour finir de déterminer F_x , il suffit alors de connaître la répartition des pressions et des vitesses dans les sections (Σ_1) et (Σ_2).

Dans l'exemple de la conduite représentée par la figure 5.9, on peut appliquer les équations (5.37) dans chacune des zones où les sections (Σ_1) et (Σ_2) sont constantes et égales à S_1 et S_2 : le gradient de pression est réduit dans ces sections au gradient de pression hydrostatique. Il ne contribue pas au mouvement du fluide et peut être négligé dans l'équation précédente. Supposons également les vitesses constantes et égales à U_1 et U_2 dans ces sections, ce qui serait le cas pour un fluide de viscosité négligeable. L'équation (5.76) devient :

$$F_x = [p_1 S_1 + \rho U_1^2 S_1] - [p_2 S_2 + \rho U_2^2 S_2]. \quad (5.77)$$

On voit donc apparaître, en plus des forces de pression, un terme lié à la quantité de mouvement convectée par le fluide en écoulement. Écrivons maintenant la conservation de l'énergie en appliquant l'équation de Bernoulli le long d'une ligne de courant. On obtient :

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (U_1^2 - U_2^2). \quad (5.78)$$

On obtient alors l'équation (5.74) en combinant les équations (5.77) et (5.78) avec la relation de conservation de la masse qui se traduit ici par :

$$U_2 = U_1 S_1 / S_2. \quad (5.79)$$

■

5.4.4 Couches liquides d'épaisseur variable – ressaut hydraulique

Propriétés qualitatives des ressauts hydrauliques

Tout le monde a pu observer l'apparition d'un bourrelet d'eau de forme circulaire au fond d'un évier dans lequel coule l'eau d'un robinet. La figure 5.10 montre un exemple de ce type de bourrelet, appelé *ressaut hydraulique*. Il sépare une zone centrale, où l'épaisseur du fluide est faible, d'une région périphérique, où la hauteur du fluide est plus importante. La limite entre les deux régions correspond au passage de la vitesse d'écoulement $U(x)$ d'une valeur supérieure à la vitesse locale des ondes de surface à une valeur inférieure. Nous

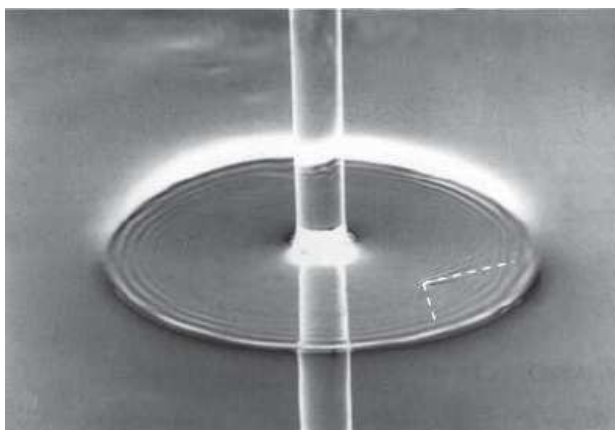


FIG. 5.10 – Formation d'un bourrelet de type ressaut hydraulique lorsqu'un jet d'eau rencontre un plan solide horizontal. La vitesse du liquide dans la partie centrale excède celle des ondes de surface, puis devient inférieure à cette dernière au-delà du bourrelet. On distingue dans la partie centrale droite une ride en « V » ouvert vers l'extérieur (lignes pointillées), due à une imperfection sur le plan, qui correspond à un effet d'onde de choc un peu comparable au « bang » supersonique d'un avion (doc. S. Middleman).

verrons, dans la section 6.4, que $c = \sqrt{gh}$ représente la vitesse locale de ces *ondes de gravité* à la surface d'un film de fluide d'épaisseur h ; dans le même temps, lorsque l'épaisseur croît, la vitesse du fluide décroît et celle des ondes augmente.

À plus grande échelle, on observe souvent des ressauts hydrauliques dans les déversoirs en aval des barrages. Par ailleurs, une vague déferlante représente un type mobile de ressaut : ce dernier se déplace ici à la vitesse de la zone de déferlement ; il faut se placer dans un référentiel fixe par rapport à elle pour appliquer les modèles théoriques développés plus loin. Un autre ressaut mobile particulièrement spectaculaire est le mascaret qui peut apparaître à la rencontre du courant d'un fleuve et de la marée montante (Fig. 5.11 CC).

Remarque. Le mascaret n'est observé que dans quelques sites dans le monde. Il faut, en effet, associer des marées de grande amplitude, un estuaire « en entonnoir » avec un fort élargissement à l'embouchure, une pente douce et une faible hauteur d'eau.

On caractérise quantitativement le ressaut par le rapport des vitesses du fluide et de l'onde de surface, appelé *nombre de Froude* :

$$F_r = \frac{U(x)}{\sqrt{gh(x)}}. \quad (5.80)$$

Dans l'expérience de la figure 5.10, le nombre de Froude passe d'une valeur supérieure à l'unité près du centre à une valeur inférieure à la périphérie.

Ce phénomène est analogue à l'onde de choc qui se forme près d'un avion supersonique et qui correspond au passage de la vitesse de l'air d'une valeur supérieure à une valeur inférieure à celle du son. Le nombre de Mach, $M = v/c$ où c représente la vitesse du son, est l'analogue du nombre de Froude Fr . D'ailleurs, on observe souvent derrière l'obstacle la formation d'un « V » caractéristique (Fig. 5.10) dont l'angle dépend, comme pour les écoulements compressibles, du rapport entre la vitesse du fluide et celle des ondes de surface.

Couche liquide en écoulement au-dessus d'un obstacle

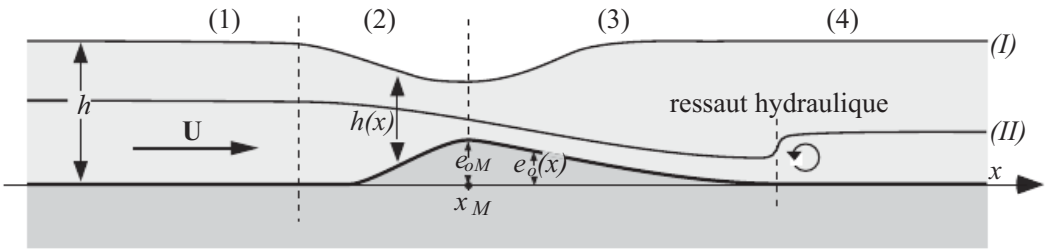


FIG. 5.12 – Passage d'un écoulement liquide au-dessus d'un obstacle dans les deux cas du calcul. Cas I : nombre de Froude inférieur à 1 ; cas II : nombre de Froude supérieur à 1. La zone (1) de faible vitesse est suivie d'une zone (2) d'accélération, puis d'une zone (3) de grande vitesse en amont du ressaut et, enfin, d'une zone (4) de faible vitesse en aval du ressaut.

Des ressauts hydrauliques peuvent apparaître en aval d'un obstacle dans des couches liquides en écoulement, comme cela est représenté schématiquement sur la figure 5.12. Appelons h le niveau initial du fluide, $h(x)$ la variation avec la distance de l'épaisseur de la couche de fluide, $e_o(x)$ la hauteur du fond et supposons la vitesse $U(x)$ uniforme dans toutes les sections verticales de l'écoulement.

Analysons tout d'abord l'évolution de $U(x)$ et $h(x)$ avec la distance au niveau de l'obstacle (zone 1 – 3 sur la figure 5.12). $U(x)$ est reliée à $e_o(x)$ par :

$$\frac{1}{U(x)} \frac{\partial U(x)}{\partial x} (-gh(x) + U^2(x)) + g \frac{\partial e_o(x)}{\partial x} = 0. \quad (5.81)$$

Démonstration. Les deux équations qui suivent expriment la conservation du débit et l'équation de Bernoulli le long d'une ligne de courant passant près de la surface au-dessus de laquelle la pression atmosphérique a la valeur constante p_0 :

$$U h = U(x) h(x) \quad \text{et} \quad p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2(x) + \rho g (h(x) + e_o(x)).$$

En dérivant ces deux relations par rapport à x , on obtient :

$$U(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x} + h(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \rho U(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x} + \rho g \frac{\partial h(x)}{\partial x} + \rho g \frac{\partial e_o(x)}{\partial x} = 0.$$

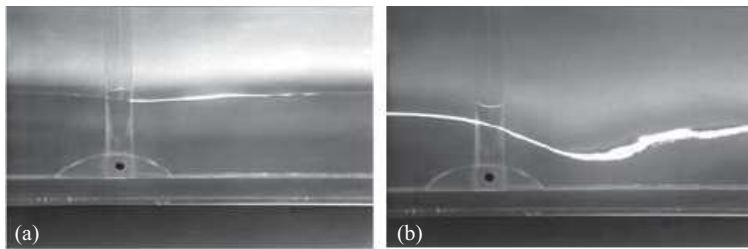


FIG. 5.13 – Écoulement d'un liquide au-dessus d'un obstacle dans un canal rectangulaire ; (a) cas où le nombre de Froude reste partout plus petit que 1 ; (b) cas où l'écoulement est supercritique en aval du point de hauteur maximale du fond (clichés M. Devillers, ENSTA).

On obtient alors l'équation (5.81) en combinant ces deux dernières relations pour éliminer $\partial h / \partial x$. ■

Supposons l'écoulement initialement assez lent et l'épaisseur assez grande pour que l'on ait :

$$U^2 - gh < 0 \text{ (ou } Fr < 1 \text{)}.$$

On voit apparaître deux comportements possibles au moment où l'écoulement passe au-dessus du point x_M , la hauteur de fond atteignant son maximum e_{0M} tel que $(\partial e_0 / \partial x) = 0$. L'équation (5.81) peut, en effet, être vérifiée de deux manières :

- (i) $\partial U(x) / \partial x = 0$; dans ce cas, on a également $(\partial h(x) / \partial x) = 0$, d'après l'équation de conservation de la masse (cas I de la figure 5.12 et photo (a) de la figure 5.13). Après passage par le point de hauteur de fond maximale, l'épaisseur de la couche fluide augmente à nouveau et la vitesse rejoint sa valeur initiale U ;
- (ii) $U^2(x) = gh(x)$; dans ce cas, $\partial U(x) / \partial x$ ne change plus de signe et la vitesse continue d'augmenter (et l'épaisseur de fluide de diminuer), après passage par le point x_M . L'équation (5.81) peut donc toujours être vérifiée car $U^2(x) - gh(x)$ devient positif et $(\partial e_o / \partial x)$ change également de signe en passant par le point $x = x_M$ (cas II de la figure 5.12 et photo (b) de la figure 5.13).

On voit le rôle clé joué par le nombre de Froude dans ces phénomènes. Dans le cas (i), le nombre de Froude reste toujours inférieur à l'unité ; dans le cas (ii), il augmente et passe par la valeur 1 *exactement* au point x_M , puis devient supérieur à 1 (écoulement supercritique). Nous discuterons plus loin le retour du fluide à un écoulement calme sous forte épaisseur qui se fait de manière brusque par un ressaut hydraulique (Figs. 5.12 et 5.13b). On peut observer le passage d'un comportement à l'autre en augmentant progressivement la vitesse du fluide à épaisseur constante jusqu'à ce que l'on atteigne la valeur $Fr = 1$ à l'abscisse x_M .

La discussion précédente indique qu'il y a deux valeurs différentes possibles de vitesse et d'épaisseur de fluide, pour une même hauteur $e_o(x)$ du fond à débit fixé : l'une correspond à un nombre de Froude Fr supérieur à 1, l'autre à un nombre Fr' inférieur à 1. Dans le cas particulier $e_0 = 0$ (zone éloignée en aval de l'obstacle, où U' est la vitesse et h' l'épaisseur de liquide), on trouve une deuxième solution $Fr' \neq Fr$ telle que :

$$Fr^{2/3} Fr'^{2/3} (Fr^{2/3} + Fr'^{2/3}) = 2. \quad (5.82)$$

Si Fr est inférieur à 1, cette équation ne peut effectivement être vérifiée que si Fr' est supérieur à 1 ; en effet, dans le cas contraire, la somme est inférieure à 2 et les deux facteurs du produit sont plus petits que 1.

Démonstration. Récrivons l'équation (5.81) en éliminant la hauteur $h(x)$ à l'aide de la relation $Q = U(x)h(x)$. On obtient :

$$gQ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{U(x)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial [U(x)]^2}{\partial x} + g \frac{\partial e_o(x)}{\partial x} = 0.$$

soit, après intégration entre deux points situés loin en amont et en aval de l'obstacle où les vitesses sont U et U' et $e_0(x) = 0$:

$$gQ \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{U'} \right) + \frac{1}{2} (U^2 - U'^2) = 0.$$

Cette équation est vérifiée lorsque $U = U'$ ou lorsque :

$$gQ = UU' \frac{U + U'}{2}. \quad (5.83)$$

En récrivant cette dernière expression à l'aide des nombres de Froude mis sous la forme :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gh}} = \frac{U^{3/2}}{\sqrt{gUh}} \quad \text{et} \quad Fr' = \frac{U'}{\sqrt{gh'}} = \frac{U'^{3/2}}{\sqrt{gU'h'}}.$$

En utilisant les relations $Q = Uh = U'h'$, on obtient alors l'équation (5.82) à partir de (5.83) après simplification par gQ . ■

Analogie avec les écoulements compressibles et les ondes de choc

Au début de la section 5.4.4, nous avons souligné l'analogie étroite de ces problèmes avec les écoulements compressibles. Le dispositif équivalent à celui que nous venons de décrire est la tuyère convergente-divergente (dite de Delaval) représentée sur la figure 5.14, et l'analogie du nombre de Froude est le nombre de Mach.

Pour les faibles débits, la vitesse de l'écoulement reste inférieure, dans toute la tuyère, à la vitesse du son et elle est maximale au point de plus faible section – le *col* – (écoulement équivalent au cas (a) de la Fig. 5.13). À partir du moment où la vitesse devient égale à la vitesse du son en ce point ($M = 1$), elle continue à augmenter avec la distance, et devient supersonique en aval ;

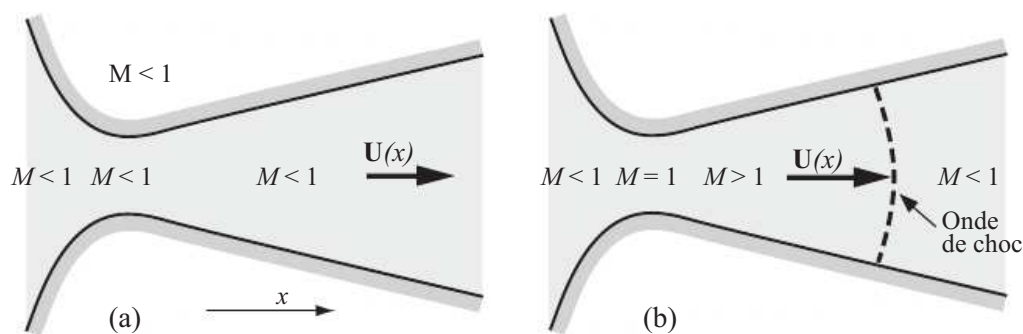


FIG. 5.14 – Écoulement d’un fluide compressible dans une tuyère convergente-divergente; (a) cas où l’écoulement reste subsonique dans toute la tuyère; (b) cas où la vitesse de l’écoulement atteint la vitesse du son au point d’étranglement maximal. La ligne en tirets représente l’onde de choc.

cette augmentation de vitesse est induite par une diminution continue de la pression du gaz qui permet de conserver le débit massique. Plus en aval, il apparaît une onde de choc où se produit la transition vers les zones de plus forte pression où le nombre de Mach est plus petit que 1. Cette onde de choc est l’analogue du ressaut hydraulique montré sur les figures 5.12 et 5.13, que nous allons étudier maintenant.

Ressaut hydraulique – Équations de conservation

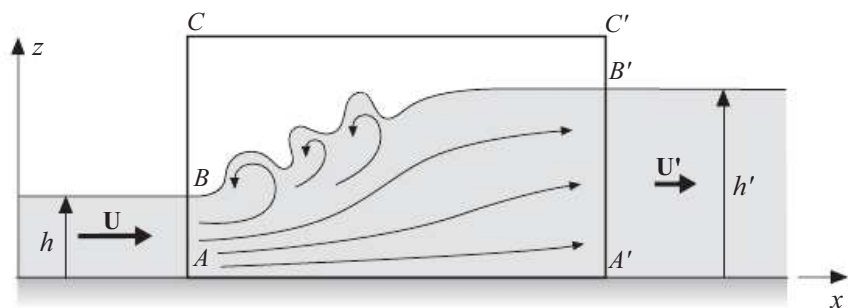


FIG. 5.15 – Ressaut hydraulique. La vitesse U du fluide en amont du ressaut est supérieure à la célérité $\sqrt{gh}$ des ondes de surface, tandis que la vitesse U' en aval lui est inférieure. On a représenté le volume de contrôle $ACC'A$ dans lequel est évalué le bilan de la quantité de mouvement.

Comme nous l’avons mentionné plus haut, un ressaut hydraulique correspond au passage brusque d’un écoulement d’un nombre de Froude > 1 à un nombre < 1 . Au contraire de la discussion précédente de la variation de $h(x)$ au-dessus d’un obstacle, on ne peut plus appliquer l’équation de Bernoulli car on a une forte dissipation d’énergie au niveau du ressaut. On utilise donc simplement la conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement.

Sur la figure 5.15, on schématise un ressaut hydraulique avec deux sections où l'écoulement est parallèle et uniforme, de vitesse U et U' en amont et en aval respectivement. On établit alors la relation suivante entre U , U' et les hauteurs h et h' en amont et en aval du ressaut :

$$U' = \sqrt{g \frac{h}{h'} \frac{(h+h')}{2}}, \quad (5.84a) \quad U = \sqrt{g \frac{h'}{h} \frac{(h+h')}{2}}. \quad (5.84b)$$

Par une élévation au carré suivie d'une soustraction, on trouve que U et U' vérifient :

$$U' < \sqrt{gh'} \quad (5.85a) \quad \text{et} : \quad U > \sqrt{gh} \quad (5.85b)$$

dès lors que h est plus petit que h' . L'écoulement est donc bien supercritique (vitesse supérieure à la vitesse des ondes de surface) dans la partie du ressaut où l'épaisseur est la plus mince, et sous-critique dans l'autre. Physiquement, ce résultat signifie que le ressaut va être une structure stable. Les ondelettes qui s'en échapperaient vers l'amont dans la zone supercritique, en emmenant une partie de l'énergie, seront ramenées par l'écoulement, qui est plus rapide qu'elles. Celles qui seraient entraînées vers l'aval par l'écoulement seront assez rapides pour remonter le courant et retourner dans le ressaut.

Démonstration. Comme précédemment, nous utilisons l'équation (5.13) qui exprime la conservation de la quantité de mouvement en supposant l'écoulement stationnaire et la viscosité nulle. Nous choisissons un volume de contrôle limité par la surface (S) de trace $ACC'A'A$ dans le plan de figure et d'épaisseur unité dans la direction perpendiculaire. Notons qu'une partie du volume de contrôle est dans l'air et que, de ce fait, il est soumis à la pression atmosphérique p_0 . Supposons la vitesse d'écoulement uniforme et égale à U et U' dans les sections AB et $A'B'$ du contour, qui sont les seules à travers lesquelles le flux d'écoulement est non nul ; on obtient :

$$\iint_S \rho v_x (v_j n_j) dS = \rho U'^2 h' - \rho U^2 h. \quad (5.86)$$

Comme précédemment, on détermine la pression p sur AB et $A'B'$ à partir des relations (5.37) :

$$\text{avec } p = p_0 + \rho g (h - z) \quad \text{et} \quad p' = p_0 + \rho g (h' - z).$$

En ajoutant un terme $-p_0 (h' - h)$, correspondant à l'intégrale de p_0 sur la section BC , on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_S p n_x dS &= p_0 (h - h') - \int_0^h (p_0 + \rho g (h - z)) dz + \int_0^{h'} (p_0 + \rho g (h' - z)) dz \\ &= \frac{\rho g}{2} (h'^2 - h^2). \end{aligned} \quad (5.87)$$

L'équation (5.13) s'écrit donc, compte tenu des équations (5.86) et (5.87), et en négligeant la viscosité :

$$(U'^2 h' - U^2 h) + \frac{g}{2} (h'^2 - h^2) = 0. \quad (5.88)$$

L'égalité des débits en amont et en aval du ressaut (conservation de la masse) donne, par ailleurs :

$$U'h' = Uh. \quad (5.89)$$

En utilisant (5.89), pour éliminer U' (ou U) dans l'équation (5.88), on obtient alors les relations (5.84). ■

Rapport entre les niveaux de fluide et les vitesses de part et d'autre du ressaut

Afin de déterminer le rapport h'/h , nous récrivons l'équation (5.84b) sous la forme :

$$gh'^2 + gh h' - 2U^2 h = 0. \quad (5.90)$$

En prenant la racine positive de cette équation du second degré en h' , on trouve :

$$\frac{h'}{h} = \frac{U}{U'} = \frac{-gh + \sqrt{(gh)^2 + 8U^2 gh}}{-gh} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8Fr^2}}{2}. \quad (5.91)$$

Fr est le nombre de Froude de l'écoulement en amont. On vérifie de nouveau que, si h'/h est supérieur à 1, cela implique que Fr est plus grand que 1, et que l'écoulement est supercritique en amont du ressaut. Remarquons également que, pour $Fr = 1$, on trouve $h' = h$, ce qui correspond à la limite d'un ressaut d'amplitude infiniment faible où les deux vitesses sont voisines de $\sqrt{gh}$.

This page intentionally left blank

Chapitre 6

Écoulements potentiels

Les écoulements potentiels, c'est-à-dire ceux pour lesquels le champ de vitesse est irrotationnel, ont été très étudiés en raison de leur présence fréquente dans les écoulements des fluides parfaits sans viscosité, « l'eau sèche », comme les dénommait R. Feynman dans son Cours de physique. Si un écoulement de tels fluides est irrotationnel à un instant donné, il le reste en effet ensuite de manière permanente. Nous verrons aussi dans la section 6.1 que certains écoulements de fluides visqueux peuvent être considérés comme approximativement irrotationnels, au moins dans une grande partie de leur volume. Nous introduisons ensuite le potentiel des vitesses ainsi que ses propriétés (section 6.2), et nous en donnons quelques exemples. Puis, nous traitons de manière plus générale le problème de l'écoulement potentiel autour d'un obstacle de forme quelconque (section 6.3). Nous étudions ensuite le problème des ondes linéaires à la surface d'un fluide qui constitue un cas particulier d'écoulement potentiel (section 6.4). L'analogie des écoulements potentiels avec l'électromagnétisme est étudiée à la section 6.5 suivante. Puis, nous introduisons le potentiel complexe (section 6.6) et nous l'illustrons par quelques exemples. Enfin, l'utilisation de la méthode de la transformation conforme pour la détermination d'écoulements sera présentée.

6.1 Introduction

Ce sont tout d'abord les fluides parfaits (non visqueux) qui donnent lieu à des écoulements potentiels. Comme nous l'avons vu dans la section 4.2.3, leur mouvement est décrit par :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \rho \mathbf{f} - \text{grad } p. \quad (6.1)$$

Un *écoulement potentiel* d'un fluide parfait sera tel que le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ dérive d'un *potentiel de vitesse* $\Phi(\mathbf{r}, t)$ avec :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \text{grad } \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (6.2)$$

La vitesse d'écoulement $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ doit donc à la fois vérifier l'équation d'Euler et la condition d'irrotationnalité $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ imposée par l'équation (6.2). Nous démontrerons à la section 7.2.1 à partir de l'équation d'Euler que, si un écoulement d'un fluide parfait est irrotationnel à un instant donné (par exemple si le fluide est initialement au repos avec $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv 0$), il le restera ensuite à tout instant à condition que les forces extérieures en volume dérivent, elles aussi, d'un potentiel et que la densité du fluide soit constante (ou fonction seulement de la pression). Sous ces conditions, les écoulements potentiels de fluides parfaits peuvent subsister de manière permanente et on peut, de plus, appliquer la forme (5.36) du théorème de Bernoulli établie à la section 5.3.2 :

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + p + \rho \varphi = \text{cte dans le volume de l'écoulement}$$

où φ est le potentiel dont dérivent les forces en volume (souvent les forces de pesanteur). Cette équation permet de déterminer, par intégration, le potentiel de vitesse à un instant quelconque à partir de sa valeur à un instant donné : cela est cohérent avec la permanence de tels écoulements potentiels. Remarquons que la détermination mathématique du champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ est analogue à celle du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ dans un problème d'électrostatique, ou d'électrocinétique à fréquence suffisamment faible pour que $\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$. La relation (6.2) est ainsi analogue, au signe près, à la relation entre le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et le potentiel $V(\mathbf{r})$.

Du point de vue expérimental, nous avons indiqué dans la section 4.2.3 que le seul fluide réel dont les propriétés s'approchent de celles du fluide parfait est l'hélium liquide superfluide. Nous discuterons en annexe à la fin du chapitre 7 les caractéristiques des écoulements superfluides, qui satisfont la condition d'irrotationnalité, sauf sur des lignes singulières (tourbillons quantiques) où est concentrée la vorticité.

Par ailleurs, les fluides visqueux peuvent, eux aussi, donner lieu à des écoulements approximativement potentiels, au moins dans une partie de leur volume. C'est tout d'abord le cas lorsque les perturbations du champ de vitesse dues à la condition de vitesse tangentielle nulle des fluides visqueux sur une paroi solide n'ont pas le temps de diffuser par viscosité pendant le temps de passage du fluide. Ainsi, les écoulements *non turbulents*    grands nombres de Reynolds seront souvent potentiels en dehors d'une couche limite de faible épaisseur près des parois et d'un sillage en aval des obstacles : ces écoulements seront décrits au chapitre 10.

On a des résultats similaires pour des écoulements alternés de fréquence élevée ($\omega = 2\pi/T$) autour d'un corps de longueur caractéristique L : dans ce cas, l'écoulement ainsi créé sera approximativement potentiel si la distance de diffusion des gradients de vitesse créés par la condition de vitesse nulle est

faible devant L (cette distance de diffusion est de l'ordre de $\sqrt{\nu T}$ comme on l'a vu dans la section 2.1.2). Il en sera de même pour l'écoulement autour d'un corps mis brusquement en mouvement qui sera aussi approximativement potentiel pendant une phase transitoire de durée T vérifiant une relation similaire.

La présence de surfaces libres peut aussi favoriser l'apparition d'écoulements presque potentiels : en effet, on a vu dans la section 4.3.2, que, comme pour un fluide parfait, on n'impose pas de condition de vitesse tangentielle nulle sur ces surfaces. On peut donc avoir mise en mouvement du fluide sans apparition d'un gradient de vitesse (et donc d'un rotationnel non nul près de la paroi). Un exemple de tels écoulements est fourni par les *bulles de Taylor* (grosses bulles lâchées dans des tubes de diamètre voisin de celui de la bulle et que nous étudierons dans la section 6.4.4).

6.2 Définitions, propriétés et exemples d'écoulements potentiels

6.2.1 Caractéristiques et exemples de potentiels de vitesse

Si on suppose l'écoulement incompressible (relation 3.28), la relation (6.2) devient :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} [\mathbf{grad} \Phi(\mathbf{r})] = \Delta \Phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.3)$$

En électrostatique, ce cas correspond à un champ obtenu en l'absence de charges libres. La recherche du champ de vitesse vectoriel se ramène à celle des solutions potentielles scalaires de l'équation de Laplace ; nous bénéficions pour cela de tout l'arsenal des méthodes développées en électrostatique (nous avons déjà mentionné cette équivalence à la section 3.3.3).

Les *conditions aux limites* portent sur la composante normale $v_{\mathbf{n}}$ de la vitesse relative par rapport aux parois solides. L'absence de débit de fluide à travers une paroi immobile $\mathcal{S}$ impose la condition :

$$[v_{\mathbf{n}}]_{\mathcal{S}} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{\mathcal{S}} = 0. \quad (6.4)$$

À l'interface $\mathcal{S}$ entre deux fluides parfaits 1 et 2, la condition aux limites $v_{\mathbf{n}1} = v_{\mathbf{n}2}$ s'exprime par

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right]_{\mathcal{S}} = \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right]_{\mathcal{S}}. \quad (6.5)$$

Il n'y a pas de condition aux limites sur la composante tangentielle de la vitesse en raison de l'absence de forces de viscosité : c'est en effet la viscosité qui impose l'égalité de ces composantes dans les fluides réels, comme nous l'avons vu à la section 4.3.1.

6.2.2 Unicité du potentiel des vitesses

Là encore, nous allons retrouver les démonstrations classiques d'électrostatique. Dans un volume de fluide *simplement connexe* (figure 6.1a), il existe un seul champ de vitesse, potentiel et incompressible, qui correspond à des composantes de vitesse normales données sur les surfaces solides et à une vitesse donnée à l'infini.

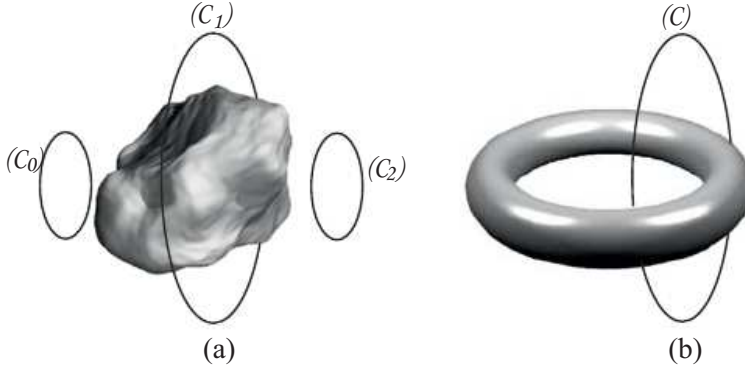


FIG. 6.1 – (a) Exemple de volume de fluide simplement connexe : l'aire des courbes (C) peut être rendue nulle par déformation continue sans couper la surface solide. (b) Volume de fluide doublement connexe : on ne peut rendre nulle l'aire de la courbe (C) par déformation continue de celle-ci.

Démonstration. Soient deux champs de vitesse $\mathbf{v}_1 = \mathbf{grad} \Phi_1$ et $\mathbf{v}_2 = \mathbf{grad} \Phi_2$ correspondant aux mêmes conditions aux limites. Montrons que l'intégrale $\iiint (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 d\tau$ prise sur tout le volume de l'écoulement est nulle. Cela entraînera que les champs de vitesse $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont identiques. Notons $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ et $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$. Nous obtenons :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{grad} \Phi) d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\mathbf{v} \Phi) d\tau - \iiint_{\mathcal{V}} \Phi \text{div} \mathbf{v} d\tau.$$

La deuxième intégrale au second membre est nulle car $\text{div} \mathbf{v} = 0$. La première se transforme en intégrale de surface sur les parois solides et à l'infini :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\mathbf{v} \Phi) d\tau = \iint_{\mathcal{S}} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

L'intégrale est nulle sur les surfaces solides d'après la condition aux limites sur la composante normale de la vitesse qui entraîne que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. Elle est aussi nulle à l'infini car, comme nous le verrons à la section 6.2.4, l'influence sur le champ de vitesse de la présence des obstacles décroît comme $1/r^3$ avec la distance r à ceux-ci ; par suite, l'intégrale de ces termes sur une surface sphérique d'aire proportionnelle à r^2 tend vers 0 à grande distance.

Une méthode similaire à celle qui vient d'être utilisée permet de démontrer que le champ de vitesse de cet écoulement est celui qui minimise l'énergie cinétique totale, parmi ceux vérifiant à la fois $\text{div} \mathbf{v} = 0$ et les conditions aux limites pour la vitesse sur les parois et à l'infini. ■

Le volume de fluide sera *multiplement connexe* pour des parois solides dont une des dimensions est infinie (par exemple un cylindre infiniment allongé), ou pour des parois de géométrie torique (Figs. 6.1b et 6.2). Dans ces deux cas, on peut tracer une courbe fermée (C) *entièrement contenue dans le fluide*, dont on ne peut pas rendre nulle l'aire en la déformant continûment. Dans ce cas, on ne peut définir le potentiel de vitesse Φ de manière non ambiguë, car la *circulation* de la vitesse le long du contour (C) :

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_C (\mathbf{grad} \Phi) \cdot d\mathbf{l}$$

peut prendre une valeur finie Γ quelconque.

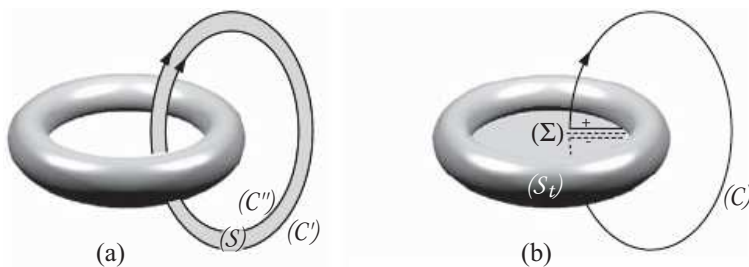


FIG. 6.2 – Géométrie d'écoulement utilisée pour la démonstration de l'unicité des solutions de l'équation de Laplace, dans le cas d'un volume de fluide doublement connexe. (a) Égalité des circulations de la vitesse le long des courbes (C') et (C'') . La surface (S) s'appuie sur les deux courbes (C') et (C'') . (b) Calcul de l'intégrale de $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2$ sur le volume du fluide dont on exclut le volume infinitésimal situé entre les deux surfaces Σ^+ et Σ^- , infiniment proches de part et d'autre de (Σ) (pour plus de clarté, on n'a représenté que les intersections de ces deux surfaces avec la surface s'appuyant sur le contour (C)).

Démonstration. Limitons-nous à une géométrie telle que celle représentée à la figure 6.2. On suppose que le volume de fluide contient un solide en forme de tore de surface extérieure (S_t) . Analysons le calcul de Φ à partir de l'intégrale de la vitesse le long d'une courbe fermée (C) (figure 6.2b).

Montrons d'abord que, bien que l'écoulement soit potentiel et que la vitesse $\mathbf{v}$ du fluide soit bien définie en tout point, sa circulation $\Gamma = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ le long de la courbe (C) n'est plus nécessairement nulle. Appliquons le théorème de Stokes sous la forme :

$$\Gamma = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\mathbf{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Cette expression relie la circulation de la vitesse $\mathbf{v}$ le long de la courbe (C) au flux de $\mathbf{rot} \mathbf{v}$ à travers une surface (S) s'appuyant sur cette courbe. Pour que (S) soit complètement incluse dans le fluide, il faudra, soit que le chemin d'intégration (C) n'entoure pas la surface torique (S_t) , soit que la surface (S) soit comprise entre les deux courbes (C') et (C'') entourant toutes les deux la surface (S_t) (c'est l'ensemble

de ces deux courbes qui représente alors le contour ($\mathcal{C}$). C'est ce dernier cas qu'on a réalisé à la figure 6.2a pour la surface ($\mathcal{S}$). On a alors :

$$\iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{C}''} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\mathcal{C}'} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

On ne peut donc dans ce cas déterminer la valeur de la circulation $\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$, on a seulement montré que, pour un écoulement donné, elle était la même pour deux courbes telles que ($\mathcal{C}'$) et ($\mathcal{C}''$) entourant une fois le tore ($\mathcal{S}_t$) dans le même sens.

Si Γ est différent de zéro, on ne peut définir de fonction potentiel Φ univaluée. En effet, l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ vérifie :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{grad} \Phi) \cdot d\mathbf{l} = \delta\Phi = \Gamma$$

où $\delta\Phi$ est la variation globale de Φ lorsqu'on parcourt complètement la courbe ($\mathcal{C}$) sur toute sa longueur. Le fait que $\delta\Phi$ soit différent de zéro signifie que la fonction Φ est multivaluée et définie à Γ près : on en tient compte en supposant qu'il y a sur la courbe ($\mathcal{C}$) un point où la fonction est discontinue et varie de $+\Gamma$ ou $-\Gamma$ suivant le sens de passage. Comme la position de ce point est arbitraire, on suppose que la discontinuité a lieu pour toutes les courbes à leur point d'intersection avec une même surface (Σ) bloquant le passage à l'intérieur du tore (la trace de (Σ) est représentée en gris léger sur la figure 6.2b). Cette approche est similaire à celle utilisée pour définir un angle polaire de repérage dans un plan.

Démontrons maintenant qu'il y a un seul champ de vitesse potentiel correspondant à une valeur de Γ donnée. Calculons pour cela l'intégrale $\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 d\tau$ sur un volume ($\mathcal{V}$) (figure 6.2b), limité par la surface ($\mathcal{S}_t$), par deux surfaces d'intégration supplémentaires (Σ^+) et (Σ^-) et s'étendant jusqu'à l'infini : (Σ^+) et (Σ^-) sont supposées infiniment proches de (Σ) et situées de part et d'autre. Reprenons la même démarche que, plus haut, dans le cas d'un volume simplement connecté, on a :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 d\tau = \iint_{\mathcal{S}} (\Phi_1 - \Phi_2) (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n} dS.$$

La surface d'intégration ($\mathcal{S}$) limitant le volume ($\mathcal{V}$) est constituée des surfaces ($\mathcal{S}_t$), (Σ^+) et (Σ^-) et d'une surface à l'infini. Comme $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ ont une composante normale nulle sur ($\mathcal{S}_t$) et que l'intégrale à l'infini s'annule comme dans le cas simplement connexe, seules interviendront les intégrales sur les surfaces (Σ^+) et (Σ^-). $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont continues sur la surface (Σ) et ont donc la même valeur sur (Σ), (Σ^+) et (Σ^-). Donc :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 d\tau = \iint_{\Sigma} (\Phi_{1+} - \Phi_{1-} - \Phi_{2+} + \Phi_{2-}) (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Par ailleurs, la différence $\Phi_+ - \Phi_-$ entre les valeurs de Φ en deux points correspondants des surfaces (Σ^+) et (Σ^-), est égale à Γ . On a donc :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 d\tau = \iint_{\Sigma} (\Gamma_1 - \Gamma_2) (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n} dS = (\Gamma_1 - \Gamma_2) (Q_1 - Q_2)$$

où Q_1 et Q_2 représentent les flux des deux champs de vitesse à travers la surface (Σ). Il suffit donc d'imposer, en plus des conditions aux limites de vitesse normale nulle aux parois, la valeur de la circulation Γ pour assurer l'unicité de la solution : en effet, si $\Gamma_1 = \Gamma_2$, on a $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. ■

Remarque. Le problème de géométries doublement connexes se retrouve en magnétisme des courants. La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé qui entoure un fil infiniment long ou une boucle, parcourus par un courant, est indépendante du contour d'après le théorème d'Ampère (pour un nombre donné de tours autour du fil ou de traversées de la boucle dans une même direction).

6.2.3 Potentiels des vitesses des écoulements élémentaires et combinaison des fonctions potentielles

Nous allons maintenant étudier quatre écoulements élémentaires : l'écoulement uniforme, la source, le tourbillon et le dipôle. Nous analyserons ensuite comment les champs de vitesse de ces écoulements simples peuvent être combinés pour résoudre des problèmes plus complexes. Nous donnerons enfin quelques exemples de champs de vitesse autour d'objets de forme simple (section 6.2.4). Comme nous avons affaire à des fluides incompressibles, nous déterminerons également la fonction de courant de ces écoulements qui a été définie à la section 3.4. Un tableau des potentiels des vitesses et des fonctions de courant pour les écoulements les plus classiques est présenté en annexe de ce chapitre.

Écoulement parallèle uniforme

Considérons l'écoulement uniforme de vitesse U dans la direction x , dont les composantes de vitesse s'écrivent :

$$v_x = U = \text{cte} ; v_y = 0 \text{ pour un écoulement à deux dimensions.}$$

$$\text{et } v_x = U = \text{cte} ; v_z = v_y = 0 \text{ pour un écoulement à trois dimensions.}$$

À deux dimensions, on a, d'après les équations (3.38) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x = U \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_y = 0$$

d'où :

$$\Phi = U x \tag{6.6a}$$

et :

$$\Psi = U y. \tag{6.6b}$$

Les *lignes de courant* ($\Psi = \text{cte}$) sont donc des droites parallèles à la direction Ox (et, par conséquent, comme on pouvait s'y attendre, à la vitesse $\mathbf{U}$). Les *équipotentiels* ($\Phi = \text{cte}$) sont, elles, des droites parallèles à la direction Ox (et perpendiculaires aux lignes de courant).

À trois dimensions, l'écoulement étant axisymétrique, on peut obtenir un résultat similaire en utilisant la fonction de courant de Stokes Ψ que nous

avons définie dans la section 3.4. Nous supposons toujours l'écoulement dirigé suivant l'axe Ox .

– En coordonnées cylindriques (r, θ, x) , on obtient, en utilisant les équations (3.50) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = v_x = U \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_r = 0$$

d'où :

$$\Phi = Ux \quad (6.7a)$$

et

$$\Psi = -U \frac{r^2}{2}. \quad (6.7b)$$

– En coordonnées sphériques (r, φ, θ) , on a de même, à partir des équations (3.52) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = v_r = U \cos \varphi \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = v_\varphi = -U \sin \varphi$$

d'où :

$$\Phi = Ur \cos \varphi \quad (6.8a)$$

et

$$\Psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \varphi. \quad (6.8b)$$

Rappelons que les lignes (ou surfaces) d'équation $\Psi = \text{cte}$ sont des lignes (ou surfaces) de courant de l'écoulement ; elles ont pour équations $r = \text{cte}$, et $r \sin \varphi = \text{cte}$, respectivement en coordonnées cylindriques et sphériques. Elles sont parallèles à la direction de la vitesse $\mathbf{U}$. Les lignes équipotentielles, pour un écoulement à deux dimensions (ou les surfaces pour trois dimensions), sont les droites (respectivement les plans) perpendiculaires à cette direction.

Tourbillon

L'écoulement plan tourbillonnaire est un écoulement autour d'un axe perpendiculaire en O au plan xOy . Le champ de vitesse est orthoradial (c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe et au rayon vecteur), et les composantes v_r et v_θ vérifient en coordonnées polaires :

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

ou, d'après les équations (3.39a & b) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = v_r = 0.$$

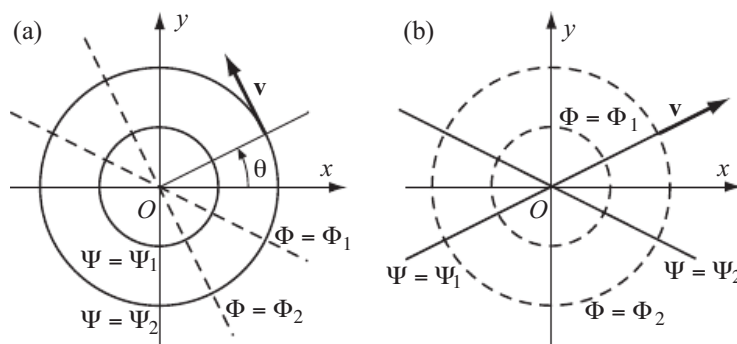


FIG. 6.3 – Lignes de courant et lignes équipotentielle a) pour un écoulement plan tourbillonnaire autour de l'axe Oz . b) Pour un écoulement induit par une source située sur l'origine des axes de coordonnées.

Calculons la circulation de la vitesse autour d'un cercle ($\mathcal{C}$) de rayon r centré en O , on trouve :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta = \Gamma.$$

Γ représente donc la circulation sur toute courbe entourant une fois l'origine. On obtient :

$$\Phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (6.9a)$$

et :

$$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log} \frac{r}{r_0}, \quad (6.9b)$$

où r_0 est une constante arbitraire (Ψ et Φ sont en effet définies à une constante additive près), qui permet de respecter l'absence d'unité de l'argument du logarithme. Les lignes de courant et les équipotentielles sont représentées sur la figure 6.3(a).

Notons que nous avons un écoulement doublement connexe. La ligne singulière $r = 0$ (qui s'étend à l'infini dans la direction Oz) joue le rôle de la surface solide ($\mathcal{S}_t$), mentionnée sur la figure 6.2, et autour de laquelle nous avons calculé la circulation de la vitesse (dans le cas présent, le rayon de courbure du tore est infini). Le potentiel des vitesses Φ n'est pas défini de manière univoque, car il contient la variable angulaire θ ; la circulation de la vitesse le long d'un contour entourant n fois la ligne $r = 0$ dans le sens direct sera égale à $n\Gamma$. Ce problème est analogue à celui du champ magnétique créé par un courant dans un fil rectiligne infiniment long et de diamètre très petit.

Source

On appelle source et puits les écoulements potentiels élémentaires qui s'effectuent respectivement à partir de, et vers un point (on a $Q > 0$ pour la source, et $Q < 0$ pour le puits).

◆ À *deux dimensions*, l'écoulement à partir d'un point source s'exprime, en coordonnées cylindriques, par (figure 6.3b) :

$$v_r(r) = \frac{Q}{2\pi r} \quad v_\theta = 0.$$

En évaluant le flux de la vitesse à travers un cercle de rayon r centré à l'origine (qui représente simplement le débit Q), on obtient :

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dl = \int_0^{2\pi} r v_r \, d\theta = Q.$$

On a pour l'écoulement ainsi défini, et en utilisant les équations (3.39a & b) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0,$$

soit :

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad (6.10a)$$

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \theta. \quad (6.10b)$$

Comme précédemment, Φ et Ψ , sont définis à une constante près. Notons la correspondance, dans le cas *bidimensionnel*, entre la solution de ce problème et celle du tourbillon présentée précédemment. Les fonctions Φ et Ψ sont échangées en gardant la même forme lors qu'on passe d'un problème à l'autre. Les lignes de courant radiales, dans le cas de la source, sont identiques aux équipotentielles de l'écoulement tourbillonnaire. Les lignes de courant du tourbillon, qui sont des cercles centrés autour de l'origine, correspondent aux équipotentielles de l'écoulement créé par la source. Cette correspondance sera analysée de façon plus directe à la section 6.6 relative à la notion de potentiel complexe des vitesses.

◆ À *trois dimensions*, le champ de vitesse autour d'un point source de débit volumique Q s'écrit en coordonnées sphériques :

$$v_r = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad v_\varphi = v_\theta = 0.$$

L'écoulement doit en effet être radial et tel que le flux à travers une sphère de rayon r centrée sur le point source soit égal à Q . On a donc, en utilisant les équations (3.52a & b) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = v_r = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = v_\varphi = 0.$$

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant s'écrivent alors :

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r} \quad (6.11a)$$

$$\Psi = -\frac{Q}{4\pi} \cos \varphi. \quad (6.11b)$$

Écoulement créé par un dipôle

Considérons une source S_2 et un puits S_1 séparés d'une distance d dont les débits ont la même valeur absolue Q (figure 6.4).

♦ À deux dimensions, les potentiels de vitesse induits au point $P(\mathbf{OP} = \mathbf{r})$ par la source S_2 (respectivement le puits S_1) situés en $\mathbf{OS}_2 = \mathbf{r}_2$ (respectivement $\mathbf{OS}_1 = \mathbf{r}_1$), s'expriment en coordonnées polaires par :

$$\Phi_2 = \frac{Q}{2\pi} \text{Log} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}{r_0}, \quad \Phi_1 = -\frac{Q}{2\pi} \text{Log} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{r_0}.$$

On a donc, pour l'ensemble (source + puits) :

$$\Phi = \Phi_2 + \Phi_1 = \frac{Q}{2\pi} (\text{Log} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| - \text{Log} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|).$$

Évaluons cette différence en développant $\text{Log} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$ au voisinage de $|\mathbf{r}| = |\mathbf{OP}|$ et en supposant que $|\mathbf{r}|$ est beaucoup plus grand que $|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{OS}_1|$ et $|\mathbf{r}_2| = |\mathbf{OS}_2|$ (et donc que d) :

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{Q}{2\pi} \left(\text{Log} \frac{|\mathbf{r}|}{r_0} + \frac{\partial (\text{Log } r)}{\partial r} (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}|) + \dots \right) \\ \text{et } \Phi_1 &= -\frac{Q}{2\pi} \left(\text{Log} \frac{|\mathbf{r}|}{r_0} + \frac{\partial (\text{Log } r)}{\partial r} (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}|) + \dots \right), \end{aligned}$$

soit, dans la limite où $d \rightarrow 0$:

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r} (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) = -\frac{Q d \cos \theta}{2\pi r} = -\frac{p \cos \theta}{2\pi r}, \quad (6.12)$$

ou encore :

$$\Phi = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{2\pi r^2}, \quad (6.13)$$

où $\mathbf{p} = Q \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2$ ($|p| = Qd$) et θ est l'angle entre $\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2$ et le rayon vecteur $\mathbf{r}$ de module r .

En prenant le gradient du potentiel Φ , on obtient les composantes de la vitesse :

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi r^2} \quad (6.14a)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2}. \quad (6.14b)$$

Aux distances r grandes devant d , le potentiel et le champ de vitesse ont donc la même forme que le potentiel et le champ électrique créés par un dipôle électrique de moment $\mathbf{p}$. À partir de ces composantes de la vitesse, on obtient la fonction courant Ψ :

$$\Psi = \frac{p \sin \theta}{2\pi r} = \frac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}}{2\pi r^2}. \quad (6.14c)$$

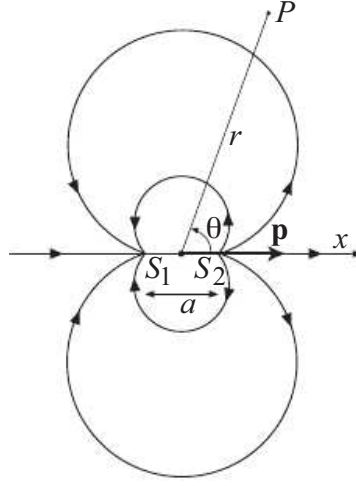


FIG. 6.4 – Écoulement à deux dimensions créé par l'ensemble d'un puits S_1 et d'une source S_2 , de même valeur absolue Q du débit.

◆ En opérant de la même manière pour un écoulement à *trois dimensions*, on obtient le potentiel du dipôle en coordonnées sphériques :

$$\Phi = -\frac{p \cos \varphi}{4\pi r^2} = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}. \quad (6.15a)$$

Les composantes correspondantes v_r et v_φ du champ de vitesse sont :

$$v_r = \frac{p \cos \varphi}{2\pi r^3} \quad (6.15b)$$

$$\text{et } v_\varphi = \frac{p \sin \varphi}{4\pi r^3} \quad (6.15c)$$

et la fonction courant Ψ , obtenue à partir des équations (3.52), vérifie :

$$\Psi = \frac{p \sin^2 \varphi}{4\pi r}. \quad (6.15d)$$

Résolution de l'équation de Laplace : additivité des solutions, séparation de variables

Par suite de la linéarité de l'équation de Laplace, des combinaisons linéaires de solutions de celle-ci la vérifieront également. On peut donc construire un champ de vitesse d'un problème potentiel en superposant des solutions simples, de façon à satisfaire aux conditions aux limites pour la fonction totale. Par ailleurs, comme en électrostatique dans le cas du potentiel créé par une distribution de charges électriques, on peut écrire le potentiel des vitesses d'un écoulement sous la forme d'un *développement multipolaire* ; celui-ci correspondra à la somme de potentiels élémentaires associés à des distributions

de sources de fluide de plus en plus complexes (source unique, dipôle, quadrupôle, ...). Ainsi, nous verrons qu'à partir du potentiel de vitesse créé par un dipôle, on peut décrire les champs de vitesse correspondant à l'écoulement autour d'une sphère ou d'un cylindre.

Une autre approche consiste à rechercher les solutions particulières de l'équation de Laplace sous forme d'un produit de fonctions de variables séparées : il est pour cela nécessaire d'utiliser des coordonnées qui respectent la symétrie du problème. Les problèmes à symétrie cylindrique conduisent à des solutions sous forme de fonctions de Bessel ; ceux à symétrie sphérique font intervenir les fonctions de Legendre, qu'on utilise aussi dans la résolution de l'équation de Schrödinger en mécanique quantique pour la détermination d'orbitales atomiques.

6.2.4 Exemple d'écoulements potentiels simples

Nous traiterons successivement ici l'écoulement plan autour d'un cylindre circulaire, l'écoulement à trois dimensions autour d'une sphère placée dans un champ de vitesse uniforme à l'infini, l'écoulement autour d'un solide de Rankine et, enfin, la superposition des écoulements induits par un puits et par un tourbillon.

Écoulement autour d'un cylindre circulaire

Nous considérons un écoulement uniforme de vitesse $\mathbf{U}$, perturbé par la présence d'un cylindre circulaire de rayon R et d'axe perpendiculaire à la vitesse. Compte tenu de la propriété d'invariance du problème dans la direction de l'axe du cylindre, nous le traiterons dans un espace à deux dimensions. Nous analyserons d'abord le cas où il n'existe pas de circulation de la vitesse autour du cylindre (i) ; ensuite, nous étudierons l'effet de la présence d'une circulation (ii), ce qui nous permettra de mettre en évidence l'effet de portance. Nous retrouverons cet effet de manière plus générale dans la section 6.3.1, où nous discuterons le cas d'un obstacle bidimensionnel de forme quelconque.

(i) Cylindre circulaire sans circulation

Considérons, en coordonnées polaires à deux dimensions, le potentiel Φ des vitesses qui résulte de la superposition des potentiels correspondant à un écoulement uniforme de vitesse $\mathbf{U}$ orientée dans la direction $\theta = 0$ (relation 6.6a) et à un dipôle de moment $\mathbf{p}$ orienté dans la même direction (relation 6.12) ; on a :

$$\Phi = \Phi_{\text{écoulement uniforme}} + \Phi_{\text{dipôle}} = U r \cos \theta - \frac{p \cos \theta}{2\pi r} = \left(U r - \frac{p}{2\pi r} \right) \cos \theta. \quad (6.16)$$

Cette expression constitue une première approche logique : le potentiel du dipôle sera en effet le premier terme non nul du développement multipolaire,

puisque l'on n'a pas supposé la présence d'une source de fluide dans l'écoulement. Compte tenu de l'unicité des solutions potentielles à circulation fixée, l'expression (6.16) sera la solution du problème si elle vérifie les conditions aux limites sur les parois. Dans le cas contraire, il faudra recourir à des termes d'ordre plus élevé du développement multipolaire. De l'expression (6.16) du potentiel, on déduit les composantes de la vitesse :

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(U + \frac{p}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \left(U - \frac{p}{2\pi r^2} \right) \sin \theta.$$

Cherchons maintenant s'il existe une valeur de p telle que ce champ de vitesse vérifie les conditions aux limites : $\mathbf{v} = \mathbf{U}$ à l'infini, et $v_r(r = R) = 0$ (composante de vitesse normale nulle à la surface du cylindre ($r = R$)).

La première condition est identiquement vérifiée, car le champ de vitesse créé par le dipôle décroît en $1/r^2$ avec la distance. La seconde entraîne :

$$\frac{p}{2\pi R^2} = -U \quad \text{d'où :} \quad \Phi = U r \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

ce qui détermine la valeur p du moment du dipôle en fonction de la vitesse U . Le champ de vitesse s'écrit donc finalement :

$$v_r = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (6.17a)$$

$$v_\theta = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (6.17b)$$

La solution de l'équation de Laplace étant unique, ce champ de vitesse, qui satisfait les conditions aux limites à l'infini et sur la surface du cylindre, est donc bien la solution de notre problème.

La fonction de courant Ψ de cet écoulement pourrait, de même, être construite à partir de celles de l'écoulement uniforme et du dipôle. Il est plus rapide de la déduire directement des équations (6.17a & b) du champ de vitesse, à partir de la forme de Ψ en coordonnées cylindriques. On obtient ainsi :

$$\Psi = U r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right).$$

Les lignes de courant de cet écoulement sont représentées sur la figure 6.5. On note l'existence de la ligne de courant particulière correspondant à $\Psi = 0$; elle est constituée des deux demi-droites issues des points d'arrêt $r = R$, et $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (points de vitesse nulle situés sur la circonférence du cylindre), ainsi que de la circonférence elle-même.

(ii) Cylindre circulaire avec circulation

Dans ce cas, le potentiel des vitesses est obtenu en ajoutant au potentiel précédent (Éq. 6.16), celui d'un tourbillon de circulation Γ (Éq. 6.9a). En effet,

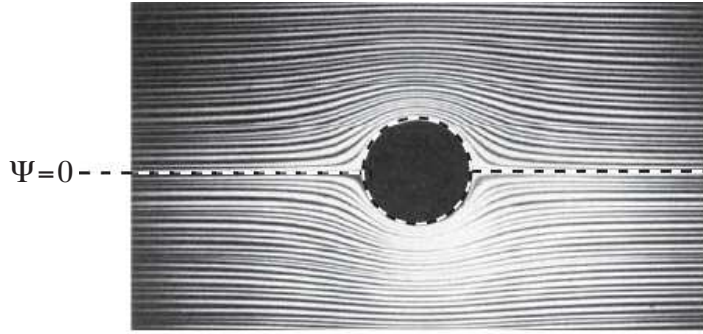


FIG. 6.5 – Forme des lignes de courant autour d'un cylindre circulaire placé dans un écoulement uniforme à l'infini, dans le cas où la circulation de la vitesse autour du cylindre est nulle. Cette figure a été obtenue expérimentalement dans une cellule de Hele-Shaw, qui permet de simuler un écoulement plan et potentiel à partir de celui autour d'un obstacle placé entre deux plaques parallèles et très proches. Cette technique est discutée au chapitre 9 (figure 9.23) (cliché H. Peregrine, *An Album of fluid motion*).

le champ de vitesse du tourbillon est tangent aux cercles $r = \text{cte}$ et s'annule à l'infini ; il vérifie donc automatiquement les deux conditions aux limites. Comme il y a un seul écoulement potentiel correspondant à une valeur de la circulation Γ donnée, la somme des deux potentiels de vitesse est donc la solution du problème. Ainsi, si nous appelons U la valeur algébrique de la vitesse supposée parallèle à l'axe Ox :

$$\Phi = \left(U r - \frac{p}{2\pi r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.$$

On obtient de même les composantes de la vitesse à partir de la superposition de solutions :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{cylindre}} + \mathbf{v}_{\text{tourbillon}}$$

car chacun des deux champs de vitesse vérifie séparément les conditions aux limites. On en déduit :

$$v_r = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (6.18a)$$

$$v_\theta = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (6.18b)$$

Cherchons à présent s'il subsiste des points d'arrêt sur la surface du cylindre. Ils doivent être tels que :

$$v_\theta(r = R) = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0 \quad \text{soit :} \quad \sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi R U}. \quad (6.19)$$

La relation (6.19) amène à distinguer deux régimes, suivant les valeurs relatives des valeurs absolues $|\Gamma|$ et $|U|$ de la circulation et de la vitesse :

- pour $0 < |\Gamma| < 4\pi R|U|$, il existe deux points d'arrêt P_1 et P_2 , symétriques par rapport à l'axe y (Fig. 6.6a) : leur position est définie par les angles θ donnés par la relation (6.19). P_1 et P_2 se déplacent à partir de deux positions diamétralement opposées pour $\Gamma = 0$ (cas précédent), en se rapprochant jusqu'à se confondre en un point d'arrêt unique P sur la surface du cylindre pour $|\Gamma| = 4\pi R|U|$ (Fig. 6.6b).
- pour $|\Gamma| > 4\pi R|U|$, il existe maintenant des trajectoires fermées qui entourent le cylindre et des trajectoires ouvertes à plus grande distance (Fig. 6.6c). La trajectoire intermédiaire entre ces deux cas présente un point d'arrêt unique P extérieur au cylindre : ses coordonnées θ et r vérifient $\sin \theta = \pm 1$ (suivant que Γ et U sont ou non de même signe) et :

$$-|U| \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{|\Gamma|}{2\pi r} = 0 \quad (6.20a)$$

d'où :

$$r = R \left(\frac{|\Gamma|}{4\pi R|U|} + \sqrt{\left(\frac{|\Gamma|}{4\pi R|U|} \right)^2 - 1} \right) \quad (6.20b)$$

(en effet, l'autre solution de l'équation (6.20a) est inférieure à R).

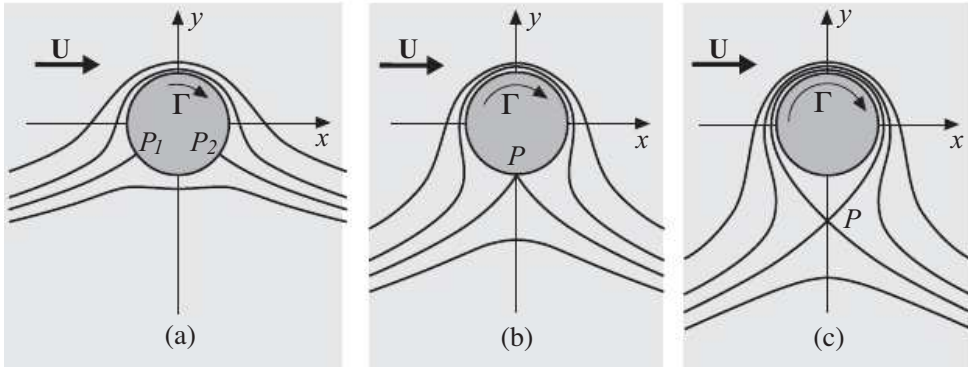


FIG. 6.6 – Forme des lignes de courant autour d'un cylindre circulaire placé dans un écoulement uniforme à l'infini dans le cas où la circulation Γ de la vitesse autour du cylindre est non nulle (elle est négative dans le cas de la figure) ; (a) $0 < |\Gamma| < 4\pi R|U|$; (b) $|\Gamma| = 4\pi R|U|$; (c) $|\Gamma| > 4\pi R|U|$.

La force qu'exerce le fluide sur le cylindre est perpendiculaire à l'axe et possède deux composantes : l'une, dans la direction de la vitesse $\mathbf{U}$ et de sens opposé est la *trainée*, l'autre dans la direction perpendiculaire est la *portance*. Pour

déterminer les composantes de cette force, on calcule la résultante des forces de pression sur le cylindre à partir du champ de pression $p(r = R, \theta)$ à sa surface. La pression vérifie la relation de Bernoulli (5.36) : elle s'applique en effet à tout l'espace, car l'écoulement est potentiel. En prenant comme référence un point à l'infini (pression p_0 , vitesse U), nous obtenons :

$$p(r = R, \theta) + \frac{1}{2}\rho v_\theta^2(r = R, \theta) = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2$$

$$\text{d'où : } p = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 - \left(-2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R U} \right)^2 \right).$$

La portance par unité de longueur du cylindre est donnée par la composante F_p de la résultante des forces de pression suivant la direction y :

$$F_p = - \int_{\text{surface du cylindre}} p \sin \theta R \, d\theta.$$

Le seul terme non nul dans l'intégration provient du terme proportionnel à $\sin \theta$ dans le développement de l'expression précédente de la pression, soit :

$$F_p = - \int_0^{2\pi} \frac{\rho U \Gamma}{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = -\rho U \Gamma \quad (6.21)$$

(ainsi, F_p est dirigée vers le haut dans les deux cas de la figure 6.6). Cette expression de la portance (appelée *force de Magnus*) sera établie, dans un cas plus général, dans la section 6.3.1 (Éqs. 6.43 et 6.44).

Par ailleurs, la composante F_t suivant l'axe des x de la résultante des forces de pression (la *traînée*) est nulle. En effet, la norme de la vitesse en des points symétriques par rapport à l'axe des y est la même ; il en est donc de même de la pression. Il en résulte que les contributions en projection sur l'axe des x s'annulent deux à deux. Ce résultat s'applique à tous les écoulements stationnaires de fluides parfaits autour d'un obstacle : dans ce cas, la traînée est nulle car il n'existe pas de mécanisme de dissipation visqueuse.

Sphère dans un écoulement uniforme à l'infini

Nous traitons maintenant le cas d'un écoulement uniforme de vitesse $\mathbf{U}$, perturbé par une sphère au repos de rayon R centrée à l'origine (Fig. 6.7). Toujours par analogie avec l'électrostatique et, comme dans le cas du cylindre, nous prenons comme fonction d'essai du potentiel des vitesses la somme de ceux d'un écoulement uniforme (relation 6.8a) et d'un dipôle (relation 6.15a). On obtient, en coordonnées sphériques :

$$\Phi = U r \cos \varphi - \frac{p \cos \varphi}{4\pi r^2} = \left(U r - \frac{p}{4\pi r^2} \right) \cos \varphi. \quad (6.22)$$

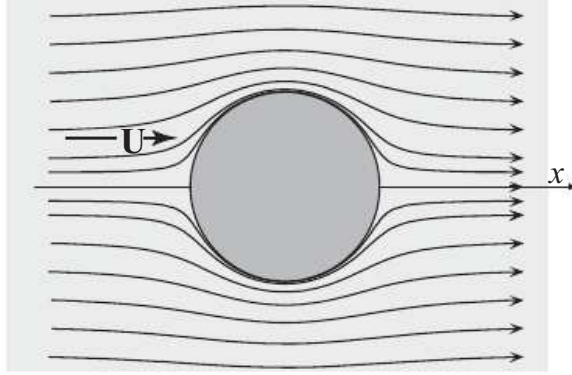


FIG. 6.7 – Lignes de courant autour d’une sphère immobile placée dans un écoulement potentiel uniforme.

Les composantes de la vitesse s’écrivent alors :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(U + \frac{p}{2\pi r^3} \right) \cos \varphi \\ v_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = - \left(U - \frac{p}{4\pi r^3} \right) \sin \varphi \\ v_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Le moment p du dipôle est déterminé à partir de la condition aux limites sur la surface de la sphère :

$$v_r(r = R) = \left(U + \frac{p}{2\pi R^3} \right) \cos \varphi = 0.$$

D’où :

$$\mathbf{p} = -2\pi \mathbf{U} R^3 \quad (6.24a)$$

et :

$$\Phi = U r \cos \varphi \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right). \quad (6.24b)$$

La condition de vitesse égale à $\mathbf{U}$ à l’infini est identiquement vérifiée par suite de la forme choisie pour le potentiel Φ (la contribution du dipôle s’annule en effet à l’infini). On obtient, pour le champ de vitesse :

$$v_r = U \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \varphi \quad v_\varphi = -U \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \varphi \quad v_\theta = 0. \quad (6.25)$$

La forme des lignes de courant est obtenue à partir de la fonction de courant déduite du potentiel des vitesses, par intégration des deux équations suivantes

découlant des relations (3.22) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = (r^2 \sin \varphi) v_r = U \left(r^2 - \frac{R^3}{r} \right) \sin \varphi \cos \varphi \quad (6.26a)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -(r \sin \varphi) v_\varphi = U \left(r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \sin^2 \varphi. \quad (6.26b)$$

Soit, à une constante près :

$$\Psi = \frac{U}{2} \left(r^2 - \frac{R^3}{r} \right) \sin^2 \varphi. \quad (6.27)$$

La figure 6.7 montre la distribution des lignes de courant correspondantes. La surface $\Psi = 0$ est constituée de la sphère ($r = R$) et de l'axe de symétrie ($\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$). Remarquons que le module de la vitesse décroît comme $1/r^3$ aux grandes distances r .

Nous étudierons à la section 9.4.1 l'écoulement d'un fluide autour d'une sphère à faible nombre de Reynolds, lorsque les forces de viscosité sont dominantes (au contraire du cas présent) : le module de la vitesse décroît alors comme $1/r$, c'est-à-dire beaucoup plus lentement que pour l'écoulement potentiel étudié ici.

Le solide de Rankine

Cet exemple correspond au cas d'une source placée dans un écoulement uniforme (figure 6.8). Nous allons montrer qu'il décrit l'écoulement autour d'un obstacle solide de forme particulière, appelé *solide de Rankine*, qui a une symétrie de révolution autour de la direction de l'écoulement non perturbé.

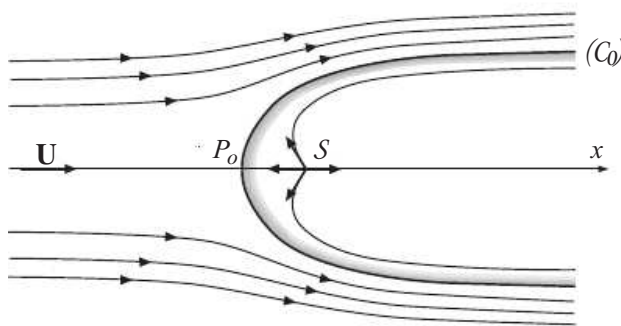


FIG. 6.8 – Écoulement autour d'un solide de révolution, appelé solide de Rankine. Cet écoulement est obtenu par superposition d'un écoulement uniforme et d'un écoulement source (S).

On part d'un potentiel des vitesses et d'une fonction de courant qui correspondent à la superposition d'un écoulement uniforme (Éq. 6.8) et d'une

source placée à l'origine des coordonnées (Éq. 6.11) :

$$\Phi = \Phi_{\text{écoulement uniforme}} + \Phi_{\text{source}} \quad \Psi = \Psi_{\text{écoulement uniforme}} + \Psi_{\text{source}}.$$

Soit, en coordonnées sphériques :

$$\Phi = U r \cos \varphi - \frac{Q}{4\pi r} \quad (6.28a)$$

$$\text{et :} \quad \Psi = U \frac{r^2}{2} \sin^2 \varphi - \frac{Q}{4\pi} \cos \varphi. \quad (6.28b)$$

De la relation (6.28a), on tire les composantes de la vitesse :

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \cos \varphi + \frac{Q}{4\pi r^2} \quad v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -U \sin \varphi \quad v_\theta = 0. \quad (6.29)$$

Il existe un point d'arrêt P_0 (point de vitesse nulle) sur l'axe des z ($\varphi = 0$ ou π suivant les signes relatifs de Q et U) pour :

$$r = r_0 = \sqrt{\frac{|Q|}{4\pi |U|}}. \quad (6.30)$$

Les lignes de courant sont constituées de l'ensemble des sections avec les plans méridiens des surfaces de révolution autour de l'axe x , dont la méridienne a pour équation :

$$U \frac{r^2}{2} \sin^2 \varphi - \frac{Q}{4\pi} \cos \varphi = \Psi = \text{constante}. \quad (6.31)$$

L'ensemble de ces lignes de courant est présenté dans la figure 6.8.

La valeur Ψ_0 de la fonction de courant sur la ligne de courant ($\mathcal{C}_0$) située dans le plan de figure et passant par le point d'arrêt P_0 , déterminé ci-dessus ($r = r_0$, $\varphi = \pi$) s'écrit :

$$\Psi_0 = \Psi(r = r_0, \varphi = \pi) = \frac{Q}{4\pi}.$$

En reportant cette valeur dans la relation (6.31), on en tire l'équation de ($\mathcal{C}_0$) :

$$r^2 = \frac{Q}{2\pi U} \frac{1 + \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}. \quad (6.32)$$

Cette ligne de courant comprend, d'une part, l'axe Ox ($\varphi = 0, \pi$) et, d'autre part, une courbe qui sépare l'espace en deux régions, où le fluide est apporté par chacun des deux écoulements de base (écoulement uniforme et écoulement induit par la source). On peut remplacer ce tube de courant par un obstacle solide, sans modifier l'écoulement déterminé.

Remarque. La surface de cet obstacle fait partie de la famille plus générale des *ovoïdes de Rankine* : ceux-ci correspondent aux nappes de courant créées par la superposition d'un écoulement uniforme et de l'ensemble d'une source et d'un puits de même débit. Le paramètre permettant de modifier la forme de l'ovale est la distance entre la source et le puits. Lorsque cette distance tend vers zéro, on retrouve l'écoulement autour d'une sphère étudié précédemment. Dans le cas où cette distance tend vers l'infini (par exemple si le puits est rejeté à l'infini), on retrouve le cas particulier de l'obstacle semi-infini étudié ici : en effet le puits intervient alors uniquement comme une composante supplémentaire de l'écoulement uniforme.

Puits et tourbillon

Nous considérons la superposition des écoulements à deux dimensions créés par un puits de débit $-Q$ ($Q > 0$) et par un tourbillon de circulation Γ , tous deux centrés à l'origine. L'écoulement résultant correspond au cas d'un récipient cylindrique qui se vide par un orifice central (puits), en même temps qu'il se remplit tangentiellement à sa périphérie, ce qui entretient le mouvement tourbillonnaire. Seul le creusement de la surface libre qu'on observe en général dans la partie centrale du récipient n'apparaît pas dans le présent traitement qui est à deux dimensions. Le potentiel des vitesses et la fonction de courant de l'écoulement résultant s'écrivent :

$$\Phi = \Phi_{\text{puits}} + \Phi_{\text{tourbillon}} \quad \text{et} \quad \Psi = \Psi_{\text{puits}} + \Psi_{\text{tourbillon}}$$

soit, en coordonnées polaires (relations (6.9) et (6.10)) :

$$\Phi = -\frac{Q}{2\pi} \text{Log} \frac{r}{r_0} + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (6.33)$$

et :

$$\Psi = -\frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log} \frac{r}{r_0}. \quad (6.34)$$

On en déduit les composantes de la vitesse :

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi r} \quad (6.35a)$$

et :

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (6.35b)$$

Les lignes de courant ont pour équation en coordonnées polaires :

$$\Psi = \text{constante} = K - \frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log} \frac{r}{r_0} \quad \text{et} \quad r = r_1 e^{-\left(\frac{Q}{\Gamma}\right) \theta}. \quad (6.36)$$

Ce sont donc des spirales logarithmiques (Fig. 6.9), paramétrées par le facteur r_1 , qui dépend de la ligne de courant considérée. Elles correspondent à la trajectoire d'une particule qui tourne autour du puits en s'en rapprochant

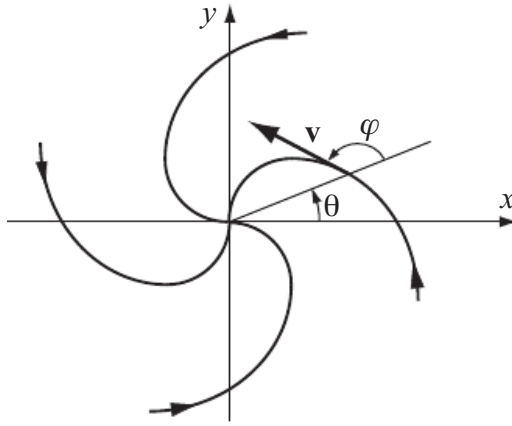


FIG. 6.9 – Lignes de courant de l'écoulement créé par la superposition d'un puits et d'un tourbillon centrés à l'origine. La circulation du tourbillon a été choisie positive dans le cas de la figure.

progressivement. L'angle φ constant que fait le vecteur vitesse avec le rayon vecteur $\mathbf{r}$ est tel que :

$$\tan \varphi = \frac{v_\theta}{v_r} = -\frac{\Gamma}{Q}.$$

Il est nul (lignes de courant radiales) dans le cas où $\Gamma = 0$ (puits seul), et vaut $\pi/2$ lorsque $Q = 0$ (tourbillon seul).

6.3 Forces sur un obstacle dans un écoulement potentiel

Dans cette section, nous traitons le problème des forces exercées par un écoulement potentiel sur un obstacle solide de forme quelconque placé dans cet écoulement. L'étude est basée sur la possibilité, déjà évoquée plus haut (section 6.2.3), d'utiliser un développement multipolaire du potentiel des vitesses, solution de l'équation de Laplace. Par ailleurs on doit tenir compte de la conditions aux limites sur la composante normale de la vitesse à la surface de l'objet : cette composante doit être la même pour le fluide et la surface solide. À grande distance r de l'objet, seule la contribution non nulle de plus faible puissance en $1/r$, c'est-à-dire qui tend vers zéro le plus lentement, doit être prise en compte dans le calcul du champ de vitesse.

En utilisant les équations de conservation de la quantité de mouvement, nous déterminerons la force exercée à partir du champ de vitesse, assez loin du corps pour que l'approximation précédente soit valable. À deux dimensions, nous prendrons de plus en compte l'existence possible d'une circulation qui est liée à la non-unicité des solutions potentielles discutées dans la section 6.2.2.

6.3.1 Cas bidimensionnel

Potentiel des vitesses

Un cylindre circulaire, ou un profil d'aile infiniment allongé, est un exemple classique d'obstacle bidimensionnel. Nous supposons ces objets fixes, comme ce serait le cas dans une soufflerie imposant la vitesse d'écoulement $\mathbf{U}$, uniforme à grande distance de l'obstacle et perpendiculaire à l'axe z du cylindre. Nous supposons, *a priori*, l'existence d'une circulation finie Γ autour de l'obstacle, sans indiquer pour l'instant la manière dont elle peut être créée. Nous préciserons ce point dans la section 7.5.2.

À une distance r de l'obstacle, grande devant ses dimensions dans le plan (x, y) , on peut écrire la vitesse sous la forme :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{U} + \mathbf{grad} \Phi_1(\mathbf{r}) + \mathbf{grad} \Phi_2(\mathbf{r}) = \mathbf{U} + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \quad (6.37)$$

- Le terme $\mathbf{grad} \Phi_1(\mathbf{r})$ où $\Phi_1(\mathbf{r}) = (\Gamma/2\pi)\theta$ (Éq. 6.9a) traduit l'influence de la circulation autour de l'obstacle sur le champ de vitesse. La somme des deux premiers termes représente en fait la combinaison d'un écoulement uniforme de vitesse $\mathbf{U}$ et d'un tourbillon.
- Le potentiel $\Phi_2(\mathbf{r})$ traduit la modification du potentiel des vitesses due à la forme et à la dimension transverse (non nulle) de l'obstacle. Φ_2 peut être écrit sous la forme d'un développement multipolaire (source unique, dipôle, quadrupôle, ...). En général, l'écoulement ne comporte pas de source : le premier terme non nul est alors celui du dipôle, soit (relation 6.13) :

$$\Phi_2 = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \quad (6.38)$$

où $\mathbf{A}$ est un vecteur constant caractéristique du dipôle. Pour le cas particulier où l'obstacle est un cylindre circulaire, ce potentiel est la solution exacte du problème (section 6.2.4, exemple (i)). Pour un obstacle de forme quelconque, il représente simplement le terme correctif dominant à grande distance. Cette correction à la valeur du potentiel décroît donc en $1/r$ avec la distance ce qui conduit à une décroissance en $1/r^2$ du terme correspondant pour la vitesse. Nous allons voir maintenant que ce développement permet de déterminer les forces qui s'exercent sur l'obstacle.

Forces de traînée et de portance sur un obstacle bidimensionnel

Nous allons calculer la *portance* $\mathbf{F}_p$ et la *traînée* $\mathbf{F}_t$, c'est-à-dire les forces exercées sur le corps respectivement dans les directions perpendiculaire et parallèle à l'écoulement. Évaluons pour cela les composantes, suivant les axes x et y , du bilan de quantité de mouvement (Éq. 5.10) à l'intérieur d'un cylindre circulaire lié à l'obstacle, de rayon r grand devant ses dimensions dans le

plan (x, y) , et de longueur unité le long de son axe z (Fig. 6.10a) ; on évite ainsi d'avoir à faire l'intégration du champ de pression sur toute la surface du cylindre. Nous allons voir que la forme exacte de la section du cylindre par le plan de figure n'intervient pas dans le calcul de la portance $\mathbf{F}_p$

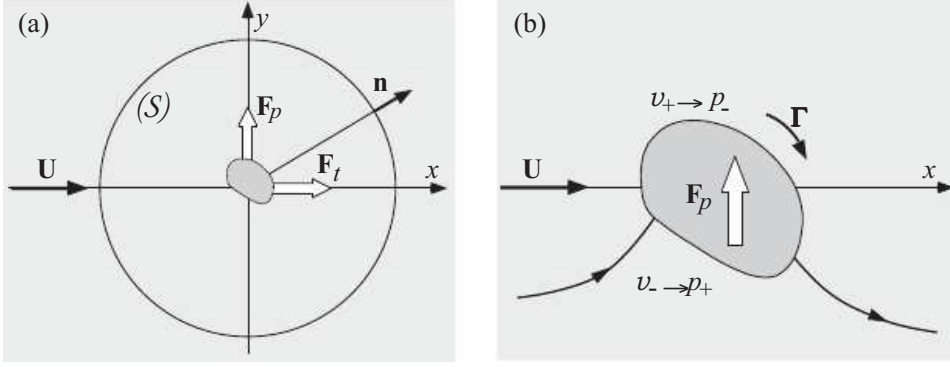


FIG. 6.10 – Évaluation de la portance $\mathbf{F}_p$ et de la traînée $\mathbf{F}_t$ sur un obstacle cylindrique placé dans un écoulement uniforme, en présence d'une circulation de la vitesse autour de l'obstacle. a) (S) représente la surface du cylindre circulaire à l'intérieur duquel est effectué le bilan de quantité de mouvement. b) Détermination du sens de $\mathbf{F}_p$ en fonction du sens de la circulation Γ par application de la relation de Bernoulli.

Cela vient du fait que seul le premier terme Φ_1 du développement du potentiel des vitesses intervient pour déterminer $\mathbf{F}_p$.

Appliquons l'équation de bilan de quantité de mouvement (5.10) établie au chapitre précédent à un cylindre circulaire de rayon r , limité par une surface (S) et de profondeur unité dans la direction perpendiculaire au plan de la figure 6.10a. Comme le fluide est supposé parfait, les contraintes de viscosité σ'_{ij} sont nulles. On obtient alors :

$$-\iint_S (\rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p n_x) dS + (-F_t) = 0 \quad (6.39a)$$

$$-\iint_S (\rho v_y (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p n_y) dS + (-F_p) = 0. \quad (6.39b)$$

Dans cette relation, $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire de la normale à l'élément de surface $dS = (r d\theta)$ du cylindre ($\mathbf{n} = [\cos \theta, \sin \theta, 0]$), F_t et F_p sont les composantes respectivement suivant x et y de la traînée et la portance par unité de longueur suivant Oz . Dans ces expressions, F_t et F_p sont considérées comme des forces en volume, fictives, d'un type particulier : ce sont les forces qui doivent être appliquées, par un observateur ou une action extérieurs, pour maintenir le corps en place, en équilibrant la portance et la traînée exercées

par le fluide. En séparant les termes de pression et d'inertie, on obtient :

$$F_t = - \int_0^{2\pi} \rho (v_x^2 \cos \theta + v_x v_y \sin \theta) r \, d\theta - \int_0^{2\pi} (p \cos \theta) r \, d\theta \quad (6.40a)$$

$$F_p = - \int_0^{2\pi} \rho (v_x v_y \cos \theta + v_y^2 \sin \theta) r \, d\theta - \int_0^{2\pi} (p \sin \theta) r \, d\theta. \quad (6.40b)$$

En utilisant le développement de la vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ issu de l'équation (6.37) et en éliminant les termes négligeables après avoir évalué la pression, les équations (6.40) deviennent :

$$F_t = \int_0^{2\pi} \rho [-U v_{1x} \cos \theta - U v_{1y} \sin \theta] r \, d\theta \quad (6.41a)$$

$$F_p = \int_0^{2\pi} \rho [-U v_{1y} \cos \theta + U v_{1x} \sin \theta] r \, d\theta. \quad (6.41b)$$

Démonstration. On remplace d'abord $\mathbf{v}$ par $\mathbf{U} + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ dans les équations (6.40). Tous les termes contenant des composantes de $\mathbf{v}_2$ décroissent en $1/r^2$ (ou encore plus rapidement si c'est leur produit ou leur carré qui intervient). Après avoir multiplié par r , on a donc une contribution en $1/r$ à l'intégrale qui tend vers 0 à grande distance. Par ailleurs, le champ de pression est donné par la relation de Bernoulli qui est valable dans tout l'espace, puisque l'écoulement est potentiel :

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2$$

où p_0 est la pression uniforme à suffisamment grande distance de l'obstacle pour que $|\mathbf{v}| = U$. En utilisant le développement de $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ et en négligeant les termes contenant les composantes de $\mathbf{v}_2$ d'après ce qui précède, on a :

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho (\mathbf{U} + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)^2 = p_0 - \rho U v_{1x} - \frac{1}{2} \rho v_1^2.$$

On peut donc réécrire les équations (6.40) sous la forme :

$$\begin{aligned} F_t &= - \int_0^{2\pi} \rho [(U + v_{1x})^2 \cos \theta + (U + v_{1x}) v_{1y} \sin \theta] r \, d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \rho \left[U v_{1x} + \frac{1}{2} v_1^2 \right] r \cos \theta \, d\theta \\ F_p &= - \int_0^{2\pi} \rho [(U + v_{1x}) v_{1y} \cos \theta + v_{1y}^2 \sin \theta] r \, d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \rho \left[U v_{1x} + \frac{1}{2} v_1^2 \right] r \sin \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

En effet le terme constant en p_0 s'annule car les intégrales de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ entre 0 et 2π sont nulles. Nous pouvons négliger également les termes du second ordre, du type $v_{1x} v_{1y}$, v_{1y}^2 ou v_{1x}^2 : les intégrales correspondantes décroîtront en effet en $1/r$ ou encore plus rapidement puisque $\mathbf{v}_1$ varie en $1/r$ et que ces termes sont multipliés

par r . Seuls les termes en $-\rho U v_{1x}$ et $-\rho U v_{1y}$ qui ont une contribution constante avec r contribueront donc aux intégrales. On retrouve bien alors les équations (6.41). ■

L'expression (6.41a) de la force de traînée peut être réécrite sous la forme :

$$F_t = -\rho U \int_0^{2\pi} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} d\theta = -\rho U \int_0^{2\pi} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad (6.42)$$

où $\mathbf{n}$ a pour composantes $\cos \theta$ et $\sin \theta$, et représente le vecteur unitaire normal à la surface d'intégration. F_t est donc proportionnelle au flux du champ de vitesse $\mathbf{v}_1$ à travers la surface ($\mathcal{S}$) et elle est égale à zéro (c'est en effet un champ de vitesse de type tourbillon et non une source d'écoulement).

On retrouvera à la section 6.3.2 cette valeur nulle de la force de traînée pour les corps tridimensionnels : elle reflète l'absence de dissipation d'énergie dans les écoulements potentiels de fluides parfaits en régime stationnaire.

En ce qui concerne la composante de portance F_p , on obtient, en appelant ($\mathcal{C}$) la courbe représentant l'intersection de ($\mathcal{S}$) avec le plan de figure :

$$F_p = -\rho U \int_{\mathcal{C}} (v_{1x} dx + v_{1y} dy) = -\rho U \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = -\rho U \Gamma. \quad (6.43)$$

Ainsi, seul le terme $\Phi_1 = \Gamma\theta/2\pi$ dû à la présence d'une circulation de la vitesse autour de l'obstacle contribue à la portance $\mathbf{F}_p$, ou *force de Magnus* ; il s'exprime de façon vectorielle en utilisant un vecteur circulation axial $\mathbf{\Gamma}$ parallèle à la direction z . $\mathbf{\Gamma}$ sera orienté vers l'arrière du plan de figure, pour une rotation de même sens que dans la figure 6.10b, et vers l'avant dans le cas contraire (cette représentation deviendra plus naturelle dans le chapitre suivant, où la circulation sera reliée au vecteur vorticité orienté, lui aussi, dans la direction z). La portance vérifie alors :

$$\mathbf{F}_p = \rho \mathbf{U} \wedge \mathbf{\Gamma}. \quad (6.44)$$

On retrouve le signe de la force en appliquant la relation de Bernoulli en deux points opposés situés au-dessus et au-dessous de l'obstacle (figure 6.10b). Avec le sens de circulation autour de l'obstacle que nous avons choisi, la vitesse absolue v_+ en un point au-dessus de l'obstacle est supérieure à la vitesse v_- au-dessous. La pression p_- au-dessus de l'obstacle est donc inférieure à la pression p_+ au-dessous, d'où une force de portance dirigée vers le haut.

Force de Magnus pour des écoulements réels

La force de Magnus est responsable de la sustentation des avions : en effet, on a une circulation de la vitesse autour de la section des ailes (voir section 6.6.3). Cette même force est à la base des mécanismes de propulsion ou de sustentation par hélice tournante (bateaux, avions, hélicoptères, ...). Elle est enfin invoquée pour expliquer les effets de *lift* et de *coupe* d'une balle de tennis ou de ping-pong (figure 6.11), ainsi que le coup de pied *brossé* du football.

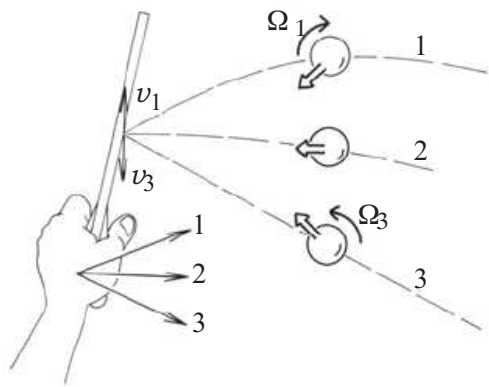


FIG. 6.11 – Aérodynamique de la balle de ping-pong. Lors de la frappe, le joueur peut influencer la courbure de la trajectoire ultérieure de la balle de trois manières. (1) Le lift : en déplaçant sa main vers le haut au moment de l’impact, il induit sur la balle un mouvement à la vitesse V_1 dans la direction tangente à l’impact. Le non-glissement de la balle sur la raquette crée un mouvement de rotation à la vitesse $\Omega_1 \approx V_1/R$ (où R est le rayon de la balle) et, par suite, une portance sur la balle, proportionnelle à Ω_1 . La trajectoire sera incurvée vers le bas. (2) Le coup plat : c’est le mouvement naturel du débutant qui « pousse » la balle. Le joueur n’a aucune influence sur la courbure de la trajectoire. (3) Le coupé : c’est le pendant du lift, avec une vitesse tangentielle V_3 qui crée une portance vers le haut ; la trajectoire pourra être presque horizontale.

Remarque. Ces interprétations ne seraient en fait pas valables pour des écoulements purement potentiels de fluides parfaits. Les objets considérés ne sont en effet pas bidimensionnels, contrairement aux hypothèses faites plus haut, mais ont trois dimensions finies : on peut alors trouver, quel que soit le contour d’intégration $(\mathcal{C})$ choisi, une surface $(\mathcal{S})$ s’appuyant sur $(\mathcal{C})$ et situé entièrement dans le fluide. La circulation de la vitesse $\mathbf{v}$ sur le contour $(\mathcal{C})$ est égale au flux de $\text{rot } \mathbf{v}$ à travers $(\mathcal{S})$, et serait alors identiquement nulle (ainsi que la force de Magnus) pour un écoulement potentiel. Dans le cas des balles en rotation dans un fluide réel visqueux, l’entraînement de celui-ci par les forces de viscosité au voisinage des parois permet au contraire l’apparition d’une circulation et d’une force de portance de Magnus non nulles. De même, la circulation Γ autour d’une aile de longueur finie serait nulle pour un écoulement complètement potentiel : nous verrons à la section 7.5.2 (Figs. 7.27 à 7.29) que, pour que Γ soit non nulle, il faut qu’un tourbillon de circulation égale à Γ parte du bout de l’aile.

6.3.2 Effets de masse ajoutée pour un corps tridimensionnel accéléré dans un fluide parfait

Pour un corps à trois dimensions finies en mouvement relatif à vitesse constante dans un volume infini de fluide parfait, la force de traînée sera nulle comme pour un corps bidimensionnel (Éq. 6.42) : comme dans ce cas,

cela reflète l'absence de dissipation visqueuse d'énergie. Pour un écoulement purement potentiel, il en est de même pour la force de portance : comme on l'a vu plus haut, cela vient de l'absence de circulation de la vitesse autour du corps.

Par contre, lorsque le corps est accéléré, il faut tenir compte de l'entraînement du fluide incompressible déplacé par le mouvement du corps solide et qui entraîne aussi une accélération. Cet *habillage* du solide par le fluide environnant induit une inertie complémentaire qu'on peut représenter par une *masse ajoutée* qui s'ajoute à celle du solide.

Nous allons calculer successivement l'énergie cinétique du fluide mis en mouvement par l'objet, ainsi que l'impulsion qui lui est communiquée en réponse à une accélération de l'objet, et enfin la force qui en résulte.

Développement du potentiel de vitesse et du champ de pression autour d'un obstacle à trois dimensions finies

On considère un corps fermé ($\mathcal{V}_0$) de forme quelconque et de volume V_0 limité par une surface ($\mathcal{S}_0$), et se déplaçant à une vitesse $\mathbf{U}$ dans un fluide immobile à grande distance (figure 6.12).

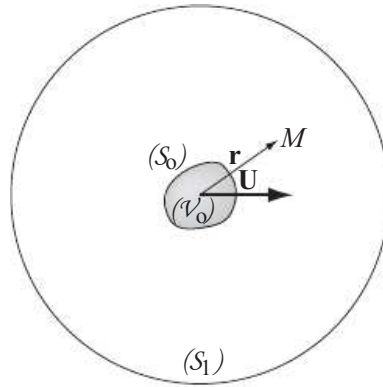


FIG. 6.12 – Obstacle de forme quelconque se déplaçant à la vitesse $\mathbf{U}$ dans un fluide immobile loin de l'obstacle. La surface sphérique fictive ($\mathcal{S}_1$), de grand rayon R , tracée autour de l'obstacle est utilisée pour le calcul de l'énergie cinétique du fluide.

Comme dans le cas à deux dimensions discuté précédemment, on développe en puissances de $1/r$ le potentiel dont dérive la vitesse en un point M , à une distance r du corps très supérieure à la plus grande dimension de celui-ci. Il s'agit, là encore, de l'analogue d'un développement multipolaire d'une distribution de charges en électrostatique : les termes en $1/r$ correspondent à des charges libres, ceux en $1/r^2$ à des dipôles, ...

$$\Phi(r) = \frac{A_1}{r} + \frac{\mathbf{p}}{4\pi} \cdot \mathbf{grad} \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (6.45)$$

Le premier terme est un terme de source, tel que le flux du champ de vitesse à travers la surface d'une sphère ($\mathcal{S}_1$) de grand rayon R entourant l'objet vérifie :

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{A_1}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi A_1.$$

Dans le cas présent, il n'y a pas de source de fluide et $A_1 = 0$. Le second terme de l'équation (6.45) est l'expression du potentiel créé par un dipôle, établie dans la section 6.2.3 (relation 6.15a). Compte tenu du principe d'additivité discuté alors, la relation entre les composantes du moment $\mathbf{p}$ du dipôle et celles de la vitesse $\mathbf{U}$ est linéaire ; elle s'écrit :

$$p_i = \alpha_{ij} U_j \quad \text{avec une sommation sur l'indice } j \quad (6.46)$$

où α_{ij} est un élément d'une matrice α dépendant de la forme du corps solide. Dans le cas particulier d'un objet sphérique par exemple, la relation ci-dessus prend la forme :

$$\mathbf{p} = 2\pi \mathbf{U} R^3 \quad (6.47a)$$

soit :

$$\alpha_{ij} = 2\pi R^3 \delta_{ij}. \quad (6.47b)$$

Démonstration. On déduit ce résultat de l'équation (6.24a) en changeant le signe de la valeur du moment dipolaire $\mathbf{p}$: en effet l'écoulement autour d'une sphère en mouvement à une vitesse $\mathbf{U}$ est, dans le référentiel lié à la sphère, le même que pour une sphère immobile dans un écoulement de vitesse $-\mathbf{U}$. ■

Énergie cinétique du fluide

Nous évaluons l'énergie E_c dans un grand volume ($\mathcal{V}_1$) de fluide entourant l'objet et limité par la sphère ($\mathcal{S}_1$) de rayon R ; nous utilisons la décomposition suivante permettant de prendre en compte le volume V_0 de l'objet :

$$\frac{E_c}{\rho/2} = \iiint_{\mathcal{V}_1} \mathbf{v}^2 dV = \iiint_{\mathcal{V}_1} \mathbf{U}^2 dV + \iiint_{\mathcal{V}_1} (\mathbf{v} - \mathbf{U}) (\mathbf{v} + \mathbf{U}) dV = I_1 + I_2. \quad (6.48)$$

On en déduit :

$$E_c = \frac{\rho}{2} (I_1 + I_2) = \frac{\rho}{2} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{U} - V_0 U^2]. \quad (6.49)$$

L'énergie cinétique totale E_c du fluide est donc une forme quadratique des composantes U_i de la vitesse $\mathbf{U}$, car $\mathbf{p}$ varie linéairement avec celles-ci, suivant la relation (6.46). Donc :

$$E_c = \frac{\rho}{2} (\alpha_{ij} U_i U_j - V_0 U_i U_i). \quad (6.50)$$

Démonstration. On a tout d'abord :

$$I_1 = U^2 \left[\frac{4}{3} \pi R^3 - V_0 \right]. \quad (6.51)$$

Pour calculer I_2 , on part de l'identité vectorielle :

$$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})f + f \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

En choisissant $f = \Phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r}$, et en utilisant l'équation d'incompressibilité $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, on obtient :

$$\operatorname{div} [(\mathbf{v} - \mathbf{U})(\Phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})] = (\mathbf{v} - \mathbf{U})(\mathbf{v} + \mathbf{U}).$$

On transforme alors l'intégrale de volume I_2 en une somme de deux intégrales de surface, l'une sur la surface (S_0) du corps et l'autre sur la surface (S_1) de la sphère de rayon R :

$$I_2 = \iint_{S_0} [(\mathbf{v} - \mathbf{U})(\Phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_1} [(\mathbf{v} - \mathbf{U})(\Phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} dS.$$

Le premier terme est identiquement nul car, à la surface du corps, $(\mathbf{v} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} = 0$. En décomposant le produit sous la deuxième intégrale, on trouve :

$$I_2 = \iint_{S_1} [\Phi \mathbf{v} - \Phi \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{v} - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (6.52)$$

Le premier terme est de l'ordre de $(1/R^5)$. et son intégrale sur la surface s'annule lorsque R tend vers l'infini. Le champ de vitesse induit par le potentiel $\Phi = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})/4\pi r^2$ du dipôle (relation 6.15a) s'écrit :

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi r^3} + 3 \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} \right) \mathbf{n} \quad \left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

En remplaçant $\mathbf{v}$ et $\mathbf{r}$ par ces deux expressions pour évaluer les 3 derniers termes de l'équation (6.52), on obtient la forme suivante de I_2 :

$$I_2 = \iint_{S_1} [(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})(3\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) - 4\pi (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})^2 R^3] \frac{d\Omega}{4\pi}$$

où $d\Omega$ est l'élément d'angle solide sous lequel est vu l'élément de surface dS depuis le centre de la sphère (S_1) de rayon R ($dS = R^2 d\Omega$). Pour calculer I_2 , on utilise la relation vectorielle générale suivante, valable pour des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ constants :

$$\int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) d\Omega = A_i B_j \int n_i n_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} A_i B_j \delta_{ij} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

On obtient alors :

$$I_2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{U} - \frac{4\pi}{3} U^2 R^3. \quad (6.53)$$

En reportant les relations (6.51) et (6.53) dans l'équation (6.48), on en déduit l'équation (6.49). ■

Quantité de mouvement

Appelons $\mathbf{P}$ la quantité de mouvement de l'écoulement fluide induit par le déplacement du corps solide (ne pas confondre $\mathbf{P}$ avec le moment dipolaire $\mathbf{p}$). Pour une variation $\delta\mathbf{U}$ de la vitesse de l'objet, l'augmentation d'énergie cinétique du fluide entraîné est reliée à $\mathbf{P}$ par :

$$\delta E_c = \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{U}. \quad (6.54)$$

Utilisons l'équation (6.50) qui donne l'énergie cinétique, et supposons que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ (ce qu'on peut toujours obtenir en symétrisant l'équation). On obtient alors :

$$\delta E_c = \frac{\rho}{2} (\alpha_{ij} 2U_j \delta U_i - 2V_0 U_i \delta U_i) = \rho [\alpha_{ij} U_j - V_0 U_i] \delta U_i.$$

Par identification avec (6.54), on trouve, en utilisant la relation (6.46) :

$$\mathbf{P} = \rho \mathbf{p} - \rho V_0 \mathbf{U}. \quad (6.55)$$

La signification de ces deux termes est la suivante : supposons qu'on supprime le corps et qu'on le remplace par le dipôle de moment $\mathbf{p}$. Le champ de vitesse induit sur la surface ($\mathcal{S}_1$) sera le même dans les deux cas. Le terme $\rho \mathbf{p}$ représente donc la quantité de mouvement associée au dipôle seul, et $\rho V_0 \mathbf{U}$ sa variation due à la présence du corps solide.

Force sur le corps solide

De l'expression de la quantité de mouvement, on déduit celle de la force que le fluide exerce sur le corps :

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\rho \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \rho V_0 \frac{d\mathbf{U}}{dt}. \quad (6.56)$$

Dans le cas particulier où l'objet se déplace à vitesse $\mathbf{U}$ constante, $\mathbf{p}$ est également constant au cours du temps et la force résultante $\mathbf{F}$ (portance + traînée) est nulle comme on le prévoyait.

Cas particulier d'un objet sphérique

Dans le cas d'un corps sphérique, le moment $\mathbf{p}$ du dipôle s'exprime en fonction de $\mathbf{U}$, selon l'expression (6.47a). On obtient alors pour l'énergie cinétique, d'après l'équation (6.49) :

$$E_c = \frac{\pi}{3} \rho R^3 U^2. \quad (6.57a)$$

De même, on obtient la valeur de la force à partir des équations (6.47) et (6.56) :

$$\mathbf{F} = -\frac{\rho V_0}{2} \frac{d\mathbf{U}}{dt}. \quad (6.57b)$$

La force à appliquer à la sphère pour obtenir l'accélération $d\mathbf{U}/dt$ est donc augmentée de la même quantité $-\mathbf{F}$ que si on avait ajouté à la masse de la sphère la moitié de la masse du fluide déplacé par celle-ci (la *masse ajoutée*).

6.4 Ondes linéaires à la surface d'un fluide parfait

Une classe importante de problèmes, où la description en termes de fluide parfait s'applique bien, est celle des ondes de surface, tant que l'on ne s'intéresse pas aux effets de l'atténuation des ondes due à la viscosité. Elle met en jeu le couplage entre les déformations de la surface et les écoulements en volume, qui résultent des premières. Les forces de rappel qui apparaissent lorsque l'onde de propagation sont : la *gravité* qui s'oppose à la déviation de la surface par rapport à l'horizontale ; la *tension superficielle* qui s'oppose à la courbure de l'interface et tend à minimiser son aire.

6.4.1 Houle, risée et déferlantes

Commençons par présenter les différents régimes d'ondes qui peuvent exister à la surface d'un fluide. La figure 6.13 montre la variation de la vitesse de propagation c d'une onde, en fonction de son vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$. On remarque une variation non monotone avec, en particulier, une valeur minimale $c_{\min}$ pour une valeur k_c de k (pour l'eau $c_{\min}$ vaut 0,23 m/s). Nous verrons plus bas que k_c est égal à l'inverse de la longueur capillaire $\ell_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ du fluide, introduite à la section 1.4.4 (Eq. 1.65). Pour une onde de pulsation ω , se propageant à la surface d'une couche de liquide d'épaisseur h , de masse volumique ρ et de tension superficielle γ , la vitesse c vérifie :

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) \left(1 + \frac{\gamma k^2}{\rho g} \right). \quad (6.58)$$

Nous démontrons ce résultat à la fin de ce paragraphe. Il peut être aisément généralisé au cas d'une onde à l'interface entre deux liquides superposés. Nous discuterons ce problème dans le cadre des instabilités d'interface à la section 11.4.1.

Évaluons l'importance respective des différents termes de la relation (6.58). Nous pouvons la réécrire en faisant apparaître explicitement la longueur capillaire ℓ_c :

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) (1 + k^2 \ell_c^2). \quad (6.59)$$

Dans la suite, nous nous plaçons dans le cas où l'épaisseur h de la couche de fluide est nettement plus importante que la longueur capillaire ℓ_c (celle-ci vaut 3 mm dans le cas de l'eau).

Dans la relation (6.59), le terme multiplicatif en $\tanh(kh)$ est voisin de l'unité pour des ondes à la surface d'une couche d'épaisseur h grande devant $1/k$ ou, de manière équivalente devant la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. Pour ces ondes, dites en *eau profonde*, l'expression (6.59) devient :

$$c^2 \approx \frac{g}{k} (1 + k^2 \ell_c^2). \quad (6.60)$$

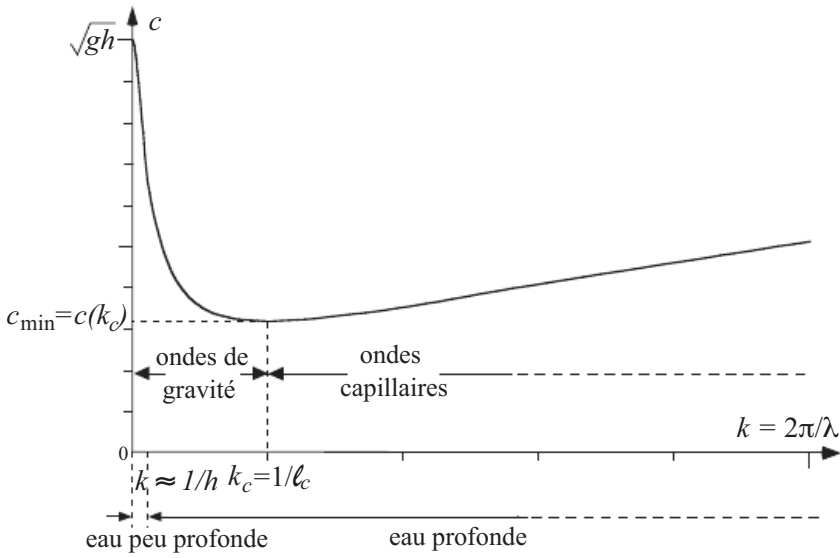


FIG. 6.13 – Variation de la vitesse de phase d’une onde de surface en fonction du vecteur d’onde k , pour une couche liquide d’épaisseur h grande devant la longueur d’onde capillaire $\ell_c = 1/k_c$. Le vecteur d’onde $k \approx 1/h$ indiqué sur l’axe horizontal marque la transition progressive vers le régime d’ondes en eau peu profonde aux faibles vecteurs d’onde (ou, de manière équivalente, aux grandes longueurs d’onde $\lambda > h$).

– Le premier terme du membre de droite, qui domine aux longueurs d’onde grandes devant la longueur capillaire ℓ_c ($k\ell_c \ll 1$), correspond à une *onde de gravité*. Sa vitesse de phase :

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (6.61)$$

décroît lorsque le vecteur d’onde croît. Cette onde correspond à la *houle* à la surface de la mer.

– Dans l’autre limite des courtes longueurs d’onde ($k\ell_c \gg 1$), le second terme domine. La vitesse de phase de cette *onde capillaire* est donnée par :

$$c \approx \sqrt{gk\ell_c} = \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}}. \quad (6.62)$$

Le minimum de vitesse de l’onde correspond au cas où les effets de la capillarité et de la gravité sont du même ordre : la longueur d’onde λ_c correspondante est égale à $2\pi/k_c = 2\pi\ell_c$. La longueur capillaire sépare donc approximativement les domaines où la gravité et la capillarité sont respectivement dominants.

$$\lambda_c = 2\pi\ell_c = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}. \quad (6.63)$$

Dans le cas où la longueur d'onde est grande, à la fois devant l'épaisseur h et la longueur capillaire ℓ_c , (c'est-à-dire $kh \ll 1$ et $k\ell_c \ll 1$), l'expression (6.59) prend la forme approchée :

$$c \approx \sqrt{gh}. \quad (6.64)$$

Pour ces ondes, dites en *eau peu profonde*, l'épaisseur de la couche de liquide contrôle la vitesse. C'est là l'origine du *déferlement* des vagues, qui est dû à ce que la vitesse de propagation est plus grande à la crête d'une vague qu'à sa base ainsi qu'au fait que l'épaisseur de la couche d'eau diminue lorsqu'on est près du rivage.

Démonstration de l'équation (6.58) de dispersion des ondes de surface.

Soit une couche liquide limitée inférieurement par le plan $y = 0$ et d'épaisseur moyenne h (figure 6.14). On cherche des ondes bidimensionnelles caractérisées par le potentiel des vitesses $\Phi(x, y, t)$. On suppose, d'une part que l'amplitude de l'onde est assez faible pour que les termes $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ soient négligeables et que, d'autre part, la courbure de l'interface reste faible.

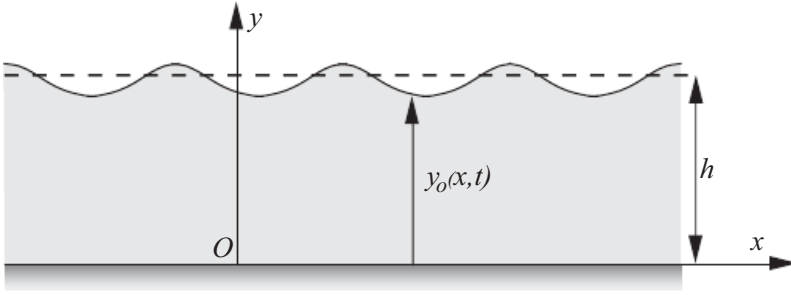


FIG. 6.14 – Géométrie de la couche de liquide pour l'étude de la propagation des ondes de surface.

Cela se traduit par : $\partial y_0(x, t)/\partial x \ll 1$ où $y_0(x, t)$ est la position instantanée de la surface. L'équation de Bernoulli (relation 5.36) pour un tel problème instationnaire s'écrit (en prenant $\varphi = gy$ où g est l'accélération de la pesanteur et en négligeant le terme en $v^2/2$) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gy = \text{constante}. \quad (6.65)$$

La pression à la surface du liquide est donnée par la relation de Laplace (Éq. 1.58) dans la limite $R' \rightarrow \infty$:

$$p = p_0 - \frac{\gamma}{R} \quad (6.66)$$

où p_0 est la pression extérieure au-dessus de l'interface, γ le coefficient de tension superficielle, et $R = (\partial^2 y / \partial x^2)^{-1}$ la courbure locale instantanée de la surface. Au fond du récipient (en $y = 0$), la vitesse normale à la surface est nulle et :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (6.67)$$

Sur l'interface, on exprime l'égalité de la composante verticale de la vitesse du fluide et de la vitesse de l'interface, soit :

$$v_y(y = y_0) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=y_0} = \frac{\partial y_0}{\partial t}. \quad (6.68)$$

Remarque. Cette expression n'est exacte qu'au premier ordre, car il existe un terme d'ordre supérieur que nous discuterons à la section 11.4.1 et qui traduit l'effet du mouvement convectif horizontal sur le déplacement vertical de l'interface quand celui-ci n'est pas horizontal.

Le potentiel des vitesses cherché est solution de l'équation de Laplace $\Delta \Phi = 0$, compte tenu des conditions aux limites énoncées plus haut. On résout cette équation par la méthode de séparation des variables. À cet effet, on recherche des solutions sous la forme du produit d'une fonction f de la variable $u = x - ct$, représentant une onde progressive de célérité c dans la direction de l'axe x , par une fonction g dépendant de la coordonnée verticale y , soit :

$$\Phi(x, y, t) = f(u) g(y) \quad (6.69)$$

(ne pas confondre la fonction g avec l'accélération de la pesanteur). En reportant cette forme dans l'équation de Laplace, on obtient l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} g + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

Chacun des deux membres de cette dernière équation dépend séparément des variables u et y . Ils doivent donc être séparément constants, soit :

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \text{constante} = -k^2. \quad (6.70)$$

Nous avons directement choisi une constante négative pour le terme dépendant de x , car nous cherchons une solution de comportement sinusoïdal en $e^{i(kx - \omega t)}$ dans la direction x . La solution de l'équation de Laplace pour le potentiel des vitesses s'écrit donc, compte tenu des conditions aux limites de (6.67) et (6.68) :

$$\Phi(x, y, t) = f(x - ct) g(y) = A e^{i(kx - \omega t)} \text{ch}(ky) \quad (6.71)$$

où A est une constante qui dépend de l'amplitude de l'onde. La dépendance avec la coordonnée y correspond à une atténuation avec la profondeur. En dérivant l'équation (6.65) par rapport au temps, et en se servant à nouveau de la condition (6.68), on obtient la relation :

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=y_0} = 0. \quad (6.72)$$

En reportant la forme (6.71) dans l'équation ci-dessus, et en remplaçant $y(x, t)$ par sa valeur moyenne h , on obtient :

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \tanh(kh) \quad (6.73)$$

qui conduit à l'expression (6.58) de la vitesse de phase de l'onde $c = \omega/k$ écrite au début de cette section. ■

Insectes et ondes de surface

Les insectes vivant à la surface de l'eau tirent partie des ondes de surface de diverses façons. Tout d'abord, l'émission de telles ondes et la quantité de mouvement associée contribuent d'une manière comparable aux autres mécanismes (émission de tourbillons, friction sur le liquide, ...) à la propulsion de certains insectes. L'émission d'ondes requiert cependant de l'énergie et en dissipe : d'autres petits insectes évitent donc cette émission, et la résistance à l'avancement qui en résulte en se déplaçant à une vitesse inférieure au minimum $c_m = 0,23$ m/s de la vitesse des ondes. Enfin, certains insectes leur trouvent d'autres applications ; les gyrins tournent sur eux même et émettent ainsi des ondes en spirales qui leur permettraient d'éviter les obstacles grâce aux réflexions des ondes sur ceux-ci.

6.4.2 Trajectoires des particules de fluide lors du passage de l'onde

Utilisons la forme du potentiel de vitesse :

$$\Phi(x, y, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \operatorname{ch}(ky)$$

établie précédemment (Éq. 6.71). Intégrons par rapport au temps le champ de vitesse obtenu par la relation $\mathbf{v}(x, y, t) = \mathbf{grad}\Phi$: on obtient alors l'équation (paramétrée par le temps) des trajectoires des particules de fluide dans le plan (x, y) :

$$\Delta x(t) = A \frac{k}{\omega} \cos(\omega t - kx) \operatorname{ch}(ky) \quad \Delta y(t) = A \frac{k}{\omega} \sin(\omega t - kx) \operatorname{sh}(ky)$$

x et y sont les coordonnées de la position moyenne de chaque particule ; $\Delta x(t)$ et $\Delta y(t)$ sont les composantes du déplacement de chaque particule à l'instant t par rapport à cette position. En éliminant le temps entre ces deux relations, on obtient l'équation d'une ellipse :

$$\frac{(\Delta x)^2}{\operatorname{ch}^2(ky)} + \frac{(\Delta y)^2}{\operatorname{sh}^2(ky)} = \frac{4A^2 k^2}{\omega^2}. \quad (6.74)$$

– En *eau profonde* et loin du fond, $k|y| \gg 1$ et donc :

$$\operatorname{ch}^2(ky) \approx \operatorname{sh}^2(ky) \approx \frac{e^{2ky}}{4}.$$

Les trajectoires sont alors circulaires ; l'amplitude du déplacement décroît exponentiellement et devient négligeable dès que la profondeur dépasse quelques longueurs d'onde (figure 6.15a).

– En *eau peu profonde*, on a : $ky \ll 1$, quel que soit y . Les trajectoires sont donc des ellipses, très allongées au voisinage de la surface, qui deviennent

des segments de droite horizontaux vers le fond. Le rapport des longueurs des axes de l'ellipse est de l'ordre de ky . L'amplitude du déplacement des particules dans la direction x (horizontale) reste sensiblement constante (figure 6.15b). L'approximation d'eau peu profonde revient en fait à négliger la composante de vitesse v_y quel que soit y et à supposer que la composante de vitesse v_x est indépendante de y .

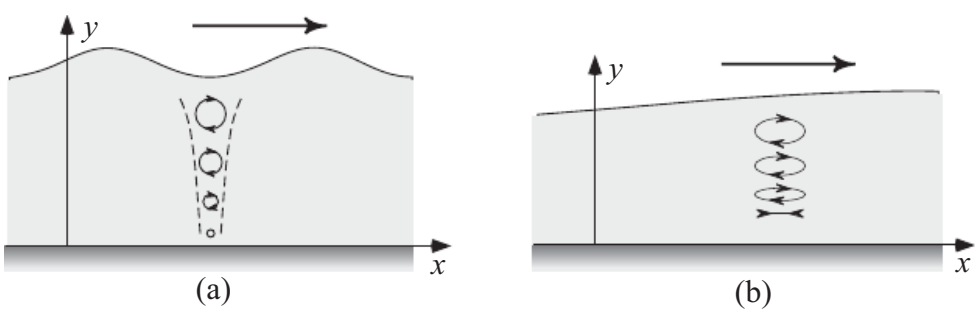


FIG. 6.15 – Trajectoires des particules de fluide au passage d’une onde ; (a) en eau profonde ; (b) en eau peu profonde. La flèche horizontale donne le sens de propagation de l’onde.

6.4.3 Ondes solitaires

Nous parvenons ici au domaine riche et complexe des ondes non linéaires. Les ondes de surface donnent l’illustration la plus simple des effets correspondants ; aussi, nous en indiquons quelques éléments tout en restant dans le cadre d’une analyse qualitative.

Nous nous intéressons à la propagation d’une perturbation à la surface libre d’une couche de fluide d’épaisseur h , d’amplitude A non négligeable devant h , et localisée sur une largeur Δ (figure 6.16). Nous allons montrer que, par un effet de compensation, une telle perturbation peut se propager sans se déformer, et constitue ce qu’on appelle une *onde solitaire*.

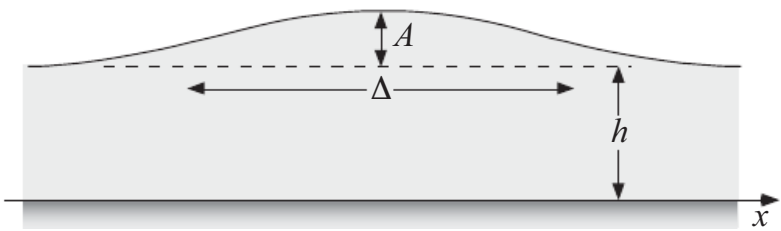


FIG. 6.16 – L’onde solitaire, d’amplitude A non négligeable devant l’épaisseur h d’une couche de liquide, peut se propager sans se déformer à la surface du liquide.

Deux effets concourent à modifier le profil de la perturbation au cours de son déplacement.

- Un effet d'étalement dû à la dispersion : la perturbation de largeur Δ peut être considérée comme la superposition d'ondes sinusoïdales de fréquences voisines. Supposons que kh reste modéré et développons, à l'ordre le plus bas, la relation (6.58) qui donne la vitesse de l'onde de surface. En négligeant le terme dû à la capillarité, nous obtenons :

$$c(k) \approx \sqrt{gh} \left(1 - \frac{k^2 h^2}{6} \right). \quad (6.75)$$

On remarque que les composantes de plus petites longueurs d'onde de la perturbation (vecteur d'onde plus grand) se propagent plus lentement. Or, si l'extension spatiale de l'onde est Δ , son spectre de vecteurs d'onde s'étendra entre $k = 0$ et $k = 1/\Delta$. La différence de vitesse δc entre ces deux extrêmes a donc pour ordre de grandeur :

$$|\delta c| \approx \sqrt{gh} \frac{h^2}{\Delta^2}. \quad (6.76)$$

Cette différence de vitesse entre les composantes du spectre de l'onde tend à étaler le paquet d'onde : c'est le phénomène classique de dispersion.

- Un effet de raidissement du front de l'onde, dû aux effets de non-linéarité : comme la vitesse des ondes croît avec l'épaisseur h , le sommet et la partie basse de la déformation tendent à se déplacer avec des vitesses respectives :

$$c' = \sqrt{g(h+A)} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{gh}.$$

La crête se déplace donc plus rapidement que la base, ce qui tend à causer un raidissement du front, éventuellement suivi d'un déferlement. La variation correspondante de vitesse est de l'ordre de :

$$c' - c \approx \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{A}{2}. \quad (6.77)$$

Les effets de dispersion et de non-linéarité se compensent lorsque les différences de vitesse de propagation dues à la dispersion de l'onde (relation 6.76) et au raidissement de son front (relation 6.77) sont du même ordre de grandeur, soit lorsque :

$$\sqrt{gh} \frac{h^2}{\Delta^2} \approx \sqrt{\frac{g}{h}} A \quad \text{d'où} \quad A \approx \frac{h^3}{\Delta^2}. \quad (6.78)$$

L'onde se propagera sans déformation si la compensation se fait en tout point du profil. Par un calcul plus complet, on peut montrer que cela est réalisé pour un profil bien déterminé de la forme :

$$y = h + \frac{A}{ch^2 \left(\frac{x}{\Delta} \right)} \quad (6.79a)$$

avec :

$$A\Delta^2 = \frac{4}{3}h^3 \quad (6.79b)$$

et une vitesse de propagation :

$$c = \sqrt{g(h+A)}. \quad (6.79c)$$

Remarque. La propagation de telles ondes, appelées ondes solitaires, peut être observée dans des canaux sur plusieurs kilomètres. On rapporte l'histoire de Scott Russell qui a découvert en 1838 les ondes solitaires en suivant à cheval l'onde créée par l'arrêt brutal d'une péniche sur un canal.

6.4.4 Un autre écoulement potentiel avec interface : la bulle de Taylor

Les grosses bulles d'air montant dans un tube rempli d'eau de grand diamètre (une dizaine de cm ou plus) voisin de celui de la bulle ont souvent à l'avant une forme presque sphérique très stable (figure 6.17a) ; par contre, le sillage qu'elles laissent derrière elles est turbulent. G.I. Taylor a montré en 1950 que la vitesse U_b de montée de la bulle était bien prédite par un modèle simple supposant un écoulement potentiel dans la partie proche du sommet de la bulle et négligeant l'influence des parois. C'est pour cette raison que nous discutons ici ce phénomène, bien qu'il ne s'agisse pas de propagation d'une onde mais d'un mouvement global d'une interface eau-air.

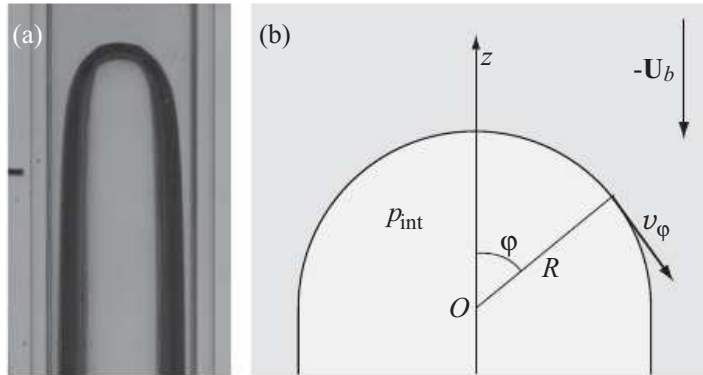


FIG. 6.17 – a) vue d'une bulle de Taylor montant dans un tube rempli d'eau ($d = 8$ cm). b) Schéma de l'écoulement autour de la partie avant sphérique d'une bulle de Taylor (le repère des coordonnées sphériques est supposé immobile par rapport à la bulle). Doc. S. Madani, O. Caballina et M. Souhar.

Sous cette hypothèse d'écoulement potentiel, la vitesse de montée des bulles de diamètre beaucoup plus grand que la *longueur capillaire* l_c (Éq. 1.65), et voisin de celui du tube vaut :

$$U_b \simeq (2/3)\sqrt{gR} \simeq 0,47\sqrt{2gR}. \quad (6.80a)$$

Expérimentalement, les mesures effectuées dans des tubes de diamètre d (légèrement supérieur à $2R$) donnent, dans la limite des grands diamètres et faibles viscosités :

$$U_b \simeq 0,35 \sqrt{gd}. \quad (6.80b)$$

Pour des plus petits diamètres et/ou des fluides plus visqueux, la vitesse sera réduite par l'influence de la tension superficielle et de la viscosité.

Démonstration. Plaçons nous dans le référentiel où la bulle est immobile : sous les hypothèses indiquées, le problème est équivalent à celui d'un écoulement stationnaire uniforme de vitesse $-U_b$ autour d'une sphère. La vitesse tangentielle à la surface de la bulle est donc $v_\varphi = -(3/2)U_b \sin \varphi$, d'après les équations (6.25). Les effets capillaires seront négligeable et la pression dans le liquide à la surface de la bulle sera égale à la pression p_{int} dans le gaz à l'intérieur, pression qui est presque constante. Appliquons l'équation de Bernoulli à la surface de la bulle entre le point de stagnation au sommet de celle-ci ($\varphi = 0, z = 0$) et un point de la face avant ($\varphi < \pi/2, z = R \cos \varphi$) :

$$p_{\text{int}} + \frac{9}{8} \rho U_b^2 \sin^2 \varphi + \rho g R \cos \varphi = p_{\text{nt}} + \rho g R. \quad (6.81)$$

En prenant $(1 - \cos \varphi) \simeq \sin^2 \varphi / 2$, on obtient alors l'équation (6.80a). Pour de l'eau et un tube de diamètre $2R = 0,1$ m, la vitesse d'une bulle d'air de diamètre voisin de $2R$ sera de $0,35$ m/s ce qui correspond à un nombre de Reynolds $\text{Re} = 2RU_b/\nu$ de $35\,000$.

Comme le souligne Taylor dans son article original, la validité de ce résultat vient de la quasi absence de contrainte visqueuse sur la surface de la bulle en raison de la faible valeur de la viscosité de l'air à l'intérieur. Pour un corps solide de même géométrie que la bulle, il apparaîtrait une couche limite près de la surface afin de vérifier la condition de vitesse relative nulle à la paroi. ■

6.5 Analogie électrique des écoulements potentiels bidimensionnels

Considérons un écoulement plan, potentiel et incompressible d'un fluide. Le champ de vitesse dérive du potentiel des vitesses $\Phi(x, y)$ et de la fonction de courant $\Psi(x, y)$ par les équations (3.38) et (6.2), dites *relations de Cauchy*, avec :

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (6.82a)$$

et

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (6.82b)$$

Comme $\text{div } \mathbf{v}$ et $\text{rot } \mathbf{v}$ sont tous les deux nuls, on en déduit que les fonctions $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ satisfont chacune l'équation de Laplace :

$$\Delta \Phi = 0 \quad (6.83a)$$

$$\Delta \Psi = 0. \quad (6.83b)$$

De façon analogue, le potentiel électrique V créé dans le vide par une distribution de charges statiques ou quasi-statiques vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0. \quad (6.84)$$

En rapprochant les équations (6.83) et (6.84), il est possible d'établir la correspondance entre le potentiel électrique V et le potentiel des vitesses Φ (*analogie directe*), ou bien la fonction de courant Ψ (*analogie inverse*). Dans ce dernier cas, nous allons voir qu'il suffit d'imposer une équipotentielle électrique ayant la géométrie des parois solides ; les autres équipotentielles décrivent alors les lignes de courant. Cette correspondance est mise en pratique dans les modèles analogiques d'études d'écoulements plans de fluides parfaits : ceux-ci sont réalisés en utilisant une feuille de papier ou de plastique recouverte d'une couche de résistivité électrique assez élevée (graphite par exemple) parcourue par un courant électrique, ou encore une cuve remplie d'un électrolyte (cuve rhéologique).

6.5.1 Analogie directe

Dans ce cas, on fait correspondre le potentiel des vitesses $\Phi(x, y)$ au potentiel électrique $V(x, y)$, et le champ de vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \Phi$ à la densité de courant $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \mathbf{grad} V$, σ représentant la conductivité du milieu conducteur. Les lignes de courant du problème hydrodynamique étant tangentes à un obstacle solide, il faut remplacer celui-ci par une zone isolante de même géométrie. Les équipotentielles du problème électrique (faciles à déterminer expérimentalement) correspondent alors aux équipotentielles des vitesses. Les lignes de courant du problème hydrodynamique doivent être déterminées ensuite, en traçant les trajectoires orthogonales des équipotentielles obtenues (par exemple en utilisant une feuille résistive percée d'un cercle pour reproduire l'écoulement autour d'un cylindre de la figure 6.5). C'est une méthode peu commode, et on préfère utiliser l'analogie inverse.

6.5.2 Analogie inverse

Dans cette approche, les équipotentielles électriques correspondent directement aux lignes de courant de fluide : un très bon conducteur électrique doit alors remplacer l'obstacle hydrodynamique. La ligne de courant qui limite celui-ci correspond alors à la ligne équipotentielle représentée par le contour de l'obstacle dans le problème électrique.

Dans la pratique, on utilise un papier résistif sur lequel on peint, à l'aide d'une peinture très conductrice, un contour de forme identique à celle de l'obstacle du problème hydrodynamique. Les conditions d'écoulement loin de l'obstacle sont reproduites par application d'un potentiel électrique entre des électrodes latérales suffisamment éloignées (Fig. 6.18). Les lignes de courant sont relevées point par point, en déplaçant une électrode à la surface du papier, de manière à ce que son potentiel reste constant pour chaque courbe.

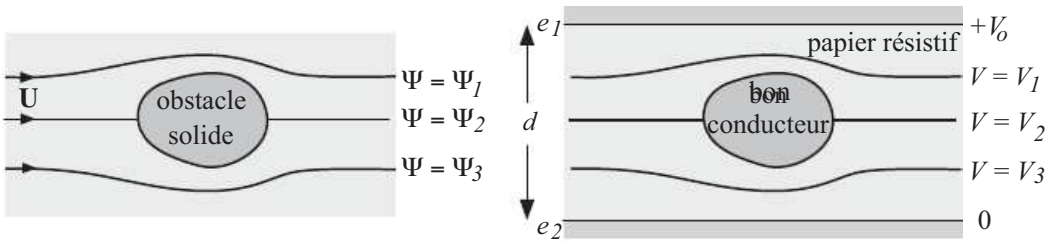


FIG. 6.18 – Écoulement bidimensionnel uniforme de vitesse $\mathbf{U}$, perturbé par un obstacle rigide. (b) Analogie électrique inverse de l'écoulement (a) utilisant une feuille de papier résistif (gris sombre) deux électrodes latérales e_1 et e_2 et une zone centrale fortement conductrice reproduisant la forme de l'obstacle.

Enfin, dans l'analogie inverse, la présence d'une circulation non nulle Γ de la vitesse autour de l'obstacle ($\Gamma = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$) peut être simulée par injection, ou extraction, suivant le signe de Γ , de l'obstacle conducteur vers le papier résistif d'un courant électrique d'intensité I , reliée à Γ par :

$$I = (\sigma h) \Gamma. \quad (6.85)$$

Démonstration. L'intensité I du courant émis s'écrit :

$$I = \int_C \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} (h dl) = \sigma h \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dl \quad (6.86)$$

où h représente l'épaisseur de la feuille métallisée, σ sa conductivité électrique, et $\mathbf{j}$ la densité de courant ; $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal au contour (C) le long duquel est évaluée la circulation (figure 6.19) et dl est un élément de longueur sur ce contour. Mais, dans l'analogie inverse, on fait correspondre les lignes de champ électrique aux

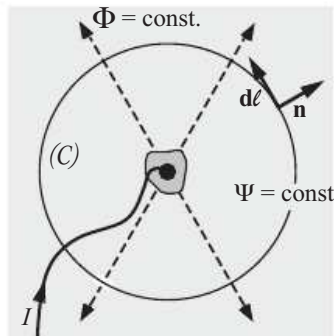


FIG. 6.19 – Simulation d'une circulation de la vitesse autour d'un obstacle par application d'un courant entre une électrode conductrice centrale reproduisant la forme de l'obstacle et une feuille résistive. Les équipotentiels ont la même géométrie que les lignes de courant autour de l'obstacle.

équipotentiellles de vitesse, donc aux trajectoires orthogonales des lignes de courant de fluide. On a ainsi :

$$\mathbf{E} = \mathbf{grad} \Psi. \quad (6.87)$$

On retrouve alors l'équation (6.85) en réécrivant la relation (6.86), en utilisant les relations (6.82) et en remarquant que $\mathbf{n} dl = (-dy, dx, 0)$:

$$\begin{aligned} I &= \sigma h \int_{(C)} (\mathbf{grad} \Psi \cdot \mathbf{n}) dl = \sigma h \left[\int_{(C)} (-v_y) (-dy) + \int_{(C)} v_x dx \right] \\ &= \sigma h \int_{(C)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = (\sigma h) \Gamma. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

6.6 Potentiel complexe des vitesses

Les transformations conformes utilisant le potentiel complexe établissent une correspondance entre les champs de vitesse bidimensionnels décrits ci dessus et des problèmes pour des géométries plus complexes telles qu'un profil d'aile bidimensionnel.

6.6.1 Définition du potentiel complexe

Les potentiels conjugués Φ et Ψ obéissent aux relations de Cauchy (6.82). On peut définir dans le plan complexe une fonction *potentiel complexe* $f(z)$, telle que :

$$f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y). \quad (6.88)$$

La fonction analytique $f(z)$ ne dépend que de la variable complexe $z = x + iy$. La dérivée de $f(z)$ est la *vitesse complexe* $w(z)$ avec :

$$\frac{df(z)}{dz} = w(z) = v_x - i v_y. \quad (6.89)$$

Démonstration. En évaluant la dérivée pour une variation $dz = dx$ réelle de la variable complexe (l'affixe de z se déplace le long de l'axe des réels), on trouve :

$$w(z) = \frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i \frac{\partial\Psi}{\partial x} = v_x - i v_y. \quad (6.90a)$$

Un déplacement le long de l'axe imaginaire ($dz = i dy$) donne le même résultat :

$$\frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{i\partial y} = i \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} = -i v_y + v_x = w(z). \quad (6.90b)$$

Plus généralement, l'équation (6.89) est vérifiée quelle que soit la direction de l'accroissement de l'affixe de z . ■

Déterminons la signification de la circulation complexe $\bar{\Gamma}(z)$ sur un contour fermé $(\mathcal{C})$.

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}(z) &= \int_{\mathcal{C}} w(z) dz = \int_{\mathcal{C}} (v_x - i v_y) (dx + i dy) \\ &= \int_{\mathcal{C}} (v_x dx + v_y dy) + i \int_{\mathcal{C}} (v_x dy - v_y dx).\end{aligned}$$

soit :

$$\bar{\Gamma}(z) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} + i \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl = \Gamma + iQ \quad (6.91)$$

où $\mathbf{n}$ représente le vecteur unitaire normal à l'élément de contour $d\mathbf{l}$. Le premier terme représente la circulation, le second, le débit de fluide (mesuré par unité de longueur perpendiculaire au plan de l'écoulement), à partir de sources situées à l'intérieur du contour $(\mathcal{C})$. Pour un écoulement dans un domaine simplement connexe en l'absence de source et de tourbillon plan, $\bar{\Gamma}(z) = 0$: sur un contour fermé, la fonction $f(z)$ est parfaitement définie en chaque point.

6.6.2 Potentiel complexe de quelques écoulements

Aux écoulements plans étudiés dans les sections 6.2.3 et 6.2.4, on peut associer les potentiels complexes suivants.

(i) Écoulement uniforme

$$f(z) = U z.$$

En utilisant un paramètre complexe $\bar{U} = U_x - iU_y$, on décrit un écoulement dans une direction quelconque du plan.

(ii) Tourbillon et source

Nous avons vu à la section 6.2.3 la correspondance entre les lignes de courant d'un de ces écoulements et les lignes équipotentiels de l'autre. Ces deux écoulements peuvent être décrits par l'expression commune du potentiel complexe :

$$f(z) = a_0 \text{Log } z \quad (6.92)$$

où le coefficient a_0 est complexe. On calcule la vitesse complexe par dérivation du potentiel complexe $f(z)$ et on écrit le résultat en coordonnées polaires avec $z = r e^{i\theta}$. On trouve alors :

$$w(z) = v_x - i v_y = \frac{a_0}{z} = \frac{a_0}{r} e^{-i\theta}$$

ou, en coordonnées polaires :

$$v_r - i v_\theta = \frac{a_0}{r},$$

car on vérifie facilement par développement et identification que :

$$v_r - i v_\theta = (v_x - i v_y) e^{i\theta}.$$

- Si a_0 est réel ($a_0 = Q/2\pi$), alors :

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad v_\theta = 0$$

et on retrouve le champ de vitesse créé par une source de débit Q .

- Si a_0 est imaginaire pur ($a_0 = -i\Gamma/2\pi$), alors :

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

ce qui représente le champ de vitesse créé par un tourbillon de circulation Γ .

(iii) Dipôle

Le potentiel complexe d'un dipôle à deux dimensions et le champ de vitesse correspondant s'écrivent respectivement :

$$f(z) = -\frac{p}{2\pi z} \tag{6.93}$$

et :

$$w(z) = \frac{p}{2\pi z^2}.$$

D'où :

$$v_r = \frac{p}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad v_\theta = \frac{p}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2}.$$

Ces relations sont identiques aux équations (6.14).

(iv) Écoulements autour d'un dièdre ou près d'un point d'arrêt

Comme dernière application de la méthode du potentiel complexe, nous allons traiter maintenant cette classe d'écoulements, très importants dans la pratique. Ils sont définis par des potentiels complexes de la forme

$$f(z) = C z^{m+1} \tag{6.94}$$

correspondant à des écoulements autour d'un dièdre formé par l'intersection de deux lignes. En effet, le potentiel des vitesses et la fonction de courant s'écrivent respectivement en coordonnées polaires :

$$\Phi = C r^{m+1} \cos(m+1)\theta \quad \Psi = C r^{m+1} \sin(m+1)\theta.$$

On en déduit, par dérivation de Φ , les composantes de la vitesse :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = (m+1) C r^m \cos(m+1) \theta \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (m+1) C r^m \sin(m+1) \theta. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Les droites d'équation $\theta = 0$ et $\theta = n\pi/(m+1)$, avec n entier positif ou négatif, sont donc des lignes de courant pour lesquelles $\Psi = 0$ quel que soit r . Elles représentent l'intersection de parois planes et rigides avec le plan de l'écoulement. Examinons à présent les différentes formes des dièdres, suivant la valeur du paramètre m (figure. 6.20).

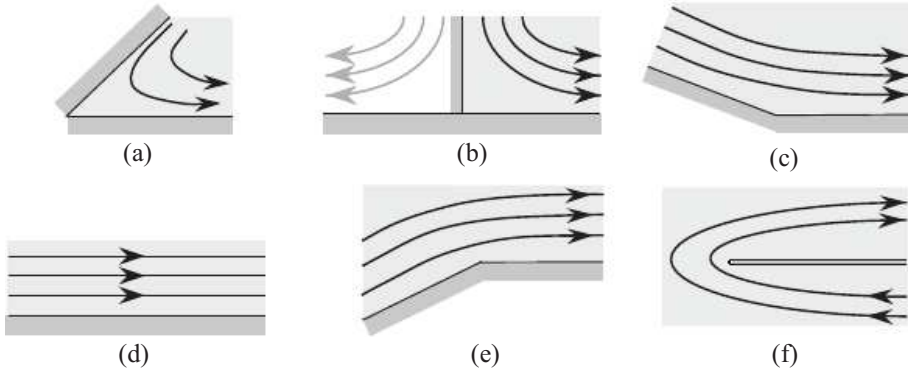


FIG. 6.20 – Écoulements dont le potentiel des vitesses est de la forme : $f(z) = C z^{m+1}$. (a) $m > 1$; (b) $m = 1$; (c) $0 < m < 1$; (d) $m = 0$; (e) $-1/2 < m < 0$; (f) $m = -1/2$.

- Le cas $m > 1$, représente un écoulement à l'intérieur d'un dièdre formant un angle aigu (figure 6.20a). Dans ce cas, le module de la vitesse tend vers zéro à l'origine comme r^m .
- Pour $m = 1$, on a $f(z) = C z^2$. Ceci correspond à l'écoulement à l'intérieur d'un angle droit ou autour d'un point d'arrêt sur une plaque plane (à condition alors de superposer l'écoulement symétrique par rapport à l'axe y) (figure 6.20b). Il existe dans ce cas une ligne de courant perpendiculaire à la plaque, qui se termine avec une vitesse nulle en un point de stagnation sur la paroi.
- Pour $0 < m < 1$, la fonction $f(z)$ représente l'écoulement à l'intérieur d'un dièdre d'angle obtus $\alpha = \pi/(m+1)$, délimité par les plans solides $\theta = 0$ et $\theta = \pi/(m+1)$ correspondant à $n = 0$ et $n = 1$ respectivement (figure 6.20c).
- Pour $m = 0$, on a un écoulement parallèle à un plan (figure 6.20d).

- Pour $-1/2 < m < 0$, on a, en considérant toujours les valeurs $n = 0$ et $n = 1$ pour les parois, un écoulement à l'extérieur d'un dièdre d'angle obtus ($m > -1/3$), ou aigu ($m < -1/3$) (figure 6.20e).
- $m = -1/2$ correspond à un écoulement autour d'une demi-plaque plane (figure 6.20f).

Lorsque m est négatif, le module de la vitesse à l'origine tend vers l'infini comme r^m parce que l'écoulement est extérieur au dièdre, et non plus intérieur comme dans le cas où m était positif.

Nous verrons plus loin, à la section 10.5.2, que ces résultats sont à reconsidérer pour des fluides réels visqueux : dans ce cas, la vitesse doit diminuer continûment jusqu'à zéro lorsqu'on s'approche de parois solides immobiles. Les solutions que nous avons étudiées s'appliquent quand on est suffisamment loin des plaques ; elles se raccordent à la condition de vitesse nulle à la paroi par une zone de transition appelée couche limite.

6.6.3 La transformation conforme

Méthode de la transformation conforme

Considérons les variables complexes $z = x + iy$ et $Z = X + iY$. Supposons que la variable complexe Z soit une fonction analytique de z :

$$Z = g(z). \tag{6.96}$$

Alors, on peut faire correspondre au réseau des lignes de courant et équipotentielles, $\Psi(x, y) = \text{cte}$ et $\Phi(x, y) = \text{cte}$ dans le plan (x, y) , un réseau correspondant de lignes dans le plan (X, Y) (figure 6.21).

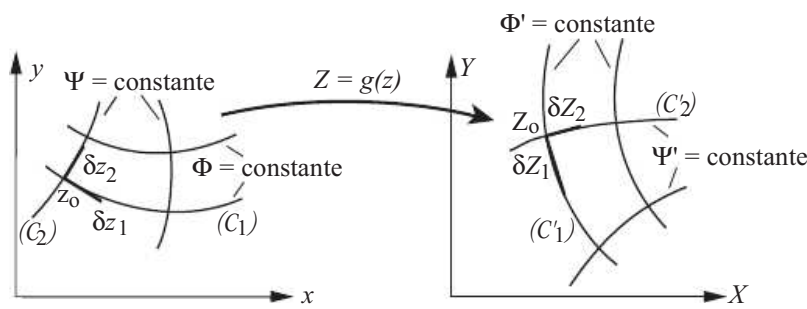


FIG. 6.21 – Image des réseaux d'équipotentielles et des lignes de courant par une transformation conforme $Z = g(z)$. Les angles entre ces deux réseaux orthogonaux sont conservés dans la transformation dès lors que la fonction $g(z)$ ne présente pas de singularité.

La propriété fondamentale de la transformation conforme ainsi définie est qu'elle conserve les angles. En effet, considérons le point d'affixe z_0 et son

image Z_0 (figure 6.21). Les accroissements δz_1 et δz_2 le long de deux arcs de courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ se coupent en z_0 , et les accroissements correspondants δZ_1 et δZ_2 s'écrivent :

$$\delta Z_1 = g'(z_0) \delta z_1 \quad \text{et} \quad \delta Z_2 = g'(z_0) \delta z_2.$$

Si $g'(z_0)$ reste fini, on en déduit :

$$\frac{\delta Z_2}{\delta Z_1} = \frac{|\delta Z_2|}{|\delta Z_1|} e^{i(\arg \delta Z_2 - \arg \delta Z_1)} = \frac{|\delta z_2|}{|\delta z_1|} e^{i(\arg \delta z_2 - \arg \delta z_1)}$$

soit :

$$\frac{|\delta Z_2|}{|\delta Z_1|} = \frac{|\delta z_2|}{|\delta z_1|} \quad \text{et} \quad \arg \delta Z_2 - \arg \delta Z_1 = \arg \delta z_2 - \arg \delta z_1.$$

Ainsi, le facteur de variation des longueurs des segments, lors de la transformation, est indépendant de leur direction. L'angle des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ est d'autre part égal à l'angle des courbes images, sauf aux points d'affixe z_0 tels que $g'(z_0)$ soit égal à zéro ou à l'infini.

De cette propriété de conservation des angles, on déduit que les réseaux images des réseaux $\Phi(x, y) = \text{cte}$ et $\Psi(x, y) = \text{cte}$ sont des réseaux orthogonaux comme les réseaux de départ eux-mêmes.

Remarque. Les points singuliers de la transformation conforme correspondent aux points où $g(z)$ est nul ou infini. En ces points, les angles ne se conservent pas, et nous allons montrer que le rapport des angles objets et images est égal à l'ordre de la première dérivée non nulle de la fonction g' au point z_0 . Appelons n cet ordre ; en développant la fonction $g(z)$ à l'ordre n autour de z_0 , on trouve :

$$\delta Z \approx \frac{(\delta z)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n g(z)}{\partial z^n} \right)_{z=z_0}.$$

Les rapports des deux accroissements δz_1 et δz_2 et de leurs transformés δZ_1 et δZ_2 vérifient donc :

$$\frac{\delta Z_2}{\delta Z_1} = \frac{\delta Z_2}{\delta Z_1} e^{i(\arg \delta Z_2 - \arg \delta Z_1)} = \frac{\delta z_2^n}{\delta z_1^n} = \frac{|\delta z_2|^n}{|\delta z_1|^n} e^{i n(\arg \delta z_2 - \arg \delta z_1)}.$$

On a donc bien : $\arg \delta Z_2 - \arg \delta Z_1 = n(\arg \delta z_2 - \arg \delta z_1)$.

Supposons que le potentiel complexe $f(z)$ caractérise un écoulement dans un domaine du plan (x, y) et que $h(Z)$ représente la transformation inverse de la transformation conforme $Z = g(z)$ définie par la relation (6.96). La fonction :

$$f(h(Z)) = F(Z) \tag{6.97}$$

décrit un écoulement dans le plan (X, Y) dont les équipotentielles et les lignes de courant sont respectivement les images obtenues par la transformation des équipotentielles et des lignes de courant dans le plan (x, y) . En particulier, aux obstacles dans le plan objet, correspondent, par la loi de transformation, des obstacles dans le plan image, transformés des précédents. Il est ainsi possible d'obtenir directement la vitesse et le potentiel complexe par la transformation $g(z)$.

Transformation d'un plan en un dièdre

Dans la section 6.6.2(iv), nous avons étudié l'écoulement d'un fluide à l'intérieur ou à l'extérieur d'un dièdre, en utilisant la méthode du potentiel complexe. Une manière équivalente d'étudier ce type d'écoulement est de transformer l'écoulement uniforme parallèle à un plan à l'aide de la transformation conforme suivante :

$$z = h(Z) = Z^{m+1}. \quad (6.98)$$

Dans cette transformation, le potentiel complexe $f(z) = Uz$ de l'écoulement de départ est transformé en un potentiel :

$$F(Z) = U Z^{m+1} \quad (6.99)$$

qui décrit précisément le type d'écoulement à étudier, comme nous l'avons montré à la section 6.6.2(iv). On peut remarquer que le fait que le plan soit transformé en un dièdre est justement dû à la singularité de la fonction inverse de $h(Z)$ à l'origine ; en ce point, les angles ne sont pas conservés, et l'angle plat dans le plan objet est transformé en un angle aigu, ou obtus, suivant la valeur du paramètre m .

La transformation de Joukowski – Modélisation d'une aile d'avion dans un écoulement potentiel

Cette transformation est la première d'une série de transformations conformes qui permettent de passer de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire à l'écoulement autour d'un profil d'aile à deux dimensions. Grâce à elle, nous pourrions déterminer le champ de vitesse d'écoulement autour d'un élément de plaque plane, placée dans un écoulement uniforme à l'infini et incliné par rapport à la plaque.

(i) Définition

La transformation de Joukowski est définie par la relation :

$$Z = g(z) = z + \frac{R^2}{z} \quad (6.100)$$

où R est un nombre réel. Elle transforme un cercle, centré à l'origine et de rayon r dans le plan (x, y) , en une ellipse dans le plan (X, Y) . En effet, pour $z = r e^{i\theta}$ (équation polaire d'un cercle), on a :

$$Z = X + iY = r e^{i\theta} + \frac{R^2}{r} e^{-i\theta} = \left(r + \frac{R^2}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{R^2}{r}\right) \sin \theta.$$

En éliminant l'angle θ entre les expressions de X et Y , on obtient :

$$\frac{X^2}{\left(r + \frac{R^2}{r}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(r - \frac{R^2}{r}\right)^2} = 1$$

qui est l'équation d'une ellipse dont les deux foyers P_1 et P_2 sont situés sur l'axe OX , aux points d'abscisses $X = \pm 2R$ (figure 6.22).

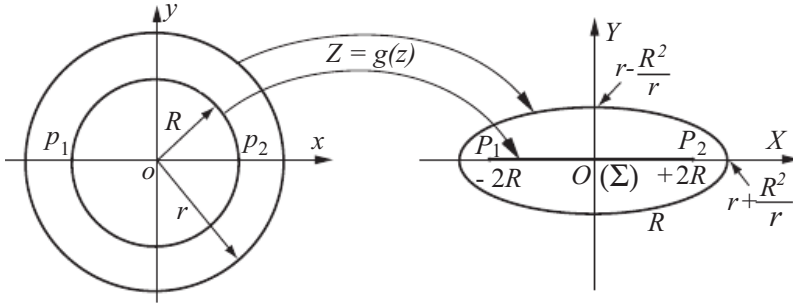


FIG. 6.22 – Image d'un cercle dans la transformation de Joukowski. L'ellipse obtenue se réduit à un segment de droite $[-2R, +2R]$ lorsque le rayon du cercle objet coïncide avec le paramètre R de la loi de transformation.

Lorsque $r = R$ (le rayon du cercle est égal au paramètre de la transformation de Joukowski), on a :

$$Z = 2R \cos \theta.$$

L'ellipse devient alors le segment de droite (Σ) , limité par les points de coordonnées $Y = 0$ et $X = \pm 2R$. Dans ce dernier cas, lorsqu'un point objet décrit une fois le cercle, son image dans la transformation décrit deux fois le segment ; elle parcourt une fois la partie « supérieure » (pour θ variant de 0 à π), et une fois la partie « inférieure » (θ variant de π à 2π). On remarque la non conservation des angles aux points P_1 et P_2 transformés des points p_1 et p_2 d'affixe $z = \pm R$. En effet, la dérivée $g'(z) = 1 - R^2/z^2$ de la fonction $g(z)$ qui définit la transformation conforme, s'annule aux points p_1 et p_2 .

(ii) Transformation inverse d'un écoulement parallèle à un élément de plaque plane

Considérons à présent dans le plan *image* (X, Y) un écoulement uniforme parallèle à un plan (II), dont la trace par le plan de figure est précisément le segment (Σ) considéré plus haut (Fig. 6.23). Le potentiel complexe de cet écoulement est :

$$F(Z) = UZ.$$

Dans le plan *objet* (x, y) , il lui correspond l'écoulement autour d'un cercle $(\mathcal{C})$, de rayon R centré à l'origine, avec une vitesse $\mathbf{U}$ uniforme loin du cercle (Fig. 6.23b). Le potentiel complexe correspondant s'écrit directement :

$$f(z) = F[g(z)] = U \left(z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (6.101)$$

En prenant la partie réelle de $f(z)$, nous retrouvons le potentiel des vitesses Φ , que nous avons déjà déterminé à la section 6.2.4.

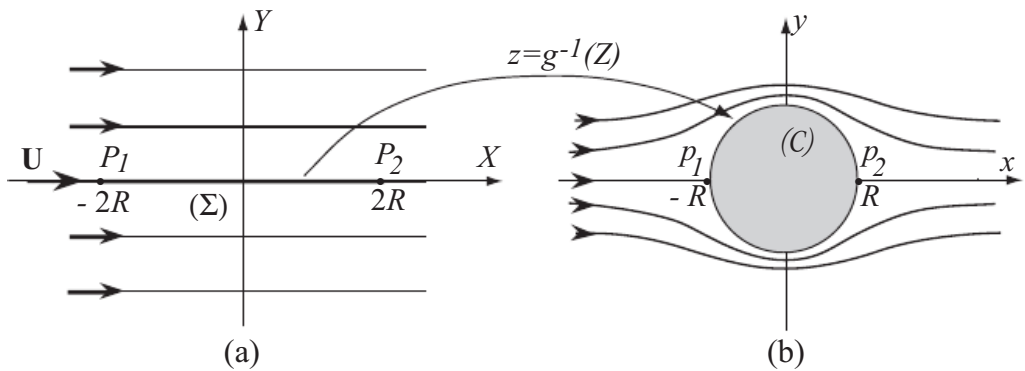


FIG. 6.23 – Écoulement autour d'un plan en l'absence d'incidence (a) et son image (b) dans la transformation inverse de Joukovski (relation (6.100)).

Au voisinage du point d'arrêt p_1 du cercle (C) , on a localement le même écoulement que vers un plan perpendiculaire (Fig. 6.20b); dans la transformation, il lui correspond un écoulement autour du bord d'attaque du plan (Σ) et parallèle à celui-ci (Fig. 6.20f).

(iii) Potentiel complexe d'un écoulement arrivant obliquement sur un élément de plaque plane

Étudions à présent l'écoulement autour de l'élément plan (Σ) dans l'espace (X, Y) lorsque la direction de (Σ) fait un angle d'incidence α avec la direction de la vitesse U , et qu'il existe en plus une circulation Γ de la vitesse autour de (Σ) . Ce problème simule de façon simplifiée l'écoulement autour d'une aile. Nous commençons par établir le potentiel complexe dans l'espace (x, y) . Il suffit pour cela d'effectuer une rotation des axes d'un angle α (Fig. 6.24a), en transformant z en $z_1 = z e^{-i\alpha}$ dans le potentiel donné par l'équation (6.101). On ajoute ensuite le potentiel complexe associé à l'écoulement de circulation Γ autour du cylindre (Éq. 6.92); comme précédemment, Γ sera comptée positivement pour une circulation dans le sens trigonométrique. On obtient ainsi :

$$f_2(z) = U \left(z e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{z e^{-i\alpha}} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{z e^{-i\alpha}}{R} \right). \quad (6.102)$$

La transformation conforme conserve les angles en dehors des points où la dérivée s'annule, et l'angle d'incidence dans le plan (X, Y) sera donc lui aussi égal à α . On peut montrer par ailleurs que la transformation conforme conserve également la circulation. Le potentiel complexe :

$$F_2(Z) = f_2(g^{-1}(z))$$

obtenu à partir de l'équation (6.102) par la transformation inverse de $g(z)$ représente donc le potentiel de l'écoulement autour de l'élément de plaque (Σ) (Fig. 6.24b).

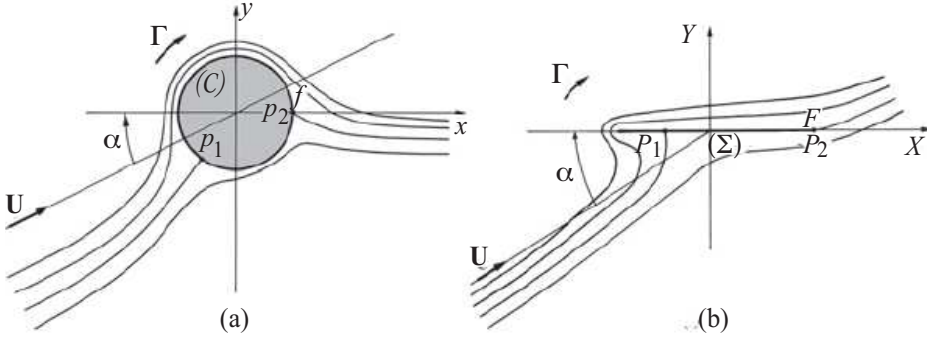


FIG. 6.24 – (a) Écoulement autour d'un cylindre circulaire sous incidence α et avec une circulation Γ ; (b) image de cet écoulement par la transformation de Joukovski.

En fait, la transformation inverse de $g(z)$ n'est pas une fonction analytique et on ne peut pas exprimer directement le potentiel correspondant F_2 . Cependant, seule la vitesse complexe nous est nécessaire, et elle peut être déterminée aisément.

(iv) Vitesse complexe sur le plan solide

Nous avons en effet :

$$W(z) = \frac{dF_2}{dZ} = \frac{df_2}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{df_2}{dz} \frac{1}{g'(z)} \quad (6.103a)$$

soit :

$$W(z) = U \frac{z^2}{z^2 - R^2} \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2}{z^2 e^{-i\alpha}} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z}. \quad (6.103b)$$

Nous allons limiter notre étude au calcul de la vitesse complexe sur la surface de l'élément plan (Σ) . Comme celui-ci est l'image du cercle (C) , il suffit de prendre $z = R e^{i\theta}$ dans l'équation précédente, soit :

$$W(z) = \frac{U}{1 - e^{-2i\theta}} \left(e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha-2\theta)} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{-i\theta}.$$

On remarque que la vitesse W dans le plan image est ainsi exprimée en fonction du rayon R du cercle et de l'angle polaire θ dans le plan objet de la figure 6.24a. Rappelons que $Z = X + iY$ et θ sont reliés par la formule (6.100); sur le cercle d'équation $r = R$, celle-ci conduit à : $X = 2R \cos \theta$ et $Y = 0$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{i\theta}$ on obtient, pour la variation de W sur la surface de l'élément plan (Σ) :

$$W(\theta) = \frac{U \sin(\theta - \alpha) - (\Gamma/4\pi R)}{\sin \theta}. \quad (6.104)$$

Comme on pouvait le prévoir, l'expression obtenue est réelle puisque la composante de vitesse perpendiculaire au plan doit être nulle. Le tracé des lignes de

courant dans les plans (x, y) et (X, Y) est donné par les figures 6.24a et 6.24b respectivement. On remarque en particulier les deux points d'arrêt P_1 et P_2 sur la plaque (Σ) . Ces deux points correspondent à des valeurs de θ telles que :

$$\sin(\theta - \alpha) = \frac{\Gamma}{4\pi RU}$$

et placés dissymétriquement lorsqu'il y a une circulation. Ces points seront ceux où $W = 0$, et ils existeront seulement si la circulation Γ est inférieure à $4\pi RU$ en valeur absolue.

(v) Condition de Kutta

Cherchons à présent une valeur particulière de la circulation pour laquelle le point P_2 , image du point d'arrêt p_2 , est localisé juste sur le bord de fuite F , c'est-à-dire sur l'arête aval de la plaque (Fig. 6.24b). On montre que cela correspond à la configuration stable de l'écoulement autour d'un profil d'aile sous incidence : la circulation autour de l'aile s'ajuste à la valeur qui permet de satisfaire cette condition. Or, le point f dont l'image est le bord de fuite F doit correspondre à $\theta = 0$; s'il coïncide avec le point d'arrêt p_2 comme nous venons de le supposer, on doit donc avoir :

$$w(\theta = 0) = 0 \quad \text{soit :} \quad 0 = -U \sin \alpha - \frac{\Gamma}{4\pi R}.$$

D'où :

$$\Gamma = -4\pi RU \sin \alpha. \quad (6.105)$$

Cette relation constitue la *condition de Kutta*. Notons cependant qu'au point P_2 , image du point d'arrêt p_2 , la vitesse n'est pas nulle car le dénominateur de la vitesse complexe W s'annule également (Fig. 6.25a) ; le bord de fuite est en effet un point singulier de la transformation. La vitesse vaut, en ce point (en tenant compte de la condition (6.105) et en développant l'expression (6.104) au voisinage de $\theta = 0$) :

$$W(\theta = 0) = U \cos \alpha = V_{P_2} = V_F.$$

Ce dernier résultat est valable seulement si l'angle entre les faces inférieure et supérieure de la surface portante est nul comme dans les figures 6.24 et 6.25a. Par contre, dans les profils réels cet angle n'est pas nul comme dans la figure 6.25b. Dans ce cas, la vitesse en F est nulle : nous avons vu en effet, en étudiant les écoulements au voisinage de l'arête d'un dièdre (section 6.6.2(iv)), que la vitesse s'annule sur l'arête si l'angle du dièdre est inférieur à 180° (cas des figures 6.20 a,b et c).

(vi) Estimation de la portance sur une aile

L'expression obtenue plus haut pour la circulation va nous permettre d'évaluer l'ordre de grandeur de la portance qui s'exerce sur une aile d'avion

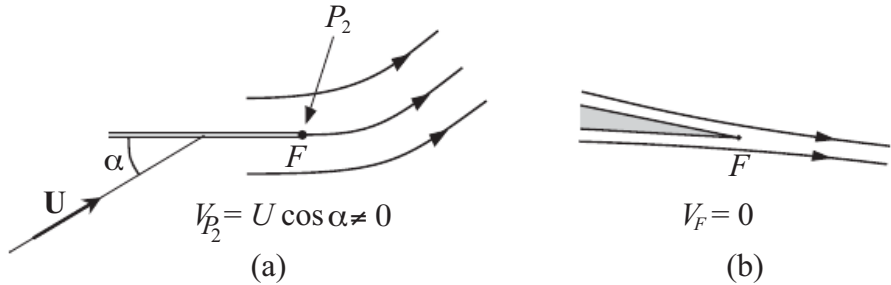


FIG. 6.25 – Comparaison des vitesses sur le bord de fuite d’un dièdre d’angle nul (a), et d’angle fini (b).

au décollage. Elle s’exprime en effet, d’après l’équation (6.44), sous la forme :

$$\mathbf{F}_p = \rho \mathbf{U} \wedge \mathbf{\Gamma}.$$

Compte tenu de la relation (6.105), nous trouvons, pour l’ordre de grandeur de la portance par unité de longueur dans la direction perpendiculaire au plan de l’écoulement :

$$F_p \approx \pi \rho U^2 (4R) \sin \alpha.$$

Notons L l’envergure de l’aile et $\ell = 4R$ sa largeur, appelée *corde*. On obtient finalement, pour la portance sur la totalité de l’aile :

$$F_p \approx \pi \rho U^2 (L\ell) \sin \alpha. \tag{6.106}$$

Des ordres de grandeur, pour trois types d’avion, sont les suivants :

	Vitesse U au décollage	Corde ℓ	Envergure	Angle de cabrage	Portance $\mathbf{F}_p$	Masse de l’appareil
Avion de ligne type Boeing 747	300 km/h	9 m	60 m	10°	$3 \cdot 10^7$ N	300 t
Avion de tourisme type Cessna	100 km/h	1,70 m	9 m	13°	10^4 N	900 kg
Avion de chasse type Mirage F1	350 km/h	5 m	9 m	20°	$6 \cdot 10^5$ N	16 t

On remarque que l’avion de ligne décolle grâce à une surface de voilure importante, mais avec des angles de cabrage modérés, pour des impératifs de confort. L’avion de tourisme peut se contenter d’une plus faible portance, de par sa masse plus faible. Enfin, l’avion de chasse décolle avec des angles de cabrage très élevés et une vitesse assez importante, pour compenser une surface de voilure plus réduite. Nous reviendrons de façon plus générale sur ce thème de portance à la section 7.5.2.

Le plan portant n'est qu'une approximation grossière du profil d'une aile réelle. Il contient cependant la physique des mécanismes qui sont à l'origine de la sustentation, par l'effet conjugué d'un écoulement incident et de la présence d'une circulation de la vitesse autour du profil. Par ailleurs, en décentrant progressivement le cercle auquel on applique la transformation de Joukowski (Fig. 6.23), on obtient des images qui se rapprochent très fortement des profils d'ailes réelles.

Notons toutefois, pour terminer, que ces études bidimensionnelles de l'aile négligent les effets importants liés à la tridimensionnalité. Il apparaît en particulier une structure tourbillonnaire qui se prolonge à partir des bouts d'aile (voir section 7.5.2).

Annexe A-1

Potentieux des vitesses et fonctions de courant
d'écoulements plans

Type d'écoulement	Potentiel des vitesses	Fonction de courant
Écoulement uniforme à deux dimensions	$\Phi = U x$	$\Psi = U y$
Écoulement uniforme à trois dimensions de vitesse U (coordonnées cylindriques)	$\Phi = U x$	$\Psi = -U \frac{r^2}{2}$
Écoulement uniforme à trois dimensions de vitesse U (coordonnées sphériques)	$\Phi = U r \cos \varphi$	$\Psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \varphi$
Tourbillon (coordonnées cylindriques)	$\Phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$	$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log} \frac{r}{r_0}$
Source ponctuelle 2D (coordonnées cylindriques)	$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{r}{r_0} \right)$	$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$
Source ponctuelle 3D (coordonnées sphériques)	$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r}$	$\Psi = -\frac{Q}{4\pi} \cos \varphi$
Dipôle de courant 2D (coordonnées cylindriques)	$\Phi = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{2\pi r^2}$	$\Psi = -\frac{p}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}$
Dipôle de courant 3D (coordonnées sphériques)	$\Phi = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$	$\Psi = \frac{p \sin^2 \varphi}{4\pi r}$
Écoulement autour d'un cylindre circulaire	$\Phi = U r \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$	$\Psi = -U r \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$
Écoulement autour d'une sphère (coordonnées sphériques)	$\Phi = U r \cos \varphi \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right)$	$\Psi = \frac{U}{2} \left(r^2 - \frac{R^2}{r} \right) \sin^2 \varphi$
Dièdre d'angle $\alpha = \frac{\pi}{m+1}$	$\Phi = C r^{m+1} \cos (m+1) \theta$	$\Psi = C r^{m+1} \sin (m+1) \theta$

Annexe A-2

Relation fonction de courant – composantes des vitesses

Écoulement à deux dimensions (coordonnées cartésiennes)	$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$	$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$
Écoulement à deux dimensions (coordonnées polaires)	$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$	$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$
Écoulement de révolution (coordonnées cylindriques)	$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$	$v_x = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$
Écoulement de révolution (coordonnées sphériques)	$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$	$v_\varphi = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$

Relation potentiel des vitesses – composantes des vitesses

Ces relations sont simplement les expressions en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques de la relation générale $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \Phi$.

Écoulement à deux dimensions (coordonnées cartésiennes)	$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$	
Écoulement à deux dimensions (coordonnées polaires)	$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$	$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$	
Écoulement à trois dimensions (coordonnées cartésiennes)	$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$
Écoulement à trois dimensions (coordonnées cylindriques)	$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$	$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$	$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$
Écoulement à trois dimensions (coordonnées sphériques)	$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$	$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$	$v_\theta = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$

This page intentionally left blank

Chapitre 7

Vorticité, dynamique du tourbillon, écoulements en rotation

L'ÉTUDE des déformations d'un élément liquide du chapitre 3 (section 3.2) a fait apparaître un terme de rotation locale, qui est la partie antisymétrique du tenseur des gradients de vitesse. Le vecteur vitesse angulaire de rotation locale correspondant est égal à la moitié du vecteur vorticité défini comme le rotationnel du champ de vitesse. C'est un outil privilégié pour décrire les mouvements de rotation locale à l'intérieur d'un fluide, bien que sa mesure soit plus indirecte que celle du champ de vitesse. Dans certains cas, la vorticité est localisée, comme dans les tourbillons; dans d'autres, elle est continûment distribuée dans l'espace, comme c'est le cas dans un fluide en rotation uniforme.

Dans ce chapitre, nous commencerons par rappeler la définition de la vorticité, que nous illustrerons dans le cas de lignes de tourbillons. Cela nous permettra d'identifier des correspondances avec les distributions de courants électriques et de champ magnétique. Nous étudierons ensuite le transport de la vorticité dans le cas d'un fluide parfait, d'une part à partir de la dynamique de la circulation (théorème de Kelvin) (section 7.2), d'autre part, en établissant directement une équation d'évolution de la vorticité (section 7.3). Ce théorème nous permettra de justifier, *a posteriori*, l'étude des écoulements potentiels que nous avons effectuée au chapitre 6 : nous montrerons en effet que, pour un fluide parfait et sous réserve d'autres conditions, un écoulement initialement potentiel le reste ensuite. Nous décrirons ensuite la dynamique d'un ensemble de vortex, qui correspond à des écoulements dans lesquels toute la vorticité est concentrée sur des lignes singulières (section 7.4). Nous examinerons, dans la section 7.5, les problèmes de locomotion dans l'air et dans l'eau qui font intervenir la vorticité. Enfin, nous nous intéresserons (section 7.6) aux écoulements en rotation, où l'effet de la rotation d'ensemble se superpose à la

vorticité existante dans le repère tournant. Cette étude joue un rôle considérable dans les phénomènes atmosphériques et océanographiques.

7.1 La vorticité : définition, exemple des filaments de tourbillons rectilignes

7.1.1 Notion de vorticité

Vorticité et champ de vitesse

À la section 3.2.3, nous avons défini le pseudo-vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ en un point $\mathbf{r}$, par :

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (7.1)$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ est le champ de vitesse de l'écoulement. Nous avons démontré que $\boldsymbol{\omega}$ est égale au double du vecteur rotation locale du fluide (vecteur tourbillon).

Comme pour les lignes de courant, on définit des *lignes de vorticité* qui sont tangentes en chacun de leurs points au pseudo-vecteur vorticité. De même, les *tubes de vorticité* sont l'espace limité par une surface formée des lignes de vorticité s'appuyant sur une courbe fermée.

Rappel. Les composantes ω_k de la vorticité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ sont reliées à la partie antisymétrique $\omega_{ij} = 1/2(\partial v_i/\partial x_j - \partial v_j/\partial x_i)$ du tenseur des gradients de vitesse $G_{ij} = \partial v_i/\partial x_j$ par $\omega_k = -\varepsilon_{ijk}\omega_{ij}$; ε_{ijk} vaut zéro si deux indices sont égaux, 1 si la permutation $i \rightarrow j \rightarrow k$ est directe, et -1 si elle est inverse).

La vorticité dans différents types d'écoulements

La vorticité intervient chaque fois que l'écoulement n'est pas potentiel et, par conséquent, dans les fluides visqueux. Elle joue un rôle particulièrement important dans les écoulements turbulents, que l'on peut souvent considérer comme la superposition d'une translation moyenne et de mouvements de rotation locale, d'échelles de tailles très variables. Dans ces écoulements, la vorticité est très souvent distribuée dans tout le volume du fluide.

Dans certains cas, en revanche, l'écoulement est potentiel presque partout, en dehors d'une ligne (ou *cœur*) de rayon ξ faible par rapport à la taille globale de l'écoulement : toute la vorticité est alors localisée dans ce cœur autour duquel s'effectue la rotation du fluide. On rencontre de tels écoulements tourbillonnaires (aussi appelés *vortex*) dans les tornades et les trombes atmosphériques (Fig. 7.1b CC), dans les tourbillons de vidange des lavabos ou des baignoires et, à une toute autre échelle, dans les tourbillons de l'hélium superfluide ($\xi \approx 10^{-10}$ m) que nous examinerons dans l'annexe de ce chapitre.

Dans d'autres cas, la vorticité est moins concentrée, mais des structures d'écoulement en rotation du fluide restent bien identifiées ; c'est le cas des couches de cisaillement entre fluides de vitesses différentes qui seront discutées à la section 7.4.2. Enfin, des structures de ce type sont nettement visibles sur

plusieurs centaines de kilomètres sur les photos satellites des ouragans et des cyclones (Fig. 7.1a CC) ou dans l'atmosphère de Jupiter, à une échelle de plusieurs dizaines de milliers de kilomètres. Aux sections 2.4.2 et 2.4.3, nous avons rencontré également l'émission périodique de structures tourbillonnaires dans les sillages en arrière d'obstacles.

7.1.2 Un modèle simple de tourbillon rectiligne : le vortex de Rankine

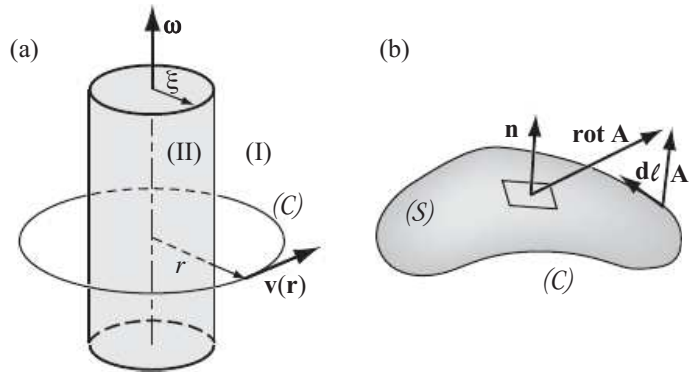


FIG. 7.2 – (a) Champ de vitesse créé par une tube de vorticité rectiligne. (b) Calcul de la circulation d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}$ le long d'une courbe (C) , à partir du flux de son rotationnel à travers une surface (S) qui s'appuie sur cette courbe.

Le vortex de Rankine est une représentation modèle de filament de tourbillon rectiligne où la vorticité est concentrée dans une zone de petit rayon, le *cœur* du tourbillon (Fig. 7.2a) : dans ce modèle, on suppose une distribution de vorticité uniforme $\omega_z = \omega_z^0$ localisée à l'intérieur d'un cylindre circulaire de rayon ξ , d'axe Oz , et de longueur infinie suivant Oz (région II). On admet que les autres composantes ω_x et ω_y sont partout nulles et que l'écoulement est de révolution autour de Oz et constant suivant z . Pour $r > \xi$ (région I), $\omega_z = 0$.

Champ de vitesse d'un vortex de Rankine

On peut calculer le champ de vitesse correspondant en utilisant le *théorème de Stokes*, qui exprime le fait que la circulation d'un champ de vecteurs $\mathbf{A}$ sur un contour fermé (C) est égale au flux du rotationnel de $\mathbf{A}$ à travers une surface (S) qui s'appuie sur ce contour (Fig. 7.2b) :

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (7.2)$$

Région I ($r > \xi$)

Pour calculer la vitesse d'écoulement orthoradiale v_θ , appliquons tout d'abord l'équation (7.2) sur un cercle de rayon $r > \xi$ centré sur l'axe du tube et de plan perpendiculaire à la vorticité. En supposant l'écoulement de révolution autour de l'axe et invariant suivant Oz et, d'après les hypothèses faites sur ω_z , on trouve que la *circulation* Γ du vecteur vitesse autour du cercle vaut :

$$\Gamma = 2\pi r v_\theta(r) = \int_0^\xi 2\pi \omega_z(r) r dr = \omega_z^0 \pi \xi^2. \quad (7.3)$$

La circulation Γ est donc constante avec r et égale à $\omega_z^0 \pi \xi^2$ tant que r reste supérieur à ξ : elle caractérise la force du tourbillon. La composante v_θ varie donc en $1/r$ avec :

$$v_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (7.4)$$

Plus généralement, la circulation a la même valeur pour tous les contours fermés de forme quelconque qui entourent une fois le cylindre : on le vérifie simplement en appliquant le théorème de Stokes à ces contours. Ces résultats restent valables dans la limite d'un cœur du tourbillon réduit à une ligne, avec une densité infinie de vorticité : si l'intégrale de cette distribution singulière reste finie, elle continuera à représenter la circulation de la vitesse autour du cœur du tourbillon.

Remarque. La décroissance de v_θ en r^{-1} est caractéristique de tout champ de vitesse azimutal de révolution et de rotationnel nul. Supposons en effet que seule la composante v_θ soit non nulle et qu'elle ne dépende que de r , la condition $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ devient :

$$(\text{rot } v_\theta)_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) = 0.$$

Donc v_θ est bien proportionnel à $1/r$.

Région II ($r < \xi$)

La circulation de la vitesse vaut :

$$\begin{aligned} 2\pi r v_\theta(r) &= \int_0^r 2\pi \omega_z r dr = \omega_z^0 \pi r^2. \\ v_\theta(r) &= \frac{\omega_z^0 r}{2} = \frac{\Gamma r}{2\pi \xi^2}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

On a donc un mouvement de rotation solide du cœur du tourbillon avec $v_\theta(r) \propto r$; on remarque que la vitesse angulaire de rotation est égale à $\omega_z^0/2$.

Physiquement, l'écoulement dans la région I apparaît comme un écoulement potentiel dans une géométrie multiconnect e, déjà rencontré à la section 6.2 ; cet écoulement se juxtapose à une rotation en bloc dans le *cœur* au centre du tourbillon (région II), qui joue alors le rôle d'un obstacle de longueur infinie autour duquel apparaît la circulation du fluide.

Dans un écoulement de fluide visqueux, les effets de la viscosité augmentent au fur et à mesure que r décroît et que le gradient de vitesse $\partial v_\theta / \partial r$ augmente. Le modèle de vortex de Rankine suppose que, au-dessous d'un rayon ξ marquant la limite du *coeur* du tourbillon, ces effets sont tels que seuls les mouvements de rotation en bloc sont possibles ; dans ce cas, la vitesse angulaire Ω est constante et $v_\theta = \Omega r$.

Champ de pression dans le vortex de Rankine

– Région I ($r > \xi$).

Dans la partie irrotationnelle du champ de vitesse du tourbillon, la variation de la pression p autour du tourbillon est obtenue en appliquant la relation de Bernoulli (5.36). La pression p diminue lorsque l'on s'approche du centre de la ligne de telle façon que (si l'on néglige la gravité) :

$$p + \frac{1}{2} \rho v_\theta^2 = p + \frac{1}{2} \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^2} = \text{cte}, \quad (7.6)$$

où ρ est la masse volumique du liquide. Si la pression devient suffisamment basse quand r diminue, il peut y avoir vaporisation du liquide en rotation. Nous avons discuté ce phénomène de *cavitation* à la section 5.3.2. Une autre conséquence de cette baisse de pression dans la région centrale est que les lignes de tourbillon peuvent se piéger sur les aspérités des parois matérielles solides.

Remarque. Un phénomène voisin est le piégeage dans les cœurs de tourbillons des objets de faible densité comme les bulles de gaz.

– Région II ($r < \xi$).

Dans la partie rotation solide, le liquide est immobile dans le référentiel tournant à la vitesse $\omega_z^0/2$. Nous établirons à la section 7.6.1 les équations de mouvement d'un fluide dans un repère en rotation. Toujours en négligeant la gravité, nous supposons ici que le gradient de pression radial équilibre la force centrifuge associée à la rotation avec :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \left(\frac{\omega_z^0}{2} \right)^2 r = \rho \left(\frac{\Gamma}{2\pi \xi^2} \right)^2 r. \quad (7.7)$$

La pression augmente donc quadratiquement avec r et, toujours si $r < \xi$:

$$p(r) = p(0) + \rho \left(\frac{\omega_z^0}{2} \right)^2 \frac{r^2}{2} = p(0) + \rho \left(\frac{\Gamma}{2\pi \xi^2} \right)^2 \frac{r^2}{2}. \quad (7.8)$$

En écrivant que les expressions (7.6) et (7.8) sont simultanément vérifiées pour $r = \xi$, on peut alors calculer $p(0)$ en fonction de la pression à grande distance $r \rightarrow \infty$.

Énergie cinétique par unité de longueur d'un vortex de Rankine

L'énergie cinétique e_c d'un vortex de Rankine vaut, par unité de longueur :

$$e_c = \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi} \left(\text{Log} \frac{L}{\xi} + \frac{1}{4} \right). \quad (7.9)$$

Démonstration. Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où le rayon du cœur est nul. On obtient :

$$e_c = \frac{1}{2} \iint \rho v_\theta^2 dS = \frac{\rho}{2} \int \left(\frac{\Gamma}{2\pi r} \right)^2 2\pi r dr. \quad (7.10)$$

Cette intégrale de la forme $\int dr/r = \int d(\text{Log } r)$ est singulière, à la fois lorsque r tend vers l'infini et vers zéro. La première singularité disparaît si l'on impose à r une limite supérieure correspondant à la taille L du récipient ($L = R$ dans l'exemple précédent). La seconde singularité disparaît, elle, lorsque le rayon du cœur est fini : la contribution de ce dernier à l'énergie cinétique est alors finie et égale à $I\Omega_\xi^2/2$, où $I = \pi\rho\xi^4/2$ est son moment d'inertie, et $\Omega_\xi = |\omega|/2 = \Gamma/(2\pi\xi^2)$ sa vitesse angulaire de rotation. On obtient alors l'expression (7.9) de l'énergie cinétique en ajoutant la contribution de la partie externe. ■

Modélisation d'un tourbillon de vidange : vortex de Rankine à surface libre

Le modèle de *vortex de Rankine* donne une bonne représentation physique approchée des vortex de vidange. On utilise un récipient rempli d'eau à niveau constant, alimenté avec un débit volumique Q par une injection tangentielle près des parois latérales ; le récipient se vidange dans le même temps par une ouverture centrale circulaire située au fond du récipient. L'observation de la surface libre (Fig. 7.3) permet de distinguer une région extérieure convexe (I) qui se raccorde à une région intérieure parabolique (II). Afin d'expliquer ce résultat, nous représentons l'écoulement comme un vortex de Rankine où la région (I) correspond à un écoulement irrotationnel et la région (II) à une rotation solide. Les résultats précédents restent donc globalement valables : il faudra tenir compte cependant des termes de gradient de pression hydrostatique que nous avons négligés jusqu'ici. Leur équilibre avec les termes reflétant la force centrifuge détermine en effet la forme de l'interface.

Région (I) ($r \geq \xi$)

La surface libre a un profil d'allure hyperbolique d'équation :

$$h(r) = -\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g r^2} + h_\infty. \quad (7.11)$$

Démonstration. L'équation (7.6) peut être réutilisée en ajoutant un terme de pression hydrostatique $\rho g h$ comme nous l'avons vu à la section 5.3.2. Par ailleurs,

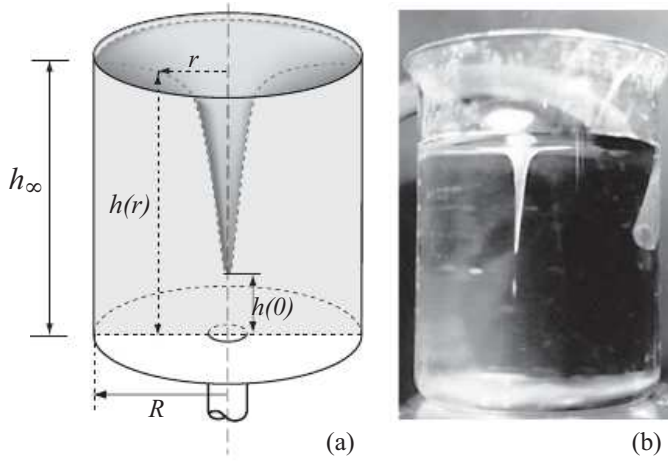


FIG. 7.3 – (a) Tourbillon créé par la vidange d'un récipient à travers un orifice circulaire. (b) Réalisation expérimentale : l'alimentation continue par le tuyau permet d'étudier le tourbillon en régime stationnaire.

à grande distance r de l'axe, le terme en $1/r^2$ devient négligeable et la surface fluide atteint un niveau constant h_∞ . Comme la pression au-dessus de la surface est égale à la pression atmosphérique p_0 , l'équation (7.6) permet alors d'écrire :

$$p(r, z) + \rho g z + \frac{1}{2} \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^2} = p_0 + \rho g h_\infty. \quad (7.12)$$

Par ailleurs, si l'on néglige l'effet de capillarité dû à la courbure de la surface, le niveau $z = h(r)$ de la surface, toujours à une distance $r > \xi$, doit être tel que $p(r, h(r)) = p_0$. En remplaçant p et z par ces valeurs dans l'équation (7.12), on obtient l'équation (7.11). ■

Région (II) ($r \leq \xi$)

On a, cette fois-ci, une interface de forme parabolique :

$$h(r) = h(0) + \left(\frac{\Gamma}{2\pi \xi^2} \right)^2 \frac{r^2}{2g}. \quad (7.13)$$

Pour obtenir le niveau $h(0)$ sur l'axe en fonction de h_∞ , il suffit alors d'écrire que les deux expressions (7.11) et (7.13) donnent la même valeur pour $r = \xi$.

Démonstration. L'expression (7.7) du gradient de pression radial reste valable mais il faut, en plus, tenir compte du gradient de pression hydrostatique : $\partial p / \partial z = -\rho g$. Par intégration en fonction de r et z , et en utilisant la condition $p = p_0$ pour $z = h(0)$ et $r = 0$, on obtient :

$$p(r, z) = p_0 + \rho \left(\frac{\Gamma}{2\pi \xi^2} \right)^2 \frac{r^2}{2} + \rho g (h(0) - z).$$

L'équation (7.13) de la surface découle alors du fait que $p = p_0$ sur cette dernière. ■

De nombreuses notions, que l'on rencontrera dans les distributions plus générales de vorticité, sont contenues dans cet exemple. La vorticité est, en effet, très souvent concentrée sous forme de filaments, dans des zones localisées de l'espace. Nous verrons, à la section 7.3.2, comment une telle concentration peut apparaître dans un écoulement élongationnel de révolution (qui représente, de façon simplifiée, le champ de vitesse de vidange d'un récipient).

7.1.3 Analogies avec l' lectromagn tisme

Analogie de Helmholtz

– Principe de l'analogie

La relation (7.1) entre les champs de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ et de vorticité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ est similaire à la relation $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r})$ entre le champ d'excitation magnétique dans le vide $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ et la distribution quasi statique de densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ qui induit ce champ.

Remarque. Cette relation est utilisée habituellement dans le régime quasi stationnaire des équations de Maxwell où l'on peut négliger le terme $\varepsilon_0 \partial \mathbf{A} / \partial t$ et qui correspond à ce qu'on appelle la *magnétostatique*.

Précisons cette analogie. Tout d'abord, les deux champs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{H}$ sont à flux conservatif (lorsque le fluide est incompressible et en l'absence d'aimantation magnétique) car ils vérifient :

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (7.14a)$$

et :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (7.14b)$$

De même, le théorème d'Ampère s'exprime par l'équation :

$$I = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (7.15)$$

Elle relie la circulation du champ d'excitation magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ dans le vide le long d'un contour ($\mathcal{C}$), entourant un conducteur parcouru par un courant électrique, et le flux I de la densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ à travers une surface ($\mathcal{S}$) s'appuyant sur le contour. Cette équation est l'analogie de la relation (7.3) donnant la valeur de la circulation Γ autour d'une ligne de tourbillon.

Le champ de vitesse induit par un filament de tourbillon peut ainsi être mis en correspondance avec le champ $\mathbf{H}$ crée par un courant électrique dans un fil conducteur. La circulation Γ du vecteur vitesse est alors l'analogie de la circulation du champ $\mathbf{H}$, et donc du courant électrique I .

Remarque. Cette correspondance entre l'excitation magnétique $\mathbf{H}$ et la vitesse $\mathbf{v}$ nécessite que les conditions aux limites se correspondent également. En hydrodynamique, la composante normale de la vitesse s'annule à la surface d'un corps solide immobile ($v_{\perp} = 0$) : cette condition, discutée à la section 4.3.1, rend les lignes de courant parallèles à la surface du corps dans son voisinage immédiat. Une condition aux limites similaire ne se rencontre en électromagnétisme que dans le cas très particulier des supraconducteurs. Dans la suite, nous utiliserons donc uniquement l'analogie de Helmholtz quand le champ $\mathbf{H}$ est produit par un ensemble de fils conducteurs placés dans le vide. Ce cas est équivalent à celui d'un volume de fluide infini, où l'on n'a pas à respecter de conditions aux limites sur des parois.

– **Correspondance entre les champs induits par des filaments de tourbillons et des conducteurs rectilignes.**

Les filaments de tourbillons rectilignes que nous avons étudiés plus haut ont ainsi pour analogue des fils conducteurs rectilignes. Le champ de vitesse d'un tel filament (supposé infini) dans la géométrie de la figure 7.4a est donné par l'équation (7.4) ; pour un fil conducteur (Fig. 7.4b), on a l'expression équivalente :

$$H_{\theta}(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad (7.16)$$

où $H_{\theta}(r)$ est la composante orthoradiale du champ $\mathbf{H}$ à la distance r du fil. Dans les deux cas, seule la composante orthoradiale de la vitesse (respectivement du champ magnétique) est non nulle.

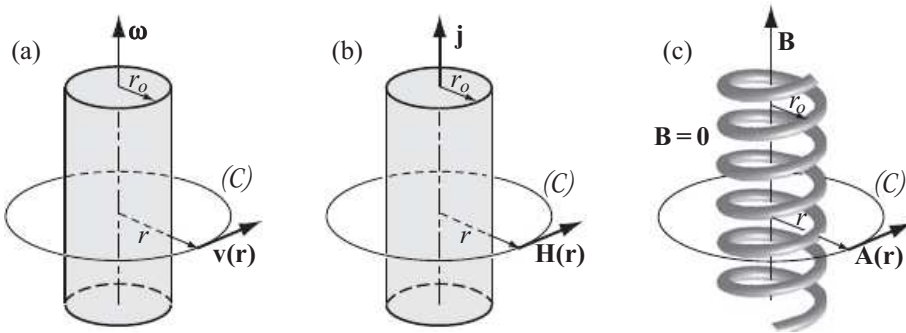


FIG. 7.4 – (a) Champ de vitesse créé par un filament de vorticité rectiligne. (b) Champ magnétique créé par une densité de courant dans un tube dans l'analogie de Helmholtz. (c) Champ magnétique et potentiel vecteur créés par un solénoïde dans l'analogie de Maxwell.

– **Calcul du champ de vitesse à partir du champ de vorticité**

Pratiquement, l'intérêt de l'analogie de Helmholtz est de fournir une méthode pour calculer le champ de vitesse d'un fluide à partir de la donnée de son champ de vorticité en tout point. En électromagnétisme, le champ $d\mathbf{H}$ induit en un point O (choisi comme origine) par un élément $d\mathbf{l}$ de ligne situé

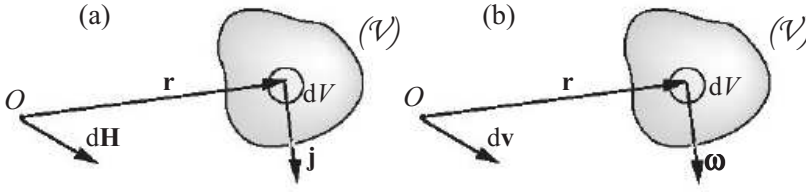


FIG. 7.5 – (a) Champ magnétique induit par une répartition de courant électrique de densité $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ (b) champ de vitesse induit par une répartition de vorticité de densité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$.

dans le vide autour d'un point de rayon vecteur $\mathbf{r}$ et parcouru par un courant I vérifie la *loi de Biot et Savart* :

$$d\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \wedge \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (7.17)$$

De même, le champ créé par une densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ répartie dans un volume $(\mathcal{V})$ vérifie :

$$\mathbf{H} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} dV. \quad (7.18)$$

Nous obtenons des relations identiques pour le champ de vitesse $\mathbf{v}$, créé par un élément $d\mathbf{l}$ de filament de tourbillon de circulation Γ , ou par une distribution de vorticité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ dans un volume $(\mathcal{V})$ (Fig. 7.5). Il suffit pour cela d'utiliser les équivalences $\mathbf{B}/\mu_0 \leftrightarrow \mathbf{v}$ et $I \leftrightarrow \Gamma$. Nous obtenons ainsi les relations qui correspondent à (7.17) et (7.18) pour la vitesse induite à l'origine $\mathbf{r} = 0$:

$$d\mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi} \Gamma \frac{d\mathbf{l} \wedge \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (7.19a)$$

et :

$$\mathbf{v} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} dV. \quad (7.19b)$$

– Application : champ de vitesse induit sur lui-même par un filament de tourbillon incurvé

L'ordre de grandeur de la norme du champ de vitesse $\mathbf{u}_l$ induit par le filament sur lui-même est, comme nous allons le montrer plus bas :

$$|\mathbf{u}_l| = \frac{|\Gamma|}{4\pi R} \text{Log} \left(\frac{R}{\xi} \right) \quad (7.20)$$

où R est le rayon de courbure de la ligne, ξ le rayon du cœur et Γ la circulation. La vitesse $\mathbf{u}_l$ est perpendiculaire au plan du filament et elle est due, pour une large part, aux éléments de ligne très proches du point considéré. La composante $\mathbf{u}_l$ est responsable du mouvement des tourbillons courbes en l'absence d'écoulement extérieur. En effet, nous démontrerons à la section 7.2.1

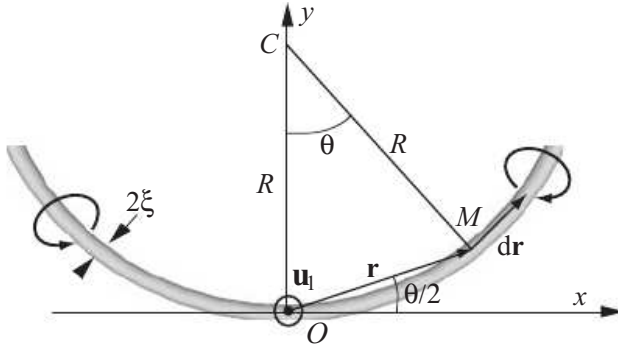


FIG. 7.6 – Champ de vitesse induit sur lui-même par un filament de tourbillon courbe. Le vecteur vitesse $\mathbf{u}_l$ induit par la ligne au point O est dirigé vers l'avant de la figure pour le sens de la circulation du tourbillon indiqué ici.

qu'un élément de ligne de tourbillon dans un fluide parfait se déplace à une vitesse égale à la vitesse locale du fluide (théorème de Kelvin) ; cette vitesse est la somme du champ de vitesse extérieur et des vitesses induites par les autres éléments de la ligne.

Démonstration. Évaluons le champ de vitesse au point O , le long de l'axe d'une ligne de tourbillon (le rayon de courbure R est supposé très supérieur au rayon ξ du cœur). Nous considérons uniquement la contribution locale $\mathbf{u}_l$ due aux points M voisins du point de mesure O , qui est donnée par l'intégrale sur l'élément de ligne entre les points M et M' , symétrique de M par rapport au plan yOz (Fig. 7.6). La vitesse $\mathbf{u}_l$ est orientée dans la direction perpendiculaire au plan de l'anneau (direction Oz) :

$$\mathbf{u}_l = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}}{r^3}.$$

Dans le référentiel rapporté au point O , $\mathbf{r}$ a pour composantes : $\mathbf{r} = [R \sin \theta, R(1 - \cos \theta), 0]$. D'où :

$$d\mathbf{r} = [R \cos \theta d\theta, R \sin \theta d\theta, 0].$$

En utilisant la symétrie du problème par rapport au plan yOz , on trouve :

$$|u_l| = \frac{\Gamma}{4\pi} \left| \int \frac{d\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}}{r^3} \right| = 2 \left(\frac{\Gamma}{4\pi} \right) \int_0^{\pi/2} \frac{2R^2 \sin^2(\theta/2) d\theta}{8R^3 \sin^3(\theta/2)} = \frac{\Gamma}{8\pi R} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin(\theta/2)}.$$

La vitesse induite en chaque point du tourbillon varie donc comme l'inverse du rayon de courbure du filament. On vérifie en particulier que, dans le cas d'un tube tourbillon rectiligne ($R \rightarrow \infty$), la vitesse u_l est nulle, comme on pouvait le prévoir par symétrie.

L'intégrale, qui apparaît dans le résultat précédent, diverge aux faibles valeurs de θ comme $\int 2 d\theta/\theta$ c'est-à-dire comme $2 \text{Log } \theta$. Cela est dû au fait que le calcul précédent traite le tube comme une ligne infiniment fine et ne s'applique donc pas aux faibles valeurs de θ qui correspondent à des distances $|r|$ de l'ordre du rayon du cœur. Cette divergence signifie qu'une large part de la vitesse induite au point O

est due à des éléments de ligne très proches de ce point. Le traitement correct du problème nécessiterait de faire intervenir le rayon ξ du cœur du tourbillon comme limite inférieure de la variable r . Nous nous contentons ici d'évaluer un ordre de grandeur de l'intégrale en prenant comme borne inférieure d'intégration $\theta_{min} \approx \xi/R$. L'influence de la borne supérieure se réduit à une constante additive supplémentaire. On arrive bien ainsi à la formule (7.20). ■

Analogie de Maxwell

Nous venons de voir l'utilité de l'analogie de Helmholtz pour l'évaluation d'un champ de vitesse à partir d'une distribution de vorticité. Cependant, cette analogie associe un *vecteur axial* (dont le sens dépend du choix du trièdre de référence), la vorticité, à un *vecteur polaire*, la densité de courant. De façon symétrique, il fait correspondre le champ de vitesse (polaire) au champ magnétique (axial). Une seconde analogie découlant directement des travaux de Maxwell fait correspondre directement la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ au champ magnétique $\mathbf{B}$ et la vitesse hydrodynamique $\mathbf{v}$ au potentiel vecteur $\mathbf{A}$: elle associe donc bien un vecteur polaire à un vecteur polaire et un vecteur axial à un vecteur axial. On a, cette fois ci, une correspondance entre les équations :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (7.21a)$$

et :

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}, \quad (7.21b)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (7.22a)$$

et :

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (7.22b)$$

Dans cette analogie, l'équivalent d'un tourbillon rectiligne est un sol no ide de longueur infinie dont le rayon est égal à celui du coeur (Fig. 7.4c) : le champ $\mathbf{B}$ n'est diff rent de zéro qu'à l'intérieur du sol no ide (comme $\boldsymbol{\omega}$ n'est non nulle qu'à l'intérieur du coeur). C'est le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ qui, comme la vitesse pour le tourbillon, décroît en $1/r$   l'extérieur du sol no ide : seule sa composante orthoradiale est non nulle et est reliée au champ B_i   l'intérieur du sol no ide et au rayon ξ de celui-ci par $A_\theta = B_i \xi^2/2r$.

Remarque. Le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est considéré généralement en électromagnétisme classique seulement comme un intermédiaire commode pour calculer des champs magnétiques, tout comme le potentiel scalaire pour le champ électrique. Son sens physique, pourtant souligné par Maxwell, est un objet de controverses. Une difficulté vient du fait que, si le potentiel $\mathbf{A}$ est défini à partir du champ magnétique par $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, il ne peut être connu qu'au gradient d'une fonction scalaire près.

L'utilisation de $\mathbf{A}$ permet d'écrire les équations de la mécanique des fluides sous une forme parfaitement comparable aux équations de Maxwell de l'électromagnétisme : cela est particulièrement intéressant dans les situations où les deux champs (magnétique et hydrodynamique) coexistent. Nous verrons dans l'appendice du présent chapitre (section A-3.4.3) que, pour les phénomènes quantiques, ce potentiel vecteur a un sens physique clair.

7.2 Dynamique de la circulation de la vitesse d'écoulement

Après cette introduction des distributions continues de vorticité et des lignes de tourbillons, nous allons étudier ici la dynamique de la vorticité, en examinant comment varie la circulation sur un contour fermé quelconque « tracé » dans le fluide et entraîné avec lui. Puis, nous utiliserons une seconde approche en établissant directement la loi d'évolution de la vorticité à partir de l'équation de Navier-Stokes. Les résultats obtenus dans ces deux sections s'appliqueront aussi bien aux distributions continues de la vorticité qu'aux cas où cette-dernière est localisée sur des lignes singulières.

7.2.1 Le théorème de Kelvin : conservation de la circulation

Établissement du théorème de Kelvin

Le théorème de Kelvin exprime que la circulation sur un contour fermé, dont chaque point se déplace avec la vitesse qu'a le fluide en ce point, reste constante si les conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

- la viscosité est nulle (fluide parfait) : $\eta = 0$;
- les forces extérieures dérivent d'un potentiel φ : $\mathbf{f} = -\mathbf{grad} \varphi$;
- la masse volumique ρ est constante ou, plus généralement, n'est fonction que de la pression : $\rho = f(p)$.

Ces conditions sont les mêmes que celles qui ont été utilisées dans l'établissement du théorème de Bernoulli à la section 5.3.2. Le théorème de Kelvin s'exprime par la relation :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{l} \right] = 0. \quad (7.23)$$

d/dt est une dérivée convective calculée en suivant le déplacement des particules de fluide. L'intégrale est prise sur un contour fermé ($\mathcal{C}$) (nous avons utilisé la notation $\delta \mathbf{l}$ pour différencier cet élément de longueur des variations temporelles de $\mathbf{l}$). La courbe sur laquelle s'effectue l'intégration suit le déplacement du fluide, comme indiqué sur la figure 7.7.

Démonstration. La variation de la circulation est la somme de deux contributions : l'une est due à la variation temporelle de la vitesse des points du contour, et l'autre à la déformation du contour ($\mathcal{C}$) pendant son déplacement. La séparation entre ces deux effets s'effectue en décomposant l'intégrale (7.23) sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{l} \right] = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{l} + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \frac{d(\delta \mathbf{l})}{dt}. \quad (7.24)$$

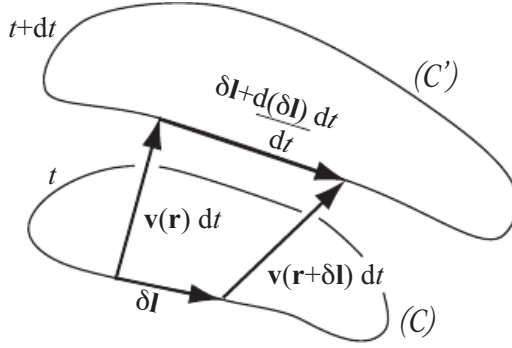


FIG. 7.7 – Variation d'un élément d'une courbe matérielle ($\mathcal{C}$) suivant le mouvement d'un fluide.

La première intégrale est calculée en utilisant l'équation d'Euler, qui peut s'écrire :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{grad} \varphi - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p. \quad (7.25)$$

Si la masse volumique ρ ne dépend que de la pression ($\rho = f(p)$), le second terme de la relation (7.25) sera également le gradient d'une fonction $g(p)$ (égale à l'intégrale $\int dp/f(p)$) ; la circulation de ces deux gradients et, par suite, du vecteur $d\mathbf{v}/dt$ le long de la courbe fermée ($\mathcal{C}$), sera donc nulle.

La seconde intégrale de l'équation (7.24) vérifie la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \frac{d(\delta \mathbf{l})}{dt} &= \int_{\mathcal{C}} v_i \cdot d \frac{\delta l_i}{dt} = \int_{\mathcal{C}} v_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta l_j \right) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \cdot \delta l_j \\ &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \cdot \delta \mathbf{l} = 0. \end{aligned}$$

En effet, la variation temporelle $d(\delta \mathbf{l})/dt$ de l'élément de ligne de contour de longueur $\delta \mathbf{l}$ est due à la différence $\delta \mathbf{v}$ des vitesses entre les deux points situés aux extrémités de cet élément de ligne (Fig. 7.7), chaque composante $d(\delta l_i)/dt$ est donc égale au produit $(\partial v_i / \partial x_j) \delta l_j$. La combinaison de ces deux résultats démontre donc bien l'équation (7.23). ■

En utilisant l'équation (7.2), le théorème de Kelvin peut être écrit sous la forme de l'intégrale de surface :

$$\frac{d}{dt} \left(\iint_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \right) = \frac{d}{dt} \left(\iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \right) = 0. \quad (7.26)$$

Ainsi, le flux du vecteur vortacité $\boldsymbol{\omega}$ à travers une surface s'appuyant sur un contour matériel ($\mathcal{C}$) qui se déplace avec le fluide (représentant la vortacité totale dans ($\mathcal{C}$)) reste constant pendant l'écoulement.

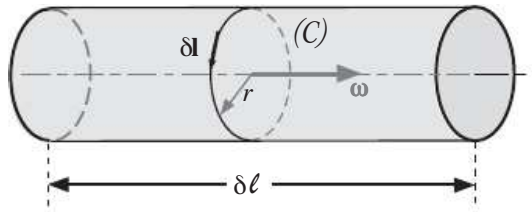


FIG. 7.8 – Calcul du moment cinétique pour un élément de tube de vorticité.

Signification physique et conséquences du théorème de Kelvin

Physiquement, le résultat précédent exprime la conservation du moment cinétique pour un fluide parfait, il complète ainsi notre présentation des lois de conservation du chapitre 5.

Justification pour un fluide sans viscosité. Considérons un tube élémentaire de vorticité de longueur δl qui s'appuie sur un cercle perpendiculaire à ω et de rayon r (Fig. 7.8). Nous avons montré précédemment que $\omega/2$ est égal au vecteur vitesse angulaire locale Ω de l'élément de fluide. Comme la circulation Γ de la vitesse le long du cercle (C) de rayon r est égale au flux total de la vorticité à travers ce cercle, Γ est reliée au module ω de la vorticité par :

$$\Gamma = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \pi r^2 \omega. \quad (7.27)$$

Le produit $\pi r^2 \omega$ peut être réécrit de façon à faire apparaître le module Ω de la vitesse de rotation locale et le moment d'inertie I du cylindre de longueur δl , sous la forme :

$$\pi r^2 \omega = \frac{\delta m r^2}{2} \cdot \frac{\omega}{2} \frac{4\pi}{\delta m} = KI\Omega. \quad (7.28)$$

$\delta m = \pi \rho R^2 \delta l$ est la masse de fluide de densité ρ contenue dans l'élément de cylindre, $I = \delta m r^2 / 2$ est le moment d'inertie associé à ce fluide et $K = 4\pi / \delta m$. Ainsi, comme la masse δm de fluide dans l'élément matériel de tube de vorticité est nécessairement constante, la conservation de la circulation Γ au cours du temps est équivalente, d'après les équations (7.27) et (7.28), à la conservation du moment cinétique $I\Omega$ du fluide dans l'élément de tube de vorticité.

Il est possible de tirer plusieurs conséquences physiques du théorème de la circulation :

- (i) Si, à un temps initial, la circulation autour de n'importe quel contour fermé est nulle, elle le restera par la suite. En particulier, un fluide *inviscible* (c'est-à-dire de viscosité η nulle), mis en mouvement à partir de l'état de repos, aura un écoulement irrotationnel aux temps ultérieurs (le vecteur vorticité $\omega(\mathbf{r})$ est identiquement nul quel que soit $\mathbf{r}$). En effet, la circulation le long de toute courbe matérielle fermée, tracée dans le fluide, est initialement nulle et le restera par la suite. Comme on peut prendre des courbes aussi petites que l'on veut, il en résulte, par application du

théorème de Stokes, que $\omega(\mathbf{r})$ est partout nul. Ce résultat, énoncé dans la section 6.1, nous a permis de faire le lien entre l'étude des écoulements potentiels et celle des fluides parfaits.

Remarque. Une application de cette propriété est la présence d'un tourbillon de démarrage, en aval du bord de fuite d'une aile (Fig. 7.27c).

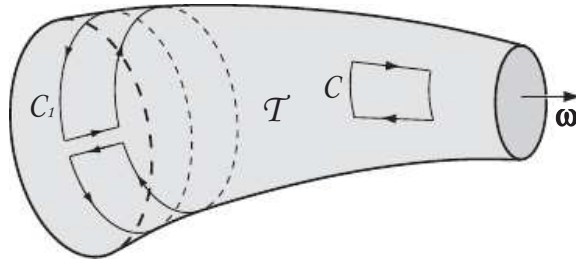


FIG. 7.9 – Variation du flux de vortacité à travers des contours matériels tracés sur un tube de vortacité.

- (ii) Dans un écoulement où le vecteur vortacité $\omega(\mathbf{r})$ n'est plus identiquement nul, les lignes (et les tubes) de vortacité se déplacent en suivant exactement le mouvement des lignes (et des surfaces) constituées de particules de fluide. En effet, si l'on trace un contour matériel fermé quelconque ($\mathcal{C}$) sur la surface d'un tube de vortacité ($\mathcal{T}$) (Fig. 7.9), le flux du vecteur ω tangent à travers ce contour est nul. Il le restera aux temps ultérieurs, après convection de ce contour matériel par l'écoulement. Le tube matériel convecté par le fluide à partir de la position initiale ($\mathcal{T}$) est donc un tube de vortacité, puisque le flux de ω à travers un élément de surface quelconque des parois latérales du tube reste nul.
- (iii) Choisissons un contour ($\mathcal{C}_1$) qui entoure deux fois le tube ($\mathcal{T}$) en sens contraire, à l'exception de deux éléments de liaison parallèles infiniment proches, parcourus en sens inverse (Fig. 7.9). La circulation totale de la vitesse sur ce contour est nulle, comme pour tout contour fermé tracé sur ($\mathcal{T}$). Comme les circulations sur les deux éléments parallèles voisins s'annulent, on en déduit que la circulation sur les deux boucles fermées entourant le fluide et parcourues dans le même sens est la même. Ainsi, le flux de la vortacité se conserve tout le long du tube de vortacité.

Remarque. Ce dernier résultat a cependant un domaine de validité plus large : la conservation de la circulation au cours du temps n'est en effet pas indispensable et seule l'absence d'un terme source est nécessaire (comme pour le flux du vecteur vitesse dans un tube de courant).

- (iv) Dans la section 7.4, nous analyserons le mouvement de filaments de tourbillons pour lesquels la vortacité est concentrée sur des lignes singulières (cœurs). Dans ce cas, les résultats précédents montrent que les cœurs de ces tourbillons se déplaceront toujours à la vitesse locale du fluide (qui est

la somme de la vitesse de l'écoulement extérieur et de la vitesse induite par les autres éléments de filaments de tourbillons, comme nous l'avons montré à la section 7.1.3). En effet, si un contour matériel, aussi petit soit-il, entoure le cœur du tourbillon à un instant donné, il l'entourera toujours par la suite, après s'être déplacé en suivant le mouvement du fluide : la circulation de la vitesse sur ce contour doit, en effet, rester constante et elle est donc égale au flux de la vorticité à l'intérieur du cœur du tourbillon.

Par ailleurs, les cœurs de ces filaments de tourbillons doivent se refermer sur eux-mêmes (tourbillons en anneaux), ou se terminer sur une paroi solide ou liquide ; ils ne peuvent pas avoir d'extrémité libre dans un fluide parfait. Supposons, en effet, qu'une telle extrémité existe et déterminons la circulation Γ de la vitesse du fluide le long d'un contour $(\mathcal{C})$ entourant le tourbillon : Γ est égale au flux de la vorticité ω à travers une surface $(\mathcal{S})$ qui s'appuie sur $(\mathcal{C})$. Suivant la position de $(\mathcal{S})$ par rapport à l'extrémité libre, $(\mathcal{S})$ couperait ou non le cœur du tourbillon et la valeur de l'intégrale serait différente : cela serait contraire à l'existence d'une valeur bien définie de la circulation de la vitesse du fluide le long de $(\mathcal{C})$.

7.2.2 Sources de circulation

Reprenons la démonstration du théorème de la circulation à partir de l'équation (7.24). Lorsque les trois conditions exprimées au début de la section 7.2.1 ne sont pas vérifiées, la circulation de la vitesse le long d'un contour matériel n'est plus constante. Le deuxième terme de cette équation reste nul et l'on évalue le premier en exprimant $d\mathbf{v}/dt$ à partir de l'équation de Navier-Stokes (4.30) (à la place de l'équation d'Euler (4.31) utilisée à la section 7.2.1) :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (7.29)$$

L'équation (7.24) devient :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{l} \right] = \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{l}}_{\text{I}} = \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{l}}_{\text{II}} - \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\rho} (\mathbf{grad} p) \cdot \delta \mathbf{l}}_{\text{III}} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \nu \Delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{l}}_{\text{III}}. \quad (7.30)$$

Nous allons examiner successivement la signification physique des trois termes **I**, **II** et **III**.

Forces en volume non conservatives (terme I de l'équation (7.30))

Les forces $\mathbf{f}$ (par unité de volume), qui ne dérivent pas d'un potentiel et qui sont donc telles que leur circulation sur un contour fermé est non nulle, créent de la circulation. Deux exemples importants se rencontrent en hydrodynamique :

– (Pseudo) forces de Coriolis

Elles apparaissent sous la forme d'un terme $[-2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}]$, lorsque l'on écrit l'équation de mouvement d'un fluide dans un référentiel tournant à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ (le terme « pseudo » indique que ces forces n'ont pas d'origine physique réelle, mais qu'elles résultent simplement du changement de repère, la vitesse $\mathbf{v}$ étant mesurée dans le référentiel mobile). Ainsi, les effets de la rotation de la Terre se traduisent par la formation de mouvements cycloniques dans l'atmosphère, dont le sens (comme celui de $\boldsymbol{\Omega}$) dépend de l'hémisphère considéré (section 7.6.1).

Remarque. En laboratoire, on a observé des effets similaires en vidangeant un récipient cylindrique de grand diamètre (de l'ordre de 2 m) à partir d'un trou situé au centre. La présence d'une composante de vitesse radiale dirigée vers le trou de vidange crée une force de Coriolis, qui dépend de la valeur locale de $\boldsymbol{\Omega}$ et induit un mouvement cyclonique. Ce résultat est similaire à celui de l'écoulement autour d'une zone de faible pression atmosphérique. Des conditions expérimentales bien contrôlées sont indispensables ; il faut, en particulier, laisser reposer longtemps le fluide pour éliminer la vorticité initiale résiduelle. Dans les cas usuels de vidange de lavabos ou de baignoires, ce sont les effets d'amplification de la vorticité résiduelle (voir section 7.3.2) qui sont responsables de l'apparition de tourbillons : le sens de rotation final n'est plus lié au sens de $\boldsymbol{\Omega}$, mais il est aléatoire.

Plus généralement, nous verrons, dans la section 7.6, que les forces de Coriolis ont une influence clé sur les mouvements à grande échelle de l'atmosphère.

– Forces magnétohydrodynamiques

La vorticité peut aussi être créée par les forces magnétohydrodynamiques qui apparaissent en présence d'un champ magnétique dans les fluides conducteurs. Prenons un fluide conducteur, globalement neutre électriquement, soumis à un champ électrique $\mathbf{E}$ et    un champ magnétique $\mathbf{B}$ ($\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont définis dans le référentiel du laboratoire). Si l'on a une densité de courant électrique $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ dans le fluide, il apparaît une *force de Laplace* : $\mathbf{F}_{Laplace} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$ par unité de volume.

Démonstration. La force de Lorentz sur une particule individuelle (  lectron, ion, ...) de charge q_i animée d'une vitesse $\mathbf{v}_{pi}$ par rapport au référentiel du laboratoire est égale à $q_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_{pi} \wedge \mathbf{B})$. La vitesse $\mathbf{v}_{pi}$ est la somme de la vitesse relative de la particule par rapport au fluide et de la vitesse $\mathbf{v}$ du fluide lui-même. Calculons maintenant la force totale dans un volume unité $\mathcal{V}_1$ égale à : $\sum_{i \in \mathcal{V}_1} q_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_{pi} \wedge \mathbf{B})$.

La composante due au champ électrique s'annule car le fluide est globalement neutre avec $\sum_i q_i = 0$. Par ailleurs, la somme $\sum_{i \in \mathcal{V}_1} q_i \mathbf{v}_{pi}$ est la densité de courant électrique $\mathbf{j}$ dans le fluide, ce qui donne bien une *force de Laplace* par unité de volume : $\mathbf{F} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$. On note que, toujours pour un fluide neutre, $\mathbf{j}$ est uniquement déterminée par le mouvement relatif des charges par rapport au fluide (de

sens différent suivant le signe de la charge). En effet, la vitesse $\mathbf{v}$ d'écoulement donne une contribution $\sum_i q_i \mathbf{v}$ nulle (pour la même raison, $\mathbf{j}$ ne dépend pas du référentiel choisi). ■

En incluant cette force de Laplace dans l'équation de mouvement du fluide, cette dernière devient :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (7.31)$$

On se place dans le cadre de l'approximation quasi statique (déjà utilisée à la section 7.1.3) avec des variations suffisamment lentes et des vitesses suffisamment faibles pour pouvoir négliger les courants de déplacement $\partial \mathbf{D} / \partial t$ et utiliser l'équation de Maxwell sous la forme $\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{rot} \mathbf{B} / \mu = \mathbf{j}$. On suppose également $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ proportionnels, la perméabilité magnétique $\mu = B/H$ pouvant, éventuellement, être spatialement inhomogène. En récrivant l'expression de la force de Laplace à l'aide de ces relations et de l'identité vectorielle $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} / \mu = \mathbf{grad}(\mathbf{B}^2 / 2\mu) + \mathbf{rot}(\mathbf{B} / \mu) \wedge \mathbf{B}$, l'équation de mouvement (7.31) devient :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} \left(p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} \right) + \frac{1}{\rho} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (7.32)$$

Le terme en $\mathbf{B}^2 / 2\mu$ qui s'ajoute à la pression dans le terme en gradient, ne contribue pas à la création de vorticité (si ρ est constante) : on l'appelle souvent *pression magnétique*. En revanche, le terme $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad})(\mathbf{B} / \mu)$ n'est pas le gradient d'une fonction potentiel et peut donc être source de vorticité.

Si le champ magnétique peut faire apparaître une vorticité dans le fluide, les écoulements d'un fluide conducteur peuvent, en retour, générer un champ magnétique. Le champ magnétique $\mathbf{B}$ vérifie en effet l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \quad (7.33a)$$

où $\nu_m = (\mu \sigma_{el})^{-1}$ est la diffusivité magnétique (σ_{el} est la conductivité électrique du fluide). En utilisant l'identité $\mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$, l'équation (7.33a) peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} + \nu_m \Delta \mathbf{B}. \quad (7.33b)$$

On reconnaît au premier membre la somme d'un terme d'instationnarité et d'un terme de convection. Le premier terme du second membre correspond à des effets d'étirement et de basculement des tubes de champ magnétique : ce type d'effet sera discuté en détail à la section 7.3.1 à propos de l'équation (7.41) d'évolution de la vorticité dont la structure est identique à celle de l'équation (7.33b). Indiquons cependant que, dans le cas d'un étirement (par

exemple, un terme $v_z \partial B_z / \partial z > 0$ pour un champ orienté suivant z), on aura une amplification du champ magnétique. Enfin, le dernier terme du second membre exprime la diffusion du champ $\mathbf{B}$ qui tendra toujours, au contraire, à atténuer ce dernier.

Démonstration. Dans un fluide au repos, le courant électrique est relié au champ électrique $\mathbf{E}$ dans le référentiel du laboratoire par la loi d'Ohm $\mathbf{j} = \sigma_{el} \mathbf{E}$. Quand le fluide est en mouvement à une vitesse $\mathbf{v}$ par rapport au laboratoire, cette relation reste valable en remplaçant $\mathbf{E}$ par le champ $\mathbf{E}'$ dans le référentiel du fluide. $\mathbf{E}'$ est relié aux champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ par $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. L'expression $\mathbf{j} = \sigma_{el} \mathbf{E}'$ de la loi d'Ohm devient donc en fonction des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ (toujours dans le repère fixe) : $\mathbf{j} = \sigma_{el} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$.

En calculant le rotationnel de l'équation de Maxwell : $\text{rot } \mathbf{B} / \mu = \mathbf{j}$, et en utilisant l'expression précédente, on obtient :

$$\text{rot rot } \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \sigma_{el} (\text{rot } \mathbf{E} + \text{rot } (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})). \quad (7.34)$$

En utilisant l'identité vectorielle (7.45) pour calculer $\text{rot rot } \mathbf{B}$ ainsi que les deux autres équations de Maxwell $\text{div } \mathbf{B} = 0$ et $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, on retrouve alors l'expression (7.33) avec $\nu_m = (\mu \sigma_{el})^{-1}$ dans le cas où la perméabilité magnétique μ , ainsi que la conductivité σ_{el} , sont constantes dans tout le fluide. Comme pour les autres phénomènes de transport, on introduit un nombre sans dimension pour caractériser l'importance relative des termes convectif et diffusif des équations (7.33). Ce nombre $Re_m = UL / \nu_m$ (où U et L sont la vitesse et la dimension caractéristiques de l'écoulement) est appelé *nombre de Reynolds magnétique*. ■

Un exemple particulièrement important en géophysique d'application des équations (7.32) et (7.33) est *l'effet dynamo*, qui est à l'origine du champ magnétique terrestre : le fluide conducteur est, dans ce cas, le noyau liquide de la Terre et le champ magnétique est créé par les écoulements convectifs dans ce noyau. On a affaire à un système couplé complexe où une fluctuation initiale de champ magnétique induira des forces et, par conséquent, un courant dans le fluide qui pourra à son tour induire un champ magnétique amplifiant la fluctuation initiale.

Cet effet dynamo a pu être reproduit en laboratoire dans une cuve contenant du sodium liquide (autre fluide conducteur) : un écoulement turbulent est induit par deux turbines coaxiales, situées aux deux extrémités de la cuve et tournant en sens inverse. Un champ magnétique apparaît spontanément au-dessus d'une vitesse seuil de rotation et des renversements aléatoires de ce champ, comparables à ceux du champ magnétique terrestre, ont été observés. Un critère déterminant pour l'apparition de l'effet dynamo est la valeur du nombre de Reynolds magnétique Re_m défini plus haut.

La magnétohydrodynamique a de nombreuses applications dans divers procédés industriels, tels que les machines *Tokamak* de fusion thermonucléaire où un plasma (gaz ionisé) conducteur est soumis à un fort champ magnétique, ainsi que dans des systèmes de propulsion de satellites. Les plasmas associés à

des champs magnétiques sont également omniprésents en astrophysique (par exemple, dans les étoiles).

Fluides non barotropes (terme II de l'équation (7.30))

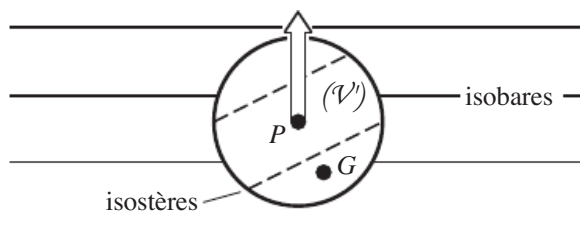


FIG. 7.10 – Équilibre des forces de pression et de gravité dans un fluide non barotrope.

Un fluide *barotrope* est tel que $\rho = f(p)$, c'est-à-dire que les *isobares* (surfaces sur lesquelles $p = \text{cte}$) sont confondues avec les *isostères* (surfaces où $\rho = \text{cte}$). Dans le cas contraire, le terme $(-\mathbf{grad} p)/\rho$ ne dérive pas d'un potentiel et ne peut donc pas être écrit sous la forme d'un gradient d'une fonction scalaire, et l'intégrale correspondante de l'équation (7.30) n'est pas nulle.

Dans ce dernier cas, si l'on isole un élément de fluide de volume (V') son centre de gravité G ne coïncide pas avec le centre P de la poussée d'Archimède, déterminé par les lignes isobares du fluide extérieur (Fig. 7.10). Il apparaît donc un couple, qui tend à faire tourner localement le liquide et induit une circulation de la vitesse.

Démonstration. Si $(\mathbf{grad} p)/\rho$ dérive d'un potentiel, on doit avoir $\mathbf{rot} ((\mathbf{grad} p)/\rho) = 0$. En utilisant l'identité vectorielle générale :

$$\mathbf{rot} (\alpha \mathbf{A}) = \alpha \mathbf{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{grad} \alpha) \wedge \mathbf{A} \quad (7.35)$$

nous obtenons :

$$\mathbf{rot} \frac{\mathbf{grad} p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \mathbf{rot} \mathbf{grad} p - \frac{1}{\rho^2} (\mathbf{grad} \rho) \wedge (\mathbf{grad} p) = -\frac{1}{\rho^2} (\mathbf{grad} \rho) \wedge (\mathbf{grad} p) = 0. \quad (7.36)$$

Ainsi, $(\mathbf{grad} p)/\rho$ ne peut dériver d'un potentiel que si les vecteurs gradients de p et ρ sont parallèles en tout point, c'est-à-dire si les surfaces isostères et isobares qui leur sont perpendiculaires coïncident.

Le terme II de l'équation (7.30) peut être récrit en utilisant la formule de Stokes, qui relie flux et circulation sous la forme :

$$-\int_C \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \cdot \delta \mathbf{l} = -\iint_S \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \right) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (7.37)$$

L'intégrale du deuxième membre est prise sur une surface (S) qui s'appuie sur une courbe fermée (C) située à l'intérieur du fluide ; le vecteur unitaire $\mathbf{n}$ est normal à la

surface (S). En combinant avec l'équation (7.36), on trouve alors pour la contribution de l'effet de non-barotropie à la variation de circulation :

$$\frac{d}{dt} \left[\iint_C \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{l} \right] = \int_C \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \cdot \delta \mathbf{l} = - \iint_S \frac{1}{\rho^2} \mathbf{grad} \rho \wedge \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{n} dS. \quad (7.38)$$

■

Exemples de fluides non barotropes

Un premier exemple de fluide non barotrope est celui d'un fluide placé entre deux plaques verticales portées à des températures différentes, ce qui induit un gradient de température horizontal. Nous avons étudié cette situation à la section 4.5.5 : les variations de masse volumique avec la température entraînent, dans cette configuration, l'apparition d'un gradient horizontal de masse volumique ρ . Ce dernier est donc perpendiculaire au gradient de pression qui coïncide avec le gradient de pression hydrostatique, qui est vertical si le fluide est à l'équilibre. On a donc création de vorticité et apparition d'un mouvement de convection thermique.

Un second exemple correspond au cas où des variations de masse volumique sont associées à des variations de concentration. C'est le cas d'une solution d'un liquide de concentration variable avec l'altitude obtenue, par exemple, en remplissant lentement un récipient avec une solution d'eau sucrée dont la concentration C diminue avec la distance verticale au fond du récipient (Fig. 7.11). Cette solution est en équilibre stable, puisque la densité décroît avec l'altitude. La concentration C est alors constante dans un plan horizontal donné. Comme le fluide est au repos, le seul transport de masse se fait par diffusion moléculaire avec un flux $\mathbf{j} = -D_m \mathbf{grad} C$ qui, dans ce cas, est vertical.

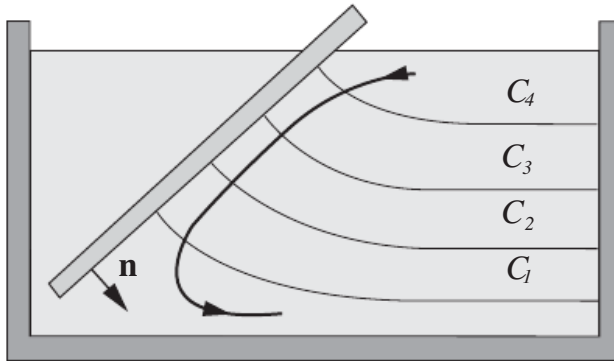


FIG. 7.11 – Mouvement de convection d'un fluide présentant un gradient de densité vertical en présence d'une surface solide oblique ($C_1 > C_2 > C_3 > C_4$).

Si une plaque est placée en position fixe oblique dans cette solution, il ne peut y avoir de flux de diffusion massique à travers la surface solide ; aussi, d'après l'équation précédente, on doit avoir $(\mathbf{grad} C) \cdot \mathbf{n} = 0$   la paroi ($\mathbf{n}$ est

la direction normale à la plaque). Les isostères ne peuvent donc plus rester partout horizontales car elles doivent arriver perpendiculairement à la plaque inclinée. On voit donc apparaître de nouveau une composante horizontale du gradient de concentration (et, par suite, de densité). Il en résulte un déséquilibre de pression hydrostatique qui crée un mouvement de convection. Il y a donc, là aussi, création de circulation du vecteur vitesse.

Effet de la viscosité (terme III de léquation (7.30))

Les écoulements visqueux s'accompagnent souvent de gradients de vitesse dans la direction transverse aux parois solides : on a donc une circulation de la vitesse. Si l'on part, par exemple, d'un fluide au repos, l'établissement d'un tel écoulement s'accompagne en général de l'apparition de vorticité et, donc, d'une circulation. L'intégrale sur un contour fermé du terme III de l'équation (7.30) des forces dissipatives de viscosité est alors non nulle pendant cette phase transitoire. Nous avons déjà rencontré cet effet à la section 2.1.1 dans l'exemple de la mise en rotation d'un cylindre rempli de fluide : dans l'état initial, le fluide est au repos alors que, en régime stationnaire, il est animé d'un mouvement de rotation solide qui correspond à une densité de vorticité uniforme ; c'est le transport diffusif de vorticité associé à la viscosité qui crée cette distribution.

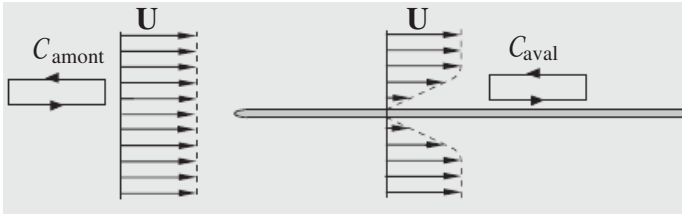


FIG. 7.12 – Création de vorticité associée aux forces de viscosité dans un fluide incident sur une plaque plane.

Analysons par exemple *l'écoulement de Blasius* d'un fluide (voir sections 10.2 et 10.4.1) qui s'approche de l'arête d'une plaque semi-infinie parallèle à l'écoulement moyen (Fig. 7.12). La circulation est crée au voisinage immédiat du bord d'attaque de la plaque. En amont de cette dernière, on a un champ de vitesse uniforme $\mathbf{U}$ et la circulation de la vitesse sur un contour fermé du type de (C_{amont}) représenté sur la Figure 7.12 est nulle. En aval du bord d'attaque, au contraire, il apparaît un gradient de vitesse car la vitesse doit être nulle sur la paroi alors qu'elle redevient égale à $\mathbf{U}$   une distance suffisante. La circulation sur un contour fermé (C_{aval}) est donc non nulle en aval de l'arête. La création et le développement de cette couche limite, qui est la zone proche de la plaque où existent des gradients de vitesse, seront traités au chapitre 10. Un exemple encore plus saisissant d'une création de vorticité

due à la viscosité est l'apparition de tourbillons en aval d'un cylindre placé dans un écoulement amont potentiel (Figs. 2.9 et 2.10 CC).

7.3 Dynamique de la vorticité

7.3.1   quation de transport de la vorticité et conséquences

  quation de Helmholtz pour un fluide incompressible

Nous allons retrouver et généraliser les résultats précédents en considérant directement l'évolution du champ vectoriel de vorticité $\boldsymbol{\omega}$. Nous partons de l'écriture de l'équation de Navier-Stokes sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega} + \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (7.39)$$

où le terme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ a été remplacé par l'expression équivalente $-\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega} + \mathbf{grad}(\mathbf{v}^2/2)$ (  q. (5.34)). Prenons maintenant le rotationnel de cette équation ; on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) - \mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{rot} \left(\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \right) + \nu \mathbf{rot}(\Delta \mathbf{v}). \quad (7.40)$$

Supposons que les forces $\mathbf{f}$ en volume dérivent d'un potentiel, que la masse volumique ρ soit constante, mais que la viscosité cinématique ν soit non nulle : ces hypothèses reviennent à négliger les termes de type **I** et **II** dans l'équation d'évolution de la vorticité (7.30). Nous montrons ci-dessous que l'équation (7.40) peut être mise sous la forme :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (7.41)$$

Cette relation est l'équation fondamentale d'évolution de la vorticité. Elle joue, pour $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$, un rôle similaire à l'équation de Navier-Stokes pour $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. En regroupant les deux premiers termes du premier membre sous la forme d'une dérivée convective, on obtient la forme équivalente :

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (7.42)$$

Notons que cette équation de transport de la vorticité s'applique à tous les écoulements, qu'ils soient laminaires ou turbulents. La description d'un écoulement à partir du champ de vorticité est une alternative possible à la description par l'intermédiaire du champ de vitesse. C'est sur des considérations pratiques liées à la configuration particulière de l'écoulement que se fera le choix de l'une ou l'autre approche.

Démonstration de l'équation (7.41). Dans l'équation (7.40), on décompose $\mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega})$ en utilisant la relation vectorielle générale suivante, valable pour des champs de vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ quelconques :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B}. \quad (7.43)$$

Compte tenu du fait que $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, pour un fluide incompressible, et que $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{div}(\mathbf{rot} \mathbf{v})$ est identiquement nul pour tout champ de vecteur, on obtient :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \boldsymbol{\omega}. \quad (7.44)$$

Évaluons maintenant le dernier terme $\nu \Delta \boldsymbol{\omega}$, en utilisant l'identité vectorielle :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}. \quad (7.45)$$

Choisissant $\mathbf{A} = \mathbf{v}$, on obtient :

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = -\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}. \quad (7.46)$$

En prenant le rotationnel des deux membres, cette équation devient

$$\mathbf{rot}(\Delta \mathbf{v}) = -\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}).$$

Soit, en utilisant à nouveau la relation (7.45) :

$$\mathbf{rot}(\Delta \mathbf{v}) = \Delta \boldsymbol{\omega} - \mathbf{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{\omega}) = \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (7.47)$$

On vérifie bien ainsi l'identité entre les derniers termes des équations (7.40) et (7.41). ■

Dans l'équation (7.41), les deux premiers termes décrivent l'effet de l'instationnarité de l'écoulement et de la convection de la vorticité; le dernier terme décrit l'amortissement de $\boldsymbol{\omega}$ par la viscosité. En l'absence du terme $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$, cette équation serait très semblable aux équations de diffusion thermique (équation de Fourier (1.17)) ou de diffusion de la masse (Éq. 1.26); la viscosité cinématique ν représente ici le coefficient de diffusion de la quantité vectorielle $\boldsymbol{\omega}$.

Une conséquence importante de cette équation est la persistance de l'irrotationnalité de fluides parfaits ($\eta = 0$) initialement au repos. En effet, si $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t = 0)$ est initialement identiquement nul, on a :

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = 0. \quad (7.48)$$

Alors, quel que soit t , $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$ reste identiquement nul. Nous avons déjà énoncé cette propriété au début du chapitre 6 consacré aux écoulements potentiels et nous l'avons également justifiée à la section précédente à partir du théorème de Kelvin (section 7.2.1 (i)).

Étirement et basculement des tubes de vorticité

Le terme additionnel $(\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad})\mathbf{v}$ de l'équation (7.41) fait intervenir les variations du vecteur vitesse $\mathbf{v}$ dans la direction du vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega}$. Notons que ce terme existerait même dans un fluide parfait, dans le cas où la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ serait non nulle à l'instant initial. Dans toute cette section, nous négligerons d'ailleurs l'effet de la viscosité, que nous examinerons ensuite.

Nous allons représenter les variations de $\boldsymbol{\omega}$ à partir des déformations d'un élément de tube de vorticité de longueur δl , de section (S) perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$. Nous avons vu précédemment (section 7.2.1) que les tubes de vorticité sont convectés par le fluide, comme s'il s'agissait de lignes matérielles. Le terme d'étirement $(\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad})\mathbf{v}$ peut être décomposé suivant deux directions : l'une parallèle à la direction du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ (que nous supposerons dans la suite dirigé suivant l'axe Oz), l'autre (que nous noterons « $\perp$ ») dans le plan perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$. Nous pouvons alors écrire l'équation (7.41) sous la forme :

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\omega} \frac{\partial v_{\perp}}{\partial z} \mathbf{e}_{\perp} \quad (7.49)$$

où $\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{e}_{\perp}$ représentent les vecteurs unitaires, respectivement dans la direction Oz et dans le plan perpendiculaire à Oz .

– Le terme $\boldsymbol{\omega} \partial v_z / \partial z$ représente l'effet d'étirement de l'élément de tube de tourbillon. Quand δl augmente (Fig. 7.13a) la section S décroît et le module $\boldsymbol{\omega}$ de la vorticité augmente.

– Le terme $\boldsymbol{\omega} \partial v_{\perp} / \partial z$ traduit le basculement du tube de vorticité en présence d'un gradient de vitesse, sans changement de la longueur du tube (Fig. 7.13b) ni de la norme de $\boldsymbol{\omega}$.

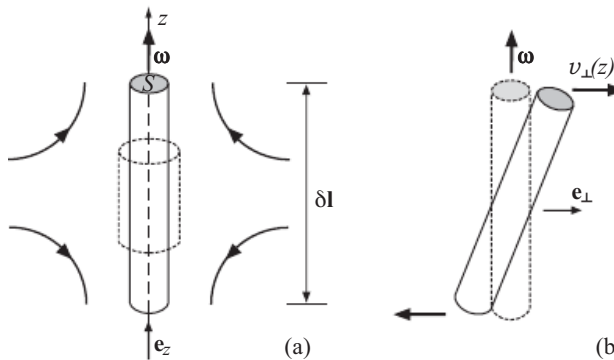


FIG. 7.13 – (a) Variation de la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ associée à la déformation d'un tube de vorticité par étirement ; (b) variation de $\boldsymbol{\omega}$ par basculement d'un tube de vorticité.

Physiquement, le terme d'étirement reflète directement la conservation de la norme du moment cinétique, discutée plus haut (section 7.2.1), associée à la conservation de la circulation autour d'un tube de vorticité. En effet, l'étirement de l'élément matériel de tube de courant s'accompagne d'une réduction de sa section pour conserver constante la masse $\rho S \delta l$ de l'élément.

Par conséquent, le moment d'inertie J du tube diminue (J est proportionnel à $S^2 \delta l$). On doit donc avoir augmentation de la vitesse angulaire Ω – et donc de la vorticité – pour conserver constant le moment cinétique $J\Omega$. En raisonnant en termes de conservation de la circulation de la vitesse, plutôt que de conservation du moment cinétique, on écrit que la quantité $\Gamma = \omega S$ est constante (Γ est en effet, d'après le théorème de Stokes, la circulation de la vitesse autour du tube de vorticité). En utilisant la condition $S \delta l = \text{cte}$, on en déduit que ω (donc Ω) et δl sont proportionnels et que le rapport $\omega/\delta l$ doit rester constant.

On met clairement en évidence cet effet en créant une ligne de tourbillon verticale dans une couche horizontale de liquide en écoulement. La vorticité du tourbillon est visualisée par la rotation d'une balle flottant à la surface du liquide (Fig. 7.14). La présence d'une bosse au fond du récipient entraîne une diminution de la longueur du tube de tourbillon et donc un ralentissement de la rotation de la balle (ω et δl diminuent de la même façon pour conserver leur rapport constant).

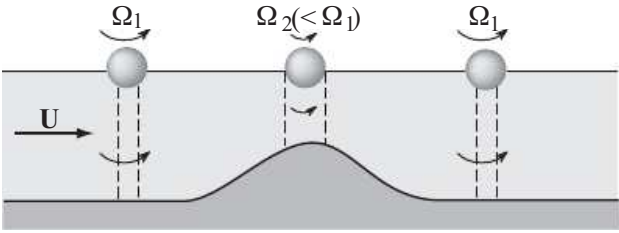


FIG. 7.14 – La variation de la vorticité induite par la variation d'épaisseur d'une couche de fluide est matérialisée par la variation de la vitesse de rotation d'une balle placée à la surface du liquide qui s'écoule avec une vitesse U (d'après le film Vorticity du NCFMF).

Nous verrons à la section 7.6, qui traite des écoulements en rotation, l'importance de ces effets d'étirement pour les phénomènes atmosphériques en présence de reliefs.

Une application : le vortex de Hill

Le vortex de Hill représente un cas limite dans lequel la vorticité est distribuée en volume à l'intérieur d'une sphère de rayon R (l'autre limite correspond aux répartitions de vorticité filamenteuses que nous avons déjà rencontrées). Les composantes de $\omega(\mathbf{r})$ en coordonnées cylindriques s'écrivent :

$$\omega_\theta = Ar, \omega_r = \omega_x = 0 \quad \text{à l'intérieur de la sphère,} \quad (7.50a)$$

$$\omega = \mathbf{0} \quad \text{à l'extérieur de la sphère.} \quad (7.50b)$$

Les lignes de vorticité sont donc des cercles centrés sur l'axe de révolution Ox et perpendiculaires à ce dernier (Fig. 7.15). On suppose le fluide parfait et incompressible (la vorticité est préétablie en tant que condition initiale).

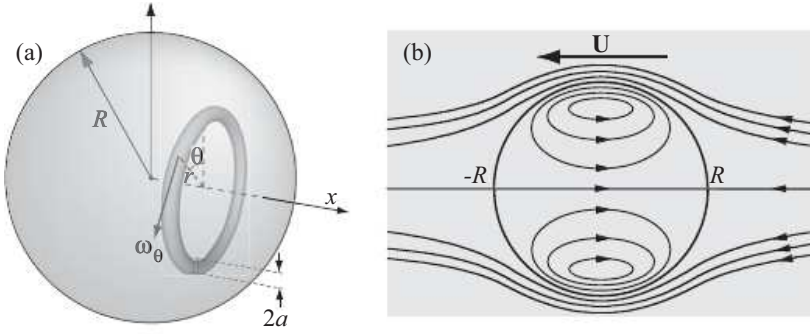


FIG. 7.15 – Vortex de Hill; (a) schéma d'un tube de vorticité torique à l'intérieur du vortex; (b) forme des lignes de courant à l'intérieur et autour de ce vortex dans un référentiel se déplaçant à la vitesse de mouvement d'ensemble du vortex.

La signification de la forme de cette distribution peut se comprendre si l'on analyse l'évolution d'un tube de vorticité formé d'un tore de rayon moyen r et dont la section a pour rayon a (Fig. 7.15a); la circulation autour de ce tore a pour valeur $(\pi a^2 \omega_\theta(r))$. Si, lors du mouvement, le tube de vorticité se déforme lorsqu'il est entraîné par le mouvement du fluide, son volume $2\pi^2 r(t) a^2(t)$ doit rester constant pour vérifier la condition d'incompressibilité. La conservation de la circulation dans le tube entraîne donc que la quantité $a^2 \omega_\theta(r) \propto \omega_\theta(r)/r(t)$ est conservée lors du déplacement du tube (point de vue lagrangien). Le choix de $\omega_\theta = Ar$ correspond donc   une distribution de vorticité qui vérifie à tout instant la condition précédente.

Démonstration quantitative. Écrivons la composante azimutale de l'équation d'évolution de la vorticité ( q. 7.42); appelons $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ les vecteurs unitaires dans les directions radiale et azimutale respectivement. En coordonnées cylindriques, cette équation n'a qu'une composante non nulle, celle dans la direction θ . Utilisant le développement de $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ en coordonnées cylindriques, on trouve, à l'aide de la relation : $\partial \mathbf{e}_r / \partial \theta = \mathbf{e}_\theta$ et de la propriété d'invariance du problème par rotation autour de l'axe Ox (ce qui entraîne que $\partial v_r / \partial \theta = 0$) :

$$\frac{d\omega_\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta = \omega_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r \mathbf{e}_r) = \frac{\omega_\theta v_r}{r} \mathbf{e}_\theta.$$

Il en résulte que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_\theta}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d\omega_\theta}{dt} + \omega_\theta \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\omega_\theta v_r}{r} - \frac{\omega_\theta}{r^2} v_r = 0. \quad (7.51)$$

On vérifie bien ainsi que la condition $(\omega_\theta / r) = \text{cte}$ sur la distribution de la vorticité reste vérifiée durant tout le mouvement du vortex de Hill car elle vérifie à tout instant l'équation d'évolution. On peut également montrer plus précisément que, dans un référentiel suivant le déplacement moyen du vortex, les distributions de la vorticité et de la vitesse sont stationnaires : les particules de fluides situées à l'intérieur de la sphère de rayon R suivent des trajectoires fermées représentées sur la Figure 7.15b. On peut calculer le champ de vitesse qui en résulte en appliquant la loi de Biot et Savart ( q. 7.19b)   cette distribution de vorticité. ■

Fonction de courant du vortex de Hill

Appelons $\mathbf{U}$ la vitesse de déplacement moyen du vortex et plaçons-nous dans un référentiel en mouvement à la vitesse $\mathbf{U}$. On peut montrer que la fonction de courant Ψ définie, dans ce référentiel, en coordonnées cylindriques par les équations (3.50) vérifie à l'intérieur du vortex :

$$\Psi = -\frac{A}{10} r^2 (R^2 - x^2 - r^2). \quad (7.52a)$$

La surface $x^2 + r^2 = R^2$ ainsi que l'axe $r = 0$ sont donc bien des lignes de courant. Remarquons que, à l'extérieur du vortex, la vorticité est nulle : l'écoulement est donc potentiel et le même qu'autour d'une sphère de rayon R . La vitesse de déplacement globale du vortex dans un référentiel où le fluide est immobile à l'infini est reliée à A par :

$$U = \frac{2}{15} A R^2. \quad (7.52b)$$

Enfin, la composante tangentielle de la vitesse à la surface du vortex est égale à $-(1/5)ArR$.

7.3.2 Équilibre étirement-diffusion

Un aspect important de l'équation de transport de vorticité (7.42) est la coexistence d'un terme de diffusion visqueuse, qui tend à uniformiser la distribution de vorticité, et d'un terme d'étirement, qui tend au contraire à la concentrer et à augmenter son amplitude. L'équilibre entre ces deux termes est un élément fondamental de la dynamique de la vorticité dans les écoulements turbulents qui sera étudiée au chapitre 12.

Évolution de la vorticité dans un écoulement élongationnel

Ce modèle représente de façon approximative la dynamique des échanges de vorticité dans l'écoulement moyen près d'un trou percé au fond d'un récipient cylindrique (vidange d'un récipient). Nous avons déjà analysé (section 7.1.2) le vortex de Rankine qui modélise le champ de vitesse d'un tourbillon créé par un tel écoulement. Il faut maintenant comprendre pourquoi, dans ce cas, la vorticité reste concentrée dans un cœur de petite dimension, au lieu de se répartir uniformément dans le fluide.

Considérons un écoulement incompressible irrotationnel avec une symétrie de révolution (Fig. 7.16) et dont les composantes de vitesse vérifient :

$$v_r = -(a/2)r \quad \text{et} \quad v_z = az \quad \text{avec} \quad (a > 0). \quad (7.53)$$

Cet écoulement correspond à une élongation suivant l'axe Oz , compensée par un écoulement radial pour satisfaire la conservation de la masse, et il est assez semblable au champ de vitesse près d'un orifice au fond d'un récipient.

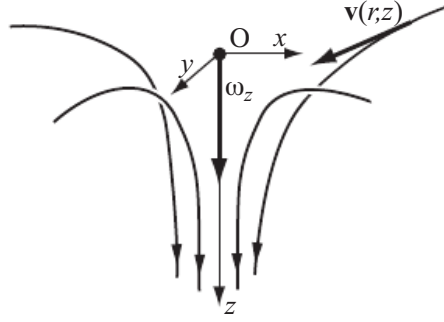


FIG. 7.16 – Modèle d'écoulement d'étirement de révolution (voir Fig. 7.3).

Supposons que l'on *perturbe* cet écoulement en introduisant une distribution de vorticité de faible amplitude $\omega_z(\mathbf{r}, t)$ (le tourbillon de vidange) ; écrivons l'équation de transport (7.41) en coordonnées cylindriques pour cette distribution de vorticité :

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \frac{a}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (\omega_z r^2) + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right). \quad (7.54)$$

Le premier terme du membre de droite est la somme des termes d'étirement et de convection de l'équation (7.41). En régime stationnaire, le terme du premier membre est nul ($\partial \omega_z / \partial t = 0$) et l'équation (7.54) devient, après intégration par rapport à r :

$$\frac{a}{2} \omega_z r^2 + \nu r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} = \text{cte}. \quad (7.55)$$

La constante qui apparaît dans cette intégration est nécessairement nulle ; si tel n'était pas le cas, la composante ω_z de la vorticité divergerait logarithmiquement à faible distance. D'autre part, elle décroîtrait en $1/r^2$ à grande distance jusqu'à l'infini et la vorticité totale intégrée sur tout le volume de l'écoulement divergerait ; or, elle doit rester finie et constante car il n'existe dans ce problème aucun mécanisme de création de vorticité. La distribution de vorticité vérifie donc :

$$\omega_z = \omega_1 e^{-ar^2/4\nu}. \quad (7.56)$$

Ce résultat reflète l'équilibre sur une distance caractéristique $\delta_D \approx \sqrt{\nu/a}$ entre les effets d'étirement de la vorticité sous l'effet du champ élongationnel $\mathbf{v}$ et d'étalement par diffusion. Dans le cas de l'écoulement à travers un orifice de diamètre d avec une vitesse caractéristique U , on a :

$$a \approx \frac{U}{d} \text{ et } \frac{\delta_D}{d} \approx \sqrt{\frac{\nu}{Ud}} \approx \sqrt{\frac{1}{Re}} \quad (7.57)$$

où $Re = Ud/\nu$ est le nombre de Reynolds. Ainsi, plus le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement est élevé, plus la vorticité sera concentrée dans un cœur de faible diamètre. Le modèle du vortex de Rankine (section 7.1.2) ne

représente qu'une approximation de la structure de tels tourbillons (on n'a pas de limite nette du cœur), mais il décrit correctement le fait que la plus grande partie de la vorticité de l'écoulement est concentrée sur un très faible rayon de cœur. La variation de ce rayon en $1/\sqrt{Re}$ traduit l'équilibre convection-diffusion. Nous rencontrerons une variation identique au chapitre 10, dans l'étude des couches limites où des équilibres du même type sont observés.

Création et destruction de vorticité dans un écoulement turbulent

Le résultat précédent suggère une analogie avec la turbulence en volume que nous étudierons au chapitre 12. Dans ce modèle, l'énergie est transférée par des mécanismes convectifs non dissipatifs, des structures turbulentes de grande taille vers des tourbillons de plus en plus petits, où est concentrée la vorticité (*cascade d'énergie de Kolmogorov*). L'étirement des tubes de vorticité joue un rôle essentiel tout au long de ce processus. En revanche, la viscosité n'intervient qu'à l'échelle des tourbillons de plus petite taille de la même manière que, dans le présent problème, elle n'intervient qu'à l'échelle du cœur.

Au contraire, dans les écoulements bidimensionnels où le champ de vitesse $\mathbf{v}$ est indépendant d'une des coordonnées (la verticale par exemple), le terme $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ est identiquement nul. Cette propriété caractérise, aux grandes échelles de longueur, la turbulence d'écoulements atmosphériques et océanographiques. Elle est due à l'extension verticale limitée de ces écoulements (l'épaisseur des couches océaniques ou atmosphériques) et surtout à l'influence de la rotation $\boldsymbol{\Omega}$ de la Terre qui tend à découpler les composantes du mouvement perpendiculaire et parallèle à la surface de la Terre, comme nous le verrons à la section 7.6 dans l'étude des écoulements en rotation. Pour cette même raison, la turbulence à deux dimensions, où l'étirement des tourbillons ne peut pas avoir lieu, a des caractéristiques très différentes de celle à trois dimensions.

Nous avons analysé précédemment la dynamique des lignes de tourbillons isolées et soumises à un champ de vitesse extérieur. Dans les écoulements à deux comme à trois dimensions, il faut de plus tenir compte de l'interaction entre les différents tubes de tourbillons. Pour les tourbillons courbes, il faut également faire intervenir le champ de vitesse induit sur le tourbillon lui-même (section 7.1.3). Nous analysons ces facteurs dans la section suivante consacrée à la dynamique des tourbillons filamenteux.

7.4 Exemples de répartition de vorticité concentrée sur des lignes singulières

7.4.1 Vorticité concentrée sur des lignes

Au début de ce chapitre (section 7.1.1), nous avons présenté un certain nombre d'exemples d'écoulements dans lesquels la vorticité est concentrée en

filaments. Nous pouvons encore citer les tourbillons rectilignes émis de façon alternée en aval d'un obstacle cylindrique placé perpendiculairement à un écoulement. Ils forment alors deux rangées en quinconce (l'allée de *tourbillons de Bénard-von Karman*), comme nous l'avons vu à la section 2.4.2. Une rangée de tourbillons similaire (cette fois-ci unique) est observée au niveau de la couche de mélange entre deux écoulements parallèles et de vitesses différentes, d'un même fluide ou de deux fluides différents (voir section 11.4.1). Dans ces deux cas, la taille relative du cœur par rapport à la taille totale de cette structure est plus grande, mais la rotation autour d'une zone centrale est clairement identifiable.

Dans d'autres cas, les lignes de tourbillons sont refermées sur elles-mêmes (anneaux tourbillons). Citons, par exemple, les anneaux de fumée émis à la sortie de tuyaux ou d'orifices cylindriques, comme ceux issus de la bouche des fumeurs ou, à plus grande échelle, des cratères des volcans tels que l'Etna (Fig. 7.17 CC). Un autre exemple est celui des anneaux de tourbillons dont le cœur a une taille nanométrique dans l'hélium superfluide (section A-3.5.3 en fin de chapitre).

Dans la suite de cette section, nous modéliserons ce type d'écoulements par des *lignes de vortacité* de rayon de cœur très petit. Nous envisagerons le cas des tourbillons rectilignes, puis celui des anneaux tourbillons.

7.4.2 Dynamique d'un ensemble de lignes de vortacité rectilignes parallèles

Nous considérerons des distributions de filaments rectilignes d'axes parallèles correspondant à plusieurs des cas décrits plus haut. En l'absence de viscosité, chaque élément des cœurs de tourbillon se déplace à la vitesse locale du fluide en ce point. Cette vitesse est la somme du champ de vitesse extérieur et de la vitesse induite par les autres tourbillons, puisqu'un tourbillon rectiligne n'induit pas de vitesse sur lui-même. Ce résultat est, comme nous l'avons vu (section 7.2.1), une conséquence directe du théorème de Kelvin, valable pour les fluides parfaits.

Paires tourbillons rectilignes et parallèles

Commençons par l'exemple le plus simple de deux tourbillons filamenteux d'axes parallèles et de circulation Γ_1 et Γ_2 (Fig. 7.18a). Le champ de vitesse au cœur des lignes O_1 et O_2 est dû uniquement à la vitesse induite par l'autre tourbillon ; elle est dirigée suivant la normale au segment O_1O_2 et a un module égal respectivement à : $v_1 = \Gamma_2/(2\pi d)$ et $v_2 = \Gamma_1/(2\pi d)$ où d est la distance entre les cœurs des tourbillons.

Deux cas particuliers sont importants en pratique :

- $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ (le doublet de lignes ; Fig. 7.18b). L'ensemble des deux lignes se déplace à la même vitesse dans la direction perpendiculaire aux lignes. Dans

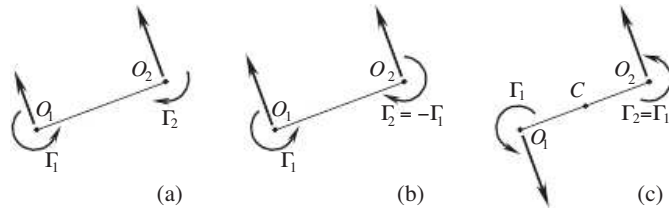


FIG. 7.18 – Champ de vitesse associé à deux tourbillons parallèles rectilignes de circulations Γ_1 et Γ_2 ; (a) cas général; (b) $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$, la ligne O_1O_2 se déplace parallèlement à elle-même; (c) $\Gamma_1 = \Gamma_2$, la ligne O_1O_2 tourne autour de son centre C .

ce cas, la vitesse commune est égale en norme à $V_p = \Gamma/(2\pi d)$, où Γ est la valeur absolue des circulations. On retrouvera une propriété de même nature pour les anneaux de tourbillons dans lesquels les circulations des vitesses du fluide en deux points diamétralement opposés sont de signes opposés.

- $\Gamma_1 = \Gamma_2$ (Fig. 7.18c). L'ensemble des deux lignes tourne autour du milieu C de O_1O_2 avec une vitesse angulaire $\Gamma/(\pi d^2)$ où Γ est la valeur commune de la circulation.

Plus généralement, dans le cas d'un rapport Γ_1/Γ_2 quelconque, les lignes tournent autour de leur barycentre (on leur affecte respectivement des coefficients Γ_1 et Γ_2) avec une vitesse angulaire $(\Gamma_1 + \Gamma_2)/(2\pi d^2)$. Dans l'exemple du doublet, le barycentre est rejeté à l'infini.

Les résultats vus pour deux lignes expriment indirectement des lois de conservation pour la quantité de mouvement et le moment cinétique pour le fluide parfait dans lequel se déplacent ces lignes. Ainsi, plus généralement, dans le cas d'un nombre quelconque de lignes :

- la circulation totale $\sum \Gamma_i$ reste constante au cours du mouvement;
- le barycentre G de l'ensemble des lignes défini par $\sum \Gamma_i \cdot \mathbf{GO}_i = \mathbf{0}$ reste fixe.

Discutons maintenant des distributions particulières de vorticité qui représentent, de façon approchée, des écoulements réels.

Nappes continues et discrètes de tourbillons

Une discontinuité de vitesse tangentielle peut être produite par deux couches de fluide superposées (identiques ou non) en mouvement à des vitesses différentes (mais constantes dans chaque fluide), initialement séparées par une paroi fine et qui entrent en contact tangentiellement :

$$v_x = U_1 \quad (y > 0), \quad v_x = U_2 \quad (y < 0).$$

À cet écoulement correspond une nappe de vorticité, infiniment mince et continue dans le plan $y = 0$ avec une densité uniforme γ_1 par unité de longueur suivant Ox :

$$\gamma_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega \, dy \right]. \quad (7.58)$$

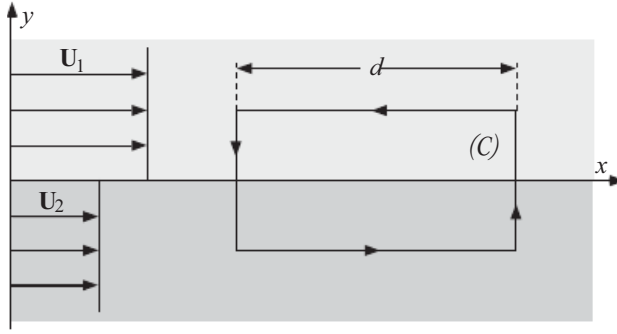


FIG. 7.19 – Circulation le long d'un contour (C) , associée à un écoulement présentant une discontinuité de vitesse tangentielle (le contour est parcouru dans le sens trigonométrique).

On peut évaluer γ_1 à partir du théorème d'Ampère appliqué au contour (C) (Fig. 7.19) :

$$(U_2 - U_1) d = \gamma_1 d \quad (7.59)$$

d'où :

$$\gamma_1 = (U_2 - U_1)$$

(γ_1 est homogène à une vitesse : il s'agit, en effet, d'une circulation par unité de longueur). En pratique, une telle nappe de vorticité est instable. La vorticité se rassemble en des cœurs de tourbillons disposés selon une rangée périodique suivant la direction Ox de l'écoulement. Cette instabilité sera étudiée à la section 11.4.1.

Allée simple de tourbillons

On considère maintenant un très grand nombre de tourbillons rectilignes, répartis sur une ligne (allée simple). On peut calculer aisément le champ de vitesse en un point quelconque par superposition des champs de vitesse dus à chacun des tourbillons indépendamment. Nous avons vu à la section 6.6.2 que le potentiel complexe des vitesses $w(z) = v_x - iv_y$ en un point d'affixe $z = x + iy$ est, pour un vortex isolé, centré au point de coordonnées x_i et y_i ($z_i = x_i + iy_i$) et de circulation algébrique Γ (positive pour une rotation dans le sens trigonométrique) :

$$f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \text{Log}(z - z_i). \quad (7.60)$$

  ce potentiel correspond un champ de vitesse orthoradial $v_\theta = -\Gamma/(2\pi r)$ d  du tourbillon centré au point d'affixe z_i .

Dans le cas d'une allée périodique avec un ensemble infini de lignes périodiquement réparties entre $-\infty$ et $+\infty$ sur l'axe réel, et d'affixes $z_m = ma$ ($m \in \mathbb{Z}$), on a une vitesse complexe :

$$w(z) = -\frac{dF}{dz} = -\frac{i\Gamma}{2a} \cotan\left(\frac{\pi z}{a}\right). \quad (7.61)$$

Pour obtenir la vitesse complexe $w_m(z)$ sur chaque tourbillon, d'affixe $z_m = ma$, il faut retrancher de $w(z)$ la contribution de ce tourbillon lui-même pour obtenir :

$$w_m(z) = -\frac{i\Gamma}{2a} \left[\cotan \left(\frac{\pi z}{a} \right) - \frac{1}{z - ma} \right]. \quad (7.62)$$

On montre aisément alors, en développant la fonction cotangente au voisinage de l'affixe $z_m = m a$, que $w_m(z)$ s'annule pour $z = m a$ et que, par conséquent, la vitesse est nulle au centre de chaque tourbillon. La ligne de tourbillon est donc immobile, ce qui pouvait être prévu par raison de symétrie.

Démonstration. On commence par calculer le potentiel complexe de l'ensemble de l'allée à partir du potentiel (7.60) de chaque tourbillon :

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \text{Log} [z - z_m] \right) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \text{Log} \left(\prod_{m=-\infty}^{m=\infty} [z - ma] \right). \quad (7.63)$$

En regroupant deux à deux les termes correspondant à la même valeur absolue de m , sous la forme :

$$\text{Log} (z - ma) + \text{Log} (z + ma) = \text{Log} [z^2 - (ma)^2] = \text{Log} (ma)^2 + \text{Log} \left[\frac{z^2}{m^2 a^2} - 1 \right]$$

on obtient :

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \text{Log} \left(z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2 a^2} \right) \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \text{Log} \left(\prod_{m=1}^{\infty} - (ma)^2 \right).$$

En notant F_0 le deuxième terme (indépendant de z qui apparaît dans cette expression) et en utilisant l'identité :

$$\sin x = x \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{m^2 \pi^2} \right) \text{ on obtient : } F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \text{Log} \left[\sin \left(\frac{\pi z}{a} \right) \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \text{Log} \frac{a}{\pi} + F_0.$$

La vitesse complexe $w(z)$ s'en déduit alors en dérivant $F(z)$ par rapport à z . ■

Allée double de tourbillons alternés

L'intérêt du calcul précédent réside aussi dans l'application que nous allons maintenant en faire au cas d'une allée double de tourbillons alternés. Nous avons vu à la section 2.4.2 que l'on observe, à partir de nombre de Reynolds de quelques dizaines, une émission de tourbillons alternés derrière les obstacles cylindriques non profilés. Ces tourbillons constituent l'*allée de Bénard-von Karman* (Fig. 2.9). Nous allons déterminer ici son champ de vitesse, qui peut être représenté de façon simplifiée par deux allées simples du type que nous venons d'étudier (Fig. 7.20). Tous les tourbillons d'une même allée sont de même sens et ils sont de sens opposé d'une allée à l'autre.

L'ensemble de l'allée double se déplace parallèlement à elle-même sous l'effet de l'écoulement imposé $\mathbf{U}$ et de la vitesse induite par les tourbillons

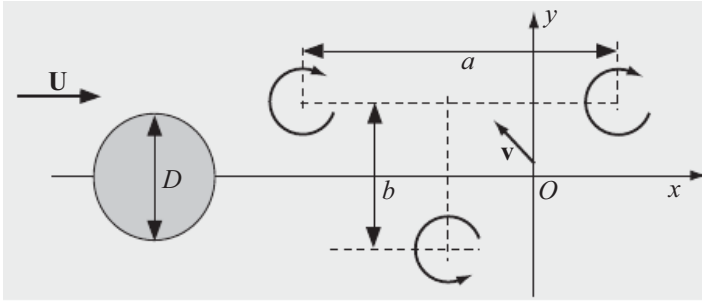


FIG. 7.20 – Schéma de l’allée double de tourbillons de Bénard-von Karman derrière un cylindre dans un écoulement uniforme (voir aussi la Fig. 2.9c).

de l’autre rangée (nous venons de voir que les contributions des tourbillons de la même rangée s’annulent par symétrie). Par ailleurs, seule subsiste la composante parallèle à la direction x de la vitesse ; en effet, les composantes perpendiculaires à cette direction, dues à des tourbillons symétriques par rapport au plan perpendiculaire à Ox passant par le tourbillon, s’annulent deux par deux sur ce plan. Le calcul détaillé de la vitesse induite sur chaque tourbillon est donné plus bas. On peut montrer, par un calcul de stabilité linéaire, que la seule solution stable au premier ordre pour une allée de longueur infinie est celle où les tourbillons sont disposés en quinconce avec un rapport $b/a \approx 0,3$ indépendant de la vitesse. Dans ce cas, la vitesse est la même pour tous les tourbillons, et l’allée se déplace sans déformation.

– Vitesse de déplacement de l’allée double de tourbillons

Prenons le cas de deux rangées de tourbillons de longueurs infinies comme celle de l’allée simple. La circulation Γ est prise égale à celle des tourbillons de la rangée inférieure : ceux-ci sont situés aux points d’affixe : $(ma + a/2, -b/2)$ et $(-ma - a/2, -b/2)$ avec $m \in [0, \infty]$ alors que les tourbillons de circulation $-\Gamma$ de la rangée supérieure sont situés aux points : $(ma, b/2)$ avec $m \in [-\infty, \infty]$. Notons W la vitesse complexe induite par les tourbillons de la rangée inférieure sur le tourbillon de la rangée supérieure situé au point d’affixe $(0, b/2)$. En tenant compte du fait que la rangée supérieure n’induit pas de vitesse sur ce tourbillon et en utilisant les relations (7.61) et (7.62) établies dans le cas de l’allée simple, ainsi que la relation $\tan ix = i \tanh x$, on obtient

$$w(z) = -\frac{i\Gamma}{2a} \cotan \left[\frac{\pi}{a} \left(z + \frac{a}{2} + i\frac{b}{2} \right) \right]_{z=ib/2},$$

soit :

$$W = w\left(i\frac{b}{2}\right) = \frac{i\Gamma}{2a} \tan\left(\frac{i\pi b}{a}\right) = -\frac{\Gamma}{2a} \tanh\left(\frac{\pi b}{a}\right). \quad (7.64)$$

On montre de la même manière que la vitesse, induite par les tourbillons de la rangée supérieure sur ceux de la rangée inférieure, a la même valeur, ce qui justifie la propriété de déplacement global à la vitesse W de l’allée double dans son ensemble.

– Profil de la vitesse d'écoulement entre les rangées de tourbillons

Nous nous sommes surtout intéressés jusqu'à présent à la vitesse induite sur chaque tourbillon par les autres. Il est important également de connaître le champ de vitesse induit dans le reste du fluide et, en particulier, entre les rangées de tourbillons. En effet, les perturbations apportées au champ de vitesse par l'allée de tourbillons permettent d'évaluer la quantité de mouvement qu'elle transporte et la force qui en résulte sur l'obstacle. On calcule, dans ce but, le profil de vitesse $w(y)$ sur un axe Oy (Fig. 7.20) perpendiculaire à l'axe de la double allée (choisi comme axe Ox) et passant à la même distance des deux tourbillons les plus proches (cela évite les perturbations du champ de vitesse dans l'environnement proche des tourbillons). On obtient :

$$v_x(y) = -\frac{\Gamma}{a} \frac{\operatorname{sh}(\pi b/a) \operatorname{ch}(\pi b/a)}{\operatorname{sh}^2(\pi b/a) + \operatorname{ch}^2(2\pi y/a)} \quad (7.65a)$$

et

$$v_y(y) = \frac{\Gamma}{a} \frac{\operatorname{ch}(\pi b/a) \operatorname{ch}(2\pi y/a)}{\operatorname{sh}^2(\pi b/a) + \operatorname{ch}^2(2\pi y/a)}. \quad (7.65b)$$

Les deux composantes v_x et v_y ont une variation paire avec y et changent toutes deux de signe avec Γ . Dans la configuration de la Figure 7.20, v_y est positive alors que v_x est négative. Le maximum de valeur absolue de ces deux composantes est obtenu en $y = 0$ avec respectivement $v_x(0) = -(\Gamma/a) \tanh(\pi b/a)$ et $v_y(0) = \Gamma/(a \operatorname{ch}(\pi b/a))$. Enfin, à une grande distance transverse y , les deux composantes v_x et v_y décroissent exponentiellement respectivement comme $e^{-4\pi y/a}$ et $e^{-2\pi y/a}$.

Démonstration. Pour calculer le profil $w(y)$, on utilise l'équation (7.61) établie pour une rangée de tourbillons en remplaçant z par $z - z_o$ (avec une circulation $-\Gamma$) pour la rangée supérieure et z par $z + z_o$ (avec une circulation Γ) pour la rangée inférieure. Les affixes $z_o = ib/2 + a/4$ et $-z_o$ correspondent aux cœurs des deux tourbillons les plus proches) et l'affixe des points où le profil est mesuré est iy . En sommant les contributions des deux rangées, on obtient le champ de vitesse complexe :

$$w(z) = -\frac{i\Gamma}{2a} \left[\cotan\left(\frac{\pi(iy + z_o)}{a}\right) - \cotan\left(\frac{\pi(iy - z_o)}{a}\right) \right].$$

En utilisant les relations trigonométriques : $\cotan p - \cotan q = \sin(q-p)/(\sin p \sin q)$ et $\sin p \sin q = (\cos(p-q) - \cos(p+q))/2$, on obtient successivement :

$$w(y) = \frac{i\Gamma}{2a} \frac{\sin(2\pi z_o/a)}{\sin(\pi(iy - z_o)/a) \sin(\pi(iy + z_o)/a)} = \frac{i\Gamma}{a} \frac{\sin(2\pi z_o/a)}{\cos(2\pi z_o/a) - \cos(2\pi iy/a)}.$$

En remplaçant z_o par sa valeur et en utilisant les relations $\cos ix = \operatorname{ch} x$ et $\sin ix = i \operatorname{sh} x$, l'équation précédente devient sur l'axe Oy :

$$w(y) = (v_x(y) - i v_y(y)) = \frac{\Gamma}{a} \frac{\operatorname{ch}(\pi b/a)}{-\operatorname{sh}(\pi b/a) + i \operatorname{ch}(2\pi y/a)}$$

d'où l'on tire les équations (7.65). ■

– Fréquence d'émission des tourbillons dans une allée double

Estimons maintenant la fréquence d'émission f des tourbillons dans le cas de la figure 7.20. La vitesse relative de l'allée par rapport à l'obstacle est proportionnelle à U , vitesse de l'écoulement incident sur le cylindre ; en effet, la vitesse W que nous venons de calculer varie elle-même linéairement avec la vitesse U de l'écoulement extérieur. D'autre part, l'espacement a peut être supposé proportionnel au diamètre D de l'obstacle. La fréquence f vérifie donc :

$$f \approx \frac{U + W}{a} \approx \alpha \frac{U}{D}, \quad (7.66)$$

d'où :

$$Sr = \frac{f}{(U/D)} \approx \alpha. \quad (7.67)$$

Le nombre sans dimension Sr , *nombre de Strouhal*, a déjà été rencontré à la section 2.4.2 : dans nos hypothèses, Sr est indépendant de la vitesse et de la nature du fluide pour un obstacle donné et il constitue le paramètre sans dimension qui caractérise la fréquence de l'émission de tourbillons.

D'après les équations (7.66) et (7.67), Sr doit être inférieur à 1 : on a, en effet, $a > D$ comme le montre la Figure 7.20 et, d'autre part, $U + W$ est inférieur à U car les vitesses U et W sont de sens opposés. Expérimentalement, on trouve en effet que Sr est de l'ordre de 0,2 pour un cylindre circulaire, et qu'il dépend peu de la nature du fluide et du nombre de Reynolds tant que ce dernier est suffisamment élevé (plus grand que quelques milliers en prenant pour échelle de longueur la largeur de l'obstacle).

Remarque. Ces caractéristiques ont permis la réalisation de vélocimètres qui mesurent la vitesse à partir de la fréquence d'émission de tourbillons : on utilise des obstacles à arêtes vives, pour lesquels l'émission de tourbillons est plus stable et la dépendance de Sr par rapport au nombre de Reynolds est plus faible. On peut, par exemple, détecter l'émission de tourbillons en analysant les oscillations de différence de pression entre deux faces d'un obstacle parallèles à l'écoulement.

L'émission périodique de tourbillons peut aussi avoir des conséquences néfastes, notamment sur les structures soumises au vent : des oscillations destructrices de grande amplitude peuvent apparaître lorsque la fréquence d'émission est égale à celle d'une résonance mécanique. L'effondrement du pont suspendu de Tacoma, aux États Unis, en est un exemple classique. Plus généralement, l'interaction entre fluides et solides constitue un champ disciplinaire mixte, avec de très nombreuses applications qui ne seront pas abordées dans le présent ouvrage.

Impulsion d'un ensemble de filaments de tourbillons parallèles

Commençons par le cas de deux tourbillons contrarotatifs parallèles avec des vecteurs circulations Γ_1 et $\Gamma_2 = -\Gamma_1$ (Fig. 7.18c). On raisonnera, comme précédemment, dans un plan perpendiculaire aux deux tourbillons (les intersections sont les points O_1 et O_2). Pour évaluer l'impulsion, on part d'une configuration où les deux cœurs sont confondus (les champs de vitesse induits

s'annulent dans ce cas) et l'on applique une force distribuée $\mathbf{f}$ par unité de longueur de tourbillon perpendiculaire au segment $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ et dirigée dans le sens de la vitesse induite $\mathbf{V}_p$. Pour que la force résultante sur chaque filament soit nulle, il va acquérir une vitesse $d\mathbf{r}_i/dt$ ($i = 1, 2$) perpendiculaire à $\mathbf{V}_p$ et au tourbillon, et telle que la force de Magnus par unité de longueur correspondante $\mathbf{F}_{Mi} = -\rho (d\mathbf{r}_i/dt) \wedge \mathbf{\Gamma}_i$ soit égale à $-\mathbf{f}$; en effet, dans l'expression (6.44), la vitesse relative $\mathbf{U}$ du fluide par rapport au tourbillon i est $-d\mathbf{r}_i/dt$. Comme $\mathbf{\Gamma}_2 = -\mathbf{\Gamma}_1$, les vitesses $d\mathbf{r}_i/dt$ des deux tourbillons sont en sens inverse et ils s'écarteront jusqu'à atteindre la distance d qui nous intéresse. Dans le même temps, le travail de la force $\mathbf{f}$ correspond à l'augmentation d'énergie de la paire de tourbillons. On aura l'impulsion par unité de longueur de la paire en intégrant par rapport au temps entre $t = 0$ et le moment où les filaments atteignent leur position finale :

$$\mathbf{P} = \int_0^t (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) dt = \int_0^t \rho \left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \wedge \mathbf{\Gamma}_1 + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \wedge \mathbf{\Gamma}_2 \right)$$

d'où :

$$\mathbf{P} = \rho (\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{\Gamma}_2) = \rho (\mathbf{O}_2\mathbf{O}_1 \wedge \mathbf{\Gamma}_1).$$

Dans cette équation, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ et $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ se rapportent aux positions finales des tourbillons. En valeur absolue, on a donc $P = \rho d \Gamma$ où d est la distance entre les deux cœurs et Γ le module de la circulation.

Généralisons maintenant le résultat à un nombre quelconque de filaments parallèles. On peut procéder, comme précédemment, en les faisant tous partir d'un même point origine O ; on les soumet à une force $\mathbf{f}_i$ par unité de longueur qui leur communique une vitesse $d\mathbf{r}_i/dt$ telle que la force de Magnus $\mathbf{F}_{Mi} = -\rho (d\mathbf{r}_i/dt) \wedge \mathbf{\Gamma}_i$ soit égale à $-\mathbf{f}_i$ (on a alors une résultante nulle). Il suffit de choisir $\mathbf{f}_i$ pour que $d\mathbf{r}_i/dt$ soit orienté suivant $\mathbf{OO}_i$. En sommant les différentes contributions, comme dans l'équation précédente, on trouve :

$$\mathbf{P} = \rho \sum_i (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{\Gamma}_i). \quad (7.68a)$$

Remarque. Pour que le résultat soit indépendant de l'origine O , il faut que la somme de toutes les circulations soit nulle, ce qui permet d'ailleurs d'avoir une circulation nulle de la vitesse à l'infini.

Dans le cas d'une distribution continue, toujours bidimensionnelle, de vorticité, on peut adapter cette équation en l'appliquant à des tourbillons élémentaires de section dS perpendiculairement à leur longueur et en intégrant ensuite dans ce même plan :

$$\mathbf{P} = \rho \iint (\mathbf{r} \wedge \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})) dS. \quad (7.68b)$$

Note. Une démonstration rigoureuse et délicate des résultats précédents, ainsi que leur transposition à trois dimensions, ont été établis par P.G. Saffman.

7.4.3 Anneaux tourbillons

Les anneaux tourbillons sont formés d'un tube de vorticité de petit diamètre, fermé sur lui-même, et assimilable à une ligne constituant le cœur du tourbillon (Fig. 7.21). La circulation Γ est constante le long de tout contour entourant une fois cette ligne. L'anneau tourbillon est une structure très stable de vorticité, qui est souvent associée à des obstacles ou des orifices   symétrie circulaire (Fig. 7.17 CC).

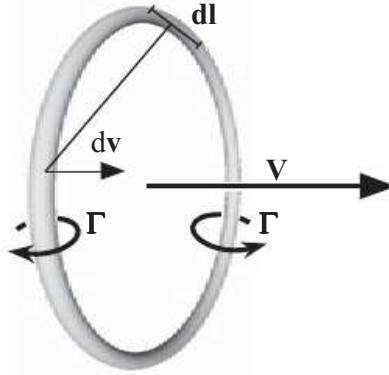


FIG. 7.21 – Schéma d'un anneau tourbillon de circulation Γ se déplaçant à une vitesse uniforme.

Remarque. Il est possible de produire expérimentalement de tels anneaux avec une boîte de conserve dont on a enlevé un des fonds sur lequel on tend une membrane élastique mince et dont l'autre est percé d'un orifice circulaire. Après avoir introduit de la fumée dans la boîte, on émet un anneau de fumée par l'orifice en donnant une impulsion à la membrane; on peut alors étudier sa trajectoire ou sa déviation par un obstacle.

Vitesse de déplacement d'un anneau tourbillon

Analysons maintenant le cas d'un anneau tourbillon plan circulaire, de rayon R , qui se déplace dans un fluide parfait sous l'action de la vitesse induite en chaque point M par les autres éléments dl du cœur du tourbillon (on suppose le champ de vitesse extérieur nul). Nous avons vu à la section 7.1.3, que la vitesse $d\mathbf{v}$ correspondante est perpendiculaire à la fois à l'élément de ligne et au vecteur joignant M à dl ; $d\mathbf{v}$ est donc perpendiculaire au plan du cœur du tourbillon. En raison de la symétrie du problème, la vitesse totale induite est la même en tous les points du cœur et perpendiculaire au plan de l'anneau; ce dernier se propage donc sans se déformer à une vitesse $\mathbf{V}$ parallèle à son axe.

L'ordre de grandeur du module de $\mathbf{V}$ peut être calculé à l'aide de la formule (7.20), qui donne la vitesse induite par un arc de ligne de tourbillon en chacun de ses points :

$$V \approx \frac{\Gamma}{4\pi R} \text{Log} \left(\frac{R}{\xi} \right)$$

où ξ représente l'ordre de grandeur de la taille du cœur du tourbillon. Lorsque ξ est très inférieur à R , la vitesse de déplacement est principalement associée à la contribution divergente des éléments de ligne les plus proches du point considéré ; cette dernière est, dans ce cas, supérieure d'un facteur $\text{Log}(R/\xi)$   la vitesse induite par les éléments diamétralement opposés. Un calcul complet, supposant que le tourbillon a un cœur cylindrique en rotation uniforme, donne une valeur très proche :

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\text{Log} \frac{8R}{\xi} - \frac{1}{2} \right). \quad (7.69)$$

Remarque. Pour une même valeur de Γ , plus un anneau tourbillon est de grande taille, plus il se déplace lentement. Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu pour deux lignes parallèles rectilignes de circulations Γ opposées distantes de d pour lesquelles la vitesse de déplacement, égale à $\Gamma/(2\pi d)$, varie également comme $1/d$.

Un anneau tourbillon possède une énergie cinétique et une quantité de mouvement qui représentent l'énergie cinétique et l'impulsion du fluide mis en mouvement dans cette structure : c'est pourquoi on peut détecter une force normale lors de l'impact d'un anneau de fumée sur une surface solide.

Évaluons maintenant directement ces quantités.

 nergie cinétique d'un anneau tourbillon

Nous partons de l'énergie e_c par unité de longueur d'une ligne de tourbillon rectiligne donnée par l'équation (7.9). Si le rayon de courbure R de la ligne est grand devant le rayon ξ du cœur, l'énergie cinétique totale E_c de l'anneau sera approximativement $(2\pi R e_c)$, soit :

$$E_c \approx \rho \Gamma^2 \frac{R}{2} \text{Log} \frac{R}{\xi}.$$

Dans cette expression, nous négligeons la distorsion du champ de vitesse par les éléments de ligne lointains et prenons $L=R$ comme échelle de longueur supérieure du rayon r dans l'intégrale ; en effet, à des distances plus grandes, la décroissance du champ de vitesse est beaucoup plus rapide (en $1/r^3$ comme celle d'un dipôle magnétique) et sa contribution à E_c devient faible. La valeur exacte de E_c , obtenue par une intégration complète, est voisine de cette estimation :

$$E_c = \frac{\rho \Gamma^2 R}{2} \left(\text{Log} \frac{8R}{\xi} - \frac{3}{2} \right). \quad (7.70)$$

Ainsi, la *diminution* de vitesse des anneaux, lorsque leur rayon augmente, s'accompagne dans le même temps d'une *augmentation* d'énergie cinétique !

Impulsion d'un anneau tourbillon

Évaluons maintenant l'impulsion associée à l'anneau en procédant comme nous venons de le faire pour une paire de filaments rectilignes : on soumet le

cœur du tourbillon à une force $\mathbf{f}$ par unité de longueur constante parallèle à l'axe et orientée dans le sens de son mouvement. Le tourbillon réagit à cette force par une augmentation de son rayon, ce qui permet d'équilibrer la force $\mathbf{f}$ par une force de Magnus par unité de longueur : $\mathbf{f}_M = -\rho(\mathbf{dr}/dt) \wedge \boldsymbol{\Gamma} = -\mathbf{f}$. Le module $F = 2\pi r f$ de la force totale vérifie donc :

$$F = 2\pi\rho\Gamma r \frac{dr}{dt}.$$

L'impulsion P du tourbillon de rayon R est égale à l'intégrale $\int F dt = \int 2\pi\rho\Gamma r dr$ entre une valeur nulle du rayon et la valeur R . On obtient donc :

$$P = \pi\rho\Gamma R^2. \quad (7.71)$$

À partir des équations (7.70) et (7.71) donnant l'énergie E_c et la quantité de mouvement $\mathbf{P}$ de l'anneau, on peut déterminer la vitesse de groupe $V_g(R)$ de l'anneau à partir de la relation classique :

$$\begin{aligned} V_g(R) &= \frac{dE_c}{dP} = \frac{dE_c/dR}{dP/dR} = \frac{\rho\Gamma^2}{2} \left(\frac{\text{Log}(8R/\xi) - 3/2 + 1}{2\pi\rho\Gamma R} \right) \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\text{Log} \frac{8R}{\xi} - \frac{1}{2} \right) = V. \end{aligned} \quad (7.72)$$

V_g est donc égale à la vitesse V de déplacement du tourbillon, qui représente bien la vitesse de transport de l'énergie par ce dernier.

Ce comportement est très différent de celui des objets matériels. Pour ceux-là, une augmentation de l'énergie et de la quantité de mouvement s'accompagne, en général, d'une augmentation simultanée de la vitesse de déplacement. Au contraire, pour les tourbillons en anneau, la vitesse diminue alors que le rayon, l'énergie et la quantité de mouvement augmentent.

Ces lois de la dynamique des anneaux tourbillons ont été vérifiées avec précision dans l'hélium superfluide (voir appendice de ce chapitre).

Interactions entre anneaux tourbillons ou avec une paroi

La dynamique d'un ensemble d'anneaux tourbillons peut être traitée comme celle de lignes parallèles, en considérant l'effet induit par une ligne sur l'autre.

– Impact d'un anneau de tourbillon sur un plan solide

On peut décrire le comportement d'un anneau qui s'approche perpendiculairement à un plan en remplaçant ce plan par un anneau image, symétrique par rapport au plan (Fig. 7.22). La présence de l'image assure que la composante de vitesse normale au plan est nulle sur ce dernier (la composante tangentielle n'a pas besoin d'être nulle car on est dans le cas d'un fluide parfait). L'anneau de tourbillon ne rebondit pas ; mais, à cause de l'interaction

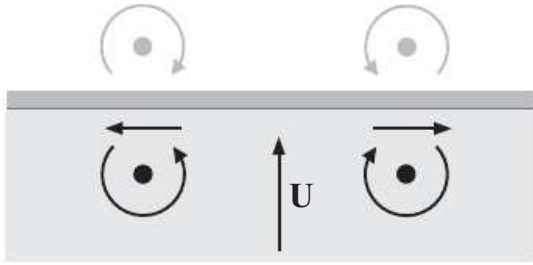


FIG. 7.22 – Impact d’un anneau de tourbillon sur un plan solide.

avec l’image, son rayon augmente indéfiniment tandis qu’il se rapproche de plus en plus lentement du plan. En effet, son image induit sur l’anneau une composante de vitesse radiale dirigée vers l’extérieur, d’autant plus forte que l’anneau et son image sont rapprochés. D’autre part, la composante normale au plan induite sur un élément par les autres parties de l’anneau est partiellement annulée par la composante similaire induite par le tourbillon image.

– Anneaux de tourbillons de même axe et de même circulation

L’interaction de deux tels anneaux tourbillons, produits à la sortie d’un jet circulaire, conduit à un amusant phénomène de type saute-mouton (Fig. 7.23). Chaque anneau passe à l’intérieur de l’anneau qui le précède, tandis que son rayon diminue ; il est alors à nouveau dépassé et ainsi de suite. Le champ de vitesse, induit par l’anneau A_2 le plus en avant sur l’anneau A_1 , induit en effet sur ce dernier une composante de vitesse radiale V_{r1} dirigée vers l’axe : elle fait diminuer le rayon de A_1 et, ainsi, augmente sa vitesse U_1 . Dans le même temps, l’anneau A_1 crée sur A_2 une composante radiale V_{r2} dirigée vers l’extérieur qui, au contraire, augmente son rayon et le ralentit. Ce processus continuera jusqu’à ce que l’anneau A_1 ait dépassé l’anneau A_2 .

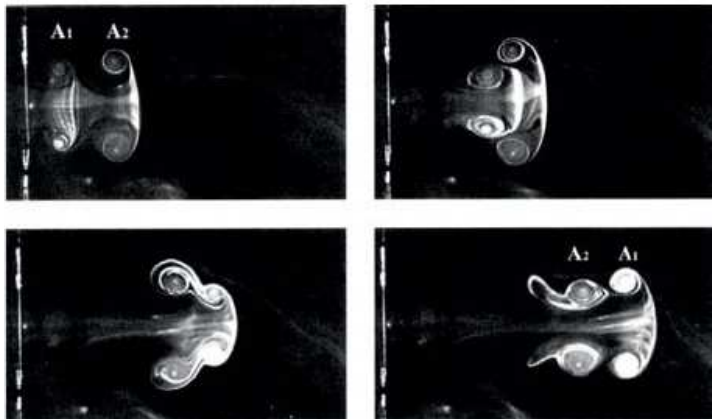


FIG. 7.23 – Le mouvement relatif « en saute-mouton » de deux anneaux tourbillons coaxiaux est décrit par cette séquence de quatre photos (An Album of Fluid Motion ; M. Van Dyke).

7.5 Tourbillons, vorticité et locomotion dans l'air et dans l'eau

Les tourbillons et, plus généralement, la circulation de la vitesse jouent fréquemment un rôle crucial dans la locomotion en induisant des forces de poussée (ou de traînée) qui produisent (ou freinent) le mouvement, mais aussi de portance. L'influence des tourbillons sera importante, que ce soit dans l'air ou dans l'eau, pour des véhicules ou pour des animaux de taille et de vitesse assez grandes : le nombre de Reynolds est alors suffisamment élevé pour que des effets inertiels liés à la circulation de la vitesse et, éventuellement, des structures tourbillonnaires apparaissent. Le cas opposé des déplacements contrôlés par la viscosité, tels que pour des microorganismes, sera évoqué au chapitre 9.

7.5.1 Forces de poussée et émission de tourbillons

De nombreuses espèces animales, telles que les poissons ou les oiseaux, assurent leur propulsion par des battements de queue ou d'ailes qui provoquent des émissions d'allées de tourbillons.

La Figure (7.24 CC) illustre ce phénomène en comparant des champs de vitesse du fluide mesurés derrière un modèle simple d'aile oscillant avec une fréquence f constante et une amplitude A croissante. L'aile a une épaisseur d et elle est placée dans un écoulement de vitesse constante $\mathbf{U}$ (nombre de Reynolds $Re = dU/\nu$).

Aux plus faibles amplitudes (Fig. 7.24a CC), on observe une allée de tourbillons de Bénard-von K rman (BVK) du même type que celles observées derrière un obstacle fixe placé dans un écoulement (voir sections 2.4.2 et 7.4.2).

Quand on augmente l'amplitude, l'allée (BVK) est remplacée par une autre où les tourbillons tournent en sens inverse du cas précédent (Fig. 7.24c CC). A la frontière entre ces deux régimes, on observe une structure intermédiaire, c'est à dire une rangée linéaire de tourbillons alternés (Fig. 7.24b CC).

L'inversion du sens des tourbillons a pour conséquence l'apparition d'une force de poussée opposée à l'écoulement moyen, alors que l'on a une force de traînée pour l'allée BVK. La composante $\mathbf{F}_t$ de ces forces suivant $\mathbf{U}$ est, par unité de longueur de tourbillon :

$$\mathbf{F}_t = \varepsilon \rho \Gamma \frac{b}{a} (\mathbf{U} + \mathbf{W}) \quad (7.73)$$

avec $\varepsilon = 1$ pour l'allée BVK et $\varepsilon = -1$ pour l'allée inverse. La vitesse induite $\mathbf{W}$ donnée par l'équation (7.64) est de signe opposé à $\mathbf{U}$ dans le premier cas et de même signe dans le second (on a toujours $|W| < |U|$).

Démonstration. L'impulsion totale d'une allée de tourbillons est égale, d'après l'équation (7.68a), à : $\mathbf{P} = \rho \sum_i (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{\Gamma}_i)$. L'émission d'une paire de tourbillons supplémentaire fait varier la composante de l'impulsion suivant l'écoulement moyen $\mathbf{U}$

d'une quantité :

$$\Delta P_U = \rho (\mathbf{O}\mathbf{O}_+ \wedge \mathbf{\Gamma} + \mathbf{O}\mathbf{O}_- \wedge -\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{e}_U = \rho (\mathbf{O}_- \mathbf{O}_+ \wedge \mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{e}_U \quad (7.74)$$

où $\mathbf{e}_U$ est le vecteur unitaire orienté suivant $\mathbf{U}$ et $\mathbf{O}_- \mathbf{O}_+$ joint les intersections des coeurs d'un tourbillon et de l'un de ses deux plus proches voisins avec un plan perpendiculaire. On remarque que la variation ΔP_U est indépendante du choix de la paire utilisée (et même de celui des voisins auquel on associe un tourbillon). Le produit mixte $(\mathbf{O}_- \mathbf{O}_+ \wedge \mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{e}_U$ est toujours égal à Γb (Fig. 7.20) : la force de traînée est alors obtenue en multipliant $\Delta P_U \mathbf{e}_U$ par le nombre de paires émises par unité de temps, qui est la fréquence f (équation 7.66). Enfin, le signe de ΔP_U dépend de l'orientation de la composante du vecteur $\mathbf{O}_- \mathbf{O}_+$ dans la direction transverse à $\mathbf{U}$ ce qui permet de justifier l'équation (7.73).

L'expression (7.73) n'est qu'approchée et le calcul complet prend en compte les variations de vitesse dans la partie potentielle de l'écoulement, telles que celles données par l'équation (7.65) : cela introduit des termes correcteurs mais conserve le terme dominant en $\rho \Gamma b U/a$. ■

La Figure 7.25 montre les domaines d'observation des différents régimes déduits d'expériences réalisées à différentes valeurs de l'amplitude et de la fréquence d'oscillation. Ces mesures indiquent que le type de régime observé dépend principalement de la combinaison sans dimension $Sr_A = fA/U$. La transition entre l'allée BVK et l'allée inverse est observée pour une valeur de Sr_A de l'ordre de 0,15. Pour des valeurs de Sr_A supérieures à 0,4, l'allée de tourbillons perd sa périodicité et son orientation moyenne dévie par rapport à celle de la vitesse $\mathbf{U}$.

Remarque. On note que Sr_A est le nombre de Strouhal défini en utilisant l'amplitude d'oscillation comme longueur caractéristique.

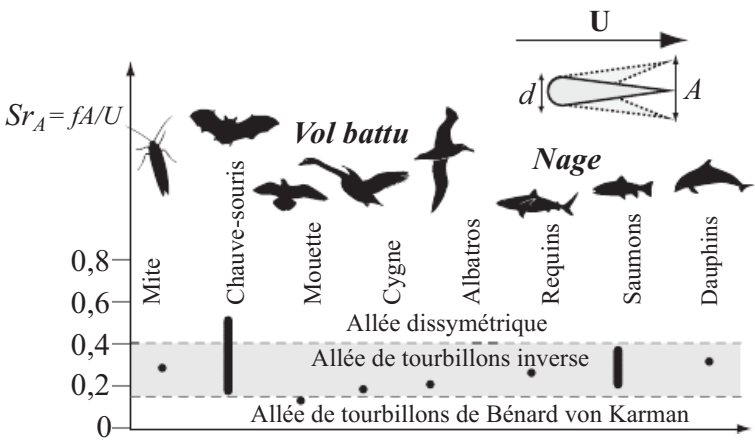


FIG. 7.25 – Domaines d'observation des différents régimes d'écoulement derrière une aile oscillante en fonction du nombre de Strouhal normalisé $Sr_A = fA/U$. (●) : valeurs de Sr_A correspondant à la propulsion de différents animaux (d'après R. Godoy-Diana, J.L. Aider et J.E. Wesfreid (2008)).

L'effet de poussée le plus efficace est obtenu dans le régime d'allée de tourbillons inverse ($0,15 \leq Sr_A \leq 0,4$). On constate effectivement dans le diagramme de la Figure 7.25 que ces valeurs de Sr_A correspondent bien à celles observées pour une large variété d'oiseaux, d'insectes et de poissons.

En plus de l'effet d'émission de tourbillons que nous venons de décrire, les stratégies de vol et de nage utilisent souvent des déformations de l'aile ou de la nageoire à la fréquence de battement, qui peuvent être produites volontairement ou résulter de la souplesse de l'aile.

7.5.2 Portance et sustentation

De par sa définition aux sections 6.3.1 et 6.6.3, la portance est la composante de force perpendiculaire à la vitesse relative d'un objet et d'un fluide. La portance des ailes des avions joue évidemment un rôle crucial dans la sustentation de ces derniers ainsi que dans le vol des oiseaux. Les poissons (et les sous-marins) utilisent également la portance (en plus de la poussée d'Archimède) pour les aider à progresser à une profondeur fixe. Nous discuterons tout d'abord la portance des ailes d'avion.

Portance et traînée d'une aile d'avion

La Figure 7.26a rappelle la définition des forces de portance et de traînée sur une aile que nous considérons dans un premier temps comme un objet bidimensionnel (géométrie invariante dans la direction perpendiculaire au plan de la figure).

La *portance* $\mathbf{F}_p$ est perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{U}$ et maintient l'avion en sustentation : on cherche donc à la rendre maximale. La force de *traînée* $\mathbf{F}_t$ est parallèle et opposée à la vitesse : elle a un effet de freinage que l'on cherche à minimiser. En pratique, on caractérise la portance et la traînée par deux coefficients adimensionnels (respectivement C_z et C_x), qui dépendent uniquement de la géométrie et de l'incidence α de l'aile ; C_z et C_x sont définis à partir de la portance, de la traînée, la surface S de l'aile et la densité ρ de l'air par :

$$F_p = \frac{1}{2} \rho U^2 S C_z(\alpha) \quad (7.75a)$$

et :

$$F_t = \frac{1}{2} \rho U^2 S C_x(\alpha). \quad (7.75b)$$

La portance est due à la circulation de la vitesse du fluide autour de l'aile : c'est en effet une manifestation de la force de Magnus que nous avons décrite à la section 6.3.1 (Éq. 6.44). Cette circulation est déterminée par la forme du profil de l'aile, de telle manière que le point d'arrêt de l'écoulement sur l'extrados (ou face supérieure) de l'aile soit situé sur le bord de fuite : nous avons d'ailleurs analysé cette condition, dite *condition de Kutta*, à la section 6.6.3. La circulation Γ et la portance $\mathbf{F}_p$ augmentent avec la vitesse $\mathbf{U}$ de l'aile par rapport au fluide (Éq. 6.106) : l'avion peut décoller lorsque $\mathbf{U}$ est suffisant pour que $\mathbf{F}_p$ excède son poids.

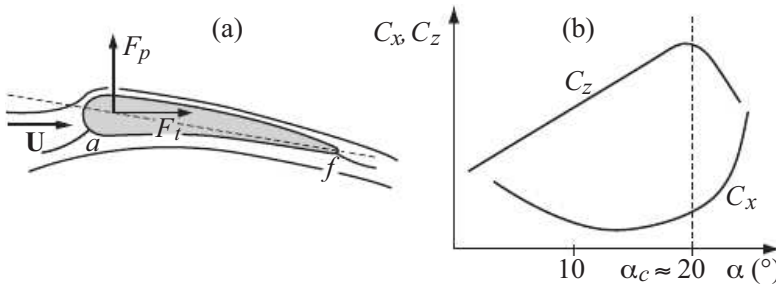


FIG. 7.26 – (a) Vue schématique de l’écoulement autour d’une aile et des forces de portance et de traînée ; a et f sont les bords d’attaque et de fuite. On se reportera utilement à la discussion des Figures 6.22 et suivantes ; (b) variation des coefficients de portance C_z et de traînée C_x en fonction de l’angle d’incidence α .

La Figure 7.26b donne la variation des coefficients de portance et de traînée en fonction de l’angle d’incidence α par rapport à la vitesse moyenne. On remarque que C_z croît approximativement linéairement avec α jusqu’à une valeur critique α_c . Au-dessus de cet angle d’incidence, le coefficient de portance chute brutalement (*phénomène de décrochage*). Lorsque α augmente (tout en restant en dessous de α_c), la vitesse pour laquelle la force de portance équilibre le poids de l’avion diminue. Nous discuterons ce processus de décrochage, lié au *décollement* des couches limites à la section 10.6.1.

Portance d’une aile d’avion

Dans la section 7.2.1, nous avons montré que, dans un fluide parfait, si la circulation initiale de la vitesse $\mathbf{v}$ du fluide est nulle le long d’une courbe ($\mathcal{C}$), elle le reste à tous les instants ultérieurs autour des courbes ($\mathcal{C}'(t)$) formées de particules de fluides situées initialement sur ($\mathcal{C}$) et entraînées par l’écoulement (théorème de Kelvin). En revanche, dans le cas de la couche limite, la présence d’une couche de vorticité concentrée près de la paroi permet l’apparition d’une circulation autour du profil d’aile et, par suite, d’une force de portance. On peut, cependant, appliquer le théorème de Kelvin à une courbe ($\mathcal{C}$) entourant l’aile en dehors de la couche limite (Fig. 7.27a) et assez loin pour que l’écoulement puisse être considéré comme parfait partout sur cette courbe. Prenons une aile mise en mouvement à un instant initial : on voit apparaître un tourbillon sur le bord de fuite de l’aile (Fig. 7.27b). La circulation $-\Gamma$ de la vitesse du fluide autour de ce *tourbillon de démarrage* doit être l’opposée de la valeur Γ autour de l’aile pour maintenir nulle la circulation sur ($\mathcal{C}'(t)$) (Fig. 7.27b) (la circulation initiale autour de ($\mathcal{C}$) est en effet nulle puisque le fluide est au repos). Ce phénomène s’observe déjà sur le *bord de fuite* d’une cuillère déplacée parallèlement à elle-même, dans un bol de café. Le tourbillon de démarrage est laissé en arrière quand la vitesse devient constante (de plus, dans un fluide réel, la distribution de la vorticité s’étale par diffusion visqueuse).

  la section 7.2.1, nous avons montré également que, dans un fluide parfait, une ligne de tourbillon doit être refermée sur elle-même ou avoir ses deux

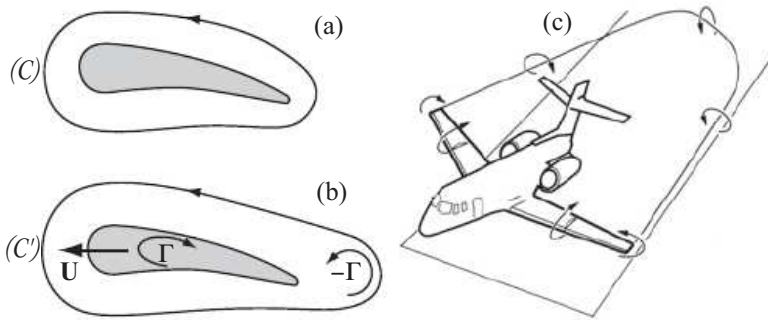


FIG. 7.27 – (a, b) Apparition de la circulation autour d’une aile d’avion au moment du démarrage : (a) initialement, la circulation de la vitesse du fluide le long d’un contour (C) tracé autour de l’aile au repos est nulle ; (b) la création de circulation autour de l’aile lors de la mise en mouvement est compensée par l’apparition d’un tourbillon laissé en arrière ; (c) structure tridimensionnelle de la distribution de la vorticité autour d’un avion : la ligne de tourbillon incluant l’aile d’avion et le tourbillon de démarrage se referme par deux tourbillons émis aux extrémités de l’aile.

extrémités localisées sur une paroi solide ou un interface liquide ; comme la longueur des ailes est finie, le circuit de vorticité qui comprend l’aile de l’avion et le tourbillon de démarrage se referme donc par deux tourbillons d’axes parallèles à la vitesse $\mathbf{U}$ de l’avion et émis en bout d’aile (Figs. 7.27c, 7.28a CC et 7.28b CC).

En arrière d’un gros avion de transport, ces *tourbillons de bout d’aile* peuvent être d’amplitude suffisante pour déséquilibrer un autre avion le suivant de trop près ; c’est notamment le cas lorsque la vitesse du premier avion est faible et que les valeurs de C_z , de α et donc de la circulation Γ doivent, par suite, être élevées pour que la portance supporte le poids de l’avion (  q. 6.106).

Ces tourbillons sont aussi une source de dissipation d’énergie inutile : des ailerons placés aux extrémités de l’aile permettent de limiter leur influence sur les avions de transport actuels. D’autres stratégies sont aussi envisagées pour détruire le sillage, par exemple par émission de vortex secondaires qui se superposent au sillage et déstabilisent et détruisent les vortex (*instabilité de Crow*).

7.5.3 Portance et propulsion

Propulsion par les pales tournantes d’une hélice

Les pales des hélices de bateau et celles d’un avion font intervenir essentiellement la portance : en effet, elles sont légèrement inclinées par rapport au plan dans lequel s’effectue leur rotation, de telle sorte que la portance est parallèle à l’axe de rotation et correspond donc bien    une force de propulsion.

De plus, comme pour une aile d'avion, la traînée (qui est, elle, située dans le plan de rotation) sera faible, ce qui entraîne une dissipation d'énergie minimale.

Cela diffère complètement des dispositifs, comme la roue à aube, pour lesquels la vitesse de déplacement des pales est perpendiculaire à celles-ci : dans ce cas, seule la force de *traînée* sur les pales intervient et la force de portance ne joue aucun rôle. Le mouvement des pales communique alors bien une impulsion à l'eau vers l'arrière en repoussant cette dernière, mais on a une forte perte d'énergie à cause du travail de la force de traînée due à la différence de vitesse entre les pales et l'eau (et donc un mauvais rendement). Les rames représentent un autre mode de propulsion utilisant la traînée propulsive.

Les pales d'un hélicoptère, mis à part leur forme très allongée, fonctionnent essentiellement comme celles d'une hélice, mais elles servent, cette fois-ci, essentiellement à la sustentation puisque l'axe de rotation est vertical (on parle de voilure tournante).

Propulsion des voiliers

On peut considérer une voile comme une aile d'avion placée verticalement avec une largeur qui diminue vers le haut. Quand le voilier *remonte au vent*, l'angle du vent avec la voile est faible et il est orienté de manière à ce qu'il gonfle la voile. La force appliquée à la voile est alors essentiellement une force de portance perpendiculaire à la voile. La composante de cette force

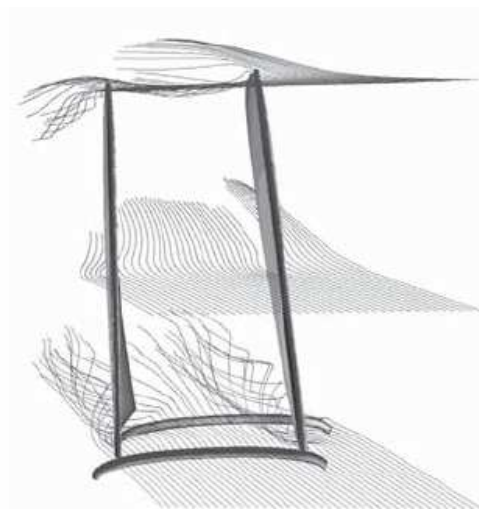


FIG. 7.29 – Simulation numérique de l'écoulement autour des deux voiles d'un catamaran (seules les voiles et les poutres joignant les deux coques sont représentées) ; les lignes correspondent aux lignes de courant du fluide. Des tourbillons se forment au sommet des mâts et à l'extrémité arrière du bord inférieur des voiles (doc. V. Chapin, ISAE).

perpendiculaire à l'axe du bateau est compensée par une *quille* ou une *dérive* ; ces dernières agissent comme des plaques verticales placées sous le bateau parallèlement à son axe et offrent une grande résistance aux mouvements dans la direction perpendiculaire. La composante de la force de portance suivant l'axe du bateau sera la force de propulsion.

On a, comme pour une aile, apparition d'une circulation autour de la voile avec, cette fois-ci, un vecteur circulation vertical : les tourbillons de bout d'aile de l'avion sont remplacés par un tourbillon émis horizontalement en haut du mât et un autre émis entre le côté inférieur de la voile et le pont du bateau (Fig. 7.29).

Portance, traînée et propulsion chez les animaux (et les humains)

Au cours de la nage, le poisson (ou le nageur) doit ajuster en permanence l'angle d'attaque de sa nageoire (ou de sa main) par rapport au fluide ambiant pour assurer un maximum d'efficacité. Un angle trop fort les fait agir comme les pales d'une roue à aube, ou comme une rame, avec une forte dissipation d'énergie dans leur sillage. Avec une main ou une nageoire parallèles à l'écoulement, au contraire, on aura une faible traînée, mais pas non plus de force de portance susceptible d'être utilisée pour la propulsion. Un angle d'incidence suffisant est donc nécessaire : c'est la sensibilité du nageur à l'écoulement environnant qui lui permettra d'atteindre la position optimale.

7.6 Fluides en rotation

L'étude des fluides en rotation est particulièrement importante pour la compréhension des écoulements atmosphériques et océaniques. La figure 7.30 rappelle l'effet de la rotation terrestre de vitesse angulaire $\Omega_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Les écoulements dans l'atmosphère et les océans, observés par rapport à la surface de la Terre, s'effectuent dans un repère tournant à la vitesse angulaire Ω locale de rotation de celle-là. Elle varie avec la latitude α suivant $\Omega = \Omega_0 \sin \alpha$, comme le montre l'expérience du pendule de Foucault, dont la période de rotation par rapport à l'observateur terrestre est $T = 2\pi/(\Omega_0 \sin \alpha)$. La quantité 2Ω est appelée *vorticité planétaire* par les géophysiciens.

Des expériences de laboratoire montées sur des plateaux tournants sont très souvent utilisées pour modéliser l'influence de la rotation de la Terre sur l'écoulement de l'atmosphère et de l'océan, et donnent lieu à des effets spectaculaires et inattendus.

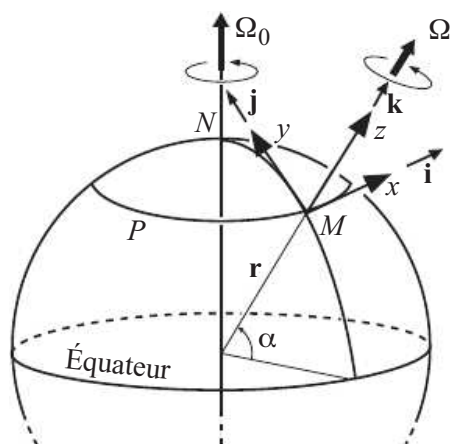


FIG. 7.30 – Schéma de définition des coordonnées locales utilisées pour décrire un écoulement en rotation.

Les écoulements en rotation interviennent aussi dans de nombreux processus industriels. La structure des écoulements dans des récipients en rotation est fortement influencée par celle-ci, en particulier au niveau des couches limites.

Nous nous intéresserons principalement au cas – le plus important en géophysique – où les déviations relatives de la vitesse du fluide par rapport au mouvement de rotation d'ensemble sont faibles.

7.6.1 Mouvement d'un fluide dans un repère en rotation

Équation de mouvement du fluide dans un repère tournant

On part de l'équation de mouvement classique dans un repère fixe (équation de Navier-Stokes) pour en déduire l'équation de mouvement dans un repère tournant à la vitesse angulaire Ω (Ω est parallèle à l'axe de rotation). On note $\mathbf{v}_a$ la vitesse du fluide dans le repère « absolu » (fixe), et $\mathbf{v}_r$ dans le repère en rotation : les vitesses sont mesurées en un point M avec $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$ (O est l'origine des axes de coordonnées, supposée située sur l'axe de rotation).

Les variations temporelles, dans le repère absolu et dans le repère tournant pour un champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ quelconques, sont reliées par l'équation :

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_r + \Omega \wedge \mathbf{A} \quad (7.76)$$

où $d\mathbf{A}/dt$ représente une dérivée lagrangienne. En particulier, si l'on a un vecteur $\mathbf{A}$ constant dans un fluide en rotation, sa variation dans le repère absolu est $d\mathbf{A}/dt = \Omega \wedge \mathbf{A}$.

En utilisant la relation (7.76) pour récrire les différents termes de l'équation de mouvement dans le repère en rotation, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_r &= \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t} + (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_r \\ &= -\mathbf{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \varphi - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 \right) + \nu \Delta \mathbf{v}_r - 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Le terme $(1/2) \mathbf{grad} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2$ est associé à la *force centrifuge* et intervient comme une force en volume. La composante $-2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r$, la *force de Coriolis*, est normale à la vitesse des particules de fluide : c'est cette même force qui explique la rotation des pendules de Foucault et la déviation vers l'est des corps en chute libre. Nous verrons qu'elle est aussi responsable d'importants phénomènes atmosphériques.

Démonstration. Appliquons tout d'abord l'équation (7.76) au rayon vecteur $\mathbf{r}$ dont les dérivées temporelles sont les vitesses $\mathbf{v}_a$ et $\mathbf{v}_r$; on obtient :

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}. \quad (7.78)$$

En appliquant de nouveau l'équation (7.76) à l'expression précédente de $\mathbf{v}_a$, on obtient :

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}). \quad (7.79)$$

Or, $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})$ est égal à $-\mathbf{grad} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2/2$ puisque seule la composante $\mathbf{r}_\perp$ de $\mathbf{r}$ normale à $\boldsymbol{\Omega}$ intervient et que les deux expressions sont égales à $-\Omega^2 \mathbf{r}_\perp$. Partons de l'équation de Navier-Stokes, dont la forme normale dans un repère absolu est :

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right)_a = \frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t} + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_a = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}_a - \mathbf{grad} \varphi \quad (7.80)$$

(φ représente le potentiel des forces en volume par unité de masse, tel que $\varphi = gz$ pour la gravité). En lui appliquant la relation (7.79), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_r &= \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t} + (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_r = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}_r - \mathbf{grad} \varphi - 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{grad} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2. \end{aligned} \quad (7.81)$$

En effet, remplaçons dans l'équation (7.80) $\Delta \mathbf{v}_a$ par son expression en fonction de $\Delta \mathbf{v}_r$ obtenue à partir de l'expression (7.78) : ces deux termes ne diffèrent que par $\Delta(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})$, qui est identiquement nul puisque $\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}$ est une fonction linéaire des composantes de $\mathbf{r}$. En regroupant les gradients, l'équation (7.81) redonne l'équation (7.77) dans le cas particulier d'un fluide incompressible ($\rho = \text{cte}$).

Dans toute la suite de ce chapitre, on supprimera l'indice r et l'on utilisera les composantes de vitesse mesurées dans le repère en rotation. ■

Effets de la force centrifuge dans un fluide en rotation

La force centrifuge peut induire des écoulements : une application importante est ainsi représentée par les pompes centrifuges, où un fluide est injecté sur un axe, mis en mouvement par des pales et finalement rejeté sur le côté par le gradient de pression dû à la rotation. Une autre application est l'obtention de couches minces de liquide d'épaisseur uniforme par dépôt d'une goutte sur un disque tournant (enduction centrifuge). Les effets de la force centrifuge sont également cruciaux au sein des tornades ou des trombes. Nous verrons (section 7.7.1) que ces forces peuvent faire apparaître des écoulements secondaires qui se superposent aux écoulements principaux dans certaines géométries d'écoulement (les tuyaux ou les parois courbes par exemple).

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons au contraire au cas – très fréquent – où les forces centrifuges ne génèrent pas d'écoulements. Supposons, par exemple, un récipient en rotation à vitesse constante : après un temps assez long, le fluide prend la vitesse angulaire des parois du récipient si aucun dispositif n'induit d'écoulement par rapport à celles-ci (voir section 2.1.1). Dans ce cas, on obtient, en prenant $\mathbf{v}_r \equiv 0$ dans l'équation (7.77) :

$$\left(\frac{p}{\rho} + \varphi - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 \right) = \frac{p}{\rho} + gz - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 = \frac{p}{\rho} + gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2} = \text{cte} \quad (7.82)$$

(r est la distance à l'axe de rotation et Ω est la norme de $\boldsymbol{\Omega}$). La force centrifuge induit un gradient de pression supplémentaire, uniquement fonction de la distance à l'axe de rotation : dans la suite du chapitre, nous n'en tiendrons pas compte, en utilisant implicitement une valeur de la pression corrigée de cet effet, en lui ajoutant le terme $-\rho \Omega^2 r^2 / 2$.

La force centrifuge a, cependant, un effet visible de déformation de la surface du fluide si cette dernière est libre. En effet, la pression y est constante et égale à la pression atmosphérique (on peut négliger l'effet de la tension superficielle si la taille du récipient est supérieure à quelques millimètres (voir section 1.4.4). Le niveau $z(r)$ de la surface vérifie alors : $gz(r) - \Omega^2 r^2 / 2 = \text{cte}$. On retrouve la forme parabolique bien connue de la surface libre, avec un niveau minimum sur l'axe de rotation ($r = 0$). Le terme de pression de type hydrostatique supplémentaire dû à la rotation est ici compensé par des déformations de la surface libre.

Équation de mouvement de la vorticité dans un repère tournant

On procède, comme pour établir l'équation de la vorticité dans le repère absolu (section 7.3), en prenant le rotationnel de l'équation (7.77), ce qui fait disparaître les termes en gradient. On obtient alors l'équation de transport de la vorticité dans un repère tournant :

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \boldsymbol{\omega} = ((\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (7.83)$$

(avec $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}_r$). La seule différence entre cette équation et celle obtenue en l'absence de rotation est la présence du terme de *vorticité planétaire* $2\boldsymbol{\Omega}$ à côté du terme de vorticité $\boldsymbol{\omega}$. La somme $\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}$ de ces deux termes est appelée *vorticité absolue*. En l'absence de rotation, le terme $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ représente les variations de vorticité accompagnant les variations de longueur ou d'orientation des tubes de vorticité (section 7.3.1). La rotation ajoute une contribution supplémentaire qui peut être dominante pour des vitesses de rotation élevées.

Ordre de grandeur des différents termes de l'équation du mouvement – nombres de Rossby et d'Ekman

Appelons L l'échelle caractéristique des longueurs de l'écoulement (la taille du canal par exemple) et U une vitesse caractéristique (vitesse maximale ou vitesse moyenne par exemple). Écrivons maintenant l'équation (7.77) en la multipliant par L/U^2 pour faire apparaître des variables sans dimensions :

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{grad}') \mathbf{v}' = -\mathbf{grad}' p' + \frac{\nu}{UL} \Delta' \mathbf{v}' - 2 \frac{\Omega L}{U} \frac{\Omega}{|\Omega|} \wedge \mathbf{v}' \quad (7.84)$$

où $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/U$, $p' = (p - p_0)/(\rho U^2)$; p_0 est la pression en l'absence d'écoulement mais en présence de rotation et de forces en volume avec $\mathbf{grad}(p_0/\rho) = -\mathbf{grad}(\varphi - (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2/2)$. L'expression $\mathbf{grad}'$ correspond à des dérivées par rapport aux composantes du rayon vecteur sans dimension $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/L$; $\boldsymbol{\Omega}/|\Omega|$ est le vecteur unitaire dans la direction de l'axe de rotation.

L'équation (7.84) ne fait intervenir, en dehors des variables sans dimension $\mathbf{r}'$, $\mathbf{v}'$ et p' , que les combinaisons sans dimensions $\nu/(UL)$ (inverse du nombre de Reynolds) et $\Omega L/U$, qui est l'inverse du nombre $Ro = U/(\Omega L)$, appelé *nombre de Rossby*. Les solutions de l'équation (7.84) sont donc de la forme :

$$\frac{\mathbf{v}}{U} = \mathbf{v}' = \mathbf{f} \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}, Re, Ro \right), \quad (7.85a)$$

$$\frac{p - p_0}{\rho U^2} = p' = g \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}, Re, Ro \right). \quad (7.85b)$$

Deux écoulements de géométries identiques, mais avec des valeurs de U et L différentes, correspondent donc à des champs de vitesse et de pression similaires si les nombres de Reynolds et de Rossby sont les mêmes.

Le nombre de Rossby représente physiquement le rapport entre les ordres de grandeur du terme de transport convectif de l'équation de mouvement et du terme de force de Coriolis. On a en effet :

$$|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}| \approx \frac{U^2}{L} \quad \text{et} \quad |2(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v})| \approx \Omega U.$$

Ainsi :

$$Ro = \frac{U}{\Omega L} \approx \frac{\text{terme de transport convectif}}{\text{terme de force de Coriolis}}.$$

Les écoulements à faible nombre de Rossby sont ceux pour lesquels les effets de rotation et de force de Coriolis sont dominants. Le nombre de Rossby ne devient faible, pour des vitesses d'écoulement normales, que pour des mouvements à très grande échelle. Ainsi, pour un écoulement atmosphérique, avec : $\Omega = 10^{-4} \text{s}^{-1}$, $U \approx 10 \text{ m.s}^{-1}$, $L \approx 10^3 \text{ km}$, on trouve $Ro = 10^{-1}$. Cela explique pourquoi la rotation terrestre influence, sur de grandes distances, le sens des mouvements cycloniques qui sont de sens opposé dans les hémisphères nord et sud. Ce n'est plus le cas pour une tornade où, avec une vitesse de 100 m.s^{-1} et une échelle de 1 km , on a $Ro = 10^3$ (ni pour un tourbillon de vidange de baignoire!).

De même, on peut évaluer le rapport entre les termes de viscosité et de force de Coriolis de l'équation de mouvement avec :

$$\nu \Delta \mathbf{v} \approx \frac{\nu U}{L^2} \quad \text{et} \quad 2(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}) \approx \Omega U.$$

Le rapport de ces deux termes, appelé *nombre d'Ekman*, vérifie :

$$\text{Nombre d'Ekman} = Ek = \frac{\nu}{\Omega L^2} \approx \frac{\text{force visqueuse}}{\text{force de Coriolis}}.$$

On verra intervenir le nombre d'Ekman dans l'étude des écoulements transitoires près du fond d'un récipient ou d'une paroi en rotation (sections 7.6.4 et 7.7.2).

Vorticité potentielle

Cette notion peut être comprise en observant le passage d'une ligne de vorticité au-dessus d'un obstacle bidimensionnel transverse à un écoulement imposé en l'absence de viscosité.

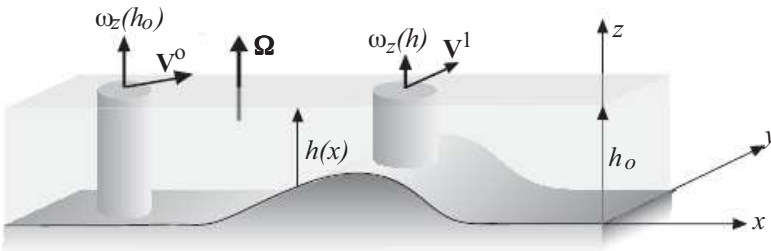


FIG. 7.31 – Passage d'une couche de fluide d'épaisseur $h(x)$ sur un obstacle de grande longueur suivant la direction Oy (l'ensemble est en rotation à une vitesse angulaire Ω). $\mathbf{V}^0$ est la vitesse initiale du fluide avant l'obstacle, $\mathbf{V}^1$ celle après l'obstacle : lors du passage sur celui-ci, la composante v_y subit une variation $v_y^1 - v_y^0$ négative qui représente une déviation anticyclonique de l'écoulement (dans l'hémisphère nord). La vorticité locale $\omega_z(h)$ diminue avec l'épaisseur h de la couche, comme l'indique la formule (7.90).

Ce problème se rencontre dans la déviation d'un vent dominant passant au-dessus d'une chaîne de montagne de grande longueur (direction Oy sur la

Fig. 7.31) et de hauteur assez constante suivant cette longueur. Il peut être rapproché de l'effet de variation de longueur des tubes de vorticité verticale de la Figure 7.14, mais, ici, c'est la vorticité absolue $\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}$ qui intervient et non plus celle, $\boldsymbol{\omega}$, du seul écoulement.

On suppose une couche mince de fluide perpendiculaire à l'axe de rotation $\boldsymbol{\Omega}$ dirigé suivant Oz , et s'écoulant initialement avec une vitesse $\mathbf{V}^o(v_x^o, v_y^o)$ uniforme et constante (Fig. 7.31). La couche de fluide passe sur un obstacle de longueur infinie dans la direction Oy et de hauteur $h_o - h(x)$ (h_o étant l'épaisseur initiale de la couche de fluide) ; sa surface supérieure reste cependant horizontale. Nous nous intéressons à la variation de la composante ω_z , de la vorticité. On conserve donc l'ensemble des termes contenant ω_z , (  l'exception des termes contenant la viscosité, négligés dans tout ce paragraphe). En revanche, on suppose que les composantes de vitesse horizontales sont uniformes dans l'épaisseur de la couche avec $\partial v_x / \partial z = \partial v_y / \partial z = 0$. En dérivant par rapport à Oz la condition d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{v} = 0$, on trouve $\partial^2 v_z / \partial z^2 = 0$. La dérivée est donc une constante avec :

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \quad (7.86)$$

puisque $v_z = 0$ pour $z = h_o$ et $v_z = -dh/dt$ pour $z = h_o - h$.

Compte tenu de ces approximations, on utilise l'équation de transport de la vorticité (7.83) sous la forme :

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = ((\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \quad (7.87)$$

d'où :

$$\frac{d\omega_z}{dt} = (\omega_z + 2\Omega) \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (7.88)$$

$d\omega_z/dt$ est une dérivée au sens lagrangien, qui représente la variation de vorticité dans un élément de fluide que l'on suit pendant son déplacement. Remarquons que, si la pente du fond de la couche fluide est très faible, avec $|\partial h / \partial x|$ et $|\partial h / \partial y| \ll 1$, la composante verticale v_z de la vitesse du fluide sera faible devant v_x et v_y . Par contre la dérivée $\partial v_z / \partial z$, qui fait intervenir un facteur multiplicatif $1/h$, est du même ordre de grandeur que les dérivées de v_x et v_y suivant x et y , ce qui explique le rôle important qu'elle joue dans le problème. En combinant les équations (7.86) et (7.88), on trouve :

$$\frac{1}{\omega_z + 2\Omega} \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \quad (7.89a)$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} \text{Log} \left(\frac{\omega_z + 2\Omega}{h} \right) = 0. \quad (7.89b)$$

Ainsi, on obtient finalement :

$$\frac{\omega_z + 2\Omega}{h} = \text{cte}. \quad (7.90)$$

La quantité ainsi conservée est appelée *vorticité potentielle*. L'équation (7.90) joue un rôle fondamental en géophysique : elle généralise l'équation de conservation du moment cinétique d'un élément matériel, exprimée par le théorème de Kelvin dans un repère sans rotation ($\Omega = 0$). Dans ce cas, l'équation (7.90) se réduit à la condition $\omega_z/h = \text{cte}$ que nous avons déjà discutée à la section 7.3.1 (h était alors noté δl).

Prenons un cylindre matériel de liquide de section initiale S_0 avant d'arriver sur l'obstacle ($h = h_0$). Quand il arrive dans une zone où l'épaisseur de la couche de liquide est h , sa section $S(h)$ varie en vérifiant $S(h)h = S_0h_0$ (conservation du volume de fluide supposé incompressible). La condition (7.90) devient donc :

$$(\omega_z(h_0) + 2\Omega)S_0 = (\omega_z(h) + 2\Omega)S(h). \quad (7.91)$$

D'après le théorème de Stokes, $\omega_z(h_0)S_0$ et $\omega_z(h)S(h)$ représentent la circulation de la vitesse autour du cylindre matériel avant et pendant le passage sur l'obstacle : l'équation (7.91) généralise donc le théorème de Kelvin et les deux termes supplémentaires en 2Ω correspondent à la rotation.

On peut utiliser également l'équation (7.90) pour déterminer la déviation de la vitesse horizontale de la couche de fluide due à son passage sur l'obstacle. Pour cela, calculons les composantes de la vitesse du fluide après ce passage. Compte tenu de la symétrie de l'obstacle, le champ de vitesse est indépendant de la coordonnée y , et $\partial v_x/\partial y = \partial v_y/\partial y = 0$. La composante ω_z de la vorticité se réduit à $\omega_z = \partial v_y/\partial x$; ω_z est initialement nulle dans la région où $h = h_0$. L'équation (7.90) peut donc être réécrite sous la forme :

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{2\Omega(h_0 - h)}{h_0} \quad (7.92)$$

d'où, par intégration sur x :

$$v_y^1 = v_y^0 - \frac{2\Omega}{h_0}A \quad (7.93)$$

où $A (> 0)$ est l'aire $\int (h_0 - h) dx$ de la section transversale de l'obstacle (Fig. 7.31). Par ailleurs, comme le débit de fluide à travers les plans $x = \text{cte}$ traversant l'obstacle est conservé, on doit avoir $v_x^1 = v_x^0$. Ainsi, dans l'hémisphère nord, le vent est dévié dans le sens des aiguilles d'une montre (anticyclonique). Cela ne sera observé en pratique que si la montagne est assez longue ; sinon, et surtout si $Ro \ll 1$, le vent l'évitera simplement comme dans les expériences discutées à la section 7.6.2.

7.6.2 Écoulements à petit nombre de Rossby

Écoulements géostrophiques

Reprenons l'équation (7.77) en supposant, comme nous l'avons discuté plus haut, que l'effet de la force centrifuge et des forces en volume se résume

à un simple gradient de pression hydrostatique, que nous soustrairons de la pression totale. Supposons que le nombre de Rossby Ro est $\ll 1$, ce qui permet de négliger le terme de transport convectif $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ (ainsi que les termes $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\boldsymbol{\omega}$ et $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ de l'équation de conservation de la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ qui doit aussi vérifier $\boldsymbol{\omega} \ll \boldsymbol{\Omega}$). Supposons enfin que les forces de viscosité sont négligeables à l'échelle des écoulements analysés (nombre d'Ekman $\ll 1$). Les équations (7.77) et (7.83) se réduisent à :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad} \frac{p}{\rho} - (2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}) \quad (7.94)$$

et :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}. \quad (7.95)$$

Supposons, de plus, l'écoulement quasi stationnaire, ce qui permet de négliger les termes $\partial \mathbf{v} / \partial t$ et $\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t$. Si τ est le temps caractéristique de variation de l'écoulement, cela équivaut à supposer que le produit $\Omega \tau$ est $\gg 1$. Un écoulement vérifiant toutes ces conditions est appelé *écoulement géostrophique*.

Supposons que l'axe de rotation est l'axe Oz , l'équation (7.94) devient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2\rho \Omega v_y, \quad (7.96a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\rho \Omega v_x \quad (7.96b)$$

et :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (7.96c)$$

En dérivant les deux premières équations par rapport à z , on déduit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0. \quad (7.97)$$

Sous les mêmes conditions, l'équation (7.95) se réduit à :

$$\Omega \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (7.98)$$

En combinant ce résultat avec la relation d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{v} = 0$, on obtient alors :

$$-\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (7.99)$$

On en déduit qu'un écoulement géostrophique a les trois caractéristiques suivantes :

– l'écoulement est la résultante d'un écoulement bidimensionnel $\mathbf{v}(x, y)$ et d'une translation parallèle à l'axe de rotation, avec une composante indépendante de la coordonnée z , parallèle à celui-là. Si les conditions aux limites

(parois, surface libre) imposent $v_z = 0$ en un des points des droites parallèles à l'axe de rotation (comme ce sera souvent le cas), on a $v_z = 0$ partout. Le mouvement est alors bidimensionnel avec, pour composantes de la vitesse : $v_x(x, y)$ et $v_y(x, y)$;

- l'écoulement est normal au gradient de pression : les lignes de courant coïncident donc avec les isobares. Le fait que l'écoulement soit normal au gradient de pression (et, par suite, à la force appliquée sur un élément de volume) rappelle la force de Magnus (force perpendiculaire à la vitesse relative d'un tourbillon et d'un écoulement ainsi qu'à sa vorticité). Ce résultat peut être appliqué à la lecture des cartes météorologiques, où apparaissent les courbes isobares : les tangentes à ces dernières représentent bien la direction du vent moyen dans la zone considérée, à une altitude suffisante pour que l'influence de la couche limite près du sol soit réduite ;

- si le fluide est incompressible, on a $\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0$. La section d'une courbe plane normale à Ω , qui suit le mouvement du fluide, reste donc constante : en particulier, d'après le théorème de Kelvin, la section des tubes de vorticité reste constante.

L'ensemble des égalités (7.97 à 7.99) représente le théorème de *Taylor-Proudman* dont nous allons voir une application spectaculaire.

Déplacement d'un solide perpendiculairement à Ω

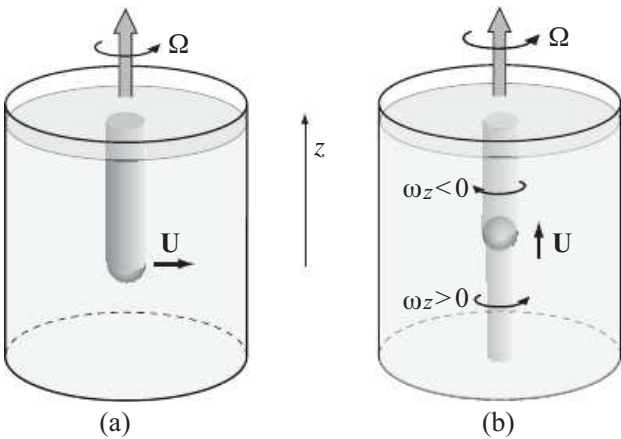


FIG. 7.32 – Mouvement d'un corps solide dans un fluide en rotation. (a) La vitesse de déplacement $\mathbf{U}$ est perpendiculaire à l'axe de rotation. Du colorant injecté dans la zone de fluide située juste au-dessus du solide se déplace avec celui-ci ; (b) variations de vorticité locale induites par le déplacement du solide parallèlement à l'axe de rotation dans un récipient tournant.

Supposons que le fluide ait une surface libre quasi horizontale et que l'on déplace un corps solide de dimensions finies (une sphère par exemple), à une vitesse $\mathbf{U}$ parallèle à la surface (Fig. 7.32a). Si la norme de la vitesse $\mathbf{U}$ est

assez faible et constante, les conditions d'application du théorème de *Taylor-Proudman* resteront vérifiées. En tout point de la surface extérieure du solide, la vitesse locale du fluide doit être égale à $\mathbf{U}$, à cause des conditions aux limites sur la surface du solide : la vitesse du fluide doit donc être égale à $\mathbf{U}$ en tout point du cylindre vertical de fluide qui s'appuie sur le contour extérieur du solide et qui monte jusqu'à la surface supérieure. Près du fond du récipient la condition aux limites $\partial \mathbf{v} / \partial z = 0$ ne peut pas être vérifiée et l'écoulement est plus complexe.

En première approximation, tout se passe donc comme si l'intérieur du cylindre de fluide supérieur était séparé de l'extérieur tout en se déplaçant avec une vitesse uniforme à l'intérieur du cylindre. À l'extérieur du cylindre, on a le même écoulement que si l'on avait un fluide parfait en rotation s'écoulant autour d'un cylindre solide vertical. Ce cylindre représente une *colonne de Taylor*. De fait, on observe expérimentalement (Fig. 7.32a) que du colorant injecté à l'intérieur du cylindre virtuel supérieur y reste très longtemps pendant l'écoulement ; en revanche, le colorant injecté à l'extérieur évite le cylindre.

Remarque. Dans de telles expériences, l'écoulement n'est qu'approximativement géostrophique. Les conditions d'application du théorème de Taylor-Proudman ne sont, par exemple, pas vérifiées à la limite entre l'intérieur et l'extérieur du cylindre virtuel ; on a donc, quand même, un peu d'échange de fluide entre l'intérieur et l'extérieur de la colonne.

Une démonstration visuelle de la bidimensionnalité des écoulements à $Ro \ll 1$

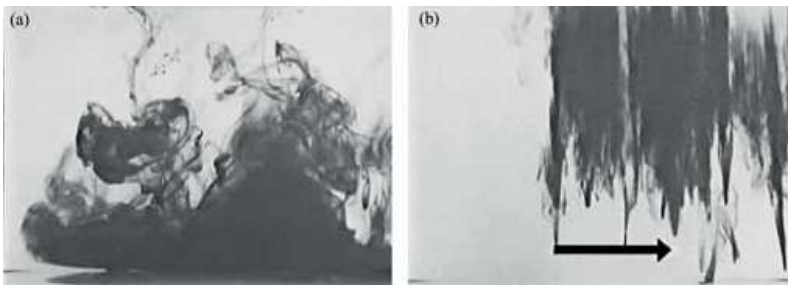


FIG. 7.33 – Injection d'eau colorée par le haut dans une cuve remplie d'eau : (a) immobile, (b) en rotation. La structure isotrope du mélange est remplacée par une structure filamentaire induite par la rotation (extrait de *Illustrated Fluid Mechanics*, NCFMF, MIT Press).

Injectons de l'eau colorée à la surface d'une cuve pleine d'eau claire que l'on peut faire tourner à une vitesse assez élevée pour atteindre des faibles nombres de Rossby. Si la cuve est immobile, la solution colorée se disperse puis s'étale sur le fond sans structuration apparente (Fig. 7.33a). Si on la fait

tourner rapidement, la solution se distribue en nappes verticales parallèles à l'axe de rotation, illustrant ainsi l'invariance de l'écoulement dans la direction de cet axe (Fig. 7.33b).

Note. On peut réaliser ce type d'expérience avec une platine de disques vinyles sur laquelle on fixe un récipient de verre cylindrique, bien centré, rempli d'eau. On peut alors réaliser une version simplifiée de l'expérience de la figure 7.32a en plaçant au fond du récipient un obstacle fixe à l'écart de l'axe de rotation (cylindre de faible hauteur par exemple) : en changeant légèrement la vitesse de rotation, on crée, par suite de l'inertie du liquide, un écoulement de ce dernier autour de l'obstacle. Comme dans la Figure 7.32a, cet écoulement se répercute jusqu'à la surface : du colorant injecté au-dessus de l'obstacle restera localisé dans cette colonne de Taylor où le fluide demeure immobile par rapport à l'obstacle.

Déplacement d'un solide parallèlement à l'axe de rotation

Prenons maintenant un solide montant verticalement avec une vitesse $\mathbf{U}$ dans un récipient du type de celui de la Figure 7.32b (la vitesse $\mathbf{U}$ est, cette fois, parallèle à $\boldsymbol{\Omega}$). Là encore, on n'a pas un écoulement purement géostrophique : on ne peut plus vérifier rigoureusement les conditions du théorème de Taylor-Proudman, puisque la composante verticale de la vitesse du fluide ne peut être constante et nulle sur toute ligne verticale s'appuyant sur le solide. On observe tout d'abord que la force exercée sur le solide et s'opposant au mouvement est nettement plus forte qu'en l'absence de rotation. On observe également que l'influence du mouvement vertical du solide se transmet à de grandes distances au-dessus et au-dessous du solide (il existe, toutefois, une zone de transition près des surfaces inférieure et supérieure du récipient) : s'il n'y avait pas rotation, la perturbation de vitesse due à la mise en mouvement du solide s'amortirait sur une distance de l'ordre de sa dimension. On observe, par ailleurs, que le déplacement du solide induit des rotations du fluide de sens contraire au-dessus et au-dessous de ce dernier : ces rotations peuvent être visualisées par des injections locales de colorant.

Pour évaluer quantitativement ces différents effets, prenons tout d'abord la divergence de l'équation (7.94). On obtient, en utilisant l'identité vectorielle :

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = -\mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} :$$

$$2\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{\Delta p}{\rho} \quad (7.100a)$$

ou :

$$2\Omega \omega_z = \frac{\Delta p}{\rho}. \quad (7.100b)$$

On peut combiner ce résultat avec la composante suivant Oz de l'équation de la vorticité (7.95) :

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = 2\Omega \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (7.101)$$

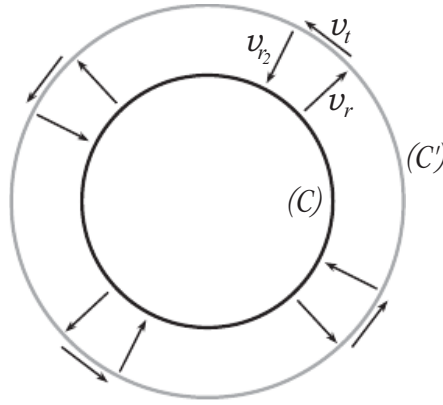


FIG. 7.34 – Une perturbation de vitesse v_r tendant initialement à augmenter l'aire d'une courbe matérielle circulaire (C) en (C') conduit, par l'effet des forces de Coriolis, à une fluctuation v_t puis v_{r2} qui ramène au rayon initial.

d'où :

$$4\rho\Omega^2\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta p). \quad (7.102)$$

Si l'on déplace le solide parallèlement à l'axe, les conditions de vitesse nulle à la surface libre et au fond du récipient imposent que $\partial v_z / \partial z$ soit non nul (<0 au-dessus du solide et >0 au-dessous pour $U > 0$). Il apparaît donc, d'après l'équation (7.101), une vorticité ω_z dont l'amplitude est initialement proportionnelle au temps et à Ω , et de signe contraire sur les parties supérieure et inférieure.

D'après l'équation (7.102), le laplacien Δp de la pression augmente lui aussi proportionnellement au temps et à Ω^2 , avec un signe contraire au-dessus et au-dessous du solide. Supposons le corps de révolution autour de la direction de l'axe de rotation, et $\partial p / \partial r = 0$ sur l'axe du corps (r étant la distance à l'axe); en utilisant le fait que l'on doit rejoindre la pression extérieure non perturbée à grande distance de l'axe, on trouve que, pour $U > 0$, on a une surpression proportionnelle à Ω^2 au-dessus du corps, et une dépression au-dessous. De plus, pour des petites amplitudes, cette surpression augmente linéairement avec le déplacement : si l'on relâche le corps après l'avoir déplacé rapidement suivant Ω , il revient légèrement en arrière et peut même effectuer quelques oscillations.

Tout se passe comme si le fluide en rotation possédait une certaine élasticité : cette dernière n'est pas associée à la compressibilité du fluide utilisé, mais seulement au caractère quasi bidimensionnel des écoulements (Éq. 7.99) imposé par la force de Coriolis. Supposons, par exemple, que, par un écoulement radial de vitesse v_r , on cherche à augmenter l'aire limitée par un cercle dans un plan normal à Ω (Fig. 7.34). La force de Coriolis associée à ce champ de vitesse induit une composante de vitesse tangentielle v_t ; celle-ci, à son

tour, crée une force de Coriolis, et une composante de vitesse radiale v_{r2} en sens inverse de la première qui tend à ramener la courbe à son aire initiale.

Remarque. Un phénomène lié à la discussion précédente est le comportement, en l'absence de gradient de pression, d'une particule de fluide à laquelle on impose une petite vitesse initiale $\delta \mathbf{v}$ dans un fluide initialement au repos dans le repère tournant. L'évolution de la vitesse vérifie la forme simplifiée de l'équation (7.94) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -2(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}). \quad (7.103)$$

Les composantes de vitesse sont donc de la forme :

$$v_x = A \cos(-2\Omega t + \varphi), \quad (7.104a)$$

$$v_y = A \sin(-2\Omega t + \varphi), \quad (7.104b)$$

$$v_z = \text{cte.} \quad (7.104c)$$

La particule ne se déplace pas en ligne droite comme en l'absence de rotation ; au contraire, elle décrit, dans le plan perpendiculaire à $\boldsymbol{\Omega}$, des cercles avec une vitesse angulaire -2Ω (deux fois la vitesse angulaire de rotation du pendule de Foucault) ; elle repasse donc périodiquement par son point de départ. 2Ω représente une sorte de fréquence propre du fluide en rotation, qui est effectivement observée en océanographie. Dans l'atmosphère, un tel mouvement peut se superposer à un écoulement géostrophique. On note l'analogie de ce mouvement avec celui d'une particule chargée de charge q et de masse m dans un champ magnétique $\mathbf{B}$: le mouvement de la particule chargée dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$ est également circulaire et sa fréquence angulaire est la fréquence de Larmor qB/m . L'analogue de la force de Coriolis $-2(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v})$ est, dans ce cas, la force de Laplace $q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$.

7.6.3 Ondes dans les fluides en rotation

Nous présentons ici plusieurs mécanismes de propagation d'ondes dans les fluides en rotation, tous associés à des déviations par rapport à des écoulements géostrophiques de base (ou apparaissant dans un fluide au repos). De telles ondes ne font pas intervenir la compressibilité du fluide, mais sont associées à l'effet de la force de Coriolis. En général, on part d'équations telles que (7.94) et (7.95), dans lesquelles les termes du deuxième ordre en $\mathbf{v}$ et $\boldsymbol{\omega}$, ainsi que l'influence de la viscosité, de la pesanteur et de la force centrifuge, sont négligés, mais qui incluent les termes de non-stationnarité. Le fait que ces équations de mouvement, utilisables à faible nombre de Rossby, soient linéaires permet une étude simple de ces ondes, qui jouent un rôle très important dans l'atmosphère et les océans.

Ondes inertielles

L'« élasticité » des fluides en rotation, déjà évoquée à la section 7.6.2 peut être suffisante pour permettre la propagation d'ondes dites *ondes inertielles*.

On peut exciter ces dernières en faisant osciller parallèlement à l'axe de rotation un objet solide (un cylindre dans la Figure 7.35a CC) avec une petite amplitude $z_o(t) = A \exp(i\sigma t)$. La pulsation σ doit être suffisamment élevée pour que les termes d'instationnarité $\partial \mathbf{v}/\partial t$ et $\partial \boldsymbol{\omega}/\partial t$ ne soient pas négligeables. Pour cela, le rapport σ/Ω de σ et de la vitesse de rotation Ω ne doit pas être très inférieur à 1 (sinon, nous verrons plus bas que l'on retrouve le cas des écoulements géostrophiques).

Expérimentalement, on constate que les mouvements du fluide induits par l'oscillation sont concentrés dans deux faisceaux plans de faible épaisseur se croisant sur le cylindre et faisant des angles égaux θ avec l'horizontale (Fig. 7.35 CC).

Note. Pendant une période $2\pi/\sigma$ d'oscillation, les particules de fluide suivent des trajectoires circulaires dans le plan des faisceaux : on voit sur la figure 7.35b CC que l'orientation de la vitesse du fluide à un instant donné est constante dans la direction parallèle à ce plan, mais varie dans la direction perpendiculaire. Comme cette orientation reflète la phase du mouvement sur les trajectoires circulaires, les plans parallèles à celui d'un faisceau correspondent à une phase constante : le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et la vitesse de phase $\mathbf{c}_\varphi$ leurs sont donc perpendiculaires. En revanche, la vitesse de groupe $\mathbf{c}_g$ doit être orientée dans la direction du faisceau puisqu'elle correspond à la propagation de l'énergie : elle est donc perpendiculaire à la vitesse de phase $\mathbf{c}_\varphi$, ce qui reflète une forme d'anisotropie inhabituelle pour une onde propagative.

Quantitativement, en supposant que l'onde est plane et que son vecteur d'onde $\mathbf{k}$, fait un angle θ avec le vecteur de rotation $\boldsymbol{\Omega}$, on trouve que la relation de dispersion reliant σ et le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ de l'onde est :

$$\sigma = 2\Omega \cos \theta. \quad (7.105)$$

La pulsation σ ne dépend pas du module du vecteur d'onde, mais seulement de son orientation. La fréquence des ondes inertielles a une valeur maximale 2Ω pour $\theta = 0$, qui est la fréquence propre de précession des particules de fluide déjà rencontrée à la section précédente ($\mathbf{k}$ est alors dirigé suivant l'axe de rotation).

Remarque. On avait bien trouvé dans ce cas des trajectoires circulaires des particules de fluide (Éq. 7.104) dont le plan était alors perpendiculaire à $\boldsymbol{\Omega}$.

Dans la limite $\sigma \rightarrow 0$ des faibles pulsations (quasi-stationnarité), on retrouve au contraire les écoulements géostrophiques ($\theta = \pi/2$, ce qui correspond à une phase de l'onde invariante suivant z en accord avec la bidimensionalité de ces écoulements).

Démonstration. Utilisons la composante suivant Oz de l'équation (7.94) en prenant en compte l'instationnarité :

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (7.106)$$

et combinons-la avec l'équation (7.102). On en déduit l'équation de propagation des fluctuations de pression :

$$4\Omega^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta p). \quad (7.107)$$

On obtient alors la relation (7.105) en supposant une variation de pression du type $p = p_0 e^{i(\sigma t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, qui correspond à une onde plane, et en reportant cette expression dans l'équation (7.107). ■

Note. La vitesse de phase $c_\varphi = \sigma/k$ de l'onde a une valeur $2\Omega \cos \theta/k$ non nulle et est dirigée suivant $\mathbf{k}$. Pour la vitesse de groupe $\mathbf{c}_g$, il faut utiliser une définition vectorielle : la composante $c_{g\parallel}$ suivant $\mathbf{k}$ donnée par l'expression habituelle $c_{g\parallel} = d\sigma/dk$ est bien nulle d'après l'équation (7.105). Pour la composante perpendiculaire qui est, elle, non nulle, on a $c_{g\perp} = (1/k) (d\sigma/d\theta) = -(2\Omega/k) \sin \theta$.

Ondes de Kelvin

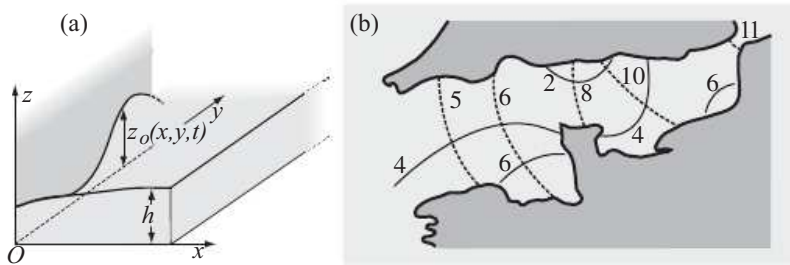


FIG. 7.36 – (a) Vue schématique de la propagation d'une onde de Kelvin le long d'une paroi verticale ($x = 0$) ; (b) propagation des marées dans la Manche au cours du temps en heures (ligne pointillée) et lignes d'égale amplitude des marées en mètres (lignes continues), montrant un net maximum près de la côte française (d'après J. Proudman (1953) et A.E. Gill (1982)).

Contrairement au cas précédent, il s'agit d'ondes de surface du même type que celles que nous avons étudiées dans la section 6.4, mais modifiées par l'influence de la force de Coriolis. Les gradients de pression hydrostatique créés par le passage de l'onde sont, en effet, en partie équilibrés par cette force. Nous examinons ici le cas où les ondes se propagent le long d'une paroi verticale ($x = 0$) et qui correspond à la situation d'une vague se déplaçant le long d'une côte : c'est seulement dans ce cas que l'on observe des ondes planes où la vitesse du fluide est partout parallèle à la direction de propagation.

Nous utilisons ici la géométrie de la Figure 7.36a en supposant que l'on est dans une situation d'ondes en eau peu profonde d'un fluide sans viscosité : la hauteur h du fluide au repos est supposée constante (fond horizontal) et faible devant les distances caractéristiques de variation du niveau de la surface dans les directions x et y .

Appelons $z_0(x, y, t)$ l'épaisseur instantanée de la couche fluide et supposons les ondes de faible amplitude ; on trouve alors que la composante v_y de

la vitesse du fluide, supposée indépendante de la coordonnée verticale z , peut s'écrire :

$$v_y(x, y, t) = v_{y1}(y + ct)e^{-x/R} + v_{y2}(y - ct)e^{x/R} \quad (7.108a)$$

avec :

$$R = \frac{\sqrt{gh}}{2\Omega} = \frac{c}{2\Omega} \quad (7.108b)$$

tandis qu'on montre plus loin que l'épaisseur z_0 peut alors être exprimée sous la forme :

$$z_0(x, y, t) = h - \sqrt{\frac{h}{g}}(v_{y1}(x, y + ct) - v_{y2}(x, y - ct)). \quad (7.108c)$$

Les composantes v_{y1} et v_{y2} varient exponentiellement avec x et avec des arguments opposés ; mais, dans la géométrie de la Figure 7.36a (avec $\Omega > 0$), seule la solution en $e^{-x/R}$ a un sens physique : en s'éloignant de la paroi, l'autre correspondrait, en effet, à une croissance exponentielle de la déformation. L'onde est donc piégée le long de la paroi verticale $x = 0$ et l'amplitude $z_0 - h$ décroît exponentiellement sur une distance R , appelée *rayon de déformation*. La valeur de R est d'autant plus faible que la vitesse de rotation est élevée : pour une profondeur de la mer de l'ordre de 100 m, on trouve, avec $\Omega = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, une valeur de R de l'ordre de 150 km. La longueur R intervient aussi dans d'autres problèmes géophysiques qui font intervenir des mouvements verticaux de fluides. Enfin, un seul sens de propagation de l'onde est possible (celui associé à l'exponentielle décroissante) et il change avec le sens de la rotation d'après l'équation (7.108b).

De telles ondes peuvent être associées aux marées ou à l'action de vents parallèles aux côtes. Pour deux côtes assez proches, ces ondes peuvent induire une forte différence de l'amplitude des marées, comme c'est le cas entre les côtes anglaise et française de la Manche (Fig. 7.36b). Une marée qui pénètre d'ouest en est peut, en effet, être considérée comme une onde de Kelvin qui s'appuie sur la côte française : celle-ci joue le rôle de la paroi $x = 0$ et les marées y sont par conséquent plus fortes. C'est le cas aussi bien pour la marée montante que pour la marée descendante, qui représentent des fronts de variation de niveau de sens opposé, mais se propageant toujours dans la même direction (le sens des courants étant, au contraire, inversé).

Démonstration. Les hypothèses de faible profondeur de la couche fluide et de faible amplitude de l'onde permettent d'écrire plus simplement l'équation de mouvement que dans le cas général du chapitre 6. En l'absence de viscosité, le gradient de pression dans les directions x et y est alors relié aux variations de niveau de la surface par :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial z_0}{\partial x} \quad (7.109a)$$

et :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial z_0}{\partial y} \quad (7.109b)$$

(en effet, la pression près de la surface est égale à la pression atmosphérique et le gradient vertical de pression est uniquement d'origine hydrostatique).

L'équation (7.94) devient donc :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - 2\Omega v_y = -g \frac{\partial z_0}{\partial x}, \quad (7.110a)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + 2\Omega v_x = -g \frac{\partial z_0}{\partial y}. \quad (7.110b)$$

Par ailleurs, la condition d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{v} = 0$ s'écrit, en évaluant $\partial v_z / \partial z$ comme nous l'avons fait pour établir l'équation (7.86) :

$$\frac{1}{h} \frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (7.111)$$

(on a remplacé z_0 par h dans le premier facteur du premier membre, en se limitant à une approximation du premier ordre). La composante v_x de la vitesse normale à la paroi doit s'annuler sur ce dernier ($x = 0$) : nous allons maintenant supposer dans la suite de cette section, que $v_x = 0$ dans tout le volume du fluide et vérifier qu'il est possible de résoudre les équations de mouvement sous cette hypothèse. Les équations (7.110) et (7.111) deviennent alors :

$$-2\Omega v_y = -g \frac{\partial z_0}{\partial x}, \quad (7.112a)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -g \frac{\partial z_0}{\partial y}, \quad (7.112b)$$

et

$$\frac{1}{h} \frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (7.112c)$$

On remarque que, d'après l'équation (7.112a), la pente de la surface dans la direction Ox est fonction aussi bien du sens de rotation que de la vitesse instantanée.

Éliminons z_0 entre les équations (7.112b-c) en les dérivant respectivement par rapport à t et y ; on obtient l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = g h \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = c^2 \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \quad (7.113)$$

où $c = \sqrt{gh}$ est la vitesse de propagation des ondes : elle est identique à celle des ondes de gravité en eau peu profonde en l'absence de rotation (Éq. 6.64) et elle est indépendante de Ω . Nous allons voir maintenant que Ω intervient pour déterminer la variation de z_0 avec la distance à la paroi verticale (comme l'indique d'ailleurs l'équation (7.112a)). Décomposons le champ de vitesse v_y et la hauteur z_0 en deux composantes de sens de propagation opposé avec :

$$v_y(x, y, t) = v_{y1}(x, y + ct) + v_{y2}(x, y - ct) \quad (7.114a)$$

et :

$$z_0(x, y, t) = \delta z_{o1}(x, y + ct) + \delta z_{o2}(x, y - ct) + h \quad (7.114b)$$

où $c = \sqrt{gh}$. En reportant ces deux expressions dans l'équation (7.112b) et en intégrant ensuite, on démontre la relation (7.108c). En combinant cette dernière relation avec les expressions (7.112a) et (7.114a), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} v_{y1}(x, y + ct) - \frac{\partial}{\partial x} v_{y2}(x, y - ct) = -\frac{2\Omega}{\sqrt{gh}}(v_{y1}(x, y + ct) + v_{y2}(x, y - ct)). \quad (7.115)$$

On en déduit alors par intégration par rapport à x que v_y peut être mise sous la forme de l'équation (7.108a). ■

Remarque. Des ondes analogues aux ondes de Kelvin peuvent se propager à cheval sur l'équateur – toujours d'ouest en est – sans que la présence d'une côte soit nécessaire. En effet, comme le sens de la composante locale de rotation de la Terre s'inverse au passage par l'équateur, il est possible de satisfaire les conditions aux limites des équations avec des composantes décroissant exponentiellement à la fois vers le nord et le sud, tout en se propageant dans la même direction. De telles ondes apparaissent – ainsi que les ondes de Rossby que nous allons décrire maintenant – au cours du phénomène « El Niño » qui perturbe considérablement les conditions météorologiques au large des côtes d'Amérique du Sud dans le Pacifique. Dans ce cas, il s'agit aussi bien d'ondes côtières, près du continent américain, que d'ondes équatoriales. De telles ondes ont pu être détectées par des observations de satellites (Topex-Poseïdon puis Jason 1 et 2) capables de détecter des variations centimétriques du niveau moyen de l'océan.

Ondes de Rossby dues aux variations de la vitesse locale de rotation de la Terre

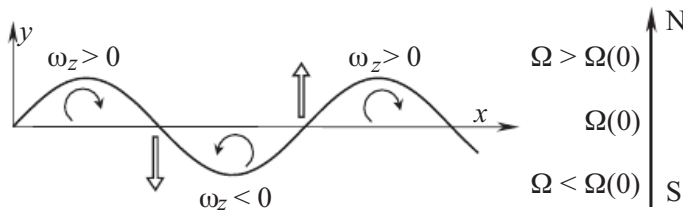


FIG. 7.37 – Vue schématique du principe de la propagation des ondes de Rossby, d'est en ouest (vers les x négatifs).

Le mécanisme de ces ondes est très différent et fondé sur la variation de la vitesse locale de rotation de la Terre avec la latitude. On les appelle également *ondes planétaires* parce que leur longueur d'onde est du même ordre que les échelles de taille caractéristiques de l'ensemble de la Terre. Elles se traduisent par des ondulations sinusoïdales se propageant dans la direction est-ouest dans les zones de moyennes latitudes. Les ondes de Rossby sont étroitement liées aux grandes circulations atmosphériques et à l'alternance de zones cycloniques et anticycloniques sur des distances de quelques milliers de kilomètres. Comme les ondes de Kelvin, elles jouent un rôle important dans les variations climatiques liées aux grands mouvements océaniques (comme, par exemple, le phénomène « El Niño »).

La composante locale Ω de la rotation terrestre (projection du vecteur rotation terrestre Ω_0 sur la normale locale à la surface terrestre) vérifie l'équation :

$$\Omega = \Omega_0 \sin \alpha \quad (7.116)$$

(α est la latitude) (Fig. 7.30). Dans des coordonnées locales x orientée vers l'est et y orientée vers le nord, le développement limité de la relation (7.116) autour d'une latitude de référence $y = 0$ donne :

$$\Omega(y) = \Omega(y=0) + \frac{\beta y}{2} \quad (7.117)$$

avec $\beta = 2\Omega_0 \cos \alpha / R$ (R est le rayon de la Terre). On parle en géophysique de *modèle de plan* β pour rendre compte de la variation avec la latitude de la valeur de Ω dans l'expression (7.90) de la vorticité potentielle. Dans ce qui suit, nous analyserons la propagation des ondes de Rossby avec et sans écoulement moyen de composante V_0 suivant Ox (Fig. 7.37). Nous supposons, de plus, que l'épaisseur h de la couche de fluide reste constante.

Remarque. En pratique, ce n'est pas souvent le cas, et il faudrait faire intervenir des variations de h et, par suite, de la vitesse des ondes de gravité. On peut également devoir tenir compte d'ondes internes déformant l'interface entre des masses fluides de densités différentes (dans l'océan par exemple). Nous négligeons ces effets dans le modèle développé ici, qui décrit bien l'essentiel du phénomène physique.

Supposons tout d'abord que $V_0 = 0$ et imposons un déplacement oscillant $\delta y(t, x=0) = A \exp(-i\sigma t)$ dans la direction y (nord-sud) des particules de fluide du plan $x = 0$. Supposons, de plus, que v_x reste nul et que la vorticité ω_z s'annule pour $\delta y = 0$. On cherche comment cette oscillation va se propager vers les autres régions du fluide ($x \neq 0$). D'après l'équation (7.90), la vorticité totale $\omega_z + 2\Omega$ des particules de fluide doit rester constante. La variation $\beta \delta y$ de 2Ω résultant de l'équation (7.117) doit donc être compensée par l'apparition d'une vorticité :

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\beta \delta y. \quad (7.118)$$

Le signe de cette vorticité dépend de la direction du déplacement. L'équation (7.118) indique que les oscillations vont se transmettre en dehors du plan $x = 0$, mais en variant avec la distance. Si l'on suppose (ce que nous discuterons plus loin) qu'on génère ainsi une onde plane $\delta y = A e^{i(kx - \sigma t)}$, l'équation (7.118) se réduit à $k\sigma = -\beta$ (en prenant $v_y = d(\delta y)/dt$). La vitesse de propagation est donc $c = \sigma/k = -\beta/k^2$: le signe négatif indique que l'on a propagation des ondes dans la direction $x < 0$. Ces *ondes libres de Rossby* observées sans écoulement imposé ($V_0 = 0$), sont des ondes transverses qui se déplacent donc *vers l'Ouest* ($x < 0$).

Abordons maintenant le cas plus général où l'on a un écoulement global V_0 et où l'on prend en compte les variations de vitesse suivant Oy en les supposant caractérisées par une composante de vecteur d'onde l . En continuant

de supposer constante l'épaisseur de la couche de fluide, on obtient (voir démonstration plus loin) la relation de dispersion plus générale :

$$c = \frac{\sigma}{k} = V_0 - \frac{\beta}{k^2 + l^2}. \quad (7.119)$$

En l'absence d'écoulement ($V_0 = 0$) et pour $l = 0$, on retrouve bien la relation $c = -\beta/k^2$ obtenue plus haut. La vitesse augmente avec la longueur d'onde et lorsqu'on se rapproche de l'équateur.

Aux latitudes intermédiaires, les vents d'ouest peuvent avoir une valeur assez élevée pour que l'on puisse avoir $c = 0$ dans l'équation (7.119). Dans de tels régimes stationnaires, l'onde de Rossby sera déclenchée, par exemple, par la déviation d'un vent d'ouest au-dessus d'une longue chaîne de montagne orientée nord-sud (Fig. 7.31). Les filets d'air se déplacent alors vers l'est avec une oscillation nord-sud de quelques centaines de kilomètres de longueur d'onde, mais la distribution du champ de vitesse reste invariante au cours du temps. En prenant $c = 0$ dans l'équation (7.119), on obtient alors :

$$k^2 = \frac{2 \Omega_0 \cos \alpha}{R V_0}. \quad (7.120)$$

En remplaçant $2 \Omega_0 \cos \alpha$ par 10^{-4} s, et en supposant V_0 de l'ordre de 10 m.s^{-1} , on trouve une longueur d'onde de l'ordre de 5 000 km ; c'est bien l'ordre de grandeur de celles observées.

Démonstration. Écrivons la relation (7.118) de conservation de la vorticité potentielle sous la forme :

$$\frac{d\omega_z}{dt} + \beta v_y = 0. \quad (7.121)$$

On suppose que le mouvement est la superposition d'un écoulement moyen de vitesse V_0 le long de la direction x et d'une perturbation $\mathbf{v}'$ variant sinusoïdalement suivant x et y , soit

$$v_x = V_0 + v'_{ox} e^{i(kx+ly-\sigma t)}, \quad v_y = v'_{oy} e^{i(kx+ly-\sigma t)}, \quad \omega = \omega_0 + \omega'_0 e^{i(kx+ly-\sigma t)}.$$

On peut exprimer la perturbation de vitesse à l'aide d'une fonction de courant Ψ (chapitre 6, section 6.5) telle que :

$$v'_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (7.122a)$$

$$v'_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (7.122b)$$

L'équation (7.121) devient alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \Psi + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \quad (7.123)$$

On recherche des solutions de la forme $\Psi = \Psi_0 e^{i(kx+ly-\sigma t)}$. Par substitution dans l'équation précédente, on trouve :

$$-(-\sigma + kV_0)(k^2 + l^2) + k\beta = 0. \quad (7.124)$$

On en déduit alors l'expression (7.119) de la vitesse de phase.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le modèle qui aboutit à cette équation n'est qu'approché car il ne tient pas compte des variations d'épaisseur de la couche de fluide et il ne s'applique pas non plus près de l'équateur, où l'approximation de Rossby n'est plus valable. Les vitesses de propagation des ondes sont plus élevées que celles qui sont ainsi prédites, en particulier près de l'équateur. ■

Ondes de Rossby dues aux variations d'épaisseur de couches de fluide

Le même phénomène peut résulter, non de l'effet β , mais d'une variation progressive de la profondeur h des océans à partir de la côte. La variation de la vorticité potentielle est induite dans ce cas par la variation de h (Éq. 7.90) : il en est ainsi au large du golfe du Mexique.

Reprenons l'approche précédente en supposant (Fig. 7.38) que l'épaisseur h de la couche de fluide est égale à h_0 sur l'axe $y = 0$ et qu'elle varie linéairement avec la distance avec $h(y) = h_0 - \gamma y$ ($\gamma \ll 1$). h est, en revanche, supposée indépendante de x . L'écoulement de base non perturbé est uniforme, de vitesse $\mathbf{V}_0$ parallèle à Ox . Supposons qu'on crée une petite perturbation en induisant une composante de vitesse v_y normale à l'écoulement moyen (on peut, par exemple, mettre un petit obstacle en $x = 0$, en travers de l'écoulement) : on s'intéresse ici à la distribution d'écoulement stationnaire induite par cette perturbation supposée constante. La vorticité initiale $\partial v_x / \partial y$ est supposée nulle.

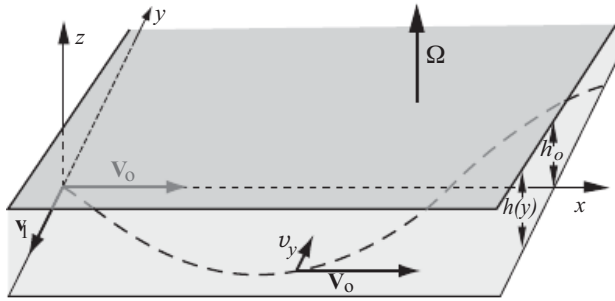


FIG. 7.38 – Schéma de l'écoulement d'une couche de fluide en rotation sur un fond d'épaisseur variable dans la direction perpendiculaire à l'écoulement moyen.

Suivons la trajectoire d'un élément de fluide parti du point $x = 0, y = 0$, à l'instant $t = 0$, avec une vitesse initiale $(\mathbf{V}_0, \mathbf{v}_1)$ où $\mathbf{v}_1$ est une petite perturbation. On applique à ce petit élément de fluide l'équation (7.90) entre l'instant initial et un instant quelconque, en supposant $\omega_z = 0$ pour $h = h_0$, sous la forme :

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \omega_z = 2\Omega \left(\frac{h}{h_0} - 1 \right) = -\frac{2\gamma\Omega y}{h_0}. \quad (7.125)$$

Si γ et Ω sont du même signe et si V_0 est > 0 , la composante v_y suivant Oy de la vitesse du petit élément de fluide diminue au fur et à mesure qu'il s'éloigne

du plan $y = 0$, en étant entraîné vers les $x > 0$ par l'écoulement moyen. La composante v_y finit par s'annuler et devient négative. L'élément de fluide traverse ensuite le plan $y = 0$ et oscille de part et d'autre de celui-ci, au fur et à mesure qu'il est entraîné. Si, par contre, γ et Ω sont de signes contraires (toujours avec $V_0 > 0$), l'élément de fluide prend une composante de vitesse de plus en plus grande au fur et à mesure qu'il s'éloigne du plan $y = 0$: on n'a donc pas apparition d'une oscillation de la trajectoire. Si V_0 est < 0 , les conditions sont inversées : pour que l'oscillation apparaisse, le produit $\Omega V_0 \gamma$ doit être > 0 .

Pour une oscillation sinusoïdale, on trouve que le vecteur d'onde k vaut :

$$k = \sqrt{\frac{2\gamma\Omega}{h_0 V_0}}. \quad (7.126)$$

Démonstration. Supposons que la composante suivant Oy de la vitesse de la particule de fluide varie sinusoïdalement le long de sa trajectoire avec :

$$v_y = v_1 e^{-i k x} \quad (7.127a)$$

où k est le vecteur d'onde de l'oscillation. On suppose aussi que la particule est à l'origine ($x = 0, y = 0$) pour $t = 0$ et que sa position suivant Ox vérifie $x = V_0 t$. La distance y de la particule par rapport au plan $y = 0$ doit alors être donnée par :

$$y = i \frac{v_1}{k V_0} e^{-i k x}; \quad (7.127b)$$

on déduit cette relation de l'équation (7.127a) en remplaçant, dans l'intégrale par rapport au temps, dt par dx/V_0 . En reportant les expressions (7.127a-b) dans l'équation (7.125), on obtient :

$$-i k v_1 e^{-i k x} = -\frac{2i \gamma \Omega}{h_0} \frac{v_1}{k V_0} e^{-i k x} \quad (7.128)$$

d'où découle immédiatement l'équation (7.126).

On retrouve donc bien le fait que l'on a une oscillation périodique de la coordonnée y dans la trajectoire de la particule seulement si $\Omega V_0 \gamma > 0$, ce qui donne une valeur de k réelle. Les équations (7.127 et 7.128) prédisent alors des trajectoires oscillantes stables et stationnaires par rapport au repère tournant.

Pour avoir des trajectoires stationnaires, V_0 doit être opposée à la vitesse de phase σ/k de l'onde (σ est la pulsation temporelle des oscillations d'une particule de fluide autour du plan $y = 0$ dans le référentiel (mobile) de celle-ci). On obtient alors :

$$\sigma = -2\gamma\Omega/(h_0 k). \quad (7.129)$$

■

Pour mettre en évidence ce phénomène en laboratoire et modéliser l'effet de la variation locale de la vitesse de rotation de la Terre, on fait tourner une couche mince de fluide dont l'épaisseur est plus faible près de l'axe de rotation que vers l'extérieur (avec, par exemple, un fond conique comme dans la Fig. 7.39a). Un obstacle placé en travers de la couche fluide peut alors servir

à induire une composante de vitesse transverse : on visualise les oscillations à l'aide de particules solides en suspension après avoir induit un mouvement relatif entre le fluide et le fond en faisant légèrement varier la vitesse de rotation (Fig. 7.39b).

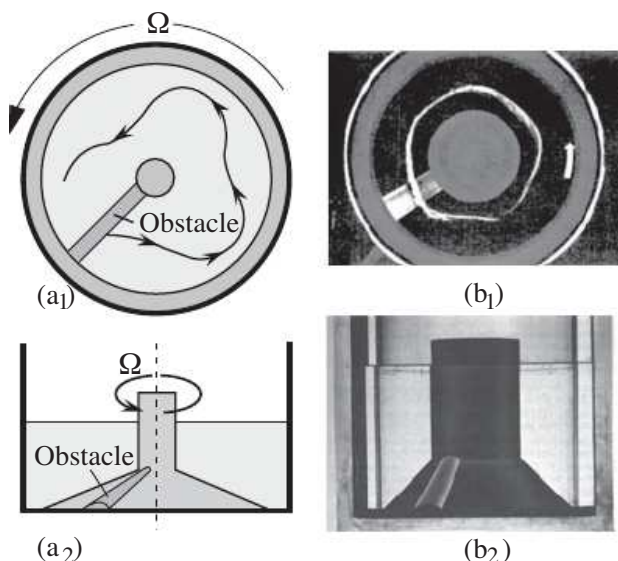


FIG. 7.39 – Mise en évidence expérimentale des ondes de Rossby dans une couche de fluide en rotation sur un fond d'épaisseur variable; (a) principe du dispositif (vues de dessus (a₁) et en coupe (a₂)); (b) observations expérimentales (vues de dessus (b₁) et de côté (b₂)) (Document: illustrated experiments of fluid mechanics, NCFMF, MIT Press).

Remarque. Dans tout ce paragraphe, nous avons considéré des oscillations de vitesse et de trajectoire spatialement périodiques dans la direction d'un écoulement moyen, mais stationnaires dans le temps. Comme pour le cas des variations de rotation locale, on peut créer des ondes de même nature sans écoulement moyen, par une excitation périodique de fréquence angulaire σ . On retrouve alors une relation identique, au signe près, à l'équation (7.129) reliant σ et k ; elle permet de déterminer les vitesses de phase c_φ et de groupe c_g de l'onde avec :

$$c_\varphi = \frac{\sigma}{k} = -\frac{h_0 \sigma^2}{2\Omega\gamma} \quad (7.130a)$$

et :

$$c_g = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{h_0 \sigma^2}{2\Omega\gamma}. \quad (7.130b)$$

Le cas que nous avons étudié plus haut correspond à la superposition d'une onde de ce type et d'un écoulement à vitesse $V_0 = -c_\varphi$, ce qui donne une configuration d'écoulement stationnaire alors que l'énergie reste transportée à la vitesse $c_g + V_0 = -c_\varphi + V_0 = 2V_0$.

7.6.4 Effet de la viscosité au voisinage de parois : couche d'Ekman

Dans les sections précédentes, nous avons négligé les effets de la viscosité. Nous étudierons maintenant la transition entre un écoulement influencé par la viscosité près des parois et un écoulement géostrophique perpendiculaire au gradient de pression loin de celles là. Cette transition s'effectue sur une couche d'épaisseur finie : *la couche d'Ekman*. Alors que les effets de la rotation de la Terre ne se font sentir qu'à grande échelle loin de parois (surface du sol ou de l'océan), les effets associés à cette couche sont importants à des échelles locales. Dans cette partie, nous utilisons l'équation (7.77) en supposant l'écoulement stationnaire ($\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$) et en négligeant les termes associés à la force de pesanteur et aux forces centrifuges :

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad} \frac{p}{\rho} - 2(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}) + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (7.131)$$

Effet d'une paroi perpendiculaire à l'axe de rotation

Appliquons l'équation (7.131) à l'écoulement stationnaire près d'une paroi solide coïncidant avec le plan $z = 0$ et perpendiculaire au vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega}$. L'écoulement est induit en appliquant un gradient de pression $\partial p / \partial y = \text{cte}$ à grande distance du plan ($\partial p / \partial x = 0$). On suppose que cet écoulement est parallèle au plan $z = 0$ et qu'il est uniforme et de composantes $v_x(z)$ et $v_y(z)$ dans un plan de cote z donnée. La composante suivant Oz de l'équation (7.131) est $\partial p / \partial z = 0$: le gradient de pression est donc indépendant de z et, par suite, constant et égal à $\partial p / \partial y$ dans tout le fluide. L'équation (7.131) devient donc :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - 2\Omega v_x = 0 \quad (7.132a)$$

et :

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + 2\Omega v_y = 0. \quad (7.132b)$$

Supposons que l'influence de la viscosité disparaisse loin du plan $z = 0$ et que l'on rejoigne la vitesse $\mathbf{V}_g$ de l'écoulement géostrophique donnée par les équations (7.96) ; on trouve alors que les composantes v_x et v_y de la vitesse du fluide vérifient :

$$v_x = V_g \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} z} \cos \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} z \right) \quad (7.133a)$$

et :

$$v_y = V_g e^{-\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} z} \sin \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} z. \quad (7.133b)$$

En s'éloignant de la paroi, on atteint exponentiellement la vitesse géostrophique sur une distance de l'ordre de $\sqrt{\nu / \Omega}$. Cette distance représente l'épaisseur δ_E de la couche d'Ekman ; pour l'eau, où $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, on trouve une

distance de l'ordre de 10 cm pour la valeur $\Omega = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Aux très faibles distances de la paroi, v_x et v_y tendent vers 0 et sont du même ordre de grandeur avec :

$$v_x \simeq v_y \simeq V_g \frac{z}{\delta_E}. \quad (7.134)$$

La vitesse locale du fluide fait donc alors un angle de 45° avec le gradient de pression.

Démonstration. D'après l'équation (7.96), la vitesse géostrophique $\mathbf{V}_g$ doit être dirigée suivant Ox (à angle droit avec le gradient de pression $\partial p / \partial y$) avec :

$$V_g = -\frac{1}{2\Omega\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (7.135)$$

Introduisons maintenant une vitesse complexe $w = v_x - i v_y$; on obtient :

$$2\Omega(w - V_g) - i\nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \quad (7.136)$$

On intègre alors cette expression sous la forme :

$$w - V_g = A e^{-(1-i)\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}z} \quad (7.137a)$$

soit

$$w = V_g(1 - e^{-(1-i)\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}z}) \quad (7.137b)$$

(on a gardé uniquement l'exponentielle qui tend vers 0 quand $z \rightarrow \infty$ et, pour déterminer A , on a utilisé la condition aux limites de vitesse nulle $w = 0$ pour $z = 0$). On en déduit alors les équations (7.133).

On remarque enfin que la vitesse géostrophique n'est pas la valeur maximale de la composante v_x : cette dernière atteint en effet une valeur de l'ordre de 1,1 fois V_g quand l'argument z/δ_E du cosinus devient de l'ordre de π (l'écoulement a cependant la même direction que $\mathbf{V}_g$). ■

La Figure 7.40 représente de manière paramétrique la variation des composantes v_x et v_y en fonction de l'angle z/δ_E , dont quelques valeurs sont

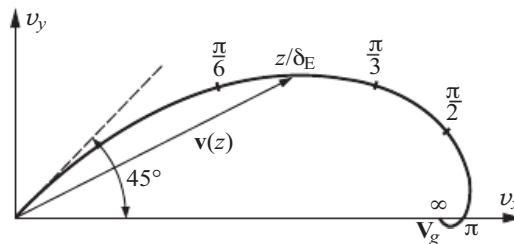


FIG. 7.40 – Représentation paramétrique des variations des composantes v_x et v_y de la vitesse du fluide en fonction de la distance z à la paroi solide horizontale. À grande distance ($z/\delta_E \rightarrow \infty$) la vitesse devient égale à la vitesse géostrophique $\mathbf{V}_g$ orientée suivant Ox .

indiquées (*spirale d'Ekman*). On obtient des résultats similaires pour les écoulements atmosphériques turbulents, mais les valeurs des angles à proximité des surfaces solides sont différentes. On observe effectivement que le vent souffle près du sol dans une direction légèrement différente de celle à une altitude plus élevée. Le sens de la déviation est opposé dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère sud.

Remarque. Lorsque $\Omega \rightarrow 0$, l'épaisseur de la couche d'Ekman tend vers l'infini. Dans ce cas, il arrive fréquemment que les termes non linéaires $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ de l'équation de mouvement deviennent plus importants que la force de Coriolis, particulièrement près de la surface, et qu'ils équilibrent les forces de viscosité. On retrouve alors le phénomène de couche limite classique, avec un écoulement parallèle au gradient de pression.

Mouvement induit par des contraintes superficielles

Une couche d'Ekman peut également se développer sous la surface des océans en réponse à une contrainte de friction $\boldsymbol{\tau}$ induite par des vents parallèles à cette surface et dirigée suivant Ox (Fig. 7.41). On suppose qu'à grande profondeur la vitesse devient constante et égale à une valeur $\mathbf{V}(V_x, V_y)$ indépendante de la présence de la contrainte de surface ($\mathbf{V}$ intervient uniquement comme une constante additive). Comme précédemment, les équations du mouvement se mettent sous la forme :

$$\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} - 2\Omega (v_x - V_x) = 0 \quad (7.138a)$$

et :

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + 2\Omega (v_y - V_y) = 0. \quad (7.138b)$$

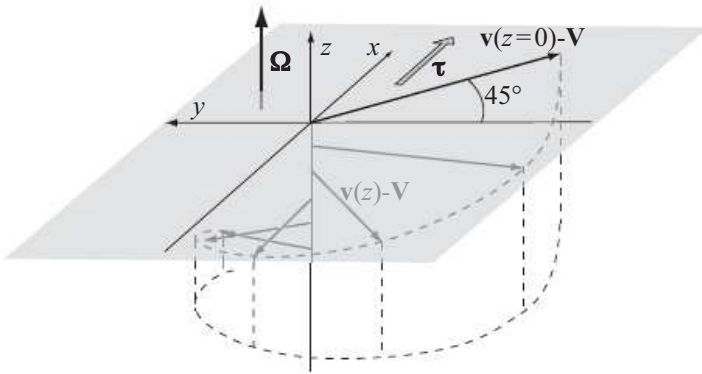


FIG. 7.41 – Structure d'une couche d'Ekman de surface (les flèches représentent la différence $\mathbf{v} - \mathbf{V}$). La figure correspond à l'hémisphère nord ($\Omega > 0$) et la déviation s'opère vers la droite de la contrainte de surface $\boldsymbol{\tau}$. La déviation est en sens inverse dans l'hémisphère sud.

On obtient alors les composantes de la vitesse :

$$v_x = V_x + \frac{\tau_x}{\rho_0 \sqrt{2\nu\Omega}} e^{z/\delta_E} \cos\left(\frac{z}{\delta_E} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (7.139a)$$

et :

$$v_y = V_y + \frac{\tau_x}{\rho_0 \sqrt{2\nu\Omega}} e^{z/\delta_E} \sin\left(\frac{z}{\delta_E} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (7.139b)$$

Ces équations sont très similaires aux équations (7.133). En particulier, on voit apparaître de nouveau l'épaisseur $\delta_E = \sqrt{\nu/\Omega}$ de la couche d'Ekman, qui représente ici l'épaisseur caractéristique de la couche de fluide sur laquelle l'écoulement induit par le vent (indépendant des courants existant en profondeur) sera observé. Son amplitude, inversement proportionnelle à δ , peut être très importante. À la surface ($z = 0$), la vitesse induite $\mathbf{v} - \mathbf{V}$ est orientée à 45° de la contrainte $\boldsymbol{\tau}$ et déviée vers la droite.

On retrouve encore une spirale d'Ekman pour la variation de la direction de l'écoulement avec la profondeur (Fig. 7.41). Pour obtenir le courant total induit par le vent, il suffit de prendre l'intégrale de la vitesse par rapport à z sur le demi-espace inférieur. On trouve :

$$Q_x = \int_{-\infty}^0 (v_x - V_x) dz = 0 \quad (7.140a)$$

et

$$Q_y = \int_{-\infty}^0 (v_y - V_y) dz = -\frac{\tau_x}{2\rho_0\Omega}. \quad (7.140b)$$

L'écoulement moyen induit est donc orthogonal à la direction du vent, et il est orienté à droite de celui-ci dans l'hémisphère nord (Fig. 7.41).

Démonstration. Si la contrainte $\boldsymbol{\tau}$ à la surface de l'océan ($z = 0$) est parallèle à Ox ($\tau_x, 0$), on obtient, en supposant l'écoulement laminaire, les conditions aux limites :

$$\rho_0 \nu \frac{\partial v_x}{\partial z} = \tau_x \quad (7.141a)$$

et :

$$\rho_0 \nu \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0. \quad (7.141b)$$

En introduisant, comme précédemment, les vitesses complexes $w = v_x - i v_y$ et $W = V_x - i V_y$, en résolvant les équations et en appliquant les conditions (7.141), on obtient :

$$w = W + A e^{(1-i)\sqrt{\Omega/\nu} z} \quad (7.142)$$

et :

$$A = \frac{\tau_x(1+i)}{2\rho_0\sqrt{\nu\Omega}} = \frac{\tau_x e^{i\pi/4}}{\rho_0\sqrt{2\nu\Omega}}. \quad (7.143)$$

Seule la solution avec une exponentielle décroissante quand $z \rightarrow -\infty$ doit en effet être conservée. On en déduit alors les expressions (7.139a-b). ■

Note. Le nombre d'Ekman est associé à la thèse de 1903 du suédois V. Ekman qui a rendu compte de la dérive du navire de l'explorateur arctique F. Nansen. Ce dernier avait observé, quelques années plus tôt, que son navire, pris dans les glaces polaires, déviait d'une vingtaine de degrés à droite de la direction du vent.

7.7 Vorticité, rotation et écoulements secondaires

Les *écoulements secondaires* sont des écoulements qui se superposent à l'écoulement principal et se substituent éventuellement à lui ; ils ont souvent une plus petite vitesse et une orientation différente de ce dernier. Une brève discussion sur ces écoulements a sa place dans ce chapitre ; nombre d'entre eux sont, en effet, associés à la rotation des fluides, aux effets de force centrifuges créés par une courbure des lignes de courant, ou encore aux couches de vorticité résultant de l'effet de viscosité à proximité d'une paroi. La dynamique de la vorticité et du moment cinétique joue d'ailleurs un rôle essentiel dans ces phénomènes. Décrivons maintenant quelques exemples d'écoulements secondaires et des mécanismes qui peuvent les induire.

7.7.1 Écoulements secondaires dus à la courbure de canalisations ou de canaux à surface libre

Dans les sections des canalisations courbes (Fig. 7.42), il apparaît deux cellules de recirculation (*cellules de recirculation de Dean*), symétriques par rapport au plan de courbure de la conduite : l'écoulement est dirigé à l'opposé du centre de courbure dans le plan de symétrie et vers ce dernier près des parois. Dans un canal courbe à surface libre (le méandre d'une rivière par exemple), il apparaît également une cellule de recirculation, où l'écoulement est dans la direction opposée au centre de courbure à la surface, et vers ce dernier au fond (Fig. 7.43). On admet que ce mécanisme explique, au moins en

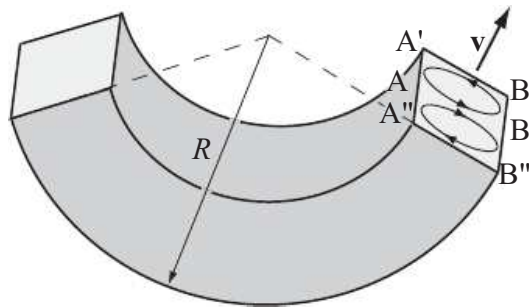


FIG. 7.42 – Écoulement secondaire de type cellules de Dean dans un tube courbe à section carrée.

partie, la forte dissymétrie souvent observée entre les pentes des deux rives des méandres d'une rivière ; dans la section de la rivière, l'écoulement secondaire est, en effet, de sens tel qu'il érode la berge externe et dépose des sédiments sur l'autre berge à l'intérieur de la courbure. La vitesse de ces écoulements secondaires augmente dans les deux cas avec la courbure et avec la vitesse de l'écoulement principal, mais ils sont toujours présents, même à très faible vitesse.

Remarque. Ces écoulements cellulaires secondaires apparaissent quelle que soit la géométrie de la section de l'écoulement, qu'il soit à surface libre ou non : on les observe ainsi également dans des tubes à section circulaire. D'autre part, il ne faut pas confondre ces écoulements avec les instabilités de Dean dont le mécanisme sera discuté à la section 11.3.3 et qui, elles, n'apparaissent qu'au-dessus d'une vitesse seuil et se forment le long de la paroi externe concave.

Nous allons maintenant analyser ces phénomènes de deux manières différentes : d'abord en termes de gradients de pression, puis en termes de vorticité. Nous avons vu, à la section 7.1, qu'il est possible de passer d'une description à l'autre, et qu'il s'agit en fait de deux points de vue différents du même phénomène.

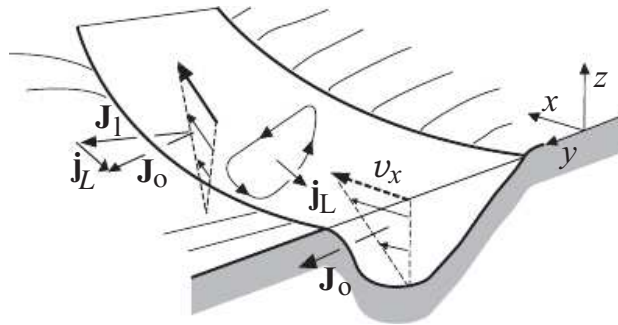


FIG. 7.43 – Schéma des distributions de vitesse et de vorticité dans le méandre. Le moment cinétique $\mathbf{j}_L$ dû à cette circulation s'ajoute à celui associé au gradient de vitesse $\partial v_x / \partial z$, de façon à conserver le moment cinétique total : $\mathbf{J}_1 + \mathbf{j}_L = \mathbf{J}_0$.

La courbure des lignes de courant d'un écoulement fait apparaître un gradient de pression radial dans la direction opposée au centre de courbure (Eq. 5.53). Ce gradient est du même type que celui associé à la force centrifuge dans l'équation (7.77) ; il équilibre la force centrifuge lorsque l'on est loin des parois, par exemple le long du segment AB sur la figure 7.42 ou près de la surface du canal sur la figure 7.43. Près des parois (par exemple au niveau des segments A'B' et A''B'' dans la figure 7.42), on retrouve par continuité ce même gradient de pression radial (en supposant l'écoulement localement parallèle) : en revanche, il n'est plus équilibré par la force centrifuge car la vitesse est faible et le terme en v^2/R de l'équation (5.53) petit. Ce gradient radial crée alors un écoulement local vers le centre de courbure : il est équilibré par les forces de viscosité associées à cet écoulement. Pour assurer la

conservation de la masse, ce nouvel écoulement doit être compensé par un autre en sens opposé au centre de la conduite (ou à la surface du canal) ; on retrouve bien la direction de circulation observée.

Remarque.

– Nous verrons à la section 7.7.2 un exemple où un écoulement secondaire associé à la force centrifuge induit, à son tour, un autre écoulement secondaire vertical.

– La couche d'Ekman, discutée à la section 7.6.4 peut être considérée également comme un exemple d'écoulement secondaire. En effet, loin de la paroi, l'écoulement principal géostrophique observé correspond à un équilibre entre le gradient de pression et la force de Coriolis (cette dernière remplace la force centrifuge de l'exemple des méandres). Près de la paroi, on retrouve le même gradient de pression en raison du parallélisme de l'écoulement ; mais il est, cette fois-ci, équilibré par une contrainte visqueuse : cette dernière induit un écoulement secondaire d'orientation parallèle au gradient de pression et différente de l'écoulement géostrophique principal. La spirale d'Ekman représente une zone de transition entre les écoulements principal et secondaire. Nous discuterons plus en détail ce type d'écoulement secondaire à la section 7.7.3.

La description du même phénomène basée sur la vorticité utilise la rotation due à la courbure des couches de vorticité situées près des parois solides.

Reprenons l'écoulement de profondeur h dans un canal de largeur supposée grande devant h (Fig. 7.43), qui représente une rivière de faible profondeur ; dans cette configuration, on a une composante de vorticité ω_y transverse à l'écoulement moyen, (supposé initialement dirigé suivant Ox). ω_y est associée au gradient de vitesse $\partial v_x / \partial z$ entre le fond de la rivière, où la vitesse est nulle, et la surface, où elle est maximale. La vorticité $\boldsymbol{\omega}$ représente une rotation locale du fluide et, par conséquent, un moment cinétique $\mathbf{J}$. La courbure du méandre tend à faire tourner la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ (et donc $\mathbf{J}$) (qui restent toujours perpendiculaires à l'écoulement) d'un angle égal à celui du fluide entre des valeurs $\mathbf{J}_0$ et $\mathbf{J}_1$ avant et après la courbure. Si l'on suppose que l'on a conservation du moment cinétique, la différence de moment cinétique $\mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_1 = \mathbf{j}_L$, qui est parallèle à l'écoulement moyen, correspond à l'apparition d'une composante de vorticité longitudinale $\omega_x \propto j_L$. Elle correspond à un écoulement secondaire de rotation dans la section de l'écoulement principal. On peut appliquer le même raisonnement pour la conduite courbe de la Figure 7.42.

Remarque. L'apparition de cette composante ω_x est associée au terme $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ de l'équation (7.41) de variation de la vorticité (ce terme sert d'ailleurs, comme nous l'avons vu, à assurer la conservation du moment cinétique). En effet, de même que nous avons supposé l'épaisseur de la couche de fluide faible devant sa dimension transverse, nous supposons également que la composante ω_z de la vorticité est négligeable : nous rencontrerons en effet à la section 9.7.3 un exemple similaire d'écoulement dans des cellules de très faible épaisseur formées de plaques parallèles (cellules de Hele-Shaw), où l'on montrera que l'écoulement moyen parallèle aux plaques est alors potentiel et, donc, de vorticité nulle. Il doit donc y avoir égalité des dérivées $\partial v_x / \partial y$ et $\partial v_y / \partial x$. La composante suivant Ox de $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$, $\omega_y \partial v_x / \partial y$, est

donc de l'ordre de $\omega_y \partial v_y / \partial x \approx \omega_y v_x / R$, où R est le rayon de courbure du méandre, $(\partial v_y / \partial x)$ est en effet de l'ordre de $v_x \partial \theta / \partial x \simeq v_x / R$ tant que l'angle de déviation θ de la trajectoire par rapport à Ox est encore faible. On a donc bien apparition d'une composante longitudinale ω_x de la vorticité, qui varie avec le temps comme $d\omega_x / dt = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})v_x = \omega_y v_x / R \approx v_x^2 / (Rh)$, si h est l'épaisseur de la couche de fluide (*i.e.* la profondeur de la rivière, en prenant $\omega_y \simeq \partial v_x / \partial z \approx v_x / h$.)

7.7.2 Écoulements secondaires dans des mouvements transitoires

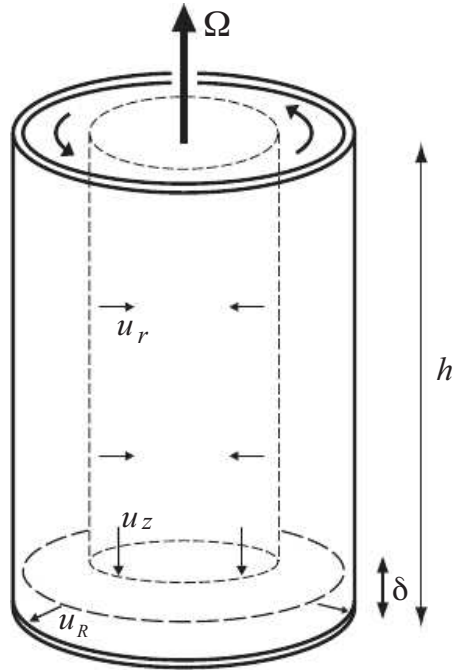


FIG. 7.44 – Principe de l'effet de spin-up.

Mettons en rotation du thé contenu dans une tasse, dans lequel subsistent quelques feuilles utilisées comme marqueurs. Le liquide s'arrête de tourner au bout d'une vingtaine de secondes et l'on observe que les feuilles de thé à l'arrêt sont rassemblées au centre de la tasse. Cela est paradoxal à deux titres ! Si le ralentissement était dû simplement à la diffusion de quantité de mouvement par la viscosité, l'ordre de grandeur du temps d'arrêt attendu serait de 10 à 100 fois plus long ($R^2/\nu = 1\,600$ s, où $R = 4$ cm est le rayon de la tasse, et $\nu = 10^{-6}$ m².s⁻¹ pour l'eau). Par ailleurs, on pourrait penser que la force centrifuge, qui agit sur les feuilles plus denses que le liquide, repousserait ces dernières à la périphérie. Nous allons montrer, en étudiant le cas proche, mais mieux contrôlé, du *spin-up* (ou mise en rotation) que ce sont des écoulements secondaires induits près du fond qui déplacent les feuilles vers l'intérieur, tout

en assurant des transferts de quantité de mouvement qui aident à ralentir plus rapidement le fluide que par simple diffusion (Fig. 7.44).

On étudie l'évolution du mouvement d'un liquide à l'intérieur d'un récipient cylindrique (avec deux parois inférieure et supérieure solides) mis en rotation à une vitesse Ω autour d'un axe vertical à partir d'un temps initial. Si le cylindre est infiniment long, nous avons vu, au chapitre 2, que la mise en rotation uniforme de l'ensemble du liquide à partir du repos peut être traitée formellement comme le problème de la mise en température uniforme d'un cylindre par diffusion thermique radiale (section 1.2.1). En fait, cette diffusion de quantité de mouvement ne joue un rôle dominant que pendant les tous premiers instants de la rotation, tant que le liquide proche du fond du récipient (ou de sa paroi supérieure) n'a pas encore été mis en rotation sur une forte épaisseur.

Après cette mise en rotation, le gradient de pression radial reste, par continuité, à peu près le même dans les couches mises en rotation et dans le reste du fluide (en effet, comme les composantes de vitesses les plus importantes sont celles dans le plan perpendiculaire à l'axe, le gradient de pression parallèle à l'axe se réduit à la pression hydrostatique et il est constant dans la section). Dans la partie centrale du cylindre, où le fluide reste au repos, le gradient de pression radial $\partial p / \partial r$ est négligeable et il le sera donc également près des faces supérieure et inférieure. Ainsi, ce terme $\partial p / \partial r$ ne peut pas compenser, dans l'équation (7.77), le terme de force centrifuge $1/2 \partial(\Omega^2 r^2) / \partial r = \Omega^2 r$, qui induit un écoulement radial local vers l'extérieur. La masse de fluide, qui quitte cette région proche de l'axe et du fond (ou du haut) du récipient, doit donc être remplacée par du fluide venant des régions centrales. Dans ces régions, il en résulte un écoulement dirigé vers l'axe et vers la paroi horizontale la plus proche. Ces mouvements convectifs du liquide se substituent au phénomène de diffusion de la viscosité et conduisent beaucoup plus rapidement que cette dernière à une uniformisation de la quantité de mouvement du liquide et à sa rotation.

En éclairant le cylindre transversalement par un plan laser après avoir injecté un peu de colorant, on voit la frontière verticale, entre le liquide extérieur en rotation et le fluide intérieur fixe, se déplacer à vitesse relativement constante vers l'intérieur du cylindre et non plus de façon diffusive.

Évaluation de l'effet. Au lieu d'une variation de la vitesse de 0 à Ω , considérons une petite variation soudaine de vitesse angulaire de Ω à $\Omega (1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$ (une petite variation se prête mieux à des évaluations d'ordre de grandeur des effets à l'aide de développements au premier ordre). L'augmentation de la vitesse angulaire au niveau de la surface inférieure est de l'ordre de $\Omega \varepsilon$. Le temps caractéristique τ_D de diffusion visqueuse sur la distance R est de l'ordre de R^2 / ν : il représenterait le temps nécessaire pour que la variation de vitesse angulaire de rotation se propage dans tout le volume fluide, si aucun mécanisme d'écoulement secondaire n'agissait. Une seconde constante de temps naturelle $t_0 = 1/\Omega$ est l'inverse de la fréquence de rotation du cylindre. Le rapport t_0 / τ_D de ces deux temps caractéristiques est le

nombre d'Ekman $Ek = \nu/(R^2\Omega)$, que nous avons défini à la section 7.6.1 et qui est ici très inférieur à l'unité.

Initialement donc, seul le fluide situé près des parois supérieure et inférieure du cylindre est entraîné à la nouvelle vitesse de rotation par l'effet de la viscosité. L'épaisseur de la couche concernée peut être prise égale à $\delta_\nu \approx \sqrt{\nu t_0}$, qui représente la distance caractéristique de diffusion visqueuse pendant le temps t_0 et est égale à l'épaisseur de la couche d'Ekman discutée à la section 7.6.4. Comme dans ce dernier cas, les composantes radiales et orthoradiales de la vitesse du fluide peuvent être du même ordre de grandeur que nous prendrons égal à : $u_R \approx \varepsilon \Omega R$ (seule la déviation de la vitesse par rapport à l'écoulement initial à la vitesse angulaire Ω – supposé établi – intervient). Cet écoulement radial est lui aussi localisé dans des couches d'épaisseur δ près des parois supérieure et inférieure ; il est dirigé vers l'extérieur et doit être compensé par des écoulements verticaux vers la partie centrale du cylindre, eux-mêmes compensés par des écoulements radiaux de vitesse u_r dirigée cette fois vers l'axe et distribuées sur la presque totalité de la hauteur globale H du cylindre en partant d'une distance de l'axe $r < R$. L'égalité des débits de ces deux écoulements radiaux s'écrit donc en estimant celui dans la couche d'Ekman pour un cylindre de rayon de l'ordre de R :

$$2\pi r H u_r \cong 2\pi \delta_\nu R u_R \cong 2\pi \varepsilon \delta_\nu R^2 \Omega. \quad (7.144)$$

Nous allons maintenant chercher à déterminer le temps caractéristique τ_r nécessaire pour atteindre un nouvel écoulement stationnaire. Évaluons tout d'abord la variation final δr de la distance à l'axe des particules de fluide situées dans la région centrale qui aura été induite par la variation de vitesse : on en déduira alors τ_r qui doit être de l'ordre de $\delta r/u_r$. Dans la partie centrale, la viscosité n'intervient pas, et on doit donc conserver le moment cinétique des particules de fluide lors du déplacement δr . Si on considère un anneau de masse M situé à une distance r de l'axe, la variation doit être telle que :

$$M r^2 \Omega = M (r - \delta r)^2 \Omega (1 + \varepsilon) \quad (7.145a)$$

d'où on déduit en conservant que les termes du premier ordre en δr et ε :

$$\delta r = \varepsilon r / 2. \quad (7.145b)$$

On déduit alors des équations (7.144) et (7.145b) le temps caractéristique d'établissement de la nouvelle configuration de l'écoulement :

$$\tau_r \cong \frac{\delta r}{u_r} \cong \frac{\varepsilon r}{2} \frac{H r}{\Omega R^2 \varepsilon \delta_\nu} \cong \frac{r^2}{R^2} \frac{H}{R \Omega} \sqrt{\frac{R^2 \Omega}{\nu}} \cong \frac{r^2}{R^2} \frac{H}{R} t_0 \sqrt{Ek^{-1}}. \quad (7.146a)$$

Si le cylindre n'est pas trop allongé, les deux coefficients géométriques r^2/R^2 et H/R sont de l'ordre de grandeur de l'unité et l'on a donc

$$\tau_r \approx t_0 \sqrt{Ek^{-1}}. \quad (7.146b)$$

Le temps τ_r est donc indépendant de ε et très supérieur à t_0 puisque Ek est petit devant 1, mais reste cependant, très inférieur au temps caractéristique τ_D de diffusion visqueuse qui est de l'ordre de $t_0 Ek^{-1}$. L'apparition des écoulements secondaires permet donc bien d'atteindre beaucoup plus rapidement l'état de rotation stationnaire.

7.7.3 Écoulements secondaires associés à des effets de couches d'Ekman

Des exemples de tels écoulements en océanographie sont la remontée (*upwelling*) et la descente (*downwelling*) de masses d'eau observées près de certaines côtes et dans les régions équatoriales. Dans les deux cas, ces écoulements sont induits par les déviations locales de l'écoulement dans la couche d'Ekman induites par un vent dominant au-dessus de la mer (section 7.6.4).

Upwelling et downwelling côtiers

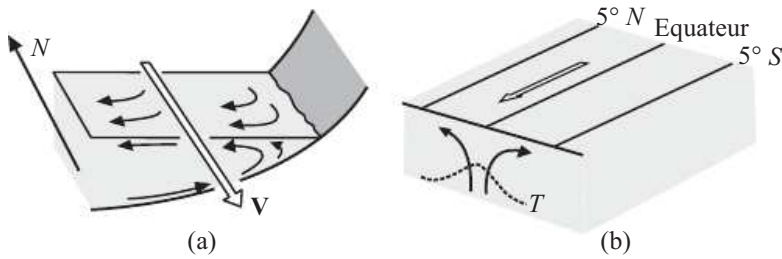


FIG. 7.45 – (a) Effet d'upwelling associé à un vent près d'une côte ; (b) configuration des vents de surface et des composantes verticales et transverses de l'écoulement induit dans l'océan près de l'équateur. Ces courants en profondeur induisent également une déformation de la couche thermocline (tirets).

Les écoulements secondaires en relation avec la rotation de la Terre sont particulièrement importants au voisinage des côtes. Ainsi, dans l'hémisphère nord (Fig. 7.45a), un vent venant du nord et parallèle à une côte donne naissance, sous l'effet de la force de Coriolis, à une composante perpendiculaire d'écoulement fluide qui s'éloigne de la côte. Ce courant est compensé par une montée locale d'eaux froides poissonneuses (*upwelling*) le long des côtes. Le phénomène inverse (*downwelling*) est observé si le sens du vent change, ou la composante de la rotation locale terrestre, ou encore l'orientation de la côte.

Upwelling équatorial

Une autre forme d'*upwelling* se produit le long de l'équateur, où les vents alizés sont dirigés vers l'ouest (Fig. 7.45b). De part et d'autre de l'équateur, les contraintes induites par ces vents créent des écoulements en sens opposé (à cause du changement de signe de la composante de la rotation terrestre) qui éloignent les masses d'eau de l'équateur. Ces courants sont, là aussi, compensés par des remontées d'eau froide, localisées cette fois le long de l'équateur. Il en résulte une remontée de la thermocline (zone de fort gradient de température marquant en profondeur une limite entre des masses d'eau de températures différentes). Des déformations significatives (plusieurs dizaines de centimètres) de la surface de la mer peuvent également apparaître.

Annexe A-3 : Un fluide presque parfait : l'hélium superfluide

A-3.1 Généralités

À une température de transition $T_\lambda = 2,172 \text{ K}$ (à la pression de vapeur saturante égale à 37 mm de mercure), l'hélium liquide constitué de l'isotope de masse 4 (le plus répandu) subit une transition de phase du deuxième ordre et passe dans l'état superfluide. Sa viscosité devient alors nulle, ce qui fait de l'hélium à basse température un modèle de fluide parfait.

Comme les atomes d'hélium 4 sont des bosons (le noyau a un nombre pair de nucléons), on a rapproché cette transition d'une condensation de *Bose-Einstein* où une fraction finie des atomes est dans un même état quantique. Nous verrons que cette fraction fluide peut être représentée par une fonction d'onde quantique macroscopique. Cette représentation suppose que l'on a un gaz parfait et n'est que très approchée car les interactions entre atomes d'hélium sont importantes (comme dans un liquide).

L'isotope 3 de l'hélium subit des transitions similaires, mais à des températures bien plus faibles de l'ordre de 10^{-3} K . Dans ce dernier cas, les atomes sont des fermions : on a alors, comme pour les paires d'électrons des supraconducteurs, affaire à des condensations de paires de fermions en interaction (ces dernières étant des bosons).

De vraies condensations de Bose ont été observées lorsque les fonctions d'onde de Broglie d'un grand nombre (10^6) d'atomes (Rb, Na) groupés en paquet se recouvrent. Les propriétés hydrodynamiques des *condensats de Bose-Einstein* présentent des analogies avec celle de l'hélium superfluide.

A-3.2 Modèle à deux fluides de l'hélium superfluide

Les mesures expérimentales indiquent que, à température finie (plus faible que T_λ), on peut considérer qu'il y a coexistence entre deux fluides : un superfluide sans viscosité et un fluide normal visqueux qui peut interagir avec les parois (il correspond aux excitations thermiques – rotons et phonons – du fluide). On peut définir, pour chaque phase fluide, une vitesse ($\mathbf{v}_s$ et $\mathbf{v}_n$) et une densité partielle (ρ_s et ρ_n) telles que $\rho_s + \rho_n = \rho$ (densité de l'hélium liquide) et $\rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n = \rho \mathbf{v}$, où $\mathbf{v}$ est la vitesse globale du liquide. Suivant les expériences réalisées, on observe les propriétés de l'un ou l'autre fluide :

- lorsqu'une pile de disques plans distants de quelques millimètres oscille dans un bain d'hélium, ils entraînent seulement le fluide normal : on peut ainsi mesurer la densité relative de ce dernier, qui varie de la densité totale ρ à T_λ à presque 0 pour $T < 0,8 \text{ K}$ lorsque les excitations thermiques sont négligeables ;

– en revanche, seul le superfluide peut passer sans difficulté par des filtres poreux très fins (ouverture de 1 à 10^3 nm), à travers lesquels le débit de fluide normal sera, en revanche, presque nul.

A-3.3 Mise en évidence expérimentale de l'existence d'une composante superfluide s'écoulant sans aucune dissipation d'énergie

A-3.3.1 Films d'hélium superfluide

Au-dessus d'une surface liquide, un film très mince (10 nm) de molécules retenues à la paroi par les forces de Van der Waals apparaît sur les parois d'un récipient. Dans le cas d'un fluide normal, les forces visqueuses sont trop fortes et empêchent tout écoulement. En revanche, dans l'hélium superfluide, le film, appelé *film de Rollin*, peut s'écouler avec un débit suffisant pour que le récipient se vide dans un autre placé au-dessous.

A-3.3.2 Écoulement à travers des trous de petite dimension

On peut observer des écoulements d'hélium superfluide dans des petits orifices sous une différence de pression nulle (donc sans dissipation) jusqu'à une vitesse critique ; celle-ci est souvent d'autant plus grande que l'ouverture est faible (typiquement 10 μm ou moins) et peut atteindre plusieurs mètres par seconde à basse température.

A-3.3.3 Courants permanents

Dans des tores de matériau poreux, on peut lancer des courants permanents de fluide, d'une durée infinie, analogues à ceux observés dans les supraconducteurs.

Mise en évidence expérimentale. Elle a été effectuée soit en mesurant le moment cinétique associé par une expérience basée sur l'effet gyroscopique, soit en mesurant l'effet Doppler du son qui se propage dans un matériau poreux en forme d'anneau où le courant est établi. Ce *quatrième son* est une onde sonore, où seule la composante superfluide du liquide oscille ; les mouvements de la composante normale sont bloqués par les forces de viscosité, très importantes dans les petits pores du milieu. Le quatrième son se propage le long de l'anneau à une vitesse différente dans le sens de la vitesse V_s du courant permanent et en sens inverse : la mesure de la vitesse du son dans ces deux directions permet donc de déterminer V_s . La décroissance de V_s suit une loi logarithmique avec le temps (comme le courant électrique dans les bobinages supraconducteurs). Ainsi, après une phase initiale de variation plus rapide, on observe seulement une décroissance de quelques pourcents sur plusieurs

jours, ce qui suggère la persistance d'un courant sur des durées comparables à celle de l'Univers ... à condition de maintenir l'hélium à l'état superfluide!

A-3.4 L'hélium superfluide : un fluide quantique

A-3.4.1 Phase macroscopique du superfluide

On considère que la fraction superfluide définie à partir du modèle à deux fluides peut être décrite par une fonction d'onde macroscopique $\sqrt{\rho_s} e^{i\varphi(r)}$ commune à tous les atomes. La fonction $\varphi(x, y, z, t)$ s'interprète comme la phase de cette *fonction d'onde macroscopique*. En l'absence d'écoulement superfluide, il existe un ordre à grande distance caractérisé par le fait que la phase est la même en tout point (comme la direction de l'aimantation pour un système magnétique). La vitesse superfluide $\mathbf{v}_s$ dérive du potentiel $\varphi(x, y, z, t)$, comme dans un courant quantique ordinaire, par :

$$\mathbf{v}_s = \frac{h}{2\pi m} \mathbf{grad} \varphi \quad (\text{A-3.1})$$

(où h est la constante de Planck et m la masse de l'atome d'hélium).

A-3.4.2 Quantification de la circulation et filaments de tourbillons

La phase $\varphi(x, y, z, t)$ définie plus haut est définie à un multiple entier de 2π près. Supposons que le volume fluide contienne un solide ayant une dimension infinie ou une ligne singulière : la circulation de $\mathbf{grad} \varphi$ autour du solide ou de la ligne n'est alors pas nécessairement nulle (section 6.2.2) et elle est égale à $2n\pi$ où n est entier. La circulation Γ de la vitesse superfluide $\mathbf{v}_s$ le long d'une courbe fermée ($\mathcal{C}$) vérifie donc :

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{C}} \frac{h}{2\pi m} \mathbf{grad} \varphi \cdot d\mathbf{l} = \frac{nh}{m}. \quad (\text{A-3.2})$$

La circulation de la vitesse superfluide est donc quantifiée et multiple de la circulation élémentaire $h/m = 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (où h est la constante de Planck et m la masse de l'atome d'hélium).

Le cas $n = 0$ correspond à un écoulement potentiel dans un volume d'hélium simplement connexe et en l'absence de singularité de la fonction d'onde. La valeur $n \neq 0$ se rencontre lorsque le volume d'hélium n'est pas simplement connecté (par exemple, si un cylindre solide continu autour duquel on a rotation du superfluide est présent) ou contient des lignes singulières de vorticité. Ce dernier cas est représenté en pratique par des filaments de tourbillons, pour lesquels $n = 1$ et le rayon ξ du cœur est de l'ordre d'une taille atomique $\xi \cong 0,2 \text{ nm}$; la notion de vortex filamentaire présentée à la section 7.1.2 du présent chapitre est donc une excellente représentation de ces objets.

L'énergie cinétique des tourbillons croît comme n^2 , alors que la circulation associée croît seulement comme n : il est donc plus favorable énergétiquement d'avoir $n = 1$ pour tous les tourbillons.

A-3.4.3 Équivalent de l'effet Aharonov-Bohm pour l'hélium superfluide

La validité de l'équation (A-3.1) a pu être vérifiée par plusieurs expériences. Plus généralement, la nature quantique de l'hélium permet d'envisager l'observation de phénomènes connus dans d'autres systèmes.

Prenons l'exemple de *l'effet Aharonov-Bohm* : ce dernier correspond à l'interférence quantique entre deux parties d'un faisceau de particules chargées circulant de part et d'autre d'un champ magnétique localisé, dans un solénoïde par exemple (Fig. 7.4c). L'équivalent hydrodynamique dans *l'analogie de Maxwell* est un courant circulant autour d'un tourbillon (Fig. 7.4b).

La différence de phase entre les deux parties de l'onde électronique correspond à la circulation du potentiel vecteur autour du solénoïde. Comme nous l'avons vu à la section 7.1.3, ce potentiel n'est pas nul dans la région à l'extérieur du solénoïde (à la différence du champ magnétique) et influence directement les particules chargées. Dans l'hélium superfluide, c'est directement la vitesse qui est l'équivalente du potentiel vecteur.

Une représentation analogique de ce dernier effet est la propagation d'une onde plane à la surface d'un fluide dans lequel on a créé un tourbillon perpendiculaire à cette surface. L'onde plane subit un déphasage inégal sur les deux côtés du tourbillon, ce qui se traduit par un décalage inégal des extrema de la hauteur locale.

A-3.5 Expériences avec les tourbillons superfluides

A-3.5.1 Mise en rotation d'un volume d'hélium superfluide

Les tourbillons quantifiés apparaissent, par exemple, dans un récipient rempli d'hélium superfluide mis en rotation. Si on conservait $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ dans tout le volume fluide, l'hélium devrait rester stationnaire. Or, on constate que, au-dessus d'une très faible vitesse critique, il se met à tourner en moyenne comme un fluide ordinaire et que la surface prend la forme parabolique correspondante. Le champ de vitesse moyen correspondant est créé par un ensemble de lignes, de direction moyenne parallèle à l'axe de rotation (Fig. A-3.1a) : la densité n_s de lignes par unité de surface est uniforme et elle est telle que $n_s h/m$ corresponde à la vorticité de l'écoulement global. Il a été possible de

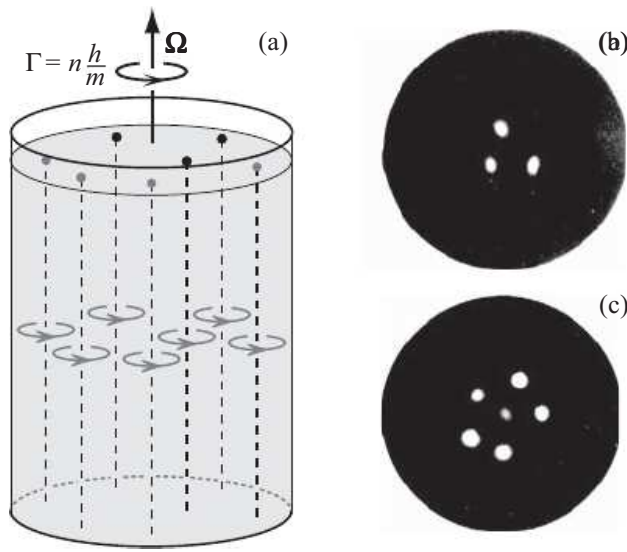


FIG. A-3.1 – (a) Schéma de la distribution des filaments de tourbillons dans un récipient cylindrique en rotation rempli d'hélium superfluide. (b), (c) Vue de dessus de tourbillons superfluides dans un récipient cylindrique en rotation à des vitesses angulaires Ω_a et $\Omega_b > \Omega_a$ (des charges électriques sont piégées dans les cœurs de tourbillons puis focalisées sur un écran fluorescent pour l'observation) (clichés R. Packard et G. Williams).

visualiser expérimentalement les positions de cœurs de tels tourbillons dans des récipients cylindriques de diamètre millimétrique (Figs. A-3.1b-c).

Analogie avec les supraconducteurs. Si une plaque de certains types de supraconducteurs (dits de seconde espèce) est perpendiculaire à un champ magnétique $\mathbf{B}$, la pénétration de ce dernier se fait dans des tubes de champ magnétique très localisés : autour de ceux-la, on a des courants dus aux porteurs de charges supraconducteurs qui maintiennent alors un champ magnétique nul en dehors de ces tubes (on parle de *vortex supraconducteurs*). On a alors une parfaite correspondance entre les deux systèmes dans le cadre de l'analogie de Maxwell (section 7.1.3) puisque le champ magnétique $\mathbf{B}$ correspond à la vorticité ω . Comme la circulation autour des tourbillons, le flux de $\mathbf{B}$ dans ces *vortex* est quantifié : le quantum de flux vaut $h/2e$. Des réseaux de tourbillons, similaires à ceux que nous venons de décrire, ont également été observés récemment dans les condensats de Bose en rotation.

A-3.5.2 Mise en évidence expérimentale de la quantification de la circulation dans l'hélium superfluide

Dans cette expérience, un récipient contenant de l'hélium superfluide est mis en rotation. Un fil magnétique est tendu au centre de ce récipient : des bobines d'excitation lui imposent des vibrations transverses à sa fréquence de résonance mécanique ω_0 (Fig. A-3.2a). Pour une vitesse de rotation suffisante,

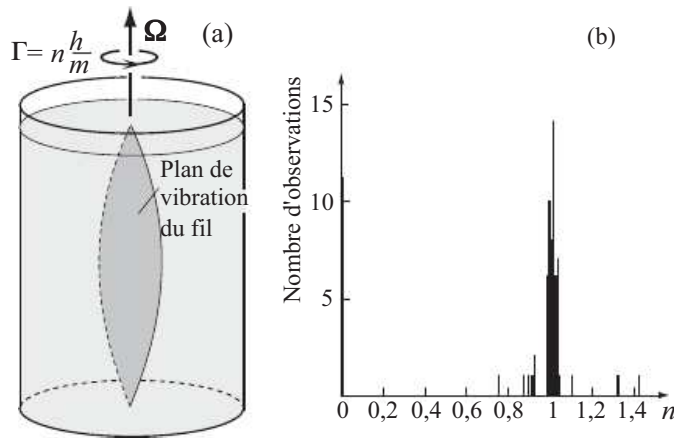


FIG. A-3.2 – (a) Schéma de l'expérience de H.E. Hall et W.F. Vinen mettant en évidence la quantification de la circulation de la vitesse dans un récipient d'hélium superfluide en rotation. (b) Distribution des valeurs de la circulation (normalisées par h/m) trouvées expérimentalement.

une ligne de tourbillon apparaît et se piège sur le fil : il apparaît sur ce dernier une circulation Γ qui doit être égale à h/m . Cette circulation induit une force de Magnus perpendiculaire au plan de vibration. Ce dernier précesse à une fréquence angulaire Ω directement liée à Γ . La fréquence de résonance du fil est alors dédoublée et devient $\omega_0 \pm \Omega$. Cet effet Doppler peut se comprendre si on se rappelle qu'un mouvement de vibration rectiligne peut se décomposer en deux mouvements circulaires de sens opposés. Les valeurs expérimentales sont bien généralement de l'ordre de h/m , comme le montre la Figure A-3.2b.

A-3.5.3 Dynamique des anneaux tourbillons dans l'hélium superfluide

La dynamique des anneaux tourbillons peut être, elle aussi, étudiée en y piégeant des particules chargées et en imposant un champ électrique uniforme ; ce dernier communique une énergie cinétique bien définie à chaque anneau (et augmente son rayon). Le rayon des anneaux peut même être mesuré directement en faisant passer les anneaux à travers des microgrilles calibrées.

Ainsi, on a pu vérifier directement, à mieux de quelques pour-cent près, que la vitesse d'un anneau tourbillon variait proportionnellement à l'inverse de son énergie, comme les équations (7.69) et (7.71) le prédisent. On retrouve bien $\Gamma = h/m$, et on obtient la valeur $\xi \cong 0,18$ nm du rayon du cœur du tourbillon.

Ces expériences doivent être réalisées à faible température ($T \leq 0,5$ K) pour éviter la perte d'énergie associée à l'interaction entre le cœur des tourbillons et les excitations thermiques.

Chapitre 8

Écoulements quasi parallèles – Approximation de lubrification

Un nombre élevé d'écoulements très importants pratiquement (enduisage de revêtements ou peintures, écoulements de lubrifiants entre des pièces ajustées, jets liquides...) ont des lignes de courant presque parallèles. Nous discuterons d'abord (section 8.1) l'approximation dite de lubrification qui permet de calculer théoriquement ces écoulements et nous donnerons plusieurs exemples d'applications à des écoulements entre deux surfaces solides. Nous appliquerons ensuite la même approche (section 8.2) aux films fluides présentant une surface libre : nous traiterons, en particulier, des problèmes de mouillage, d'angle de contact dynamique et d'étalement de couches liquides ou de gouttes. Un cas particulièrement intéressant est celui des effets Marangoni où les écoulements sont induits par des variations spatiales de la tension superficielle sur l'interface. Enfin, nous discuterons le problème voisin de la chute d'un jet visqueux et des instabilités de Rayleigh-Plateau qui peuvent apparaître et qui résultent de la tension superficielle (section 8.3).

8.1 Approximation de lubrification

8.1.1 Écoulements quasi parallèles

Nous avons étudié, dans le chapitre 4, les écoulements unidirectionnels pour lesquels une seule composante de la vitesse est non nulle. Dans ce cas, le terme non linéaire $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ de l'équation de Navier-Stokes est identiquement nul parce que le gradient de la vitesse $\mathbf{v}$ est normal à cette dernière. On aboutit alors à une équation de mouvement linéaire du fluide (Éq. 4.59) et ce quelle que soit la vitesse moyenne de l'écoulement (tant que des instabilités ne se développent pas).

Dans ce chapitre, nous allons étudier des écoulements pour lesquels les lignes de courant sont presque parallèles comme, par exemple, les écoulements

entre des parois solides qui font un angle faible ou dans un film liquide mince. On peut alors également négliger les termes non linéaires, mais seulement si certaines conditions sont vérifiées par la vitesse : on parle alors *d'approximation de lubrification*.

Dans une étape suivante, nous nous intéresserons, dans le chapitre 9, à des écoulements de géométrie quelconque : dans ce cas, la condition de vitesse pour pouvoir négliger les termes non linéaires est encore plus sévère ($Re \ll 1$).

Les écoulements quasi parallèles se rencontrent dans de nombreuses applications, telles que l'étalement d'un film fluide ou la lubrification de machines tournantes. On pourra ainsi calculer la dynamique de l'étalement du film dans le premier cas, les forces entre les surfaces en mouvement dans le second, en faisant l'hypothèse que les écoulements sont presque parallèles aux surfaces de ces films.

8.1.2 Hypothèses de l'approximation de lubrification

Nous supposons que les distances caractéristiques de variation des paramètres d'écoulement parallèlement aux parois sont beaucoup plus grandes que la distance entre ces dernières, comme c'est le cas sur la figure 8.1 (on doit avoir, en particulier, un angle $\theta \ll 1$ en tout point entre les parois). Dans la suite, nous nous plaçons dans une configuration bidimensionnelle, où seules interviennent les directions x et y , mais les résultats sont aisément généralisables à un cas tridimensionnel.

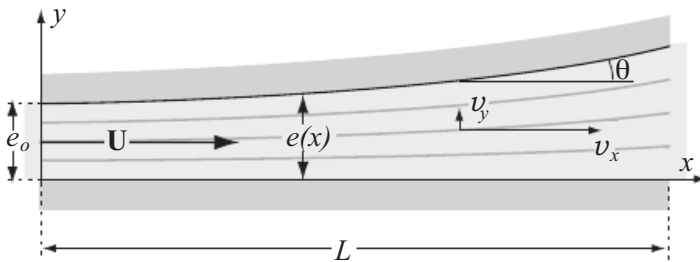


FIG. 8.1 – Vue schématique de la géométrie d'un écoulement de lubrification.

Cherchons ce que deviennent les différents termes de l'équation de Navier-Stokes (4.30) pour un écoulement bidimensionnel dans le plan (x, y) . Comme indiqué précédemment (section 4.2.2), l'écoulement n'est pas induit seulement par le gradient de pression, mais par le gradient de la combinaison $(p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r})$, où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur pour le point considéré. Pour simplifier l'écriture, nous admettrons que $\mathbf{grad} p$ représente en fait $\mathbf{grad}(p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r})$; les composantes de l'équation (4.30) deviennent alors :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})v_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (8.1a)$$

et :

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right). \quad (8.1b)$$

À cette équation, il faut ajouter la condition de conservation de la masse pour un fluide incompressible, soit $\text{div } \mathbf{v} = 0$:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (8.2)$$

Nous considérons d'abord un écoulement stationnaire, ce qui permet de négliger les termes en $\partial/\partial t$, et nous faisons un raisonnement axé sur l'évaluation approchée des ordres de grandeur des différents termes. Dans le cas d'un écoulement *laminaire* stable et lent, on observe expérimentalement que la trajectoire des particules de fluide suit le profil des parois, comme dans la figure 8.1. Donc, dans le centre de l'écoulement, on peut considérer que l'angle du vecteur vitesse avec la paroi $y = 0$ est de l'ordre de l'angle θ ($\ll 1$) entre les deux parois. D'où :

$$v_y \approx v_x \theta \approx U \theta \quad (8.3)$$

où U est la vitesse caractéristique de l'écoulement (la vitesse moyenne, par exemple, ou encore la vitesse maximale au centre du canal, les deux pouvant être considérées comme d'un même ordre de grandeur dans le raisonnement approximatif que nous effectuons). Compte tenu de l'existence d'un profil de vitesse de type Poiseuille entre les parois, on peut considérer que la distance type sur laquelle s'effectuent les variations de vitesse dans la direction y est l'épaisseur locale $e(x)$ qu'on supposera de l'ordre de grandeur d'une valeur moyenne e_0 (cela revient à dire que la variation relative de l'épaisseur n'est pas trop grande sur la longueur L). On obtient donc :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{U}{e_0} \quad (8.4a)$$

et :

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \approx \frac{U \theta}{e_0}. \quad (8.4b)$$

D'où, en utilisant l'équation (8.2) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \approx \frac{U \theta}{e_0} \quad (8.5)$$

(les ordres de grandeur sont donnés en valeur absolue). En ce qui concerne les dérivées secondes, on peut alors, en utilisant ces résultats, estimer de la même manière, que :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} \approx \frac{U \theta}{e_0^2} \quad (8.6a)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \frac{U}{e_0^2} \quad (8.6b)$$

et :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \approx \frac{U\theta}{e_0^2}. \quad (8.6c)$$

On peut également donner une borne supérieure des termes $\partial^2 v_x / \partial x^2$ et $\partial^2 v_y / \partial x \partial y$ (opposés en raison de la condition d'incompressibilité) en prenant $\partial / \partial x \approx 1/L$ avec, par conséquent :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \approx \frac{U\theta}{e_0 L} \quad (8.7a)$$

et, de même :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \approx \frac{U\theta}{L^2}. \quad (8.7b)$$

Ces termes sont donc très petits devant les dérivées secondes par rapport à y , que nous retenons seules dans les termes de viscosité des équations (8.1a–b).

Évaluons maintenant les conditions pour que le terme non linéaire de la composante de l'équation de mouvement suivant l'écoulement moyen reste négligeable devant le terme de viscosité. En utilisant les résultats précédents, on obtient :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \approx v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{U^2 \theta}{e_0}, \quad (8.8a)$$

et :

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \frac{\nu U}{e_0^2}. \quad (8.8b)$$

Les termes non linéaires sont donc négligeables si :

$$\frac{U^2 \theta}{e_0} \ll \nu \frac{U}{e_0^2} \quad (8.9a)$$

soit :

$$\text{Re} = \frac{U e_0}{\nu} \ll \frac{1}{\theta}. \quad (8.9b)$$

Pour des écoulements de géométrie quelconque, la condition sur le nombre de Reynolds, pour pouvoir négliger les termes non linéaires, est $\text{Re} \ll 1$. La condition (8.9b) est alors bien moins sévère car, dans les géométries de lubrification, l'angle θ est très petit devant l'unité. On peut donc continuer à utiliser une équation linéaire, même pour des écoulements correspondant à un nombre de Reynolds nettement supérieur à l'unité. Dans le cas limite d'un écoulement parallèle, le terme non linéaire est nul, cette fois-ci quel que soit le nombre de Reynolds.

Calculons la composante $\partial p/\partial y$ du gradient de pression dans la direction perpendiculaire à l'écoulement moyen à partir de l'équation (8.1b). On estime comme précédemment que :

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \approx \frac{U^2 \theta}{L}, \quad (8.10a)$$

$$v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \approx \frac{U^2 \theta^2}{e_0}, \quad (8.10b)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \approx \nu \frac{U \theta}{e_0^2}. \quad (8.10c)$$

Le terme visqueux donné par l'équation (8.10c) est donc d'un ordre de grandeur en θ inférieur à celui de l'équation (8.8c). Si $Re \ll 1/\theta$ et que e_0/L est assez petit, les termes non linéaires (8.10a-b) seront inférieurs au terme visqueux (8.10c) et en tout cas très faibles devant le terme visqueux de l'équation suivant Ox . On peut donc considérer que le gradient de pression transverse à l'écoulement est nul (ou, plus précisément, se réduit au gradient de pression hydrostatique) quand θ est faible et que le nombre de Reynolds est assez petit.

Il faut cependant noter que toute cette discussion suppose que l'écoulement laminaire est établi et non perturbé : au-delà de certaines vitesses critiques d'écoulement, et même si la condition (8.9b) reste vérifiée, l'écoulement devient instable comme, par exemple, entre des plans parallèles et des composantes de vitesse significatives normales à l'écoulement moyen apparaissent. La discussion précédente n'est alors plus valable.

8.1.3 Effets d'instationnarité

Reprenons maintenant la forme (8.1) de l'équation de Navier-Stokes en supposant que l'écoulement varie avec un temps caractéristique T ou qu'il est périodique de pulsation ω (paramètre mieux adapté pour un écoulement périodique). Le terme $\partial \mathbf{v}/\partial t$ sera de l'ordre de U/T , ou encore de $U\omega$. Il sera négligeable devant le terme de viscosité si $\partial \mathbf{v}/\partial t \ll \nu \Delta \mathbf{v}$, soit :

$$\frac{U}{T} \ll \nu \frac{U}{e_0^2} \quad \text{ou :} \quad Nt_\nu = \frac{e_0^2}{\nu T} \ll 1.$$

Nous retrouvons le même rapport de temps caractéristiques Nt_ν que nous avons rencontré dans l'étude de l'écoulement alternatif entre deux plans (Éq. 4.95). La condition $Nt_\nu \ll 1$ implique que le temps caractéristique e_0^2/ν de diffusion des gradients de vitesse (ou de la vorticité) sur l'épaisseur e_0 du film fluide, qui représente le temps caractéristique d'établissement d'un profil de vitesse stationnaire, soit beaucoup plus petit que le temps caractéristique T d'évolution de l'écoulement (ou encore que $1/\omega$). Si cette condition est réalisée, l'écoulement peut être considéré comme quasi stationnaire et les termes en $\partial \mathbf{v}/\partial t$ peuvent être négligés.

8.1.4 Équations de mouvement dans l'approximation de lubrification

Dans ce cas, si des instabilités ne se développent pas dans l'écoulement et que les conditions $\theta \ll 1$ et $Re \ll 1/\theta$ sont vérifiées, les équations (8.1a-b) se réduisent, en régime stationnaire, à :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (8.11a)$$

et :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (8.11b)$$

ce qui représente exactement le même système d'équations que pour un écoulement parallèle. La vitesse v_x variera suivant Ox si l'épaisseur n'est pas constante, mais beaucoup plus lentement que dans la direction Oy pour laquelle la distance caractéristique de variation est e_0 . Pour calculer le profil de vitesse, on intègre donc l'équation (8.11a) par rapport à y , comme si $\partial p/\partial x$ était une constante (les variables x et y sont découplées). En fait, si les conditions de l'approximation de lubrification sont vérifiées, $\partial p/\partial x$ est pratiquement indépendant de y , comme pour un écoulement parallèle ; en revanche, il peut évoluer suivant Ox sur des distances très grandes devant l'épaisseur e_0 de la couche de fluide. Les écoulements faiblement instationnaires peuvent être traités de la même façon si la variation temporelle de la vitesse est suffisamment lente. Nous verrons plus loin des exemples où l'instationnarité joue un rôle.

8.1.5 Un exemple d'application de l'équation de lubrification : écoulement stationnaire entre deux plans mobiles formant un angle faible

Si l'on fait glisser une feuille de papier parallèlement à la surface horizontale d'une table lisse, la présence du film d'air entre la table et la feuille favorise le glissement ; au contraire, si la feuille est percée de quelques trous, elle glisse très mal car il n'existe plus de différence de pression entre l'air extérieur et cette couche intermédiaire. La différence de pression qui existe dans le premier cas est due à la formation d'un biseau vers l'arrière entre la feuille et la table, schématisé par la figure 8.2.

Pour le calcul, nous considérons que les plaques sont infiniment étendues dans la direction transverse z (perpendiculaire au plan de figure) : aussi, nous donnerons des valeurs de force ou de débit correspondant à une tranche de dimension unité dans cette direction. Nous supposons, par ailleurs, que la vitesse de la feuille est nulle, le plan inférieur se déplaçant avec une vitesse $-\mathbf{U}$. Cela permet d'obtenir un profil d'écoulement stationnaire car la surface inférieure se déplace dans son propre plan ; l'épaisseur de fluide reste donc constante en

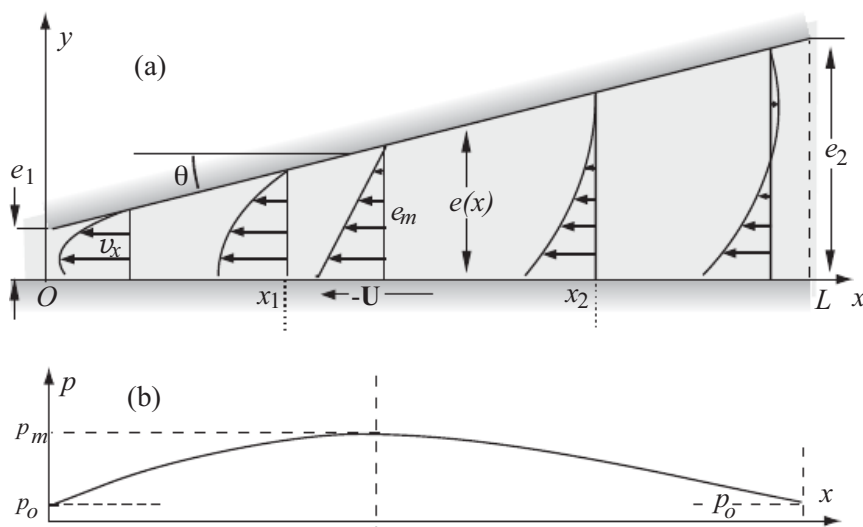


FIG. 8.2 – Schéma de l'écoulement induit par le mouvement relatif d'un plan incliné se déplaçant par rapport à un plan horizontal; (a) le champ de vitesse a été représenté dans le référentiel où le plan incliné est fixe; (b) loi de variation de la pression dans l'intervalle entre les deux plans.

un point fixe par rapport au plan supérieur. La distance entre les plans est donnée par :

$$e(x) = e_1 + \theta x$$

où l'angle $\theta = (e_2 - e_1)/L$ est supposé petit. On peut donc appliquer les équations (8.11a-b) et intégrer l'équation (8.11a) en prenant $\partial p / \partial x$ indépendant de y .

L'équation (8.11b) montre que la pression p ne dépend que de x . En tenant compte des conditions aux limites $v_x(y = 0) = -U$ et $v_x(y = e(x)) = 0$, on obtient alors par intégration de l'équation (8.11a) :

$$v_x(x, y) = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y [e(x) - y] - U \frac{e(x) - y}{e(x)}. \quad (8.12)$$

Remarquons que, comme à la section 4.5.3, le champ de vitesse correspond à la superposition d'un écoulement de Poiseuille (terme parabolique associé au gradient de pression) et d'un écoulement de Couette (terme linéaire en y , associé au déplacement du plan à la vitesse $-U$). Sur la figure 8.2a, on a représenté les profils de vitesse correspondant à différentes positions entre les deux plans.

Calculons à présent la répartition de pression sous le plan supérieur; pour cela, nous exprimons la condition de conservation, aux différentes abscisses, du débit Q (par unité de largeur de plaque suivant Oz), obtenu par intégration

de l'équation (8.12), soit :

$$Q = \text{constante} = \int_0^{e(x)} v_x \, dy = -\frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \frac{e(x)^3}{12} - \frac{Ue(x)}{2}. \quad (8.13)$$

Remarque. Rappelons que Q est constante car l'écoulement est stationnaire dans le référentiel choisi.

Comme l'on pouvait s'y attendre, cette expression coïncide avec l'expression (4.72) lorsque l'on remplace V_0 par $-U$ et a par $e(x)$. On en déduit, en remplaçant x par e comme variable :

$$\frac{dp}{dx} = \theta \frac{dp}{de} = -\frac{12\eta Q}{e(x)^3} - \frac{6\eta U}{e(x)^2}. \quad (8.14)$$

On en déduit la valeur e_m de l'épaisseur au point où la pression est extrême ($dp/de = 0$) avec :

$$e_m = -2\frac{Q}{U}. \quad (8.15)$$

On obtient enfin le profil de pression $p(x)$ en intégrant l'équation (8.14) par rapport à e avec $p(x=0) = p_0$ (pression atmosphérique à l'extérieur du film de faible épaisseur). On trouve :

$$p(x) = p_0 + \frac{6\eta Q}{\theta} \left[\frac{1}{e(x)^2} - \frac{1}{e_1^2} \right] + \frac{6\eta U}{\theta} \left[\frac{1}{e(x)} - \frac{1}{e_1} \right]. \quad (8.16)$$

On détermine la valeur du débit Q en écrivant que la pression vaut également p_0 à l'autre extrémité du plan (en $e = e_2$). On obtient alors :

$$Q = -\frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2} U \quad (8.17)$$

d'où :

$$e_m = 2\frac{e_1 e_2}{e_1 + e_2}. \quad (8.18)$$

L'équation (8.18) indique que, lorsque $e_1 \ll e_2$, on a $e_m \simeq 2e_1$: le point où la pression est extrême est alors très proche du bord où l'épaisseur vaut e_1 . Dans tous les cas, d'après l'équation (8.17), Q et U sont de signe opposé, c'est-à-dire que le débit moyen du fluide est orienté dans la direction du mouvement du plan inférieur. L'équation (8.16) peut alors être transformée en remplaçant Q par son expression en fonction de U , pour obtenir :

$$p(x) = p_0 + \frac{6\eta U}{\theta} \frac{(e_2 - e(x))(e(x) - e_1)}{e(x)^2(e_1 + e_2)}. \quad (8.19)$$

La différence $p(x) - p_0$ est donc nécessairement du même signe que U/θ , puisque $e(x)$ est compris entre e_1 et e_2 . La figure 8.2b représente la répartition de pression correspondante.

Remarque. Sur cette figure, la condition $e_1 \ll e_2$ n'est pas vérifiée et le maximum de pression est situé un peu plus loin de l'ouverture d'épaisseur e_1 .

La force normale F_N sur le plan inférieur, due à cet excédent de pression induit par le débit, est donnée par l'intégrale :

$$F_N = - \int_0^L (p - p_0) dx = - \frac{1}{\theta} \int_{e_1}^{e_2} (p - p_0) de = - \frac{6\eta U}{\theta^2} \left[\text{Log} \frac{e_2}{e_1} - \frac{2(e_2 - e_1)}{e_2 + e_1} \right]. \quad (8.20)$$

On détermine aussi la force de frottement tangentielle sur le plan inférieur, soit :

$$\begin{aligned} F_T &= \int_0^L \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dx = \frac{1}{\theta} \int_{e_1}^{e_2} \left(\frac{e(x)}{2} \frac{dp}{dx} + \frac{\eta U}{e(x)} \right) de \\ &= \frac{2\eta U}{\theta} \left[2 \text{Log} \frac{e_2}{e_1} - \frac{3(e_2 - e_1)}{e_2 + e_1} \right]. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Dans le cas général, le rôle relatif des valeurs de θ , e_1 et e_2 est subtil puisque, lorsque $\theta \rightarrow 0$, $e_2 \rightarrow e_1$; le numérateur ainsi que le dénominateur des expressions de F_T et F_N tendent alors vers 0. Nous évaluerons donc ces deux composantes dans le cas particulier où l'épaisseur e_2 est très supérieure à l'épaisseur minimale e_1 . Dans ce cas, on trouve :

$$F_N = - \left(\text{Log} \frac{e_2}{e_1} - 2 \right) \frac{6\eta U}{\theta^2}, \quad (8.22a)$$

$$F_T \approx \left(4 \text{Log} \frac{e_2}{e_1} - 6 \right) \frac{\eta U}{\theta} \quad (8.22b)$$

avec $\theta = (e_2 - e_1)/L \approx e_2/L$ (on remarque que les variations du rapport e_2/e_1 influent peu sur celles de F_T et F_N). Compte tenu des faibles valeurs de θ , F_N peut prendre des valeurs très importantes, alors que la force de freinage tangentielle F_T est inférieure d'un ordre de grandeur : c'est le résultat essentiel de la lubrification.

Cette propriété est mise à profit dans une variété considérable d'applications : axes tournant dans un logement de diamètre voisin et pouvant supporter ainsi des charges normales importantes sans frottement excessif (paliers de machines tournantes, essieux de véhicules...). Les forces normales sont, dans certains cas, tellement élevées que les pièces solides se déforment au voisinage des points de section minimale et sont, pour cela, dites *élastohydrodynamiques*.

Les forces de lubrification peuvent aussi avoir des effets nocifs : si nous marchons sur une flaque d'huile, les forces normales supporteront notre poids sans que la force tangentielle soit suffisante pour nous empêcher de perdre l'équilibre. Il en est de même pour le dérapage d'une voiture sur une chaussée humide (phénomène d'*aquaplaning*) : le film d'eau entre les pneus et la chaussée supporte le poids de la voiture alors que les forces qui l'empêchent de glisser sont trop faibles.

Remarques.

– Le calcul des forces F_T et F_N aurait pu être effectué sur le plan supérieur incliné en utilisant les valeurs de la pression et de la vitesse sur ce dernier. Il faut cependant noter que la force de pression n'est pas dirigée suivant Oy , mais suivant la normale à la surface qui fait un angle θ avec Oy . La force tangentielle n'est pas non plus dirigée suivant Ox , mais suivant la surface inclinée du plan supérieur. En projetant la résultante de ces forces sur les axes Ox et Oy , on trouve que les composantes correspondantes sont respectivement égales et opposées à F_T et F_N , ce qui donne une résultante globale nulle des forces exercées sur le fluide (la différence de pression entre l'entrée et la sortie de l'intervalle entre les plaques est en effet nulle, comme on l'a vu).

– Pour $e_2/e_1 = 10$, par exemple, les coefficients numériques des expressions (8.20) et (8.21) de F_T et F_N valent respectivement 4,3 et -4 , et ils ne varient que très lentement avec e_2/e_1 . Remarquons que les variations respectives de F_T et F_N en $1/\theta$ et $1/\theta^2$, dans ces formules, ne restent valables que si e_2/e_1 reste élevé (*i.e.* la réduction de θ est due uniquement à la diminution de e_2/L). Si $e_2/e_1 \rightarrow 1$, il faut alors revenir à la forme initiale des expressions de F_T et F_N donnant $F_N = 0$ pour $e_2 = e_1$ (plans parallèles).

– Lorsque $e_2 \gg e_1$, le maximum de $p(x)$ est obtenu pour $e \approx 2e_1$. Cela montre que les forces normales sont surtout localisées dans les régions de faible épaisseur. Ce résultat est général et facilite l'obtention de solutions approchées des problèmes de lubrification.

– Discutons finalement les profils de vitesse entre les deux parois à partir de l'équation (8.12), dérivée par rapport à y puis transformée en remplaçant $\partial p/\partial x$ par $\theta(\partial p/\partial e)$ et $\partial p/\partial e$ par l'expression (8.14) combinée à l'expression (8.17). On s'intéresse tout particulièrement ici à l'existence possible d'un maximum dans le profil de vitesse. Nous calculerons donc simplement la dérivée :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{2y - e(x)}{2\eta} \theta \frac{\partial p}{\partial e(x)} + \frac{U}{e(x)} = \frac{2U}{e(x)^2} \left[\frac{3e_1 e_2 (2y - e)}{e(x)(e_1 + e_2)} + 2e(x) - 3y \right]. \quad (8.23)$$

Près de la paroi inférieure ($y = 0$) et de la paroi supérieure ($y = e(x)$), on a respectivement :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{2U}{e(x)^2} \left[-\frac{3e_1 e_2}{(e_1 + e_2)} + 2e(x) \right] \quad (8.24a)$$

et :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{2U}{e(x)^2} \left[\frac{3e_1 e_2}{(e_1 + e_2)} - e(x) \right]. \quad (8.24b)$$

Les dérivées $\partial v_x/\partial y$ du profil de vitesse sur les plans inférieur et supérieur s'annulent donc respectivement pour $e(x_1) = 3e_1 e_2/(2(e_1 + e_2)) = 3e_m/4$ et $e(x_2) = 3e_1 e_2/(e_1 + e_2) = 3e_m/2$, c'est-à-dire de part et d'autre du point où se trouve le maximum de pression. Pour des distances plus faibles que x_1 , on a un minimum de vitesse ; pour des distances plus grandes que x_2 , la vitesse est dirigée vers la droite à proximité de la paroi supérieure et l'on a un maximum de vitesse. Pour la section d'épaisseur e_m correspondant au maximum de la pression, on a un profil de variation linéaire avec la distance : on le voit aisément en calculant la dérivée seconde $\partial^2 v_x/\partial y^2$ du profil $v_x(y)$ de la vitesse à partir de l'équation (8.23), pour obtenir

$\partial^2 v_x / \partial y^2 = (\theta/\eta)(\partial p / \partial e(x))$. La distance x pour laquelle la courbure s’annule correspond bien au maximum de pression : cela est normal puisque, en l’absence de gradient de pression, la composante de Poiseuille de l’écoulement s’annule et seule la composante de Couette subsiste.

8.1.6 Écoulements d’un film fluide de profil d’épaisseur quelconque

Dans cette partie, nous traitons le cas plus général de l’écoulement d’un film mince de fluide entre deux surfaces solides d’espacement variable avec des mouvements relatifs dans des directions quelconques.

Équation de Reynolds

On conserve l’hypothèse d’un film fluide suffisamment mince par rapport aux distances caractéristiques de variation de la vitesse et de l’épaisseur parallèlement au film, pour que l’on puisse continuer de considérer l’écoulement comme quasi parallèle (Fig. 8.3). On suppose également que la surface inférieure est un plan immobile $y = 0$, que la surface supérieure est située à une hauteur $h(x, t)$ et que chaque point de la surface supérieure a une vitesse de composantes respectives $U(x, t)$ et $V(x, t)$ suivant Ox et Oy . Le gradient longitudinal de pression $\partial p / \partial x$ est considéré comme constant sur l’épaisseur du film, mais peut varier lentement le long de ce dernier. Comme on l’a vu à la section 8.1.2, le terme $\partial p / \partial x$ devra être remplacé par $\partial p / \partial x - \rho g_x$ quand la composante g_x de la gravité dans le plan du film n’est pas nulle. Dans ce paragraphe, la surface supérieure est solide mais peut, éventuellement, être déformable.

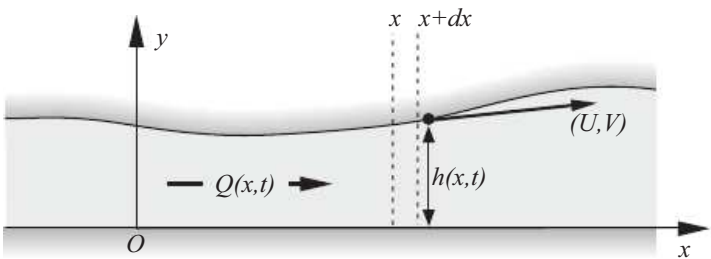


FIG. 8.3 – Schéma d’un écoulement quasi unidimensionnel d’une fine couche de liquide entre un plan et une surface supérieure solide de distance $h(x, t)$ au plan variable avec le temps et la position.

Comme précédemment, l’écoulement local est une superposition d’un écoulement de Poiseuille et d’un écoulement de Couette : il peut être induit par le déplacement relatif des parois solides limitant les surfaces supérieure et inférieure du film et/ou, éventuellement, par un gradient de pression imposé.

Récrivons la relation (8.13) entre le débit local $Q(x, t)$ dans le film (par unité de longueur suivant Oz), le gradient $\partial p / \partial x$ et la composante de vitesse $U(x, t)$ du plan supérieur dans la direction Ox , avec :

$$Q(x, t) = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Uh}{2}. \quad (8.25)$$

Contrairement au cas de l'équation (8.13), Q peut dépendre aussi bien de x que de t . Analysons maintenant la conservation de la masse dans une tranche du film fluide sur l'intervalle $(x, x + dx)$: la variation $(\partial h / \partial t) dx$ du volume de fluide dans la tranche, par unité de temps, est égale à la différence $Q(x) - Q(x + dx) = -(\partial Q / \partial x) dx$ entre les débits de fluide entrant et sortant. On obtient alors, en dérivant l'équation (8.25) par rapport à x :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{12\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{1}{2} \left(h \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right). \quad (8.26)$$

Cela correspond à un écoulement à deux dimensions invariant par translation dans la direction Oz . La relation (8.26) est appelée *équation de Reynolds*. En pratique, on impose souvent les valeurs de pression aux extrémités de la couche fluide.

Notons enfin que les composantes verticale V et horizontale U de la vitesse locale de la paroi sont reliées à la dérivée $\partial h / \partial t$ par la relation géométrique :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = V - U \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (8.27)$$

En effet, un déplacement horizontal de la paroi supérieure entraîne une variation de l'épaisseur locale si la paroi n'est pas elle-même localement horizontale. Cette variation s'ajoute à celle induite par vitesse verticale V de la paroi. On vérifie d'ailleurs, d'après la formule (8.27), que h reste constante si la paroi supérieure se déplace dans son propre plan ($V/U = \partial h / \partial x$).

Dans le cas d'un film à deux dimensions où l'épaisseur $h(x, z, t)$ varie dans les deux directions x et z parallèles au plan inférieur, on doit remplacer l'équation (8.25) par :

$$\mathbf{Q}_{\parallel}(x, z, t) = -\frac{h^3}{12\eta} \mathbf{grad}_{\parallel} p + \frac{\mathbf{U}_{\parallel} h}{2}. \quad (8.28)$$

$\mathbf{U}_{\parallel}$ est la projection sur le plan xOz de la vitesse $\mathbf{U}$ de la surface supérieure avec pour composantes U et W respectivement suivant Ox et Oz . Les composantes Q_x et Q_z de $\mathbf{Q}_{\parallel}$ sont les débits locaux à travers des sections unités respectivement perpendiculaires à Ox et Oz ; le terme $\mathbf{grad}_{\parallel}$ représente le gradient suivant les directions parallèles au plan. En écrivant l'équation de conservation de la masse sous la forme tridimensionnelle $\partial h / \partial t + \text{div}_{\parallel} \mathbf{Q}_{\parallel} = 0$,

on obtient la généralisation de l'équation (8.26) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[h^3 \mathbf{grad}_{\parallel} p \right] &= h^3 \Delta_{\parallel} p + 3h^2 \mathbf{grad}_{\parallel} h \cdot \mathbf{grad}_{\parallel} p \\ &= 6\eta \left(h \operatorname{div}_{\parallel} \mathbf{U}_{\parallel} + \mathbf{U}_{\parallel} \cdot \mathbf{grad}_{\parallel} h + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (8.29)$$

De même, l'équation (8.27) devient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = V - \mathbf{U}_{\parallel} \cdot \mathbf{grad}_{\parallel} h. \quad (8.30)$$

Remarque. Le problème de la section 8.1.5 (écoulement entre deux plans formant un angle θ) peut être traité comme une solution particulière de l'équation de Reynolds (8.26) avec $\partial h / \partial t = -U \partial h / \partial x$, $h(x) = e(x)$ et $\partial e / \partial t = -U \partial e / \partial x$. En effet, on se plaçait dans un référentiel fixe par rapport au plan supérieur où l'écoulement était stationnaire, alors que dans cette section on se place dans un référentiel fixe par rapport au plan inférieur (la vitesse locale du plan supérieur est alors U). L'équation (8.26) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right] = -6\eta U \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (8.31)$$

On obtient la même équation en multipliant la relation (8.14) par $e(x)^3$ et en dérivant par rapport à x ($Q = \text{cte}$ par rapport à x dans le référentiel du plan supérieur, alors qu'il varie dans celui du plan inférieur).

Application de l'équation de Reynolds : sphère descendant vers un plan dans un fluide visqueux

Considérons une sphère indéformable de rayon a descendant à la verticale vers un plan infini (Fig. 8.4) : on appelle $h_o(t)$ la distance minimum entre la sphère et le plan, c'est-à-dire sur l'axe du système. En tenant compte de la symétrie de révolution (la pression dépend uniquement de r et de t) et de la condition $\mathbf{U}_{\parallel} = 0$, l'équation (8.29) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r h^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right] = 12\eta \frac{\partial h}{\partial t} \quad (8.32)$$

avec :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh_o(t)}{dt}.$$

Cette dernière égalité reflète la valeur identique de la vitesse verticale $\partial h / \partial t$ de tous les points de la surface de la sphère. On calcule la force $\mathbf{F}$ sur la sphère par intégration de la pression :

$$F = \int_0^{r_M} 2\pi r p(r) dr = \int_{h_0}^{h_M} 2\pi a p(h) dh.$$

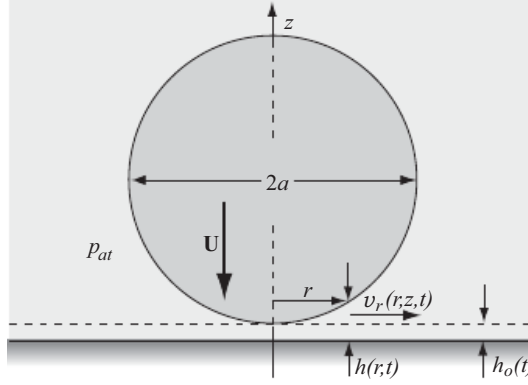


FIG. 8.4 – Schéma d'une sphère descendant vers un plan infini.

On obtient alors, en utilisant l'équation (8.36) sans inclure la pression p_0 qui entoure complètement la sphère :

$$F = -\frac{6\eta a^2}{h_0} \frac{dh_0}{dt} \quad (8.33)$$

à condition que l'épaisseur h_M , lorsque l'on s'éloigne de la zone d'épaisseur minimum, soit assez grande devant h_0

Démonstration. Pour calculer $p(h)$, on intègre d'abord l'équation (8.32) par rapport à r , après avoir multiplié les deux membres par r . On obtient :

$$6\eta r^2 \frac{\partial h}{\partial t} = rh^3 \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (8.34)$$

La constante d'intégration est nulle car aucune des dérivées ne diverge pour $r = 0$. Pour calculer la distribution de pression, on va remplacer la variable r par h en utilisant la relation géométrique approchée :

$$h(r, t) = h_0(t) + \frac{r^2}{2a} \quad (8.35)$$

d'où :

$$dh = r dr/a \quad \text{et} \quad dp/dr = (r/a) dp/dh.$$

Ainsi :

$$dp = -3\eta a \frac{dh_0}{dt} d\left[\frac{1}{h^2}\right]$$

et, après intégration entre une hauteur h et l'infini :

$$p(h) = p_0 - \frac{3\eta a}{h^2} \frac{dh_0}{dt}. \quad (8.36)$$

En effet, la pression doit devenir égale à la pression atmosphérique p_0 quand h devient très grand. ■

Pour une sphère de rayon a , tombant sous son propre poids, et pour des densités respectives ρ_s et ρ_f du solide et du fluide, on trouve, en égalant le

poids de la sphère diminué de la force d'Archimède et la force visqueuse de l'équation (8.33) :

$$\frac{d \operatorname{Log} h_0}{dt} = -\frac{2\pi}{9} \frac{a(\rho_s - \rho_f)g}{\eta} \quad (8.37)$$

soit :

$$h_0(t) = h_0(0) e^{-t/\tau} \quad (8.38)$$

avec $\tau = 9\eta/(2\pi a(\rho_s - \rho_f)g)$. La sphère n'atteint, en théorie, le plan qu'au bout d'un temps infini à cause de l'effet croissant du ralentissement ! En pratique, cependant, les rugosités des surfaces en regard viendront en contact lorsque la séparation devient de l'ordre de la hauteur de ces microrugosités, tandis qu'il reste un peu d'espace libre pour évacuer le fluide.

Si, au contraire, on impose une vitesse de descente $V_z = dh/dt$, la force à appliquer pour conserver cette vitesse de descente diverge comme $1/h_0$ d'après l'équation (8.36) lorsque la distance h_0 tend vers zéro. Par ailleurs, la pression diverge en $1/h_0^2$ dans la région d'épaisseur minimum h_0 : cela peut conduire à une déformation locale de la surface des solides.

Remarque. Dans le cas où l'on remplace la sphère par un cylindre à fond plat parallèle au plan, on trouve une variation de la force en $1/h^3$ au lieu de $1/h$ pour une vitesse donnée car les forces visqueuses sont réparties plus uniformément sur tout le fond du cylindre, au lieu d'être plus localisées dans la zone d'épaisseur minimum.

8.1.7 Écoulement entre deux cylindres de rayons voisins décentrés

Une application industrielle majeure de la lubrification est le déplacement de pièces en mouvement, avec un faible intervalle entre les pièces (piston-cylindre, essieu-logement...) rempli par un lubrifiant liquide.

On s'intéressera ici plus précisément à l'écoulement du lubrifiant dans le faible espace entre un essieu tournant et son logement, ainsi qu'aux forces qui en résultent : ce système est représenté (Fig. 8.5) par deux cylindres de rayons voisins R et $R + \delta R$ ($\delta R/R = \varepsilon \ll 1$), d'axes parallèles et décalés d'une distance $a = \lambda \delta R$ ($\lambda \leq 1$). On suppose que seul le cylindre intérieur tourne à une vitesse angulaire Ω et que l'écoulement est invariant dans la direction Oz des axes des cylindres. On prend comme origine des coordonnées polaires l'intersection O de l'axe du plus grand cylindre avec le plan de figure ; l'angle $\theta = 0$ correspond à la direction du segment $\mathbf{OO}'$ (et, aussi, au minimum e_0 de la distance locale $e(\theta)$ entre les cylindres) et α est l'angle de $\mathbf{OO}'$ avec la verticale. La distance $e(\theta)$ vérifie l'équation :

$$y = e(\theta) = \delta R - a \cos \theta = \varepsilon R (1 - \lambda \cos \theta). \quad (8.39)$$

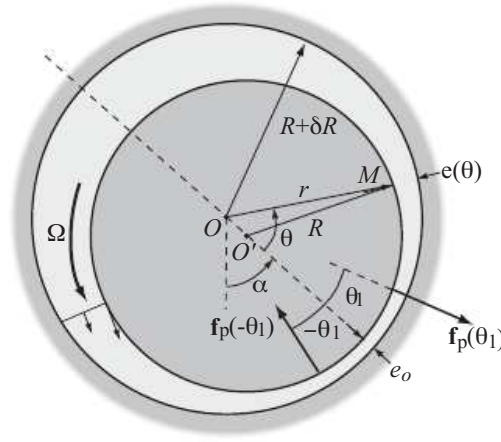


FIG. 8.5 – Schéma en coupe d'un essieu tournant à l'intérieur de son logement. L'axe Oz est perpendiculaire au plan de la figure. Les points O et O' correspondent à l'intersection de l'axe des deux cylindres avec le plan de figure.

Démonstration. La distance $|OM|$ entre O et un point M du cylindre intérieur, tel que OM fasse un angle θ avec le segment OO' joignant les axes, vérifie au premier ordre :

$$r = R + a \cos \theta = R + \lambda \delta R \cos \theta.$$

L'expression (8.39) est alors obtenue en soustrayant $|OM|$ du rayon $R + \delta R$ du cylindre extérieur. ■

Dans la région autour d'un angle θ donné, on considérera que l'écoulement est identique à celui entre deux plans parallèles distants de $e(\theta)$, l'un de ces plans (correspondant au cylindre intérieur) se déplaçant à la vitesse ΩR . Cette hypothèse revient à éliminer les effets de la courbure, tels que le gradient de pression dû à la force centrifuge ; ce dernier est ainsi transverse à l'écoulement et ne l'influence pas. On peut alors appliquer l'équation de Reynolds (8.26) sous la forme :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[e(\theta)^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] = 6 \eta \Omega \frac{\partial e(\theta)}{\partial \theta} \quad (8.40)$$

d'où :

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 6 \eta \Omega R^2 \frac{1}{e(\theta)^2} + \frac{C}{e(\theta)^3} \quad (8.41)$$

où C est une constante d'intégration. Pour passer de l'équation (8.26) à l'équation (8.41), on a simplement remplacé les dérivées $\partial/\partial x$ par $(1/R) \partial/\partial \theta$. En effet, l'élément de longueur ds dans la direction tangente aux surfaces des cylindres, correspondant à une variation angulaire $d\theta$ est égal à $R d\theta$ (toujours sous la condition $\delta R = R$) ; ds jouera ici le rôle de dx dans le problème plan. La figure 8.6 montre la variation de pression en fonction de θ calculée pour $\lambda = 0,9$ en intégrant numériquement l'équation (8.41) en utilisant l'équation (8.39). On a des forts minima et maxima de la pression près de $x = 0$ en

raison de la forte valeur du terme en $1/e^3$: il peut apparaître ainsi des bulles de cavitation dans la zone de dépression (voir section 5.3.2).

Remarque. Les principales caractéristiques de la courbe de la figure 8.6 résultent directement de la forme des équations (8.39) et (8.41). La variation de $e(\theta)$ et celle de $\partial p/\partial\theta$ sont, en effet, toutes deux symétriques par rapport à $\theta = 0$. Il en résulte que la variation de pression $p(\theta) - p(0)$ obtenue par intégration est antisymétrique. On doit avoir par ailleurs $p(\pi) = p(-\pi)$ puisque ces deux valeurs de θ correspondent au même point physique diamétralement opposé au point d'épaisseur minimum. Si $p(\theta)$ n'est pas constant, il doit donc y avoir (au moins) deux extrema de signe opposé en des points symétriques par rapport à $\theta = 0$, de sorte que la constante C est de signe opposé à Ω (voir Éq. 8.41). Dans le voisinage de $\theta = 0$, le terme $1/e^3$ de l'équation (8.41) domine l'autre et la dérivée $\partial p/\partial\theta(0)$ est de signe opposé à Ω (< 0 dans la Fig. 8.6). La présence du terme en $1/e^3$ implique que plus l'épaisseur minimale $e(0)$ est faible devant la valeur maximale $e(\pi)$, plus les valeurs absolues des extrema de pression seront importants et proches du point $\theta = 0$.

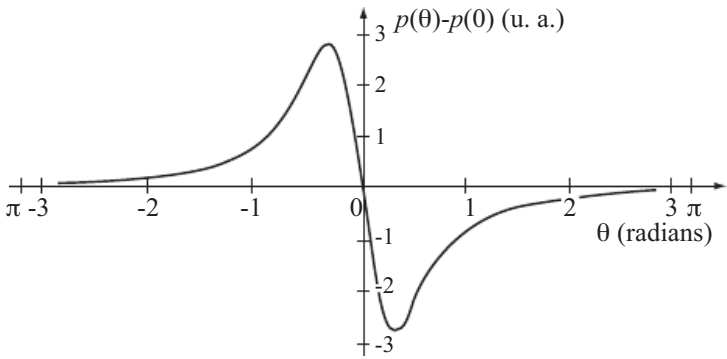


FIG. 8.6 – Variation de pression dans l'intervalle entre l'essieu et son logement dans la figure 8.5.

Comme dans le cas des deux plans étudié à la section 8.1.5, nous supposons que les forces de frottement visqueux, s'exerçant tangentiellement aux cylindres, sont négligeables par rapport aux forces de pression normales à ces derniers. Cherchons maintenant comment ces forces peuvent supporter de lourdes charges comme c'est le cas d'un essieu ou d'un axe de machine tournante. Regardons pour cela les forces de pression par unité de surface $\mathbf{f}_p = d\mathbf{F}_p/dS$ s'exerçant sur le cylindre intérieur en deux points correspondant à des angles opposés θ_1 et $-\theta_1$ (Fig. 8.5). On peut négliger l'influence de la pression moyenne $p(0)$ car l'intégrale de la force qu'elle induit sur l'ensemble de chaque cylindre est nulle. On considérera donc que $p(\theta_1) = -p(-\theta_1)$. La somme des composantes verticales $f_{zp}(\pm\theta_1)$ des forces de pression par unité de surface en θ_1 et $-\theta_1$ sera :

$$\begin{aligned} f_{zp}(\theta_1) + f_{zp}(-\theta_1) &= -p(\theta_1) \cos(\alpha + \theta_1) + p(-\theta_1) \cos(\alpha - \theta_1) \\ &= 2p(\theta_1) \sin \alpha \sin \theta_1. \end{aligned} \tag{8.42}$$

Ainsi, la résultante verticale des forces de pression est maximale lorsque l'angle α de $\mathbf{OO}'$ avec la verticale vaut $\pi/2$ ($\mathbf{OO}'$ est alors horizontal). La valeur $F_{p\pi/2}$ de cette force par unité de longueur suivant l'axe est alors donnée par l'intégrale :

$$F_{p\pi/2} = - \int_{-\theta}^{\theta} \sin(\theta) p(\theta) R d\theta$$

que l'on trouve égale à :

$$F_{p\pi/2} = \frac{6\mu A \Omega R}{\varepsilon^2 \lambda}. \quad (8.43)$$

A est ici une constante dépendant de λ . Cette force de portance varie en $1/\varepsilon^2$: quand ε est très faible, on pourra développer des forces de portance considérables.

Remarque. Ce résultat peut paraître contre-intuitif : on pourrait, en effet, penser que les forces de pesanteur forceraient le point d'épaisseur minimum à être au point le plus bas du logement, c'est-à-dire à la verticale de l'axe O : $\mathbf{OO}'$ serait dans ce cas vertical avec $\alpha = 0$. Cependant, la résultante verticale des forces de pression est alors nulle car la contribution de chaque point de position θ est annulée par celle du point situé à l'angle $-\theta$: la pression $p(\theta)$ est en effet opposée à $p(-\theta)$ et la composante verticale de la normale à la surface est la même. Au contraire, si $\alpha = \pi/2$, la force de pression change également de signe si l'on remplace θ par $-\theta$, mais aussi la composante verticale de la normale à la surface. Les contributions à la force ont donc le même signe et s'ajoutent. La valeur de α s'ajustera à une valeur intermédiaire entre 0 et $\pi/2$ en fonction des charges à supporter.

Évaluons maintenant la force de frottement visqueux $F_{\nu\pi/2}$ qui est dirigée vers $\theta = \pi/2$: par unité de surface, cette force est de l'ordre de $\eta \Omega R / ((1 - \lambda)\varepsilon R)$ dans la zone d'épaisseur minimum. Si elle s'applique sur une distance de l'ordre de R , on obtient :

$$F_{\nu\pi/2} \approx \frac{\eta \Omega R}{(1 - \lambda)\varepsilon}. \quad (8.44)$$

Cette force de frottement visqueux en $1/\varepsilon$ est d'un ordre de grandeur inférieure à la force de portance, comme nous l'avions supposé.

8.1.8 Lubrification et rugosité des surfaces

Les exemples que nous avons donnés et, en particulier, celui de l'essieu et de son logement, suggèrent que la distance entre les deux pièces utilisées doit être aussi faible que possible. Cela sera limité par la rugosité des surfaces qui ont été supposées parfaitement lisses dans nos calculs. Si les rugosités des deux surfaces viennent en contact, il apparaîtra des forces de frottement solide qui pourront bloquer le mouvement. Un autre exemple est l'interaction entre les particules d'une suspension, lorsqu'elles se rapprochent à faible distance. Comme nous l'avons vu à la section 8.1.5, les forces de viscosité augmentent

lorsqu'une sphère se rapproche fortement d'une paroi ; lorsque la distance devient très faible, il faut néanmoins tenir compte de l'influence de la rugosité. Un exemple en est donné par la figure 8.7. Dans le cas de deux sphères parfaitement lisses qui se rencontrent, la trajectoire finale coïncide avec la ligne de déplacement initial (Fig. 8.7a) : cela résulte de la réversibilité par renversement du temps des solutions de l'équation de mouvement de Stokes à petit nombre de Reynolds (voir section 9.2.3). Cette réversibilité peut être brisée par l'effet des rugosités des particules (Fig. 8.7b). Nombre de problèmes liés à la lubrification, aux frottements et à l'usure dépendent des hétérogénéités des surfaces.

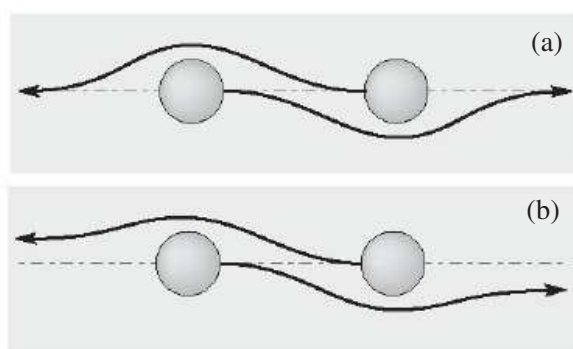


FIG. 8.7 – Différence entre le mouvement d'une sphère se déplaçant par rapport à une autre sphère fixe, dans le cas idéal de sphères sans interactions autres que celles dues à l'hydrodynamique (a) ; dans un cas réel de sphères rugueuses (b). Dans le deuxième cas, les deux sphères subissent un décalage de leur trajectoire après s'être rencontrées, au lieu de revenir sur la ligne commune où elles se trouvaient initialement (un effet analogue pourrait être obtenu dans le cas où les deux sphères présenteraient des interactions interparticulaires telles que, par exemple, la répulsion électrostatique).

Remarque. Notons enfin que l'argument de réversibilité suppose que le champ de vitesse prend à chaque instant la configuration d'équilibre correspondant à la valeur instantanée de la distance entre les obstacles ; nous avons évoqué un problème similaire à la section 8.1.3 à propos de la stationnarité des écoulements de lubrification. Quand les deux sphères se rapprochent à une distance d avec une vitesse relative U , le temps d'établissement du profil de vitesse est de l'ordre de d^2/ν : il doit être faible devant le temps caractéristique d/U d'évolution de la distance lié au mouvement relatif. Le nombre de Reynolds Ud/ν doit donc être faible car, dans le cas contraire, la dynamique de la sphère dépendra de l'histoire passée, cas que nous ne discuterons pas ici. On rencontre des effets de ce type, que nous ne détaillerons pas ici, pour les particules fortement accélérées (en particulier, effets dits *forces de Basset*).

8.2 Écoulements de films liquides à surface libre – hydrodynamique du mouillage

D'autres situations où les forces inertielles et les termes non linéaires des équations de mouvement des fluides sont négligeables se rencontrent avec les films fluides minces à surface libre : là encore, la vitesse du fluide est presque parallèle à la surface du film. De tels écoulements sont largement présents dans la nature et ont, de plus, des applications très importantes telles que l'étalement de revêtements, de peintures ou de nettoyants sur des matériaux ; également, certains échangeurs thermiques utilisent des films de liquide ruisse-lants. Ce cas est proche de celui de la lubrification, mais la présence de surfaces libres modifie les conditions aux limites et peut faire apparaître des forces supplémentaires de tension superficielle. Nous avons introduit cette dernière notion dans la section 1.4 et décrit quelques propriétés statiques des interfaces qui en résultent. Nous avons aussi introduit les notions de paramètre d'étalement et d'angle de contact statique à travers la relation de Young-Dupré (Éq. 1.62).

Dans cette partie, nous nous intéressons aux phénomènes dynamiques d'écoulement de films fluides à surface libre pour lesquels il peut y avoir compétition entre la tension superficielle, la gravité et la viscosité. Dans tous les cas, nous utiliserons largement l'approximation de lubrification.

Tout d'abord, nous analyserons le cas simple d'écoulements de couches liquides sans influence de la tension superficielle, comme la chute d'un film liquide sur une paroi isotherme. Ensuite, nous étudierons l'évolution, avec la vitesse de déplacement de la ligne de contact, de l'angle de contact dynamique d'une interface en situation de mouillage total. Ce résultat sera utilisé pour la prédiction de l'étalement de gouttes de petite taille et il sera comparé à celui de gouttes s'étalant sous l'effet de la gravité. Nous aborderons enfin le cas des *effets Marangoni* dans lesquels des gradients de température ou de concentration de composés tensioactifs induisent des gradients de tension superficielle, qui créent eux-mêmes des écoulements.

8.2.1 Dynamique des films liquides minces sans effets de la tension superficielle

L'influence de la tension superficielle est négligeable pour les films à surface plane ou de très faible courbure car la différence de pression de Laplace entre les deux côtés de l'interface est alors nulle ou très faible. Nous considérons des situations où la tension superficielle est constante sur la surface pour que des effets Marangoni n'apparaissent pas.

Les écoulements de films liquides à surface libre ont des caractéristiques spécifiques. Tout d'abord, si la tension superficielle n'intervient pas, la pression est égale à la pression atmosphérique au niveau de l'ensemble de l'interface. Comme pour les autres écoulements quasi parallèles, les gradients de

pression perpendiculaires à l’interface (et donc à la vitesse de l’écoulement) se réduisent à la pression hydrostatique. Compte tenu de la faible épaisseur des films, la pression sera donc partout voisine de la pression atmosphérique : les gradients de pression parallèlement au film (et à la vitesse du fluide) sont donc généralement plus faibles que pour les écoulements entre deux surfaces solides discutés précédemment. Dans de nombreux cas, ce gradient sera nul (en particulier pour les films d’épaisseur constante) et le moteur de l’écoulement est la composante $g_{\parallel}$ de la gravité parallèle à la surface du film : on se souvient en effet que, dans les équations de Stokes ou de Navier-Stokes, le moteur de l’écoulement est représenté par la somme $\mathbf{grad} p - \rho \mathbf{g}$ et pas seulement par $\mathbf{grad} p$.

Si, à l’extérieur, on a de l’air au repos (ou de vitesse modérée), on peut admettre que la contrainte sur l’interface est nulle (section 4.3.2) : la dérivée de la vitesse suivant la direction normale à la surface est donc également nulle. On a ainsi un extremum de la vitesse sur la surface et non une valeur nulle comme sur une paroi solide.

Remarque. Ce ne sera plus le cas en présence d’un écoulement d’air à grande vitesse (comme, par exemple, pour un grand vent au-dessus de la surface d’un lac ou d’une rivière).

Exemple : chute d’un film visqueux sur une paroi verticale à débit imposé

On crée un film de fluide (densité ρ , viscosité η) sur une paroi verticale par injection à travers une fente dans la paroi située à une hauteur $x = \text{cte}$ (Fig. 8.8). Le débit liquide q par unité de largeur de fente (ici suivant Oz)

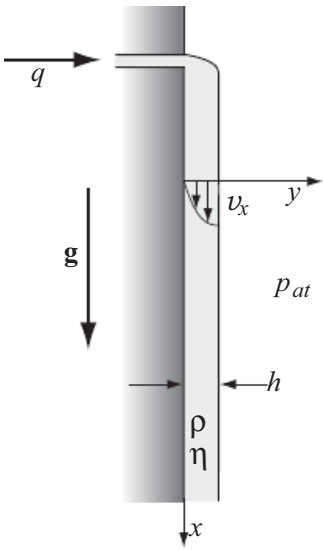


FIG. 8.8 – Écoulement sur une paroi verticale suite à une injection de fluide.

est constant. Nous allons chercher à prédire l'épaisseur de la couche de fluide dans la région où celle-ci a atteint une épaisseur h constante. En supposant l'écoulement invariant et de vitesse nulle suivant Oz , les équations de Navier-Stokes deviennent :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (8.45a)$$

et :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (8.45b)$$

Comme la pression est constante à l'extérieur, continue à la surface et constante sur toutes les horizontales, on a $p = p_{at}$ dans tout le film fluide : le gradient de pression parallèlement à la vitesse est donc également nul ($\partial p / \partial x = 0$). L'écoulement est donc purement induit par la composante verticale g de la gravité. En intégrant avec les conditions aux limites $v_x(y = 0) = 0$ et $\partial v_x / \partial y(y = h) = 0$, on trouve :

$$v_x = \frac{\rho g}{2\eta} y(2h - y) \quad (8.46a)$$

et :

$$q = \int_0^h v_x dy = \frac{\rho g h^3}{3\eta}. \quad (8.46b)$$

L'épaisseur de la couche de fluide est imposée par le débit d'injection et varie en $q^{1/3}$.

Remarque 1. On obtient des résultats similaires pour un écoulement sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à la verticale. Il faut remplacer $-\rho g$ par $-\rho g \cos \theta$ dans l'équation (8.45a) et ajouter un terme $-\rho g \sin \theta$ dans l'équation (8.45b). Cependant, comme ce dernier terme est constant, $\partial p / \partial x$ reste nul bien que le gradient de pression hydrostatique soit non nul dans la direction y . Les équations (8.46a-b) restent donc valables en remplaçant g par $g \cos \theta$.

Remarque 2. Pour des vitesses suffisamment grandes, de tels écoulements développeront des instabilités qui feront varier l'épaisseur du film et feront apparaître des courbures locales sur la surface. Il faudra alors prendre en compte aussi bien la tension superficielle que les gradients de pression parallèles à la surface.

8.2.2 Angles de contact dynamiques

Cas du mouillage total : loi de Tanner

La tension superficielle joue un rôle clé dans les problèmes de ligne de contact entre une interface liquide-gaz (ou liquide-liquide) et une surface solide, à la différence de l'exemple précédent. On s'intéresse ici aux variations

d'origine hydrodynamique de l'angle de contact avec la vitesse V de la ligne : on parle alors d'*angle de contact dynamique*. On se place dans le cas du mouillage total pour lequel le paramètre d'étalement initial $S = \gamma_{sg} - \gamma_{sl} - \gamma$ est positif (nous utilisons la notation γ pour γ_{lg}). Le déplacement de l'interface à la vitesse V fait passer l'angle de contact de la valeur $\theta_s = 0$ pour $V = 0$ (*angle de contact statique*) à une valeur finie $\theta(V)$. Notons que, dans de tels systèmes en mouillage total, il y a toujours, en amont de la ligne de contact, un film précurseur d'épaisseur submicronique : l'angle de contact dynamique $\theta(V)$ est en fait un *angle de contact apparent*, avec la paroi, de la partie *macroscopique* du ménisque (Fig. 8.9).

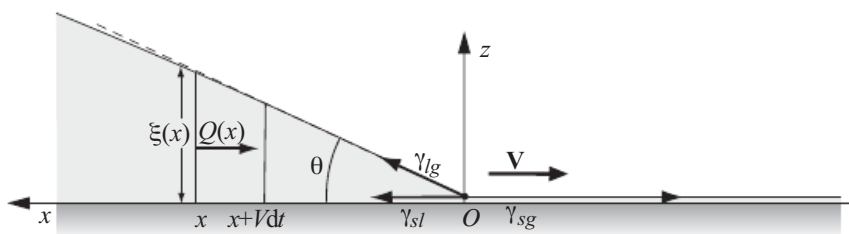


FIG. 8.9 – Schéma du déplacement d'une ligne de contact sur une surface solide en présence d'un film précurseur en avant du ménisque.

Étudions tout d'abord l'équilibre des forces exercées sur la ligne de contact, en nous plaçant dans une géométrie à deux dimensions. En suivant la même démarche que celle utilisée au chapitre 1 pour démontrer l'équation (1.62) de Young-Dupré, on trouve une force résultante, par unité de longueur, de composante horizontale : $F_r(\theta) = \gamma_{sg} - \gamma_{sl} - \gamma \cos \theta$. Il faut toutefois noter que, suivant cette relation, on ne peut vérifier la condition d'équilibre statique $F_r = 0$ à vitesse nulle même pour $\theta = 0$. La force par unité de longueur en excès est égale à $S (> 0)$ et l'on admet qu'elle est utilisée pour former le film précurseur et que cette contribution reste constante quand V est non nulle. La force résultante effective qui induit le déplacement de la partie d'épaisseur macroscopique du ménisque (à gauche du point O sur la Fig. 8.9) sera donc $F_r(\theta) - S = \gamma (1 - \cos \theta)$. L'énergie par unité de temps correspondante dE_{ts}/dt est alors :

$$\frac{dE_{ts}}{dt} = \gamma (1 - \cos \theta) V. \quad (8.47)$$

Cette énergie fournie par les forces capillaires est dissipée par viscosité dans l'écoulement dans le film induit par le déplacement de l'interface. Remarquons que dE_{ts}/dt serait nulle pour un angle $\theta = 0$, qui correspondrait au cas d'une interface presque immobile pour laquelle toute l'énergie disponible serait dissipée dans le film résiduel.

Analysons maintenant l'écoulement dans la partie macroscopique du film fluide, en appelant $\xi(x)$ son épaisseur à la distance x de la ligne de contact : on suppose que l'on est suffisamment proche de cette dernière pour que les

effets de la gravité soient négligeables sur les faibles distances verticales considérées. On suppose également que l'angle de contact macroscopique apparent θ est assez faible pour que l'on puisse utiliser en tout point l'approximation de lubrification. Appelons $Q(x)$ le débit (par unité de longueur perpendiculairement à la figure) dans la section du film : la variation entre t et $t + dt$ du volume compris entre la section x et la ligne de contact est égale à $Q(x)dt$ (c'est le volume injecté dans le même temps). Supposons par ailleurs que l'interface se déplace sans se déformer à la vitesse V : la variation précédente de volume doit également être égale à celui $\xi(x)(Vdt)$ d'une tranche de fluide d'épaisseur Vdt , située autour de la section x d'où :

$$Q(x) = V\xi(x). \quad (8.48)$$

Dans l'approximation de lubrification, on peut considérer que la contrainte tangentielle $\eta \partial v_x / \partial z$ sur l'interface $z = \xi(x)$ est nulle (condition de surface libre) ; par ailleurs, $v_x(0) = 0$. On aura donc un profil de vitesse du type $v_x(z) = A(x) (\xi(x) - z/2)z$. En intégrant entre 0 et $\xi(x)$ par rapport à z pour calculer $Q(x)$, on trouve :

$$v_x(x, z) = 3 \frac{Q(x)}{\xi^3(x)} \left[\xi(x) - \frac{z}{2} \right] z. \quad (8.49)$$

On note que la vitesse $v_x(x, \xi)$ du fluide à l'interface est égale à $3Q(x)/(2\xi(x))$: elle est donc plus élevée que la vitesse moyenne $V_m = Q(x)/\xi(x) = V$ (elles sont également toutes deux indépendantes de x).

Écrivons maintenant que la puissance dE_{ts}/dt donnée par l'équation (8.47) est égale à la puissance totale dE_η/dt dissipée par viscosité dans l'écoulement correspondant au profil de vitesse (8.49). La puissance dissipée par unité de volume est $\eta(\partial v_x / \partial z)^2$ (Éq. 5.26). On obtient la dissipation totale dE_η/dt (toujours par unité de longueur transversale) en intégrant cette expression entre 0 et $\xi(x)$, puis par rapport à x . Prenons maintenant $\xi(x) = \theta x$, ce qui revient à négliger la courbure de l'interface dans le plan (x, z) : cette approximation revient à supposer que la plus grande partie de la dissipation a lieu très près de la ligne de contact, là où l'erreur ainsi introduite est la plus faible. On obtient alors, en valeur absolue, à partir des équations (8.48) et (8.49) :

$$\frac{dE_\eta}{dt} = \int 3\eta \frac{Q^2(x)}{\xi^3(x)} dx = 3\eta V^2 \int \frac{1}{\xi(x)} dx = 3\eta \frac{V^2}{\theta} \int_{x_m}^{x_M} \frac{1}{x} dx. \quad (8.50)$$

Il a été nécessaire d'introduire des bornes supérieure x_M et inférieure x_m , compte tenu de la divergence logarithmique de l'intégrale lorsque x tend vers zéro et l'infini. On peut supposer que la borne supérieure x_M correspond à une longueur de l'ordre de la taille de la goutte dans le plan xOz , mais un problème plus important vient de la divergence de la puissance dissipée aux très petites distances de la ligne de contact. Cet aspect a fait l'objet de nombreuses études

et simulations numériques à l'échelle moléculaire, et aucune solution exacte n'est disponible actuellement. En considérant alors x_m comme un paramètre ajustable du modèle, on obtient :

$$\frac{dE_{ts}}{dt} = \gamma(1 - \cos \theta)V = \frac{dE_\eta}{dt} = 3\eta \frac{V^2}{\theta} \text{Log} \left(\frac{x_M}{x_m} \right). \quad (8.51)$$

Dans l'approximation des petits angles de contact où $(1 - \cos \theta) \approx \theta^2/2$, on trouve finalement la *relation de Tanner* :

$$\theta^3 = 6 \frac{\eta V}{\gamma} \text{Log} \left(\frac{x_M}{x_m} \right) = 6 Ca \text{Log} \left(\frac{x_M}{x_m} \right). \quad (8.52)$$

Le *nombre capillaire* $Ca = \eta V/\gamma$ représente l'importance relative des effets dus à la viscosité et de ceux dus à la capillarité. En effet, les différences de pression d'origine visqueuse et capillaire seront respectivement de l'ordre de $\eta V/L$ et de γ/L , et leur rapport sera de l'ordre de Ca , si les gradients de vitesse et les rayons de courbure des interfaces ont une même longueur caractéristique L (dans le cas contraire, le rapport sera toujours de l'ordre de Ca , mais il faudra introduire un facteur géométrique correcteur). Le nombre capillaire peut également être considéré comme le rapport de la vitesse V caractéristique de l'écoulement et d'une vitesse γ/η caractéristique du fluide (de l'ordre de 10^2 m.s^{-1} pour l'eau). On remarque que le résultat ne fait pas intervenir la valeur du paramètre d'étalement : cela reflète simplement le fait que l'excès d'énergie correspondant à la valeur positive de ce paramètre est supposé dissipé dans le film résiduel, sans influencer la dynamique du ménisque macroscopique.

Remarque. La présente approche fondée sur une estimation des puissances motrices et dissipées n'est qu'approximative. En effet, l'hypothèse d'une interface rectiligne implique une différence de pression capillaire nulle de part et d'autre de celle-la et, par conséquent, une pression constante dans le fluide. Cela contredit la forme (8.49) du profil de vitesse qui requiert un gradient de pression $\partial p/\partial x = -3\eta Q/\xi^3$. L'interface doit donc présenter un rayon de courbure variable près de la ligne de contact pour que la différence de pression capillaire puisse correspondre à de tels gradients. Des théories plus complètes ont été développées pour prendre en compte des effets tels que celui-là. On obtient alors des expressions similaires à l'équation (8.52) pour les faibles valeurs de θ , mais le coefficient 6 est remplacé par 9.

La figure 8.10 montre comment la loi de Tanner est vérifiée expérimentalement, à partir de mesures effectuées par une méthode optique sur un ménisque d'huile silicone se déplaçant à l'intérieur d'un tube capillaire. La courbe continue représente la variation théorique prédite par l'équation de Tanner (8.52), mais avec un préfacteur égal à 9 au lieu de 6, comme dans les modèles plus complets. Le rapport $\varepsilon = x_m/x_M$ est pris égal à 10^{-4} , valeur qui donne le meilleur accord avec les points expérimentaux. Ces derniers suivent de très

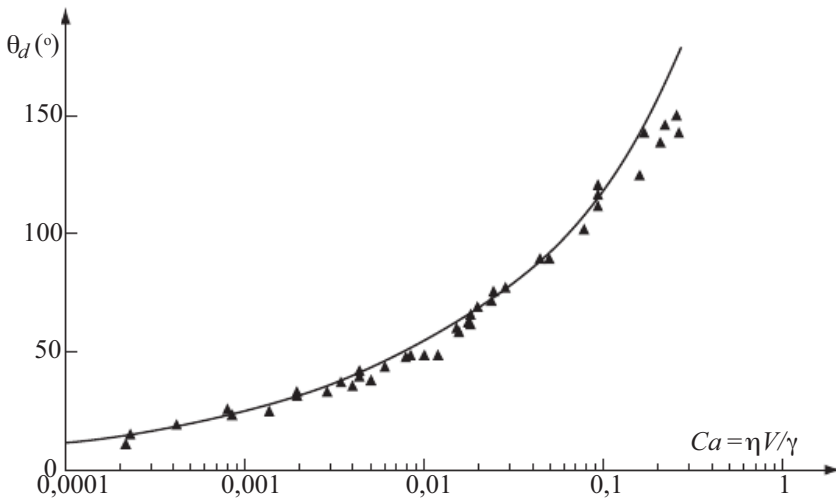


FIG. 8.10 – Variations de l'angle de contact en fonction du nombre capillaire d'une interface d'huile silicone dans un tube capillaire, dans des conditions de mouillage total. (▲) données expérimentales (doc. M. Fermigier et P. Jenffer). La courbe continue est déduite de la loi de Tanner pour $\varepsilon = x_m/x_M = 10^{-4}$.

près la loi théorique, jusqu'à des valeurs étonnamment élevées de l'angle θ , de l'ordre de 100° . La valeur correspondante de x_m est de l'ordre de 100 nm.

Remarque. Cette valeur expérimentale est du même ordre de grandeur que celle prédite par des considérations théoriques de P.G. de Gennes, à partir de l'analyse à petite échelle du raccordement entre le ménisque macroscopique et le film précurseur, et la dissipation d'énergie dans ce dernier. Dans ce modèle, la zone de transition, où l'interface ne peut plus être considérée comme un coin d'angle θ , commence quand l'épaisseur du film atteint une valeur inférieure à a/θ (a est une longueur atomique). La valeur correspondante de la distance x_m est ainsi de l'ordre de a/θ^2 , ce qui explique la valeur relativement élevée de x_m et donc du rapport x_m/x_M . Les théories plus complètes, comme celle de R.G. Cox, permettent de reproduire ces variations expérimentales jusqu'à des valeurs de θ_d encore plus élevées.

Angles de contact en mouillage partiel

On peut appliquer une approche du même type au cas du mouillage partiel, à condition que l'angle de mouillage soit proche de zéro. Les relations ainsi obtenues sont beaucoup moins bien vérifiées que la loi de Tanner ; généralement, on utilise donc plutôt des approches plus empiriques qui généralisent cette loi. D'autres modèles, faisant intervenir des processus d'adsorption moléculaire, ont également été proposés.

L'une des difficultés vient de la définition de l'angle de contact statique discutée à la section 1.4.3 : en effet, suivant la direction du mouvement de la ligne de contact, l'angle de contact prend généralement une valeur différente (angle d'avancée ou de reculée) dans la limite des très faibles vitesses.

8.2.3 Dynamique de l'étalement de gouttes sur une surface plane

Gouttes de petite dimension avec mouillage total

On s'intéresse ici à la variation, en fonction du temps, du rayon des gouttes d'un liquide non volatil, posées sur un substrat solide dans des conditions de mouillage total. On admettra, comme pour établir la loi de Tanner, que la dynamique résulte d'un équilibre à tout instant entre la dissipation visqueuse et le travail des forces capillaires sur la ligne de contact. On suppose (nous discuterons ce point plus tard) qu'il suffit de prendre en compte la dissipation par viscosité dans la zone proche de la ligne de contact (c'est-à-dire à des distances faibles devant le rayon de courbure). Nous appliquerons donc à ce système tridimensionnel les équations obtenues plus haut dans le cas bidimensionnel d'une ligne de contact rectiligne, en supposant qu'elles restent valables tant que le rayon de courbure de l'interface est assez grand devant l'épaisseur de la goutte.

Appelons Ω le volume de la goutte et supposons qu'elle garde une forme de calotte sphérique de hauteur $h(t)$, de rayon de courbure $R(t)$ et de rayon de contact $r_g(t)$ avec le plan (Fig. 8.11). On a alors :

$$\Omega = \frac{\pi}{4} r_g^3 \theta. \quad (8.53)$$

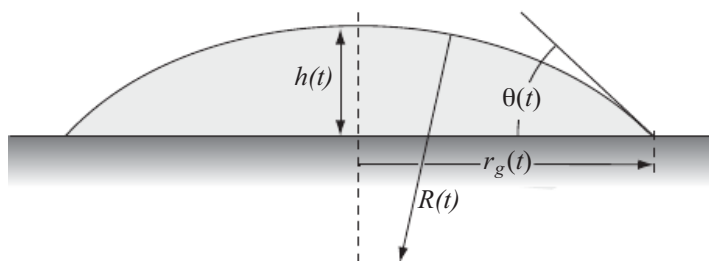


FIG. 8.11 – Étalement d'une goutte sous l'influence des forces de capillarité.

Démonstration. Entre les paramètres géométriques, on a la relation exacte $(2R - h)h = r_g^2$ (Fig. 8.11). On obtient le volume de la calotte sphérique en prenant l'intégrale entre zéro et $h(t)$ de $\pi r^2 dz = \pi(2R - z)z dz$ (r est ici le rayon, exprimé à partir de cette même formule, de la coupe horizontale de la calotte à une hauteur z quelconque, comptée positivement vers le bas à partir du haut de la calotte). On obtient alors :

$$\Omega = \pi \left(Rh^2 - \frac{h^3}{3} \right) \simeq \pi R(t) h^2(t) = \frac{\pi}{2} r_g^2(t) h(t). \quad (8.54)$$

Par ailleurs, on a $h(t) = r_g(t) \tan(\theta/2)$ et l'on obtient alors l'équation (8.53) en supposant θ petit devant l'unité. ■

Combinons les équations (8.52) et (8.53), et remplaçons V par dr_g/dt , on obtient :

$$\frac{dr_g}{dt} = \frac{\gamma}{\eta} \frac{1}{6 \text{Log} \left(\frac{x_M}{x_m} \right)} \left[\frac{4\Omega}{\pi r_g^3} \right]^3 \quad (8.55)$$

d'où :

$$[r_g(t)]^{10} = \frac{5}{3} \frac{\gamma}{\eta \text{Log} \left(\frac{x_M}{x_m} \right)} \left[\frac{4\Omega}{\pi} \right]^3 t. \quad (8.56)$$

On prédit donc une croissance très lente, en $t^{1/10}$, du rayon de la goutte avec le temps. Comme le produit $r_g^3(t)\theta(t)$ est constant (Éq. 8.53), $\theta(t)$ décroît donc en $t^{-3/10}$ dans ce régime. Les coefficients numériques peuvent être calculés facilement en combinant les équations (8.54) et (8.56). Remarquons que la solution obtenue ne peut être qu'approchée car nous avons supposé le rayon de courbure constant le long de l'interface, puisqu'elle est considérée comme une calotte sphérique. Aussi, la pression juste sous la surface libre est constante le long de cette dernière : cela est en contradiction avec l'existence de l'écoulement d'étalement qui fait apparaître des gradients de pression provenant de la viscosité (nous avons déjà discuté ce point à propos de la loi de Tanner). La solution exacte est assez complexe. Elle donne une variation de $r_g(t)$ similaire, mais avec des coefficients numériques un peu différents.

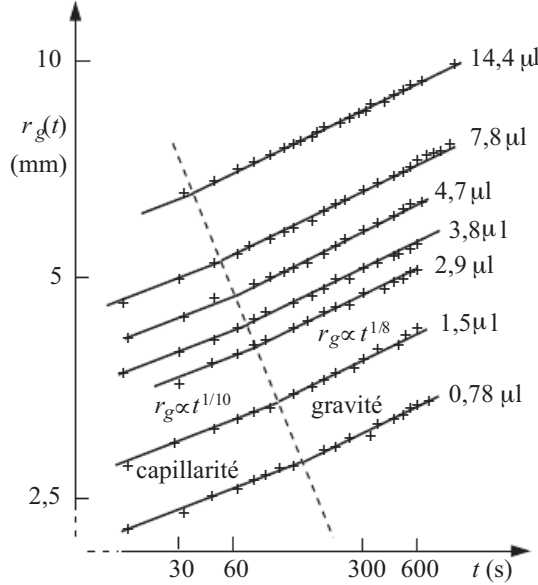


FIG. 8.12 – Variation temporelle (en coordonnées log-log) du rayon $r_g(t)$, pour un ensemble de gouttes d'huile silicone ($\eta = 0,02$ Pa.s, $\gamma = 20$ mN.m⁻¹), de volume Ω variable, qui s'étale sur des plaques planes de verre hydrophiles. La ligne en tirets marque la limite entre les régimes dominés par la gravité et par la capillarité. Les lignes continues, respectivement à droite et à gauche de la ligne en tirets, correspondent à des variations en lois de puissance d'exposants 1/8 et 1/10 (doc. A.-M. Cazabat et M. Cohen Stuart).

La figure 8.12 montre la variation avec le temps du rayon d'un ensemble de gouttes d'huile silicone déposées sur des plaques de verre hydrophiles non rugueuses. La loi de variation en $t^{1/10}$ n'est observée qu'aux temps courts (à gauche de la ligne en tirets) auxquels le rayon r_g est assez faible pour que les effets capillaires restent dominants. Aux temps plus longs, on passe dans un régime dominé par les forces de gravité qui s'applique aux gouttes de plus grand diamètre que nous allons décrire maintenant. Nous avons en effet montré à la section 1.4.4 que ce sont les valeurs relatives du rayon r_g et de la longueur capillaire qui déterminent l'importance relative des effets de capillarité et de gravité.

Étalement de grosses gouttes par gravité

Dans ce cas, la gravité joue un rôle dominant pour déterminer à la fois la géométrie de la goutte et sa dynamique. Les gouttes peuvent alors être considérées comme plates dans la partie centrale et leur courbure est localisée près des bords (Fig. 8.13). Nous allons tout d'abord comparer les dissipations d'énergie par unité de temps dues à la viscosité dans la partie centrale ($dE_{\eta pg}/dt$) à celle près de la ligne de contact ($dE_{\eta lc}/dt$) qui a déjà été calculée dans le cas précédent. Leur rapport vaut :

$$\left[\frac{dE_{\eta pg}}{dt} \right] / \left[\frac{dE_{\eta lc}}{dt} \right] \approx \left[\frac{r_g \theta}{4h} \right] / \left(\text{Log} \left(\frac{x_M}{x_m} \right) \right). \quad (8.57)$$

Au coefficient logarithmique près, ce rapport est de l'ordre de grandeur de celui du rayon r_g de la goutte à la largeur ($\approx h/\theta$) de la zone de transition entre la ligne de contact et la partie plate de la goutte. Ainsi, pour des gouttes de taille r_g grande devant h/θ , la dissipation par viscosité dans la partie plane de la goutte finit par être dominante, contrairement aux gouttes de petite taille vues précédemment, pour lesquelles la dissipation près de la ligne de contact est la plus importante.

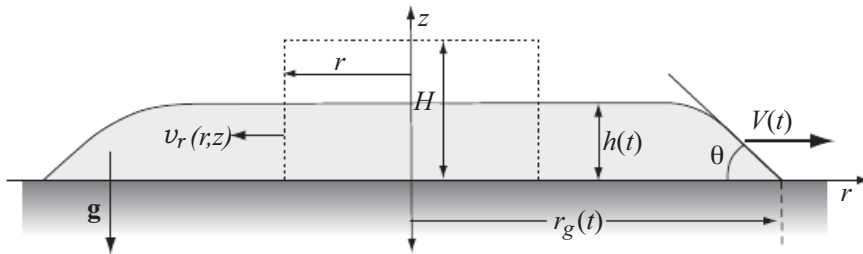


FIG. 8.13 – Vue schématique d'une goutte de grand rayon s'étalant sous l'effet de la gravité.

Démonstration. Supposons que, dans la partie centrale, la goutte a une épaisseur $h(t)$ indépendante de la distance r à l'axe. Analysons la conservation de la masse de liquide dans un cylindre de rayon r , de même axe que la goutte et de hauteur H constante englobant toute celle de la goutte ($H > h(t)$); le débit volumique total $Q(r)$ à travers les parois de ce cylindre est opposé à la variation par unité de temps de la masse de fluide à l'intérieur, soit :

$$Q(r) = 2\pi r h V_m(r) = -\pi r^2 \frac{dh}{dt} \quad (8.58a)$$

ou :

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = -2 \frac{V_m(r)}{r} = \text{cst}(r), \quad (8.58b)$$

où $V_m(r)$ est la moyenne sur l'épaisseur de la goutte de la vitesse radiale $v_r(r, z)$ du fluide. Par ailleurs, comme dans l'équation (8.48), la vitesse moyenne $V_m(r_g)$ est égale à la vitesse d'étalement $V(r_g) = dr_g/dt$ du bord de la goutte. En combinant ce résultat avec l'équation (8.58b) appliquée aux rayons r et r_g , on obtient :

$$V_m(r) = V_m(r_g) \frac{r}{r_g} = \frac{dr_g}{dt} \frac{r}{r_g}. \quad (8.59)$$

Comme dans l'équation (8.49), le profil de vitesse $v_r(r, z)$ dans l'épaisseur de la goutte est parabolique avec un maximum de vitesse égal à $3V_m(r)/2$ à l'interface. On trouve alors que la dissipation visqueuse par unité de temps $dE_{\eta pg}/dt$ dans la partie plate de la goutte, de rayon approximativement égal à r_g , vérifie :

$$\frac{dE_{\eta pg}}{dt} = -\eta \int_0^{r_g} 2\pi r dr \int_0^{h(r)} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{3}{2} \pi \eta V_m^2(r_g) \frac{r_g^2}{h} = \frac{3}{2} \pi \eta \left(\frac{dr_g}{dt} \right)^2 \frac{r_g^2}{h}. \quad (8.60a)$$

En appliquant la formule (8.51) sur le périmètre $2\pi r_g$ de la goutte, on trouve l'énergie $dE_{\eta lc}/dt$ dissipée par viscosité par unité de temps dans la région de la ligne de contact :

$$\frac{dE_{\eta lc}}{dt} = 6\pi \eta r_g \frac{V^2}{\theta} \text{Log} \left(\frac{x_M}{x_m} \right). \quad (8.60b)$$

On retrouve alors bien l'équation (8.57) pour le rapport des deux termes de dissipation. ■

Nous allons maintenant déterminer la loi d'étalement des gouttes, dans le cas où les forces de gravité sont dominantes (Fig. 8.13). Comme précédemment, on suppose que le liquide utilisé est non volatil, pour éviter des phénomènes d'évaporation qui, souvent accompagnés de variations de tension superficielle, créent des écoulements supplémentaires par effet Marangoni (ces derniers sont étudiés à la section 8.2.4 suivante).

Nous estimons la loi d'étalement en supposant que l'épaisseur de la goutte est constante sur toute sa surface. La dissipation d'énergie par viscosité doit à tout instant correspondre à la variation d'énergie potentielle de la goutte : cette dernière vaut alors $(d/dt)[(\pi/2) \rho g r_g^2 h^2]$. Par ailleurs, le volume $\Omega = \pi r_g^2 h$ de la goutte est constant. On a donc, en utilisant l'équation (8.60a) pour évaluer la dissipation visqueuse, le bilan d'énergie suivant :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{2} \rho g r_g^2 h^2 \right) = -\frac{3}{2} \pi \eta \left(\frac{dr_g}{dt} \right)^2 \frac{r_g^2}{h}. \quad (8.61)$$

Remplaçons maintenant h par son expression en fonction de Ω et r_g . On obtient :

$$r_g^7 \frac{dr_g}{dt} = \frac{2\Omega^3}{3\pi^3} \frac{\rho g}{\eta} \quad (8.62)$$

soit :

$$r_g(t) = \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{\frac{3}{8}} \left(\frac{16}{3} \frac{\rho g t}{\eta}\right)^{\frac{1}{8}}. \quad (8.63)$$

De cette manière, on prédit donc (en supposant le rayon de la goutte nul au temps $t = 0$) une croissance de la goutte en $t^{1/8}$, au lieu de $t^{1/10}$ dans le cas précédent. Ce résultat correspond bien à l'évolution aux temps longs, observable sur les courbes de la figure 8.12.

On obtient une évaluation de $r_g(t)$ de la même forme, avec des coefficients plus précis cependant, en supposant que l'épaisseur du film n'est pas exactement constante avec la distance à l'axe, mais qu'elle est décrite par un profil autosimilaire.

Les lois d'étalement en $t^{1/8}$ et $t^{1/10}$ représentent deux cas limites, valables pour l'étalement des gouttes dans des conditions de mouillage total. D'autres types de loi d'étalement (en $t^{1/4}$) sont observées pour des écoulements sur une plaque en rotation ou sur certaines surfaces rugueuses. Des adaptations de ces modèles à des géométries et des propriétés de fluides plus complexes ont des applications très importantes pour les procédés d'étalement de revêtements décoratifs ou protecteurs. Un autre problème pratique important, non discuté ici, est l'apparition d'instabilités interfaciales des films de fluides en écoulement, qui peuvent se manifester par des déformations, souvent très importantes, de la ligne de contact ou par des variations d'épaisseur.

8.2.4 Écoulements induits par des gradients de la tension superficielle – effet Marangoni

Principe des effets Marangoni

Les gradients de tension superficielle dus à des variations de température ou de concentration de solutés (tensioactifs par exemple) peuvent créer des contraintes en surface. Les écoulements fluides induits par de telles contraintes constituent *l'effet Marangoni* ; on parle aussi d'effets *thermocapillaires* lorsqu'ils sont causés par des gradients de température.

Ainsi, si une couche d'eau est posée sur une surface et qu'un point de la surface est touché avec un morceau de savon, on voit cette partie de la surface s'assécher (Fig. 8.14) : en effet, la tension superficielle est réduite localement et les forces de tension superficielle sont déséquilibrées. On a donc un écoulement vers les parties voisines où la tension superficielle reste inchangée (on peut les visualiser par le mouvement de poussières initialement présentes sur cette surface).

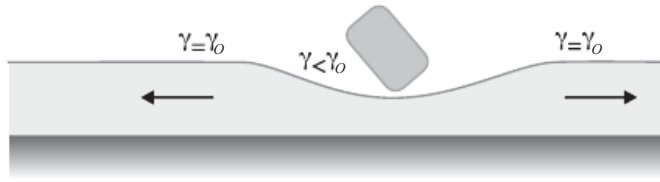


FIG. 8.14 – Déformation d’une couche de fluide par addition locale d’un peu de tensioactif.

De tels mouvements de fluide peuvent être dus également à des variations de la température T d’un point à l’autre d’une interface liquide-air ou liquide-liquide : en effet, comme nous l’avons indiqué à la section 1.4.1, le coefficient de tension superficielle dépend de la température, selon une loi qui, pour des variations de température modérées, prend une forme linéaire :

$$\gamma(T) = \gamma(T_0)(1 - b(T - T_0)). \quad (8.64)$$

Ainsi, un gradient de température parallèle à la surface d’un liquide fait apparaître une contrainte tangentielle sur cette dernière (Fig. 8.15). En effet, sur une bande de largeur δx , les forces de tension de surface ne sont plus équilibrées ; la résultante est orientée vers les zones où la température est la plus faible. Au gradient de température dT/dx correspond un gradient de tension superficielle égal à :

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\gamma}{dT} \frac{dT}{dx} = -b\gamma(T_0) \left(\frac{dT}{dx} \right). \quad (8.65)$$

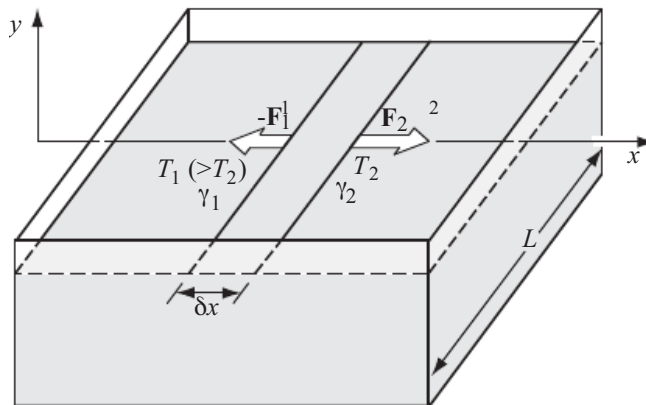


FIG. 8.15 – Contraintes de traction induites à la surface libre d’un liquide par un gradient de température horizontal.

Ce gradient induit une contrainte $\sigma_{xy}^{(\gamma)}$ parallèle à Ox sur l'élément de surface $L \delta x$ avec :

$$\sigma_{xy}^{(\gamma)} = \frac{F_2 - F_1}{L \delta x} = \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)L}{L \delta x} = \frac{d\gamma}{dx} = -b \gamma(T_0) \left(\frac{dT}{dx} \right). \quad (8.66)$$

Le signe négatif qui apparaît dans $\sigma_{xy}^{(\gamma)}$ traduit le fait que la traction (et l'écoulement qu'elle induit) se fait dans la direction où la température est la plus faible.

Écoulements créés dans une couche liquide horizontale par un gradient de température

Pour une surface libre plane d'un liquide en contact avec un gaz, la contrainte tangentielle globale doit être nulle. La contrainte $\sigma_{xy}^{(\gamma)}$ due au gradient de tension superficielle doit donc être compensée par la contrainte de frottement visqueux $\sigma_{xy}^{(\eta)} = -\eta(\partial v_x / \partial y)$ à l'interface associée à l'écoulement qui est ainsi induit. On a alors :

$$\sigma_{xy}^{(\gamma)} + \sigma_{xy}^{(\eta)} = -b \gamma(T_0) \frac{dT}{dx} - \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{\text{interface}} = 0. \quad (8.67)$$

Calculons maintenant le profil d'écoulement ainsi créé dans le film fluide, limité inférieurement par un plan solide horizontal $y = 0$, d'épaisseur moyenne a et infiniment étendu dans la direction Oz (Fig. 8.16). Nous supposons, comme dans les exemples précédents, que l'écoulement est unidirectionnel, la seule composante non nulle étant $v_x(y)$.

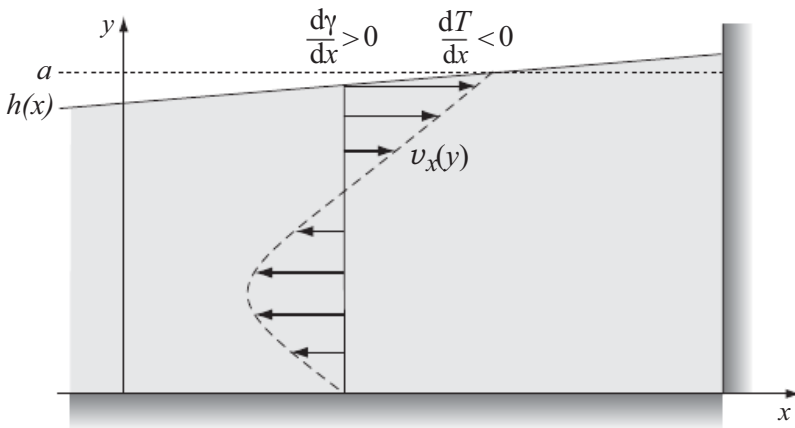


FIG. 8.16 – Profil de vitesse à l'intérieur d'un film fluide de longueur finie, en présence d'un gradient de température horizontal qui induit un écoulement de recirculation par effet Marangoni. Le gradient de pression induit par le profil parabolique de vitesse est accompagné d'une déformation de la surface libre supérieure.

Le gradient de pression suivant Oy vérifie $(\partial p / \partial y) = -\rho g$. Supposons, dans un premier temps, que la surface supérieure est parfaitement horizontale, que la densité du fluide est constante avec la température et que cette dernière est uniforme sur l'épaisseur h . La pression vérifie alors en tout point :

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g(a - y). \quad (8.68)$$

La pression ne dépend donc pas de x et la composante suivant Ox de l'équation de mouvement se réduit à :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0. \quad (8.69)$$

On a donc une variation linéaire de la vitesse v_x avec y , comme dans un écoulement de cisaillement simple. En utilisant (8.67), on trouve :

$$v_x(y) = -\frac{b \gamma(T_0)}{\eta} \left(\frac{dT}{dx} \right) y. \quad (8.70)$$

Dans la pratique, le film est de taille finie dans la direction Ox ; le fluide s'accumule donc du côté vers lequel se fait l'écoulement, ce qui crée un gradient de l'épaisseur $h(x)$ du film. Soit dh/dx la pente de la surface libre ($dh/dx \ll 1$) ; l'écoulement reste quasi unidirectionnel et le gradient vertical de pression est toujours égal à $-\rho g$. Le seul effet de l'inclinaison de la surface est donc d'introduire un gradient de pression horizontal $\rho g (dh/dx)$. Ce gradient crée un contre-écoulement en profondeur et l'on atteint un régime stationnaire quand ce dernier compense l'écoulement de cisaillement près de la surface pour donner un débit global nul. Le profil de l'interface vérifie alors :

$$h^2(x) - h^2(x_0) = -\frac{3 b \gamma(T_0)}{\rho g} \left(\frac{dT}{dx} \right) (x - x_0). \quad (8.71)$$

Ce phénomène peut aisément être observé en approchant la pointe d'un fer à souder de la surface de l'eau ; on constate que la surface se creuse au-dessous de la pointe.

Démonstration. L'équation de mouvement correspondant à l'écoulement stationnaire global s'écrit :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \rho g \frac{dh}{dx}.$$

Après intégration et en utilisant les conditions :

$$\int_0^{h(x)} v_x(y) dy = 0 \quad \text{et} : \quad v_x(0) = 0,$$

on obtient :

$$v_x = \frac{\rho g}{\eta} \frac{dh}{dx} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{yh}{3} \right). \quad (8.72)$$

Cet écoulement est donc la superposition d'un écoulement de cisaillement et d'un écoulement de Poiseuille. On obtient alors dh/dx en utilisant de nouveau la condition (8.67) sur la contrainte en surface, soit :

$$h \frac{dh}{dx} = -\frac{3}{2} \frac{b \gamma(T_0)}{\rho g} \left(\frac{dT}{dx} \right). \quad (8.73)$$

d'où résulte l'équation (8.71) par intégration. ■

Les gradients de tension superficielle induits par des différences de température sont à l'origine de nombreuses instabilités hydrodynamiques. L'une des plus connues est *l'instabilité de Bénard-Marangoni* d'une couche horizontale de fluide à surface libre, chauffée par au-dessous. Nous discuterons plus en détail à la section 11.3.1 ce phénomène qui fait apparaître un réseau hexagonal de cellules de convection. On observe également l'ascension d'un film liquide lorsque l'on plonge dans un bain de ce dernier une plaque verticale chauffée à sa partie supérieure ; enfin, des gouttes de liquide se mettent en mouvement si on les pose sur une plaque où un gradient de température est présent.

Industriellement, les écoulements induits par les gradients de tension superficielle d'origine thermique peuvent avoir une grande importance pratique. C'est, par exemple, le cas dans la production de monocristaux très purs par refroidissement en présence de gradients de température : des défauts peuvent apparaître sous l'effet de ces écoulements. Les mouvements de bulles induits par de tels gradients peuvent aussi influencer fortement le transfert thermique lors de l'ébullition sur une paroi chauffée.

Effets Marangoni dus à des variations de composition chimique

On peut faire varier la tension superficielle d'un fluide en lui ajoutant certains composés, dits tensioactifs : ce sont, par exemple, les molécules amphiphiles que nous avons évoquées à la section 1.4.1 et dont la présence sur une interface peuvent abaisser considérablement la tension superficielle. Un gradient de concentration de telles molécules sur une interface gaz-liquide ou liquide-liquide créera un gradient de tension superficielle qui générera des écoulements de Marangoni.

Une manifestation spectaculaire est le phénomène des *larmes de vin*, qui s'observe dans un verre partiellement rempli de vin suffisamment alcoolisé, en agitant initialement le verre, ce qui permet de laisser un film de liquide sur les parois au-dessus de la surface du liquide. On observe une ascension du liquide du film, qui se rassemble à la partie supérieure de ce dernier en un bourrelet, puis l'apparition de gouttelettes, qui retombent régulièrement vers le bas après un certain temps.

Ce phénomène résulte de la diminution de la tension superficielle d'une solution eau-alcool (le vin !) lorsque la concentration d'alcool augmente. L'évaporation de l'alcool contenu dans le film liquide fait augmenter sa tension superficielle et provoque l'ascension du fluide du film au-dessus de la surface

libre – où la tension superficielle reste inchangée. Dans le bourrelet, l'effet d'évaporation finit par se réduire et les gradients de tension superficielle n'arrivent pas à équilibrer l'effet de la gravité sur les gouttes, qui retombent en *larmes* (Figs. 8.17 CC).

Nous avons vu, au début de ce paragraphe, l'exemple du dépôt d'un peu de savon sur une fine couche d'eau horizontale : cette dernière se trouve asséchée car la tension superficielle diminue très fortement à cet endroit et tout le liquide est attiré vers les autres zones : ce phénomène trouve des applications pratiques au séchage de certains objets fragiles et coûteux, comme les disques (ou *wafers*) de silicium utilisés en micro-électronique (dans ce dernier cas, on procède par pulvérisation de vapeur d'alcool ou d'un composé similaire).

8.3 Chute d'un jet liquide cylindrique

Dans tous les exemples présentés jusqu'ici dans ce chapitre, les écoulements s'opéraient en présence d'une ou deux parois : on pouvait ainsi équilibrer les forces de gravité ou celles dues aux gradients de pression par la contrainte visqueuse sur la paroi.

Ce n'est plus le cas quand un jet libre s'écoule à partir d'un orifice, comme sur la figure 8.18 : la contrainte de cisaillement visqueuse σ'_{xr} à la surface libre du jet ($r = a(x)$) peut, en effet, être considérée comme négligeable : cela entraîne que le gradient radial de la composante de vitesse v_x près de la sur-

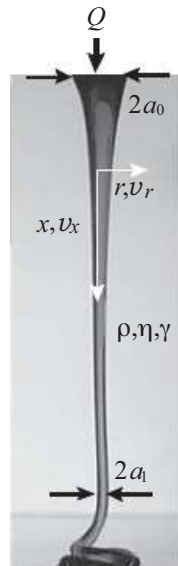


FIG. 8.18 – Chute d'un jet de fluide visqueux à partir d'un orifice. Le jet tombe sur un plan situé au bas de la figure, ce qui produit l'enroulement observé ; ce dernier n'est pas étudié ici et l'on s'intéresse uniquement à la partie droite du jet (doc. N. Ribe).

face (Éq. 4.37) est également nul. Cette absence de contrainte de cisaillement visqueuse σ'_{xr} , susceptible d'induire des variations radiales de vitesse dans le jet, nous conduit à supposer dans la suite que v_x est indépendante de r .

Même si la section du jet varie lentement avec la distance et que l'écoulement est quasi parallèle, les hypothèses de l'approximation de lubrification doivent être alors révisées entièrement : en effet, cette approximation était fondée sur un équilibre entre les contraintes de cisaillement et les gradients de pression ou la gravité.

Des termes visqueux négligés jusqu'à présent devant σ'_{xr} doivent donc maintenant être pris en considération : ce seront, en particulier, les composantes diagonales du tenseur des contraintes de viscosité qui s'opposent à l'étiement du jet lorsque la vitesse du fluide varie suivant Ox . Dans le cas présent, les composantes qui doivent être prises en compte sont : $\sigma'_{xx} = 2\eta(\partial v_x/\partial x)$ et $\sigma'_{rr} = 2\eta(\partial v_r/\partial r)$ (chapitre 4, annexe A-1).

8.3.1 Régime d'écoulement stable

Équations de mouvement

Dans le modèle à une dimension discuté ici, les variations le long du jet de sa section $A(x) = \pi a^2(x)$ et de sa vitesse $v_x(x)$ vérifient l'équation de mouvement démontrée ci-dessous :

$$\rho g A(x) = \rho A(x) \left(v_x(x) \frac{\partial v_x(x)}{\partial x} \right) + \pi \gamma \frac{\partial a(x)}{\partial x} - 3\eta \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{\partial v_x(x)}{\partial x} \right]. \quad (8.74)$$

Cette dernière exprime que la force de gravité est équilibrée par la combinaison de trois termes :

- terme inertiel reflétant l'accélération du fluide le long de sa trajectoire,
- variation suivant Ox de la pression capillaire,
- contraintes visqueuses liées à l'allongement du jet suivant Ox et à la diminution de section et la variation de vitesse qui en résultent.

Démonstration. Intégrons par rapport à r l'équation d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{v} = 0$ en coordonnées cylindriques (chapitre 4, annexe A-1) en tenant compte de la valeur finie de la vitesse v_r en $r = 0$ et du fait que v_x , et donc son gradient $\partial v_x/\partial x$, ne dépendent pas de r . On obtient :

$$v_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (8.75)$$

d'où l'on déduit :

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\sigma'_{xx}}{2}. \quad (8.76)$$

Pour assurer l'équilibre mécanique du jet dans la direction transverse, on doit avoir $p - \sigma'_{rr}$ indépendante de r . Comme, d'après l'équation (8.76), σ'_{rr} doit être indépendant de r , il en sera donc de même de la pression. D'autre part, si p est la pression

du côté intérieur au liquide au niveau de l'interface, on doit avoir aussi :

$$p - \sigma'_{rr} = p_{at} + \frac{\gamma}{a(x)}$$

soit :

$$p = p_{at} + \frac{\gamma}{a(x)} - \eta \frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (8.77)$$

Supposons, de plus, l'écoulement stationnaire : le débit Q de fluide dans le jet doit être constant en fonction de x et de t pour assurer la conservation du volume avec :

$$Q = \pi a^2(x) v_x(x) = A(x) v_x(x) \quad (8.78)$$

où $A(x)$ est la section du jet à la distance x . Écrivons maintenant l'équation (5.10) de conservation de la quantité de mouvement dans une tranche de jet comprise entre les sections x et $x + \delta x$:

$$\rho g A \delta x = [\rho Q v_x(x) + (p(x) - p_{at})A(x) - \sigma'_{xx}A(x)]_x^{x+\delta x}. \quad (8.79)$$

En récrivant cette expression sous forme différentielle et en utilisant les relations (8.75, 8.77, 8.78), on obtient l'équation (8.74). ■

Nous supposons, tout d'abord, que la variation de pression capillaire a une influence négligeable et recherchons les lois de variation dans les deux cas limites où soit le terme inertiel, soit le terme visqueux est dominant.

Régime inertiel

L'équation (8.74) se réduit à :

$$g = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

soit, en intégrant :

$$v_x^2(x) - v_{x0}^2 = 2gx. \quad (8.80)$$

On reconnaît la variation de vitesse avec la distance d'un corps en chute libre : ce résultat est logique puisque les seules forces de frottement sont visqueuses et qu'elles sont supposées ici négligeables. Quand $v_x \gg v_{x0}$, la vitesse augmente donc comme la racine carrée de la distance ($v_x(x) \simeq \sqrt{2gx}$).

Régime visqueux

L'équation (8.74) devient :

$$\rho g A(x) = -3\eta \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{\partial v_x(x)}{\partial x} \right]. \quad (8.81)$$

On en déduit les variations suivantes de la vitesse et de la section avec la distance x :

$$v_x(x) = \frac{g}{6\nu} (x - x_i)^2 \quad (8.82a)$$

et :

$$A(x) = \frac{6\nu Q}{g}(x - x_i)^{-2}. \quad (8.82b)$$

On peut alors déterminer x_i (<0) d'après la valeur de la vitesse en $x = 0$. Pour $v_x \gg v_{x0}$, la vitesse augmente comme le carré de la distance ($v_x = g x^2 / 6\nu$).

Démonstration. La force de gravité est équilibrée, dans ce cas, par les contraintes de viscosité créées par l'étirement du jet. Supposons que l'on a, comme dans l'autre cas, une variation de v_x en loi de puissance de x ou, plus précisément, de $(x - x_i)$, où x_i est une origine arbitraire avec $v_x = C_\eta(x - x_i)^\alpha$: cela implique que $A = (Q/C_\eta)(x - x_i)^{-\alpha}$. En reportant dans l'équation (8.81), on obtient $(x - x_i)^{2-\alpha} = 3\nu\alpha C_\eta / g$, ce qui impose $\alpha = 2$ et $C_\eta = g/6\nu$. On obtient alors les équations (8.82). ■

Remarque. Pour un orifice d'injection de diamètre d , cette solution autosimilaire en loi de puissance n'est valable que loin en aval de l'orifice, lorsque la section $A(x)$ du jet est devenu faible devant sa valeur initiale $\pi d^2/4$. En combinant cette condition avec l'équation (8.82a), on obtient : $x - x_i \gg \sqrt{(24/\pi)(\nu Q/d^2 g)}$.

Transition du régime visqueux vers le régime inertiel

Le régime visqueux est observé dans la phase initiale où les forces de viscosité maintiennent une faible vitesse. Ensuite, les effets inertiels prennent le relais.

Évaluons dans le régime visqueux et pour $v_x \gg v_{x0}$ ($x \gg x_i$), la variation avec la distance des termes inertiel et visqueux de l'équation (8.74) à l'aide des équations (8.82a-b). On trouve :

$$\rho A \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \simeq \frac{\rho Q g x}{3\nu} \quad (8.83a)$$

et :

$$-3\eta \frac{\partial}{\partial x} \left[A \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] \simeq \frac{6\eta Q}{x^2}. \quad (8.83b)$$

Le rapport du terme inertiel sur le terme visqueux est donc de l'ordre de $gx^3/(18\nu^2)$: le terme inertiel croît avec la distance alors que le terme visqueux décroît (à cause de la diminution de $A(x)$). La distance x_c correspondant à la transition (rapport de l'ordre de 1) est alors :

$$x_c \simeq \left(\frac{18\nu^2}{g} \right)^{1/3} \quad (8.84a)$$

d'où l'on déduit :

$$v_x(x_c) x_c \simeq 3\nu \quad (8.84b)$$

Justification. On trouve l'équation (8.84b) en écrivant l'équation (8.80) en $x = x_c$, en supposant $v_x \gg v_{x0}$ puis en multipliant les deux membres par x_c^2 .

Pour que le régime visqueux s'étende à toute la longueur du jet, il faut que $x_c \geq L$: dans le cas limite $x_c = L$, on a : $v_L L \simeq 3\nu$ si v_L est la vitesse en $x = L$. Le nombre de Reynolds $Re_L = v_L L / \nu$ basé sur la longueur du jet doit donc être au plus de l'ordre de l'unité.

Remarque. Cette condition est beaucoup plus sévère que celle de l'approximation de lubrification pour des écoulements en présence d'une paroi ; celle-ci serait ici $v_L a_0 / \nu < 1/\theta \approx L/a_0$, ce qui est équivalent à $Re_L < (L/a_0)^2$ avec $(L/a_0)^2 \gg 1$. Ce résultat reflète la valeur beaucoup plus faible des termes visqueux en l'absence de paroi : ces derniers proviennent uniquement de l'étirement du jet qui induit des gradients de vitesse longitudinaux et transverses beaucoup plus modestes que dans un écoulement de cisaillement avec une paroi.

Même pour une variation lente du rayon avec la distance (écoulements quasi parallèles), les termes visqueux ne seront dominants en pratique que si l'on utilise des fluides très visqueux permettant de vérifier la condition $x_c \geq L$ (Éq. 8.84).

Ordre de grandeur. Pour l'eau ($\nu \simeq 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$), on trouve $x_c \approx 0,12 \text{ mm}$, ce qui rend difficile toute observation. On atteindra une valeur de l'ordre de 0,1 m pour une viscosité d'environ $2,5 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, soit 25 000 fois la viscosité de l'eau.

8.3.2 Effets capillaires et instabilité de Rayleigh-Plateau du jet

Nous avons négligé, jusqu'à présent, les effets de la tension superficielle. De fait, pour les fluides très visqueux, l'écoulement d'un jet vertical, que nous venons de décrire, reste stable. En revanche, pour des fluides peu visqueux comme l'eau, l'influence de la tension superficielle peut conduire à une déstabilisation et à la formation de gouttes ; on s'en rend compte facilement en regardant l'évolution avec la distance d'un jet d'eau vertical initialement cylindrique (Fig. 8.19 CC).

Pour expliquer cette instabilité dite de *Rayleigh-Plateau*, calculons les variations de pression capillaire induites par une déformation de la surface extérieure d'un jet liquide initialement cylindrique. Plus précisément, on suppose que le jet reste axisymétrique et que son rayon local $R(x)$ est modulé sinusoïdalement dans la direction Ox de l'axe (Fig. 8.20) :

$$R(x, t) = R_0 + h(t) \cos kx. \quad (8.85)$$

On suppose que $h(t) \ll R_0$ et que la pente de la surface reste toujours faible ($dR/dx \ll 1$).

Estimons maintenant la différence de pression capillaire $\Delta p_{cap}(x)$ entre l'intérieur et l'extérieur due à cette déformation :

$$\Delta p_{cap}(x, t) = \gamma h(t) \cos kx \left(k^2 - \frac{1}{R_0^2} \right). \quad (8.86)$$

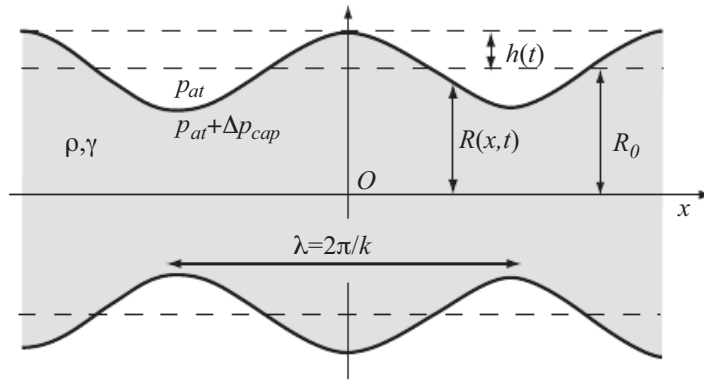


FIG. 8.20 – Schéma du développement de l'instabilité de Rayleigh-Plateau.

Justification. $\Delta p_{cap}(x)$ est donnée par la loi de Laplace (Éq. 1.58) et elle est la somme des deux contributions des courbures dans les plans passant par l'axe et dans le plan perpendiculaire à l'axe. On obtient alors :

$$\Delta p_{cap} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \gamma \left(-\frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{R_0 + h \cos kx} \right). \quad (8.87)$$

En développant le second terme par rapport à h/R_0 , on obtient la relation (8.86).

Lorsque $k^2 - 1/R_0^2 < 0$, on a une valeur de Δp_{cap} négative dans les zones où $R(x) > R_0$ ($\cos kx > 0$) et positive, au contraire, pour $R(x) < R_0$ ($\cos kx < 0$). Comme la pression extérieure est égale à la pression atmosphérique, on a donc une dépression dans les parties où le rayon du jet est augmenté et une surpression dans celles où il est diminué : l'écoulement induit par ces différences de pression renforce donc la déformation. L'amplitude absolue de ces variations de pression est la plus élevée quand $|k| \ll 1/R_0$ et diminue quand k se rapproche de $1/R_0$.

Remarque. Cette plus forte valeur des variations de la pression capillaire avec x pour les déformations de grande longueur d'onde peut sembler paradoxale : en effet, les effets capillaires augmentent en général avec la courbure des interfaces. En fait, ici, la contribution à la loi de Laplace de la courbure dans les plans passant par l'axe (terme en k^2 dans (8.86)) stabilise l'interface ; c'est la courbure dans les plans perpendiculaires à l'axe qui le déstabilise (terme en $-1/R_0^2$). Il est donc logique que la pression capillaire déstabilisante soit maximale quand le premier terme est presque nul pour $k \rightarrow 0$.

En revanche, la variation avec k du taux de croissance σ ne dépend pas seulement de Δp_{cap} , mais aussi du fait que le transfert de matière entre les parties de rayon plus faible et plus élevé s'opère sur une distance de l'ordre de la demi-longueur d'onde : la réduction de cette distance quand k augmente doit donc, au contraire, contribuer à augmenter σ . L'estimation approximative de σ (faite plus bas) pour un écoulement inertiel :

$$\sigma^2 \propto k^2 R_0^2 (1 - k^2 R_0^2) \quad (8.88)$$

combine bien ces deux effets. Ce taux de croissance n'est positif que si $k < 1/R_0$ (cas instable) et il est maximum pour $k = 1/(R_0\sqrt{2}) \simeq 0,7R_0$: cette valeur est proche de celle observée expérimentalement et correspond à une longueur d'onde de 1,4 fois le périmètre du jet.

Ce dernier résultat s'applique à de nombreuses instabilités présentant une bande de longueurs d'onde instables : le choix de la longueur d'onde privilégiée correspond alors à un taux de croissance maximum. Par ailleurs, le modèle simple discuté ici ne prend pas en compte l'effet de la viscosité ou de l'écoulement moyen.

Justification de l'équation (8.88). Dans les cas où l'instabilité est la plus visible (fluides peu visqueux), on est généralement dans le régime inertiel et l'on néglige l'influence de la viscosité : l'accélération $\partial v_x / \partial t$ du fluide est alors proportionnelle au gradient de pression suivant Ox . En admettant que ce gradient de pression est uniforme sur la section et égal au gradient de pression capillaire et que la vitesse est également uniforme, on doit avoir : $\rho \partial v_x / \partial t \approx -\partial \Delta p_{cap} / \partial x$. En utilisant la relation (8.86) pour estimer Δp_{cap} , le débit $Q(x, t)$ correspondant vérifie :

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \approx -\frac{\pi R_0^2}{\rho} \frac{\partial \Delta p_{cap}(x)}{\partial x} = \frac{\pi \gamma h(t) R_0^2}{\rho} \sin kx k \left(k^2 - \frac{1}{R_0^2} \right). \quad (8.89)$$

La conservation du débit de fluide peut s'écrire localement pour une valeur de x donnée sous la forme :

$$2\pi R_0 \cos kx \frac{dh(t)}{dt} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (8.90)$$

où le premier membre représente la variation temporelle de la section du jet (toujours si $h \ll R_0$). En dérivant les équations (8.89) et (8.90) respectivement par rapport à x et t et en égalant les résultats, on obtient, après avoir divisé les deux membres par $2\pi R_0 h(t) \cos kx$:

$$\frac{1}{h(t)} \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \approx \frac{\gamma}{2\rho R_0^3} k^2 R_0^2 (1 - k^2 R_0^2) \quad (8.91a)$$

ou :

$$\sigma^2 \approx \frac{\gamma}{2\rho R_0^3} k^2 R_0^2 (1 - k^2 R_0^2), \quad (8.91b)$$

en supposant une croissance temporelle de $h(t)$ en $\exp \sigma t$. Le taux de croissance σ vérifie donc bien la relation (8.88). En prenant en compte les gradients de pression et la vitesse radiale, on obtient une relation similaire où le facteur $k^2 R_0^2 / 2$ est remplacé par une fonction $f(kR_0)$ dont le maximum correspond à $k = 0,697/R_0$, ce qui est très proche de la valeur obtenue par l'expression approchée.

Remarques.

– Pour les fluides de viscosité élevée, l'instabilité de Rayleigh-Plateau reste observable car les variations de pression capillaire associées aux déformations de l'interface (Éq. 8.86) restent les mêmes. En revanche, l'équation (8.88) n'est plus valable car le développement de l'instabilité résulte alors d'un équilibre entre les forces capillaires et les forces visqueuses.

– L’instabilité de Rayleigh-Plateau est aussi observable dans quelques solides extrêmement mous, comme certains gels. Tous les solides ont, en effet, une énergie de surface : contrairement aux liquides, les forces correspondantes sont cependant généralement négligeables devant les forces élastiques. On peut caractériser leur rapport par la longueur $h = \gamma/E$: γ est l’énergie de surface et E le module de Young (rapport entre la contrainte F/S et la déformation relative résultante $\Delta L/L$). Pour le fer, par exemple, cette longueur est de 3×10^{-13} m et l’énergie de surface n’influence pas les déformations à l’échelle courante. Ce n’est plus le cas pour quelques gels dont le module de Young E a des valeurs de quelques Pa (au lieu de 7×10^{10} Pa pour le fer) : la longueur h est alors de quelques millimètres. Les forces de tension superficielle deviennent suffisantes pour induire une instabilité de Rayleigh-Plateau (en revanche, les forces élastiques peuvent empêcher une rupture en gouttelettes).

This page intentionally left blank

Chapitre 9

Écoulements à petit nombre de Reynolds

LES ÉCOULEMENTS aux petits nombres de Reynolds sont caractérisés par la prédominance des effets dus à la viscosité du fluide sur ceux liés à son inertie. L'équation de Stokes, qui régit ces écoulements, est linéaire car le terme convectif non linéaire $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$ peut être négligé. Dans le cas des écoulements parallèles, que nous avons étudiés au chapitre 4, ce terme convectif était nul à toutes les vitesses. Dans le chapitre 8 précédent, nous avons considéré des écoulements quasi parallèles pour lesquels les termes visqueux continuent à dominer pour des raisons géométriques jusqu'à des nombres de Reynolds Re assez élevés. Dans ce chapitre, nous traitons des écoulements de géométrie quelconque où la faible valeur des contributions inertielles vient de celle de Re .

Après avoir donné quelques exemples de tels écoulements (section 9.1), nous étudierons, à la section 9.2, un certain nombre de propriétés générales (réversibilité, additivité, minimum de dissipation) qui découlent de la forme linéaire de l'équation de Stokes et qui sont à l'origine de solutions simples ; ces propriétés démarquent totalement ces écoulements de ceux aux grands nombres de Reynolds. Les problèmes d'écoulements autour d'objets petits (ou de mouvements de ces objets dans un fluide au repos) constituent un ensemble important d'applications qui seront traitées à la section 9.3. L'écoulement autour d'une sphère (problème de Stokes) en est un exemple essentiel, dont la résolution est délicate (section 9.4). Dans la section 9.5, nous examinons les corrections à apporter à grande distance quand Re devient de l'ordre de l'unité. Enfin, nous considérerons le problème du mouvement d'un ensemble de particules (suspensions) (section 9.6) et celui d'un fluide s'écoulant autour d'un ensemble fixe de particules (milieu poreux) (section 9.7).

9.1 Les écoulements à petit nombre de Reynolds

9.1.1 Sens physique du nombre de Reynolds

Nous avons introduit à la section 2.3.1 le nombre de Reynolds par l'expression :

$$Re = \frac{\rho UL}{\eta} = \frac{UL}{\nu}. \quad (9.1)$$

U et L représentent respectivement la vitesse et la taille caractéristiques de l'écoulement, et ρ , η et ν sont respectivement la masse volumique et les viscosités dynamique et cinématique du fluide. On peut donner au nombre de Reynolds plusieurs interprétations physiques :

- **Rapport τ_ν/τ_c des temps caractéristiques** : τ_ν de transport de quantité de mouvement par diffusion visqueuse sur la distance L ($\tau_\nu = L^2/\nu$) et τ_c de transport de quantité de mouvement par convection sur la distance L ($\tau_c = L/U$).
- **Rapport des termes d'inertie et de viscosité** de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \rho \mathbf{f} + \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (9.2)$$

Dans cette équation, si les différentes composantes de la vitesse sont du même ordre, ainsi que les échelles de taille dans les différentes directions (contrairement au cas des écoulements parallèles ou quasi parallèles), les termes inertiels $\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$ et visqueux $\eta \Delta \mathbf{v}$ sont respectivement de l'ordre de $\rho U^2/L$ et $\eta U/L^2$ et leur rapport est bien égal à Re .

- **Rapport des contraintes** associées à l'inertie du fluide (ρU^2) et au frottement visqueux ($\eta U/L$).

9.1.2 Exemples d'écoulements à petit nombre de Reynolds

Les écoulements à petit nombre de Reynolds ($Re \ll 1$), parfois appelés *écoulements rampants*, sont donc des écoulements dominés par la viscosité où les effets inertiels seront négligeables. Ces écoulements peuvent avoir des origines physiques très variées, puisque ce nombre est obtenu par combinaison de trois facteurs différents :

Faible taille d'objets en mouvement ou de canaux d'écoulement

(La faible valeur de Re est alors associée à celle de L) :

- **Mouvements de bactéries** (longueur de quelques micromètres) : $Re \approx 3 \times 10^{-5}$. Pour des bactéries d'une longueur de $3 \mu\text{m}$ se déplaçant à une vitesse de $10 \mu\text{m.s}^{-1}$ dans l'eau ($\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\eta \approx 10^{-3} \text{ Pa.s}$), on trouve $Re \approx 3 \times 10^{-5}$ (ce problème sera discuté dans la section 9.3.3).
- **Écoulements dans les milieux poreux et fissurés** (section 9.7) pour lesquels l'ouverture des chenaux d'écoulement est de l'ordre de quelques microns ou même moins.

Remarque. Pour les vitesses d'écoulement élevées et des matériaux avec des pores de grande taille, la condition $Re < 1$ ne sera souvent plus vérifiée dans la pratique).

- **Microfluidique.** Les technologies de micro-usinage et de microélectronique ont permis la réalisation de réseaux de microcanaux d'ouvertures de plus en plus faibles (également quelques microns ou moins) gravés et interconnectés. Cela permet de réaliser des dispositifs d'analyse d'une très faible quantité de fluide ou de préparer en faible quantité des composés pharmaceutiques à forte valeur ajoutée. Les problèmes de mélange et de séparation jouent un rôle très important dans ces dispositifs et ont des caractéristiques spécifiques aux faibles nombres de Reynolds.

Fluides très visqueux et/ou de vitesse faible

- **Mouvements lents du manteau terrestre** : $Re \approx 10^{-20}$.

À des profondeurs supérieures à 100 km, le manteau terrestre peut être considéré comme un fluide newtonien de masse volumique $\rho \approx 2,1 \text{ kg.m}^{-3}$ et de viscosité $\eta \approx 10^{21} \text{ Pa.s}$. Avec $U \approx 0,05 \text{ m.an}^{-1}$ ($1,5 \times 10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$) et une hauteur du manteau de l'ordre de 2900 km, on trouve la valeur de Re de 10^{-20} .

- **Déplacement des glaciers** : $Re \approx 10^{-17} - 10^{-15}$. Sur la figure 9.1 CC, le mouvement de la langue glaciaire est marqué par des bandes de roches (*bandes de Forbes*) déformées par suite de la variation de vitesse entre les bords et le centre du glacier. Malgré les apparences, le profil des bandes n'est pas parabolique (contrairement aux écoulements de Poiseuille de la section 4.5.3) : la glace ne peut pas être considérée comme un fluide newtonien, et, par ailleurs, la géométrie de l'écoulement est complexe car l'épaisseur de la couche de glace est souvent beaucoup plus faible que sa largeur.

Supposons que $L \approx 1000 \text{ m}$ et $U \approx 0,3 \text{ m.an}^{-1}$ (10^{-8} m.s^{-1}). La viscosité de la glace est très variable dans la gamme $10^{13} < \eta < 10^{15} \text{ Pa.s}$ avec $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. On obtient alors les valeurs de Re indiquées.

- **Écoulements de fluides très visqueux.** Citons par exemple les goudrons, les pâtes, le plastique, le miel. Certains pétroles lourds ont, à la température ambiante, une viscosité plusieurs millions de fois supérieure à celle de l'eau.

9.1.3 Quelques caractéristiques marquantes

Distance d'arrêt d'un mobile

Caractérisons l'influence de l'inertie par la distance d_a d'arrêt d'un mobile de vitesse initiale U lorsque l'on supprime brutalement la force qui le propulse (l'opposée de la force de traînée F_T). Aux faibles nombres de Reynolds, la distance d'arrêt vérifie $d_a/L \approx (\rho_S/\rho)Re$ alors que, aux nombres de Reynolds élevés, on a $d_a/L \approx \rho_S/\rho$ (L est la taille de l'objet, ρ_S sa masse volumique et ρ et η sont la masse volumique et la viscosité du fluide). La distance d'arrêt sera donc très faible si $Re \ll 1$. Ainsi, quand une bactérie de quelques microns arrête sa propulsion, sa vitesse s'annule en un temps de l'ordre de la microseconde et elle ne parcourt donc que 10^{-11} m (avec les valeurs numériques données à la section 9.1.2). Au contraire, un bateau avançant sur son erre après avoir coupé son moteur parcourt une distance de l'ordre de sa taille.

Démonstration. Aux nombres de Reynolds élevés, on peut estimer F_T par l'intégrale $\rho U^2 L^2$ du flux de quantité de mouvement ρU^2 sur la section $S = L^2$ du mobile; on trouvera le même ordre de grandeur de F_T au chapitre 12 pour les écoulements turbulents. La masse m du mobile vérifie $m \approx \rho_S L^3$ et son énergie cinétique initiale vaut donc $E_c \approx \rho_S U^2 L^3$. La distance d'arrêt d_a est telle que le travail de la force F_T annule l'énergie cinétique E_c et vérifie donc $F_T d_a \approx E_c$. On trouve alors bien : $d_a/L \approx \rho_S/\rho$.

Aux faibles nombres de Reynolds, la force de traînée est purement visqueuse avec : $F_T \approx \eta UL$ (section 9.2.4) et la distance d'arrêt d_a vérifiera toujours $F_T d_a \approx E_c$; on obtient alors bien $d_a = (\rho_S/\rho)LRe$. Les temps d'arrêt correspondants sont de l'ordre de d_a/U et sont respectivement égaux à $(\rho_S/\rho)\tau_c$ et $(\rho_S/\rho)\tau_d$ pour les cas $Re \gg 1$ et $Re \ll 1$: on retrouve les temps caractéristiques de convection et de diffusion visqueuse (section 9.1.1) mais avec un facteur (ρ_S/ρ) supplémentaire. ■

Mélange à petit nombre de Reynolds

Les écoulements aux petits nombres de Reynolds ont, comme tous les écoulements laminaires, des lignes de courant qui n'évoluent que lentement dans le temps : on n'a donc aucun brassage comparable à celui réalisé par des fluctuations de vitesse en turbulence. Le passage des solutés à mélanger d'une ligne de courant à une autre s'effectue uniquement par diffusion moléculaire transverse. Dans un écoulement simple de géométrie quelconque, ce mécanisme de mélange ne sera efficace que si le *nombre de Péclet* $Pe = UL/D_m$, défini à la section 2.3.2, est inférieur à 1. Cette condition est bien plus sévère que la condition $Re \ll 1$ car, en général, $D_m \ll \nu$; pour l'eau et des ions de solutés simples, on a ainsi $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $D_m \approx 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Le rapport D_m/ν

diminue pour des molécules de soluté de plus haute masse moléculaire, ainsi que pour des solvants plus visqueux car $D_m \propto \nu^{-1}$ pour un soluté donné et un solvant de viscosité ν . Dans le cas de fluides visqueux et de molécules de soluté de grande taille, le mélange par diffusion moléculaire ne sera donc efficace que pour des vitesses extrêmement faibles.

Démonstration. Prenons l'exemple d'un écoulement de taille caractéristique L dans toutes les directions et de vitesse caractéristique U avec $Re \ll 1$; supposons que l'on veuille mélanger avec le reste de l'écoulement un traceur (colorant, composé chimique...) caractérisé par un coefficient de diffusion moléculaire D_m et initialement localisé sur une ligne d'écoulement. Le temps τ_D nécessaire pour que le traceur se répartisse dans tout l'écoulement par diffusion transverse aux lignes de courant est $\tau_D \approx L^2/D_m$: pour que ce mélange soit réalisé pendant le temps de transit $\tau_c \approx L/U$ du traceur le long du canal, il faut que $\tau_D < \tau_c$, ce qui conduit bien à la condition $Pe < 1$. ■

Nous évoquerons à la section 9.2.3 la stratégie de *mélange lagrangien* (aussi appelé *chaotique*) : elle permet d'augmenter l'efficacité de la diffusion moléculaire en réduisant l'épaisseur des couches de chaque fluide par une suite bien choisie de mouvements relatifs des parois de l'écoulement. À la section 10.8.3, nous évoquerons également le problème voisin de la dispersion de Taylor, cette fois-ci dans un écoulement parallèle mais pas nécessairement à faible nombre de Reynolds.

9.2 Équation du mouvement à petit nombre de Reynolds

9.2.1 Équation de Stokes

Comme nous l'avons vu à la section 9.1.1, une première caractéristique de base des écoulements à $Re \ll 1$ est la possibilité de négliger le terme d'inertie $\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$ de l'équation de Navier-Stokes (9.2) devant le terme visqueux ($\eta \Delta \mathbf{v}$).

Un autre nombre sans dimension clé est le rapport Nt_ν (section 4.5.4) du terme instationnaire $\rho(\partial \mathbf{v} / \partial t)$ au terme visqueux :

$$Nt_\nu = \frac{\rho L^2}{\eta T} = \frac{L^2}{\nu T} \approx \frac{|\rho \partial \mathbf{v} / \partial t|}{|\eta \Delta \mathbf{v}|} \quad (9.3)$$

où T est le temps caractéristique des variations de la vitesse. La condition de petit nombre de Reynolds n'implique aucune hypothèse sur la stationnarité de l'écoulement, et donc sur la valeur de Nt_ν ; cependant, nous nous limiterons dans presque tout ce chapitre à des écoulements pour lesquels les profils de vitesse sont quasi stationnaires et où Nt_ν est, lui aussi, très petit devant l'unité. Cela signifie que, pendant le temps T , les variations de vitesse peuvent se propager par diffusion visqueuse sur une distance bien supérieure à la taille

caractéristique L de l'écoulement. Dans ces conditions, le terme en $\rho \partial \mathbf{v} / \partial t$ de l'équation du mouvement peut être négligé.

Remarque. Nous avons déjà rencontré ce rapport à la section 4.5.4 à propos de l'écoulement alternatif d'un fluide entre deux plans (dans ce cas, le temps caractéristique T est la période d'oscillation) et à la section 8.1.3.

En combinant les hypothèses précédentes, l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\mathbf{grad} p - \rho \mathbf{f} = \mathbf{grad}(p - p_0) = \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (9.4)$$

La force extérieure $\mathbf{f}$ par unité de masse peut, en effet, être écrite sous la forme $\mathbf{f} = (\mathbf{grad} p_0) / \rho$ dans le cas fréquent où elle dérive d'un potentiel : lorsque $\mathbf{f}$ correspond à l'accélération de la pesanteur $\mathbf{g}$, $\mathbf{grad} p_0$ représente le gradient de pression hydrostatique.

En pratique, on ne fait pas intervenir ces forces en volume lorsqu'elles n'échangent pas d'énergie avec l'écoulement. On n'écrira pas explicitement dans ce cas le terme $\mathbf{grad} p_0 = \rho \mathbf{g}$ qui sera pris en compte implicitement dans la variable p . L'équation (9.4) prend alors la forme dite de *l'équation de Stokes* :

$$\mathbf{grad} p = \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (9.5)$$

Remarque. Cette équation dérivée de l'équation de Navier-Stokes suppose, comme elle, que l'écoulement est incompressible. Aux grands nombres de Reynolds, nous avons vu, à la section 3.3.2, que cette hypothèse est valable si $U \ll c$ (c est la vitesse du son égale à $1/(\chi \rho)^{1/2}$, où la compressibilité χ du fluide est égale à $-(1/V) (\partial V / \partial p)$). Aux petits nombres de Reynolds nous verrons, à la section 9.2.4, que les différences de pression δp induites par l'écoulement sont de l'ordre de $\eta U / L$ (au lieu de ρU^2 pour $Re \gg 1$). Les variations relatives de volume $\delta V / V$ correspondantes sont donc (en valeur absolue) de l'ordre de $\chi \eta U / L$, que l'on peut récrire sous la forme $\chi \eta U^2 / Re = (U^2 / c^2) / Re$. La condition d'incompressibilité devient donc : $U \ll c \sqrt{Re}$. Elle est beaucoup plus restrictive et peut devenir difficile à vérifier aux très petits nombres de Reynolds, tels que ceux que nous avons mentionnés pour le mouvement du manteau terrestre.

9.2.2 Quelques formes équivalentes de l'équation de Stokes

L'équation de Stokes (9.5) peut être écrite de manière plus générale en faisant intervenir les composantes σ_{ij} des contraintes de surface dans le fluide. Rappelons la formule (4.7) :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p \delta_{ij}$$

où σ'_{ij} représente le tenseur des contraintes de viscosité avec $\partial \sigma'_{ij} / \partial x_j = \eta \Delta v_i$. L'équation (9.5) devient ainsi :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{première forme.} \quad (9.6)$$

Cette expression sera même valable pour des fluides non Newtoniens. Nous avons vu (section 7.1) la possibilité de décrire les écoulements à partir de leur champ de vorticité $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$, plutôt qu'à partir de leur champ de vitesse $\mathbf{v}$. Pour les écoulements à petit nombre de Reynolds, en utilisant la condition d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{v} = 0$ et l'identité :

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (9.7)$$

valable pour un champ de vecteurs $\mathbf{A}$ quelconque, l'équation (9.5) s'écrit sous la forme :

$$\text{grad } p = -\eta \text{rot } \boldsymbol{\omega} \quad \text{deuxième forme.} \quad (9.8)$$

Cette relation implique en particulier que :

$$\Delta p = 0. \quad (9.9)$$

En prenant le rotationnel de l'équation (9.8), le premier membre s'annule ; en appliquant les identités (9.7) et $\text{div } \text{rot} = 0$ au vecteur $\boldsymbol{\omega}$, on obtient :

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \text{troisième forme.} \quad (9.10)$$

Cette relation est un cas particulier de l'équation d'évolution de la vorticité établie au chapitre 7 (Éqs. 7.41 et 7.42) dans le cas d'un écoulement stationnaire et à petit nombre de Reynolds. Le transport de vorticité par diffusion visqueuse y est représenté par le terme $\eta \Delta \boldsymbol{\omega}$. L'interprétation physique de la relation (9.10) est donc que, dans un écoulement stationnaire à petit nombre de Reynolds, les gradients de vitesse atteignent un profil d'équilibre : aucun transport de vorticité ne se produit à l'intérieur d'un écoulement stationnaire de ce type.

Remarque. On remarque que les équations de mouvement utilisées dans les chapitres 4 et 8 pour la détermination des écoulements parallèles et quasi parallèles quasi stationnaires sont des formes particulières de l'équation de Stokes où la vitesse n'apparaît que dans l'une des composantes et où les autres composantes se réduisent à un équilibre hydrostatique. La disparition des termes inertiels est, dans ces autres chapitres, liée à la géométrie de l'écoulement et non à la valeur de Re .

9.2.3 Propriétés des solutions de l'équation de Stokes

Unicité

Dans un canal d'écoulement, et pour des conditions aux limites données (à l'infini et, à distance finie, au niveau des parois solides), l'équation de Stokes a une solution unique. Cette propriété essentielle est une conséquence de la linéarité de l'équation. En revanche, pour un écoulement d'un fluide réel à un nombre de Reynolds suffisamment élevé, il existe une infinité de solutions de l'équation de Navier-Stokes et elles évoluent dans le temps : les termes non linéaires convectifs et la présence de la vorticité sont à l'origine de la multiplicité des solutions et de leur évolution.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux champs de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{v}'(\mathbf{r})$ solutions de l'équation de Stokes et qui vérifient les mêmes conditions aux limites sur les parois ou à l'infini. Montrons tout d'abord que toutes les dérivées des composantes vérifient en tout point :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}. \quad (9.11)$$

Il suffit ensuite d'intégrer par rapport aux x_j pour montrer que $v_i = v'_i$. Pour démontrer la relation (9.11) quels que soient i et j , nous allons établir que :

$$\iiint \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 dV = 0 \quad (9.12)$$

(on somme sur i et j , et l'intégrale est prise sur le volume qui limite l'écoulement). On peut écrire :

$$\begin{aligned} \iiint \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2 dV &= \iiint \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v_i - v'_i) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \right] dV \\ &\quad - \iiint (v_i - v'_i) (\Delta v_i - \Delta v'_i) dV. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre de cette équation se transforme en une intégrale de surface, qui est nulle car $v_i = v'_i$ sur les parois. En utilisant l'équation de Stokes, le second terme peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} \iiint (v_i - v'_i) \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right) dV &= \frac{1}{\eta} \iiint \frac{\partial}{\partial x_i} [(v_i - v'_i)(p - p')] dV \\ &\quad - \frac{1}{\eta} \iiint (p - p') \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i - v'_i) dV. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre de cette égalité est nul car il se transforme, lui aussi, en intégrale de surface, qui est nulle parce que $v_i = v'_i$ sur les parois. Le second terme est également nul car $\text{div } \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}' = 0$. L'identité (9.12) et, par suite, l'unicité du champ de vitesse sont donc démontrées.

Réversibilité

La réversibilité est une conséquence directe de la linéarité de l'équation de Stokes. Supposons en effet connu un champ de vitesse $\mathbf{v}(x, y, z)$, solution de l'équation et correspondant à un champ de pression $p(x, y, z)$; $-\mathbf{v}(x, y, z)$ sera aussi solution à condition de changer également le signe des gradients de pression, ainsi que la vitesse de tous les points des parois solides. L'équation (9.5) reste vérifiée car ses deux membres sont remplacés par leurs opposés et les conditions aux limites sont correctement modifiées. L'unicité des solutions assure alors qu'il s'agit bien du champ de vitesse effectivement réalisé. Il est à noter que, si c'est le gradient de pression hydrostatique qui provoque l'écoulement, il faudra aussi inverser le sens de la gravité $\mathbf{g}$.

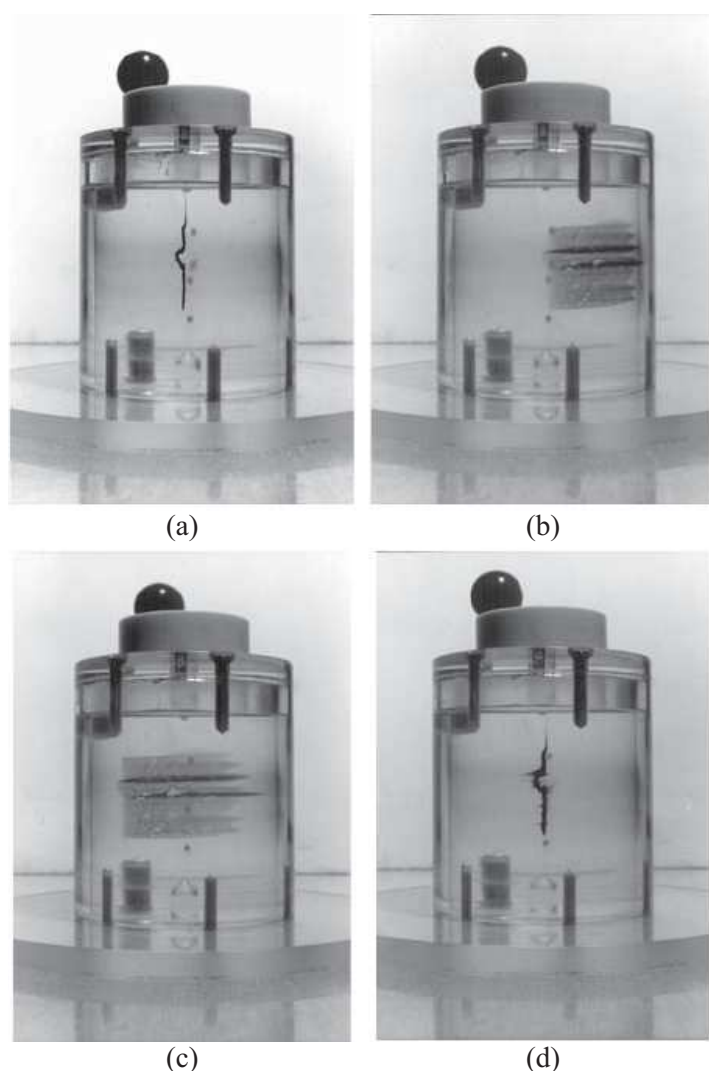


FIG. 9.2 – Expérience montrant la réversibilité des écoulements aux petits nombres de Reynolds; (a) situation initiale : (b) après une rotation d'un tour du cylindre inférieur dans le sens des aiguilles d'une montre; (c) après un tour un quart; (d) retour à la position de départ (docs. auteurs).

– **Mise en évidence expérimentale de la réversibilité** Une expérience classique, illustrée par la série de photos de la figure 9.2, utilise deux cylindres coaxiaux, l'espace entre les cylindres étant rempli d'un fluide très visqueux. Une goutte de colorant d'une taille de l'ordre de la distance entre cylindres est injectée localement dans le fluide. Le cylindre intérieur est ensuite mis en rotation lente : les particules de colorant situées près de lui suivent exactement son mouvement, tandis que celles proches du cylindre extérieur restent pratiquement immobiles. La tache de colorant va donc se répartir sur tout le pourtour de l'espace entre les cylindres et, si l'on effectue plusieurs tours,

deviendra progressivement invisible par étalement. On arrête alors la rotation, puis on la reprend en sens inverse à une vitesse toujours petite. La vitesse sur les surfaces solides et les forces exercées sont ainsi inversées, les particules de colorant prennent donc, d'après le principe de réversibilité, une vitesse opposée à la précédente et parcourent en sens inverse le même trajet. Lorsque l'on a tourné le cylindre du même nombre de tours que dans le sens direct, toutes les particules retrouvent leur position initiale et la tache réapparaît avec une géométrie identique à celle du départ ! Seule la diffusion moléculaire du colorant, qui, elle, est irréversible, l'aura un peu étalée. Si l'on avait utilisé un fluide moins visqueux ou si l'on opérait avec une vitesse de rotation assez rapide pour que les termes non linéaires en $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ ne soient pas négligeables, le colorant aurait été brassé par l'effet des gradients de vitesse des tourbillons et sa dispersion aurait été irréversible.

– **Chaos et mélange lagrangien.** Il existe cependant des écoulements à petits nombres de Reynolds dans lesquels la propriété de réversibilité précédente n'est pas vérifiée. C'est le cas dans l'expérience décrite plus haut lorsque les deux cylindres ne sont pas coaxiaux et que l'on fait tourner alternativement l'un puis l'autre cylindre dans des sens opposés avec des angles différents bien choisis. La figure 9.3 CC montre qu'une tache de colorant initialement localisée peut alors se répartir sur une large partie de la surface sous forme de multiples feuillets.

Dans ce type d'écoulement, les trajectoires suivies par le colorant présentent des points anguleux (dits points *hyperboliques*) au moment de la transition de la rotation d'un cylindre à l'autre. Au niveau de ces points, les trajectoires sont très sensibles à des modifications infinitésimales de position des particules. Ainsi, après un certain nombre de cycles, deux particules de colorant initialement très proches finissent par suivre des trajectoires très différentes et par s'écarter notablement. Dans ce cas, on n'aurait pas, en pratique, réversibilité de l'étalement du colorant, même si l'on reproduisait *précisément en sens inverse* toute la séquence de rotations imposée à l'aller : la moindre erreur sera, en effet, amplifiée et empêchera de retourner à la configuration initiale, même si les écoulements instantanés restent toujours réversibles. Ces résultats contrastent avec le cas des cylindres coaxiaux où les trajectoires sont circulaires et ne présentent donc pas de points hyperboliques.

Ce phénomène a reçu le nom de *chaos lagrangien* parce que les trajectoires dans l'espace réel ont des propriétés similaires à celles qui décrivent, dans l'espace des phases, le comportement chaotique d'un système dynamique (dans l'espace des phases, les coordonnées ne sont pas celles de l'espace réel, mais des variables qui caractérisent l'état du système).

De tels écoulements rendent aussi le mélange beaucoup plus facile, même quand $Re < 1$ et $Pe > 1$. Avec le même raisonnement qu'à la section 9.1.3, le temps nécessaire pour obtenir un mélange par diffusion transverse aux feuillets visibles sur la figure 9.3 CC sera e^2/D_m où e est la distance entre feuillets : cette valeur est très inférieure au temps L^2/D_m correspondant à la diffusion

sur la taille globale L de l'écoulement. On appelle souvent ce type d'approche *mélange chaotique*.

Examinons à présent quelques conséquences de la réversibilité.

– **Symétrie de l'écoulement autour d'un corps présentant un plan de symétrie** On suppose un corps immobile à trois dimensions finies, présentant un plan de symétrie $x = 0$ et placé dans un écoulement de vitesse $\mathbf{U}$ parallèle à Ox loin du corps. Lorsque la vitesse $\mathbf{U}$ de l'écoulement loin du corps est perpendiculaire au plan de symétrie $x = 0$ de ce dernier, les lignes de courant en amont du corps sont symétriques de celles en aval. C'est le cas pour l'écoulement de nombre de Reynolds $Re = 0,16$ autour d'un cylindre représenté par la figure 2.9a.

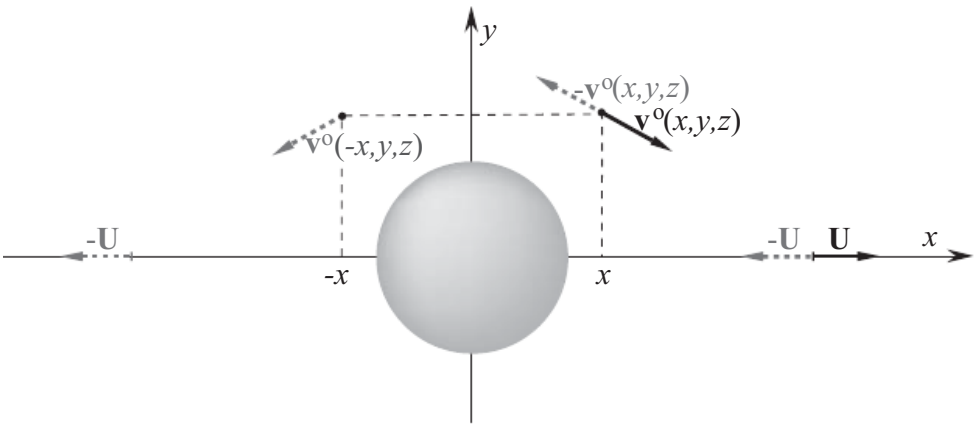


FIG. 9.4 – La symétrie des lignes de courant entre l'amont et l'aval de l'écoulement autour d'un obstacle présentant un plan de symétrie (ici plan $x = 0$) peut être démontrée en remplaçant l'écoulement de vitesse $\mathbf{U}$ loin de l'obstacle par un écoulement de vitesse $-\mathbf{U}$.

Démonstration. Opérons deux transformations qui entraînent, dans les deux cas, un renversement de la vitesse $\mathbf{U}$ de l'écoulement loin du corps, à partir d'un même écoulement $\mathbf{v}^0(x, y, z)$ et écrivons ensuite qu'à cause de la propriété d'unicité, ces écoulements sont identiques (Fig. 9.4). Opérons d'abord un renversement du sens de l'écoulement : le nouveau champ de vitesse vérifie en tout point $\mathbf{v}^1(x, y, z) = -\mathbf{v}^0(x, y, z)$ (réversibilité) et, en particulier, $\mathbf{U}$ devient égal à $-\mathbf{U}$ loin du corps. Repartons de l'écoulement initial $\mathbf{v}^0$ et opérons une symétrie par rapport au plan $x = 0$. L'écoulement à l'infini est renversé ($\mathbf{U} \rightarrow -\mathbf{U}$) et le corps se transforme en lui-même à cause de sa symétrie. ■

Les écoulements obtenus par les deux transformations sont donc identiques car ils correspondent à la même vitesse à l'infini et aux mêmes conditions aux limites à la surface du corps. La première transformation (renversement du sens de l'écoulement) donne la vitesse $\mathbf{v}^1$ de composantes :

$$v_x^1(x, y, z) = -v_x^0(x, y, z) \quad \text{et} \quad v_{y,z}^1(x, y, z) = -v_{y,z}^0(x, y, z).$$

La seconde transformation (symétrie par rapport au plan $x = 0$) donne comme composantes de vitesse :

$$v_x^2(x, y, z) = -v_x^0(-x, y, z) \quad \text{et} \quad v_{y,z}^2(x, y, z) = v_{y,z}^0(-x, y, z).$$

Comme les deux champs de vitesse $\mathbf{v}^1$ et $\mathbf{v}^2$ obtenus doivent être identiques, on a donc :

$$v_x^0(-x, y, z) = v_x^0(x, y, z) \quad \text{et} \quad v_{y,z}^0(-x, y, z) = -v_{y,z}^0(x, y, z).$$

On a bien symétrie des lignes de courant par rapport au plan $x = 0$. Ce résultat est un test très sensible de la faible valeur du nombre de Reynolds. Ainsi, dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre (section 2.4.2), dès que Re devient de l'ordre de 5, des zones de recirculation apparaissent sur la face aval (Fig. 2.9b) ; ensuite, elles ne tardent pas à se déstabiliser (vers $Re = 60$) avec émission d'une allée de tourbillons alternés.

Si l'obstacle ne possède pas de plan de symétrie, l'écoulement à petit nombre de Reynolds n'est pas symétrique entre l'amont et l'aval. Néanmoins, si l'on renverse le sens de l'écoulement, le fluide suit les mêmes lignes de courant en sens inverse, par suite de la réversibilité des écoulements aux petits nombres de Reynolds, indépendamment des propriétés de symétrie des obstacles.

Dans l'exemple qui suit, ce résultat n'est plus vérifié lorsque le nombre de Reynolds augmente.

Imaginons un écoulement obtenu en soufflant ou en aspirant à travers un entonnoir. Aux petits nombres de Reynolds, les lignes de courant divergent à peu près radialement dans la partie évasée (Fig. 9.5a) et sont les mêmes, que l'on souffle ou que l'on aspire ; seul change le sens de l'écoulement. En fait, ce n'est pas ce qui se passe dans la pratique car on se trouve dans des conditions de grand nombre de Reynolds et la réversibilité de l'écoulement n'est plus du tout vérifiée : on peut toujours éteindre une bougie en soufflant à travers le tube étroit de l'entonnoir, jamais en aspirant ! Cela résulte du fait

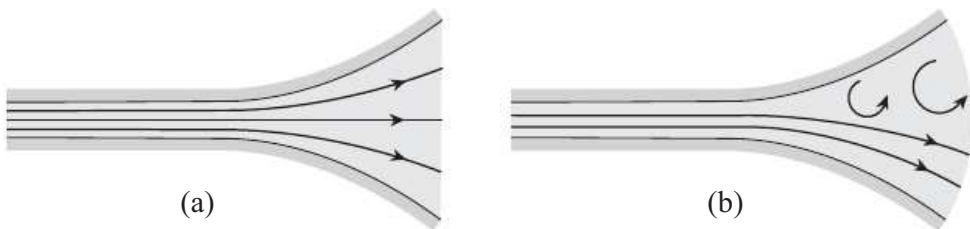


FIG. 9.5 – (a) Aspect de l'écoulement à petit nombre de Reynolds dans un tube divergent ; l'écoulement est réversible et les lignes de courant sont les mêmes que l'on aspire ou que l'on souffle par l'orifice. (b) Situation à grand nombre de Reynolds ; dans ce cas, une zone de recirculation apparaît près de l'une des parois du côté divergent du tube (le jet n'est pas symétrique par rapport à l'axe).

que, en soufflant, on forme un jet d'air qui n'occupe qu'une partie du tube (Fig. 9.5b), par suite du *décollement* du fluide des parois du tube dans sa partie évasée : on étudiera ce phénomène à la section 10.5.4. En revanche, en aspirant, l'écoulement se fait sur toute la section de l'entonnoir et le maximum de vitesse dans la section est moindre pour une même différence de pression.

– **Chute d'une sphère le long d'une paroi rigide** Imaginons une sphère tombant sous l'effet de son poids (corrigé de la poussée d'Archimède) dans un liquide près d'une paroi verticale après avoir été lâchée sans vitesse initiale. La propriété de réversibilité entraîne que la vitesse de chute $\mathbf{U}$ de la sphère en régime permanent est verticale. Des arguments du même type expliquent pourquoi un cylindre tombant dans un fluide visqueux sous l'effet de son poids reste parallèle à lui-même, quelle que soit son orientation (section 9.3.2). De même, deux sphères identiques proches l'une de l'autre tombent sans mouvement relatif dans un liquide (section 9.4.3).

Démonstration. Supposons la vitesse $\mathbf{U}$ oblique et orientée dans une direction qui rapproche la particule de la paroi (Fig. 9.6a). On présume que le poids de la sphère est équilibré par l'ensemble des forces visqueuses hydrodynamiques sur la surface. Supposons tout d'abord que l'on renverse en tout point la vitesse *locale* $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ d'écoulement du fluide ($\mathbf{v}'(\mathbf{r}) = -\mathbf{v}(\mathbf{r})$), ce qui implique de renverser aussi l'accélération $\mathbf{g}$ de la pesanteur ; par suite des conditions aux limites sur les surfaces solides (Fig. 9.6b), la vitesse $\mathbf{U}$ de la sphère est remplacée par son opposée $\mathbf{U}_1 = -\mathbf{U}$. Un tel écoulement vérifie l'équation de mouvement du fluide car les composantes des contraintes sur la sphère sont aussi remplacées en tout point par leurs opposées ; par conséquent, elles équilibrent bien la nouvelle valeur $-\mathbf{Mg}$ du *poids* du corps.

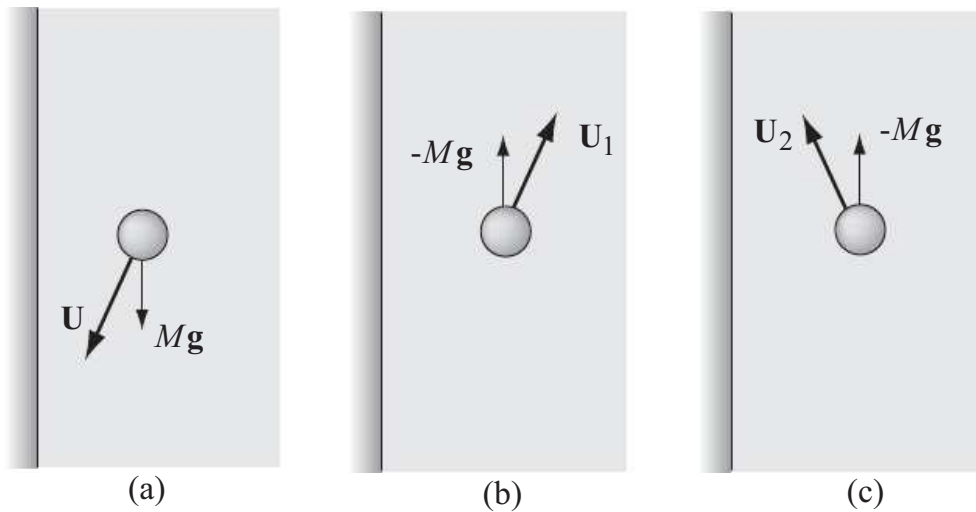


FIG. 9.6 – (a) Chute d'une sphère dans un fluide visqueux au voisinage d'un plan vertical. (b) Mouvement après renversement du sens du temps (c). Mouvement après symétrie plane pour la solution (a).

Revenons à la configuration de départ (a) et opérons maintenant une symétrie par rapport au plan (P), plan diamétral horizontal de la sphère perpendiculaire à la paroi solide (cas (c)). On obtient, si l'accélération de la pesanteur est également inversée, une vitesse $\mathbf{U}_2$: le champ de vitesse du fluide est alors symétrique de l'original par rapport au plan (P) et les composantes de vitesse dans ce plan sont inchangées, alors que seule la composante verticale est inversée. Les deux champs de vitesse transformés correspondent à un mouvement du même corps sous l'effet de la même accélération et doivent donc être identiques avec $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$. Cela impose que $\mathbf{U}$ soit vertical. Notons que ces résultats ne sont valables *exactement* que dans la limite où le nombre de Reynolds est nul ; à nombre de Reynolds fini, même petit, les effets cumulatifs des non-linéarités dues au terme convectif peuvent finir par détruire la propriété de réversibilité et ses conséquences. Par ailleurs, utiliser l'équation de Stokes revient à supposer le terme d'accélération $\partial \mathbf{v} / \partial t$ négligeable. ■

Invariance des lignes de courant lors d'une variation du débit ($Re \ll 1$)

Cette invariance est encore une conséquence de la linéarité de l'équation de Stokes. En effet, si $\mathbf{v}$ est une solution, $\lambda \mathbf{v}$ l'est aussi (λ étant un nombre réel), à condition de changer du même facteur λ les vitesses des surfaces solides, et à l'infini, et les forces extérieures. La solution initiale $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ est multipliée alors simplement en tout point par le facteur λ dont on a fait varier la vitesse (la réversibilité est un cas particulier de celui-là dans lequel $\lambda = -1$). La direction de la vitesse en tout point restant la même, le profil des lignes de courant, qui lui sont tangentes, reste inchangé, et seul le module de la vitesse varie. Ainsi, dans un écoulement à parois immobiles, on aura toujours la même forme du profil d'écoulement, quelle que soit la vitesse, tant que la condition de petit nombre de Reynolds reste vérifiée.

Additivité des solutions de l'équation de Stokes

Cette propriété est aussi une conséquence immédiate de la linéarité de l'équation de Stokes : en effet, si $\mathbf{v}_1(x, y, z, t)$ et $\mathbf{v}_2(x, y, z, t)$ sont deux solutions de l'équation, $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$ est également une solution et le gradient de pression correspondant s'écrit : $\mathbf{grad} p = \lambda_1 \mathbf{grad} p_1 + \lambda_2 \mathbf{grad} p_2$. La vitesse sur les parois est une combinaison linéaire des vitesses pour les solutions (1) et (2) avec les mêmes coefficients λ_1 et λ_2 . Comme il existe un seul champ de vitesse correspondant à des conditions aux limites données, c'est la solution $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$ qui sera effectivement observée. On peut donc superposer linéairement les profils de vitesse correspondant à des écoulements différents dans des canaux de géométrie identique, à condition de combiner linéairement les valeurs des vitesses aux parois avec les mêmes coefficients.

Nous avons déjà rencontré cette propriété à propos de la superposition des écoulements de Couette et de Poiseuille (section 4.5.3).

Minimum de dissipation

Pour des conditions aux limites données sur les parois et à l'infini, l'écoulement vérifiant l'équation de Stokes $\mathbf{grad} p = \eta \Delta \mathbf{v}$ correspond à un taux de dissipation d'énergie ε minimal avec, en utilisant pour ε l'expression (5.26) :

$$\varepsilon = \iiint \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = \frac{\eta}{2} \iiint \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 dV = 2\eta \iiint e_{ij}^2 dV \quad (9.13)$$

(on a, conformément aux conventions usuelles, une sommation implicite sur les indices i et j).

Démonstration. Soient un tenseur du taux des déformations e_{ij} correspondant à un champ de vitesse $\mathbf{v}$ solution de l'équation de Stokes et un tenseur e'_{ij} correspondant à un autre champ de vitesse $\mathbf{v}'$ vérifiant les mêmes conditions aux limites et la condition d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{v}' = 0$, mais qui ne soit pas solution de l'équation de Stokes. On peut écrire :

$$\begin{aligned} 2\eta \iiint e_{ij}'^2 dV &= 2\eta \iiint e_{ij}^2 dV + 2\eta \iiint (e'_{ij} - e_{ij})^2 dV \\ &\quad + 4\eta \iiint (e'_{ij} - e_{ij}) e_{ij} dV. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Nous allons démontrer que la dernière intégrale est nulle. En effet, elle peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \iiint (e'_{ij} - e_{ij}) e_{ij} dV &= \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \\ &\quad + \frac{1}{2} \iiint \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dV = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \end{aligned}$$

(rappelons que la sommation est faite sur les indices répétés ; ce sont donc des indices muets que l'on peut permuter). Par intégration par parties de la première intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV \\ &= \iiint \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v'_i - v_i) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dV - \iiint (v'_i - v_i) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} dV. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre se transforme en intégrale de surface, dont l'intégrand est nul sur les parois. Le second terme peut s'écrire, compte tenu de l'équation de Stokes :

$$\begin{aligned} \iiint (v'_i - v_i) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} dV &= \frac{1}{\eta} \iiint (v'_i - v_i) \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \\ &= \frac{1}{\eta} \iiint \frac{\partial}{\partial x_i} [p (v'_i - v_i)] dV - \frac{1}{\eta} \iiint p \frac{\partial (v'_i - v_i)}{\partial x_i} dV. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre se transforme à nouveau en une intégrale de surface, qui est nulle car la vitesse s'annule sur les parois ; le second est également nul car $\text{div } \mathbf{v}$ et $\text{div } \mathbf{v}'$ sont nuls.

Calculons maintenant l'intégrale I_2 . On peut l'écrire :

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dV \\ &= \iiint \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v'_i - v_i) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] dV - \iiint (v'_i - v_i) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} dV. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre se transforme à nouveau en intégrale de surface, qui est nulle car la vitesse s'annule sur les parois ; le second est également nul car $\text{div } \mathbf{v}$ est nul.

Ainsi, l'intégrale $\iiint (e'_{ij} - e_{ij}) e_{ij} dV$ est nulle. Comme le second terme du membre de droite de l'équation (9.14) est positif, la dissipation associée au tenseur e'_{ij} est supérieure à celle associée au champ de vitesse solution de l'équation de Stokes. ■

La propriété de minimisation de l'énergie dissipée ne s'applique pas lorsque le nombre de Reynolds n'est plus petit : les solutions turbulentes de l'équation de Navier-Stokes dissipent ainsi une énergie plus grande que les solutions laminaires correspondant aux mêmes conditions imposées.

Il faut noter que le principe de minimisation de la dissipation d'énergie s'applique lorsque l'on compare deux situations avec les mêmes position et géométrie de parois. Il ne signifie nullement, par exemple, que si elles sont libres de se déplacer, les parois solides se placent dans une configuration minimisant la dissipation d'énergie. Ainsi, un bâtonnet libre de tourner près du point de stagnation d'un écoulement élongationnel se place, au contraire, avec une inclinaison qui maximise la dissipation d'énergie.

9.2.4 Prédictions dimensionnelles sur les écoulements à petit nombre de Reynolds

Les champs de vitesse et de pression d'un écoulement de géométrie donnée et de vitesse et de longueur caractéristiques U et L vérifient, si $Re \ll 1$, les relations :

$$\mathbf{v}(x, y, z) = U \mathbf{F} \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L} \right) \quad (9.15a)$$

et :

$$p(x, y, z) - p_0(x, y, z) = \frac{\eta U}{L} G \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L} \right) \quad (9.15b)$$

où $\mathbf{F}$ et G sont respectivement une fonction vectorielle et une fonction scalaire sans dimension ne dépendant que de la géométrie de l'écoulement. Ainsi, les distributions de vitesse et de pression dans deux écoulements de même géométrie mais de taille, de vitesse caractéristique et de viscosité différentes pourront se déduire l'un de l'autre grâce à ces relations ; comme on a unicité des solutions, ce seront, de plus, les seuls écoulements effectivement réalisés.

Remarque. Ce résultat étend la propriété de proportionnalité à U de la vitesse de l'écoulement en tout point, démontrée à la section 9.2.3.

Démonstration. Nous avons vu, à la section 4.2.4, comment l'équation de Navier-Stokes (9.2) pouvait être écrite sous une forme sans dimension en divisant les variables par des grandeurs caractéristiques convenables. Nous procéderons de même ici, mais en utilisant les variables sans dimension suivantes, qui reflètent mieux le caractère dominant de la viscosité :

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{U}, \quad t' = \frac{t\nu}{L^2}, \quad p' = \frac{(p - p_0)L}{\eta U}. \quad (9.16)$$

U et L sont toujours la vitesse et la taille caractéristiques de l'écoulement, p_0 la pression hydrostatique en l'absence d'écoulement et le temps $\tau_\nu = L^2/\nu$ représente le temps de diffusion visqueuse sur la longueur L de l'écoulement (au lieu du temps de convection L/U) et $\eta U/L$ est la contrainte visqueuse par unité de surface pour un gradient de vitesse de l'ordre de U/L (au lieu de la pression ρU^2). On récrit alors l'équation de Navier-Stokes sous la forme sans dimension :

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + Re(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{grad}')\mathbf{v}' = -\mathbf{grad}' p' + \Delta' \mathbf{v}'. \quad (9.17a)$$

En accord avec la discussion de la section 9.2.1, le terme d'inertionarité est négligeable si l'écoulement évolue lentement sur un temps t grand devant τ_ν (donc sur un temps $t' \gg 1$). Dans ce cas, les solutions de l'équation de mouvement peuvent être écrites sous la forme :

$$\mathbf{v}'(x, y, z) = \mathbf{F}\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}, Re\right) \quad (9.17b)$$

et :

$$p'(x, y, z) = G\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}, Re\right) \quad (9.17c)$$

où $\mathbf{F}$ et G sont respectivement des fonctions vectorielle et scalaire sans dimension. Lorsque $Re \ll 1$, le terme inertiel du premier membre de l'équation (9.17a) peut être considéré comme nul et, toujours pour un écoulement stationnaire ou quasi stationnaire, on trouve la forme sans dimension de l'équation de Stokes :

$$\mathbf{grad}' p' = \Delta' \mathbf{v}' \quad (9.18a)$$

avec des solutions cette fois-ci indépendantes de Re :

$$\mathbf{v}'(x, y, z) = \mathbf{F}\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}\right) \quad (9.18b)$$

et :

$$p'(x, y, z) = G\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}\right) \quad (9.18c)$$

d'où l'on déduit les équations (9.15). Il faut noter que le terme inertiel n'a pu être négligé que parce qu'il ne présente pas de singularité lorsque $Re \rightarrow 0$: nous avons, en effet, démontré plus haut que la vitesse tend vers 0 proportionnellement à U dès que $Re \ll 1$. Il n'en est pas de même pour les écoulements à grand nombre de Reynolds avec la normalisation différente introduite à la section 4.2.4 : dans ce cas, le terme visqueux ne disparaît pas quand $Re \rightarrow \infty$, malgré le facteur $1/Re$, à cause de la divergence des gradients de vitesse. ■

À partir de ces résultats, on peut faire des prédictions similaires sur les forces exercées sur les parois ou les solides en mouvement. Les contraintes de viscosité locales correspondent toutes à des termes de la forme $\eta(\partial v_i/\partial x_j)$; elles sont donc proportionnelles au produit de $\eta U/L$ par des fonctions sans dimension des coordonnées réduites $x/L, y/L$ et z/L . La force de frottement visqueux globale est obtenue en intégrant ces contraintes sur toute la surface des parois, d'où un facteur L^2 supplémentaire, multiplié par un vecteur constant $\mathbf{A}$. On a ainsi la relation dimensionnelle :

$$\text{force de frottement visqueux} \approx \mathbf{A} \left(\frac{\eta U}{L} \right) L^2 \approx \mathbf{A} (\eta UL). \quad (9.19a)$$

On peut utiliser un raisonnement analogue pour l'écart $p - p_0$ de la pression à la pression hydrostatique (Éq. 9.15b). En intégrant ce terme sur les surfaces de paroi, cela introduit de nouveau un facteur L^2 supplémentaire; on obtient une forme similaire à (9.19a) pour la valeur globale de cette force de pression. La force totale $\mathbf{F}$ sur les parois peut donc être mise sous la forme :

$$\mathbf{F} = -\mathbf{C} \eta UL \quad (9.19b)$$

où $\mathbf{C}$ est un vecteur dépendant seulement de la direction ou de la géométrie de l'écoulement et des parois solides. Le signe - indique que la force $\mathbf{F}$ s'oppose au déplacement.

On normalise souvent cette force par $(1/2) \rho U^2 S$; $(1/2) \rho U^2$ est l'ordre de grandeur de la pression dynamique définie à la section 5.3.2 et $S \approx L^2$ est une aire caractéristique des parois. Pour les écoulements à petit nombre de Reynolds, on obtient ainsi un *coefficient de frottement* :

$$\mathbf{C}_d \approx \frac{|F|}{\frac{1}{2} \rho U^2 L^2} \approx \frac{\eta}{\rho UL} \approx \frac{1}{Re}. \quad (9.20)$$

Cette proportionnalité du coefficient de frottement à l'inverse du nombre de Reynolds est caractéristique des écoulements à petit nombre de Reynolds. Nous avons déjà rencontré cette propriété dans le cas des écoulements laminaires étudiés dans la section 4.5, pour lesquels le transport de quantité de mouvement par convection est nul pour des raisons géométriques. Notons toutefois que cette dépendance en l'inverse du nombre de Reynolds reflète essentiellement la définition de C_d utilisée : en effet, cette dernière n'a de signification physique que pour les écoulements à grand nombre de Reynolds qui sont dominés par les effets d'inertie.

9.3 Forces et moments s'exerçant sur un solide en mouvement

Comme nous venons de le voir, l'une des conséquences de la linéarité de l'équation de Stokes est la proportionnalité entre les forces sur les parois solides

et la vitesse caractéristique du fluide. Nous allons préciser cette propriété (section 9.3.1) et voir son application sur deux exemples de solides de symétries différentes (section 9.3.2) : un bâtonnet et une hélice.

9.3.1 Linéarité des relations entre la vitesse d'un solide et les forces exercées

Tout déplacement d'un solide peut être décrit à un instant donné comme la combinaison d'une translation globale de vitesse $\mathbf{U}(t)$ et d'une rotation à la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}(t)$ (Fig. 9.7). La vitesse en tout point du solide s'écrit :

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r} \tag{9.21}$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur tracé à partir de l'origine des axes (un changement d'origine revient à changer $\mathbf{U}$).

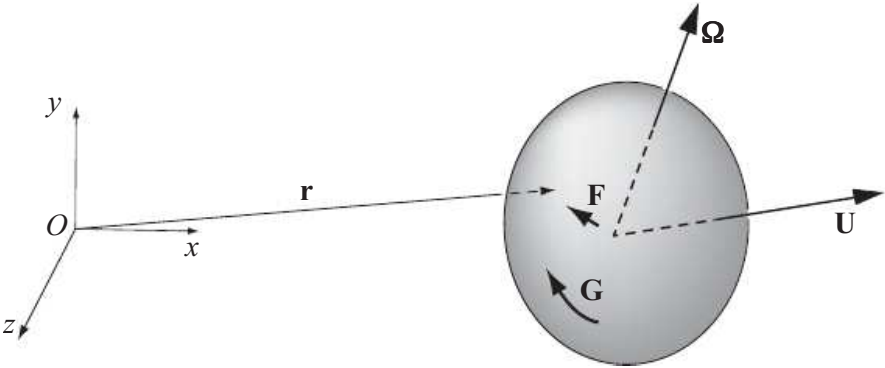


FIG. 9.7 – Force et moment s'exerçant sur un objet en translation à vitesse $\mathbf{U}$ et en rotation à vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ dans un fluide visqueux.

Appelons F_i et G_i les composantes de la force et du moment exercés sur le solide (le moment est calculé par rapport à des axes passant par l'origine O des coordonnées). Ces composantes sont les intégrales des contraintes de viscosité et de pression locales sur la surface du solide. Elles vérifient donc les relations :

$$F_i = -\eta (A_{ij}U_j + B_{ij}\Omega_j), \tag{9.22}$$

$$G_i = -\eta (C_{ij}U_j + D_{ij}\Omega_j). \tag{9.23}$$

Les coefficients A_{ij} (respectivement D_{ij}) relient les forces (respectivement les moments) aux translations (respectivement rotations). Les coefficients B_{ij} et C_{ij} représentent au contraire respectivement des effets croisés de forces induites par une rotation et de moments créés par un mouvement de translation. Ainsi, une hélice tournant à faible vitesse autour de son axe dans un fluide très visqueux est soumise à une force parallèle à celui-ci : cet effet de type « tire-bouchon » sera étudié plus bas (section 9.3.2). Cette force est due à l'absence de plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de rotation.

Les équations (9.22) et (9.23) peuvent être obtenues en combinant linéairement, avec les mêmes coefficients, deux champs de vitesse solutions de l'équation de Stokes et les champs de pression correspondants (à condition de combiner de la même façon les conditions aux limites de vitesse sur les parois). Notons enfin que les coefficients A_{ij} sont homogènes à une longueur, B_{ij} et C_{ij} à une surface et D_{ij} à un volume.

Les tenseurs de composantes A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} et D_{ij} ont des propriétés de symétrie générales indépendantes de la forme du corps ; elles peuvent être établies en utilisant le fait que le tenseur des contraintes, σ_{ij} , est symétrique, et elles se traduisent par les relations :

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad (9.24a)$$

$$D_{ij} = D_{ji}, \quad (9.24b)$$

$$B_{ij} = C_{ji}. \quad (9.24c)$$

L'égalité des tenseurs B_{ij} et C_{ji} rend compte de la relation réciproque entre la force sur une particule en rotation et le moment sur une particule en translation.

La matrice A_{ij} reliant F_i et U_j , qui est symétrique, peut être diagonalisée. Il existe donc, quelle que soit la forme du corps, un système de coordonnées cartésiennes dans lequel chaque composante de la force est proportionnelle à la composante correspondante de la vitesse de déplacement :

$$F_i = -\eta \lambda_i U_i \quad (9.25)$$

(contrairement à nos notations habituelles, il n'y a pas de sommation sur l'indice répété i). Le produit scalaire $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}$ représente la perte d'énergie par dissipation visqueuse. Il doit donc être négatif quel que soit $\mathbf{U}$: cela implique que les trois valeurs propres λ_i sont positives. D'un point de vue géométrique, la condition $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} < 0$ signifie que l'angle (généralement non nul) entre la force $\mathbf{F}$ et la direction du mouvement doit toujours être obtus.

Pour des corps possédant des éléments de symétrie particuliers (plans ou axes), des relations supplémentaires apparaissent entre les coefficients A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} et D_{ij} , comme nous allons le voir à travers trois exemples.

9.3.2 Influence des propriétés de symétrie des solides sur les forces et les moments appliqués

Solide ayant un plan de symétrie

Pour un solide ayant un plan de symétrie $x_1 = 0$, les coefficients A_{ij} vérifient :

$$A_{12} = A_{21} = A_{13} = A_{31} = 0. \quad (9.26)$$

Physiquement, cela signifie, par exemple, que la force correspondant à un mouvement perpendiculaire à un plan de symétrie sera elle-même perpendiculaire

à ce plan. Réciproquement, un corps ayant un plan de symétrie horizontal, qui tombe sous l'effet de son poids dans un fluide visqueux, n'aura pas de composante de vitesse horizontale. Par ailleurs :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{32} = C_{23} = 0 \quad (9.27)$$

et :

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{32} = B_{23} = 0. \quad (9.28)$$

On n'a donc d'effet tire-bouchon (apparition d'une force parallèle à l'axe de rotation x_1 d'un solide) que si le plan perpendiculaire à l'axe de rotation n'est pas un plan de symétrie du corps. Enfin :

$$D_{12} = D_{21} = D_{13} = D_{31} = 0. \quad (9.29)$$

Démonstration. Soit un système de coordonnées où deux axes (x_2 et x_3) sont contenus dans le plan de symétrie $x_1 = 0$; les coefficients A_{ij} restent inchangés par l'opération $x_1 \rightarrow -x_1$. Dans cette même opération, F_1 est transformé en $F'_1 = -F_1$ et U_1 en $-U_1$, tandis que les autres composantes restent inchangées. La relation (9.22) pour les composantes F_1 et F'_1 s'écrit ici :

$$F_1 = -\eta (A_{11}U_1 + A_{12}U_2 + A_{13}U_3) \quad \text{et} \quad F'_1 = -\eta (A_{11}(-U_1) + A_{12}U_2 + A_{13}U_3).$$

Ces deux expressions devant avoir des valeurs opposées ($F'_1 = -F_1$), on en déduit : $A_{12} = A_{13} = 0$.

En utilisant les autres composantes de $\mathbf{F}$, on justifie de même que les coefficients A_{21} et A_{31} sont nuls. Pour le tenseur D_{ij} reliant le couple $\mathbf{G}$ au vecteur rotation Ω , on retrouve les mêmes composantes nulles que pour A_{ij} car ces deux pseudo-vecteurs ont les mêmes propriétés de symétrie. Les résultats sont différents pour les coefficients C_{ij} reliant les composantes G_j du moment à celles de la vitesse. En effet, $\mathbf{G}$ est un pseudo-vecteur de même symétrie qu'un vecteur rotation : il ne change donc pas de sens lors d'une symétrie par rapport à un plan perpendiculaire à lui-même, mais il s'inverse pour un plan parallèle à sa direction. Lorsque x_1 est changé en $-x_1$, G_1 est changé en G_1 , G_2 en $-G_2$ et G_3 en $-G_3$. En raisonnant comme précédemment, on trouve les relations (9.27) et (9.28). ■

Corps à trois plans de symétrie perpendiculaires

Lorsque le corps a trois plans de symétrie perpendiculaires (par exemple ellipsoïdes, parallélépipèdes...), tous les coefficients C_{ij} et B_{ij} sont nuls, quel que soit le système de coordonnées, d'après les relations (9.27) et (9.28). On a découplage complet entre les mouvements de translation et de rotation ; seul un moment non nul (lorsqu'il est calculé par rapport à des axes de rotation passant par l'intersection des plans de symétrie) peut induire une rotation de l'objet.

De même, d'après la relation (9.26), la matrice A_{ij} est diagonale lorsque l'on choisit des axes de coordonnées perpendiculaires aux plans de symétrie du solide.

(i) Chute d'un bâtonnet cylindrique circulaire dans un fluide visqueux

Ce corps possède trois axes de symétrie perpendiculaire entre eux. L'un d'entre eux est un axe de révolution (supposé orienté suivant la direction Oz). Non seulement le corps tombera sans tourner dans un fluide visqueux, mais son mouvement sera déterminé par seulement deux coefficients, qui caractérisent la force de frottement avec le fluide parallèlement et perpendiculairement à l'axe ($A_{zz} = \lambda_{\parallel}$ et $A_{xx} = A_{yy} = \lambda_{\perp}$ par exemple). En connaissant le rapport entre les deux coefficients $\lambda_{\parallel}$ et $\lambda_{\perp}$, il est possible de déterminer l'angle de chute par rapport à la verticale en fonction de l'inclinaison du bâtonnet.

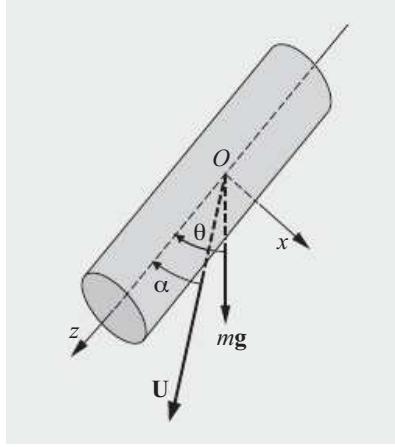


FIG. 9.8 – Chute oblique d'un bâtonnet cylindrique dans un fluide visqueux.

Démonstration. Soit un bâtonnet allongé à section circulaire avec un centre de symétrie O (Fig. 9.8). Appelons Oz l'axe de révolution du corps et Ox l'axe perpendiculaire contenu dans le plan de symétrie vertical. Si le corps est homogène, la force de gravité s'exerce au centre de symétrie et aucun couple ne s'exerce pour le mettre en rotation. Dans ce système de coordonnées :

$$F_z = -\eta \lambda_{\parallel} U_z, \quad F_x = -\eta \lambda_{\perp} U_x, \quad F_y = -\eta \lambda_{\perp} U_y. \quad (9.30)$$

Comme nous l'indiquerons plus bas (section 9.4.3), on peut montrer (par des calculs valables dans la limite de solides de très grand allongement) que $\lambda_{\perp} = 2\lambda_{\parallel}$ (Éqs. 9.71a-b) : la résistance au mouvement parallèlement à l'axe du bâtonnet est deux fois plus petite que perpendiculairement. Appelons α l'angle de la trajectoire avec l'axe du bâtonnet et θ l'inclinaison de ce dernier par rapport à la verticale. Lorsque le bâtonnet est en mouvement à vitesse constante, on peut écrire :

$$F_z = -mg \cos \theta = -\eta \lambda_{\parallel} U_z \quad (9.31a)$$

où m représente la masse du bâtonnet diminuée de la contribution due à la poussée d'Archimède.

$$F_x = -mg \sin \theta = -\eta \lambda_{\perp} U_x = -2\eta \lambda_{\parallel} U_x. \quad (9.31b)$$

D'où :

$$\tan \alpha = U_x/U_z = \frac{1}{2} \tan \theta.$$

L'angle de déviation $\theta - \alpha$ de la trajectoire par rapport à la verticale vérifie donc :

$$\tan(\theta - \alpha) = \frac{(1 - \frac{1}{2}) \tan \theta}{1 + \frac{1}{2} \tan^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{(2 + \tan^2 \theta)}. \quad (9.32)$$

Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$, le corps tombe verticalement ; on retrouve les deux cas particuliers pour lesquels la force appliquée (le poids du bâtonnet) est perpendiculaire à un plan de symétrie du solide. Le maximum de l'angle de chute $(\theta - \alpha)$, obtenu pour $\tan \theta = \sqrt{2}$, vérifie donc $\tan(\theta - \alpha) = 1/(2\sqrt{2})$ et vaut : $\theta - \alpha \approx 19,5^\circ$. ■

(ii) Cas d'un cube ou d'une sphère

Dans le cas du cube, les plans parallèles aux faces passant par le centre de symétrie sont des plans de symétrie perpendiculaires et le tenseur A_{ij} est diagonal dans le système d'axes correspondant. Comme ces plans sont équivalents, les trois valeurs propres associées sont donc égales et l'on peut écrire :

$$[\mathbf{A}] = \lambda [\mathbf{I}]$$

où $[\mathbf{I}]$ est la matrice identité. Pour un mouvement de translation pure, la force de frottement est colinéaire à la vitesse, quelle que soit l'orientation, et la relation (9.19b) devient donc :

$$\mathbf{F} = -C \eta L \mathbf{U} \quad (9.33)$$

où L est une dimension caractéristique du solide et C une constante. La force $\mathbf{F}$ s'applique au centre de symétrie du corps. Ce résultat est ainsi valable pour une sphère de rayon $R (= L)$, avec $C = 6\pi$ (nous le démontrerons à la section 9.4.2). Par ailleurs, cette force étant appliquée au centre de symétrie du solide, elle n'induit aucune rotation. Ces résultats seront également valables pour tous les corps à symétrie sphérique comme, par exemple, un cube ou un tétraèdre régulier. À petit nombre de Reynolds, de tels corps tombent toujours verticalement dans un fluide sans tourner, quelle que soit l'orientation initiale de leurs faces par rapport à la verticale (il faut, cependant, que la distribution de la masse soit homogène dans le corps). Nous estimerons ultérieurement (section 9.4.3) la force de frottement dans ces cas.

Pour un mouvement de rotation pure, le tenseur D_{ij} reliant le moment au vecteur rotation est également proportionnel à $[\mathbf{I}]$ (si l'axe de rotation passe par le centre de symétrie).

Donc :

$$\mathbf{G} = -D \eta L^3 \boldsymbol{\Omega}. \quad (9.34)$$

Dans le cas d'une sphère de rayon $R = L$, on montrera que $D = 8\pi$ (section 9.4.3).

Couplage translation-rotation pour un corps sans plan de symétrie

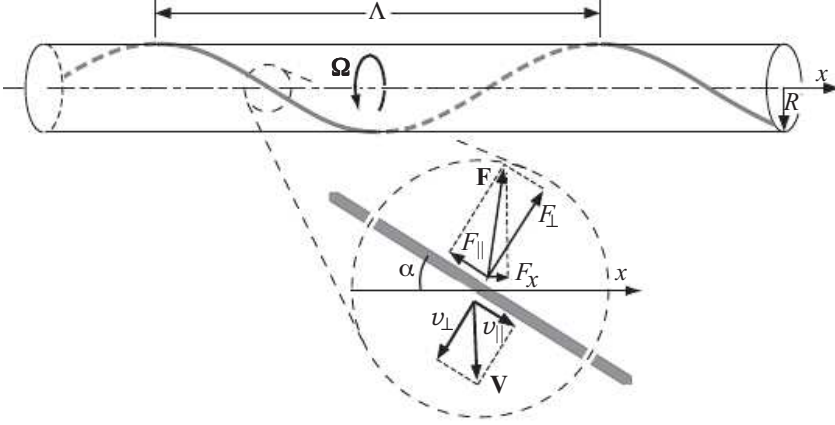


FIG. 9.9 – Mouvement d’une hélice « se vissant » dans un fluide visqueux.

Dans ce cas, une partie des coefficients que nous avons précédemment considérés comme nuls peuvent jouer un rôle important. Analysons, par exemple, le mouvement d’un corps dont la symétrie est celle d’une hélice d’axe Ox (Fig. 9.9). Le plan yOz n’étant pas un plan de symétrie, les coefficients B_{xx} et C_{xx} sont non nuls. Une rotation de l’hélice à vitesse angulaire Ω_x induit donc, d’après la relation (9.22), une force propulsive $F_x = B_{xx} \Omega_x$ parallèle à l’axe de rotation Ox et de sens opposé pour des hélices droites ou gauches. Par unité de longueur d’hélice, B_{xx} vaut :

$$B_{xx} = \frac{2\pi \lambda_{\parallel} R^2}{\Lambda}. \quad (9.35)$$

Démonstration. Analysons les forces locales s’exerçant sur un élément de longueur d’hélice et en l’assimilant à un bâtonnet rectiligne qui se déplace avec une composante de vitesse azimutale (ΩR) autour de l’axe de rotation. Nous supposons le pas Λ de l’hélice grand devant le rayon R ; localement, les éléments de longueur font donc un angle faible $\alpha = 2\pi R/\Lambda$ avec l’axe Ox . Les composantes de vitesse $V_{\parallel} (\approx \Omega \alpha R = 2\pi \Omega R^2/\Lambda)$ et $V_{\perp} (\approx \Omega R)$, respectivement parallèle et perpendiculaire au bâtonnet, induisent des forces de composantes $F_{\parallel}$ et $F_{\perp}$. Ces composantes, écrites par unité de longueur, ont pour expression :

$$F_{\parallel} = -\eta \lambda_{\parallel} V_{\parallel} = -2\pi \eta \lambda_{\parallel} \Omega \left(\frac{R^2}{\Lambda} \right) \quad \text{et} \quad F_{\perp} = -\eta \lambda_{\perp} V_{\perp} = -2\eta \lambda_{\parallel} \Omega R.$$

Ces forces peuvent, à leur tour, être décomposées en une composante parallèle à Ox et une composante orthoradiale.

Les deux projections de $F_{\parallel}$ et $F_{\perp}$ sur Ox sont de sens contraire, comme on le voit sur l’encarté de la figure 9.9. Si on les projette sur l’axe Ox en tenant compte de la faible valeur de l’angle $\alpha = 2\pi R/\Lambda$, on trouve qu’elles ont une résultante non nulle de valeur absolue :

$$F_x = |\alpha F_{\perp} - F_{\parallel}| = 2\pi \eta \lambda_{\parallel} \Omega \frac{R^2}{\Lambda}$$

par unité de longueur de l'hélice. L'orientation des deux composantes s'inverse quand on change le sens de rotation ou celui du pas de l'hélice ; il en sera donc de même pour la force F_x . Cette composante a la même valeur pour tous les éléments de l'hélice ; on aura donc globalement une force motrice résultante parallèle à l'axe Ox et proportionnelle à la vitesse et à la viscosité. On retrouve donc bien l'expression (9.35) pour le coefficient de couplage B_{xx} entre la vitesse de rotation Ω et la force motrice par unité de longueur d'hélice.

L'orientation des composantes orthoradiales de $F_{\parallel}$ et $F_{\perp}$ varie continûment le long de l'hélice ; elles ont donc une résultante nulle et elles contribueront seulement à un couple résistant dont le moment est :

$$G_x = (F_{\perp} \cos \alpha + F_{\parallel} \sin \alpha) R \approx -2\lambda_{\parallel} \eta \Omega R^2.$$

La distance du point d'application de ces composantes à l'axe de rotation est en effet R . Le coefficient de couplage D_{xx} entre la vitesse de rotation et le couple de freinage par unité de longueur de l'hélice s'écrit donc : $D_{xx} = 2\lambda_{\parallel} R^2$. ■

9.3.3 Propulsion aux faibles nombres de Reynolds

Propulsion par rotation d'une hélice

Le modèle précédent permet d'expliquer le mouvement de certaines bactéries : ainsi, *Escherichia coli* se propulse en faisant tourner sa queue (flagelle) grâce à un moteur moléculaire autour d'une articulation située à l'extrémité du corps. Ce mode de propulsion est tout à fait différent de l'utilisation d'hélices sur un navire. Dans ce dernier cas, qui correspond à un écoulement à grand nombre de Reynolds, l'effet de propulsion est dû à la circulation de la vitesse du fluide autour des pales de l'hélice : cette dernière fait apparaître une force de Magnus perpendiculaire à la vitesse de la pale qui est analogue à la portance des ailes d'avion, comme nous l'avons vu à la section 7.5.2. Il en résulte une force propulsive globale proportionnelle au carré de la vitesse de rotation : l'efficacité d'une telle hélice classique serait bien moindre à petit nombre de Reynolds, lorsque cet effet de portance est absent.

Le théorème de la coquille Saint-Jacques

Un point très important dans la nage aux petits nombres de Reynolds est le théorème dit *de la coquille Saint-Jacques* (*scallop theorem*). Il suppose un modèle réduit de ce mollusque bivalve, de taille assez petite pour avoir un nombre de Reynolds $Re < 1$, qui s'ouvrirait et se fermerait alternativement en aspirant et éjectant du liquide. Ces écoulements sont réversibles par rapport à un changement du sens de déplacement des parois et le modèle subirait alors simplement une suite d'avancées et de reculées de même amplitude.

Comme nous l'avons vu, les forces sont proportionnelles à la vitesse des parois. Si l'on appelle $e(t)$ l'ouverture maximum de la coquille, la force de propulsion instantanée aura une variation du type $F(e) = k(e) de/dt$. L'impulsion totale communiquée pendant une variation de l'ouverture d'une valeur e_1 à

une valeur e_2 sera $\Delta P = \int_{e_1}^{e_2} k(e) de$. Les contributions des phases d'ouverture et de fermeture sont donc opposées et, ceci, quelles que soient les vitesses de déplacement dans chaque phase (tant que $Re \ll 1$). Plus généralement, la propulsion de micro-organismes à bas nombre de Reynolds ne peut s'opérer par une suite de mouvements de même amplitude en sens alternés.

Remarque. Dans la réalité, contrairement au cas du modèle, ce mode de propulsion s'opère dans l'eau de mer à des nombres de Reynolds de quelques milliers, où les effets inertiels sont dominants et la réversibilité n'est plus vérifiée. Plus précisément, les coquilles Saint-Jacques se déplacent en ouvrant lentement et fermant leur coquille rapidement. L'émission d'un jet (et donc de quantité de mouvement) vers l'arrière dans la seconde phase n'est pas alors compensée par l'apport de quantité de mouvement orientée vers l'avant dans la première, ce qui permet la propulsion.

Quelques manières de contourner la réversibilité

Reprenons l'exemple de microbes ou de micro-organismes formés d'un corps et d'un flagelle, déjà évoqué plus haut à propos de la propulsion de *Escherichia coli*. Contrairement à ce dernier cas, supposons que les déplacements du flagelle s'opèrent dans un plan. Si l'on établit une onde stationnaire sur le flagelle avec, par exemple, un point fixe au niveau du raccordement avec le corps, la force de propulsion moyenne est nulle : on a, en effet, une succession symétrique de déformations dans un sens et dans l'autre. La force serait, en revanche, non nulle pour une onde progressive (ces résultats ont pu être démontrés expérimentalement, en appliquant des forces alternatives par des billes magnétiques réparties sur des flagelles modèles).

Toujours dans le cas des flagelles, l'irréversibilité peut résulter de leurs propriétés mécaniques et, en particulier, de leur élasticité. Supposons, en effet, que l'on excite un flagelle flexible élastique par un déplacement sinusoïdal d'une extrémité (ce processus reproduit d'une manière simplifiée la propulsion de certains micro-organismes). La dynamique de chaque élément résulte non seulement de la force hydrodynamique due à son mouvement relatif par rapport au fluide, mais aussi des forces élastiques liées à sa déformation. Il en découle que la géométrie, et donc les forces, ne sont pas les mêmes, à une position donnée, pendant les phases aller et retour du battement : une force motrice peut alors apparaître.

Remarque. Dans une telle situation, l'objet n'est pas un traceur passif mais il est contraint dans les mouvements de ses différents points (sa longueur doit, par exemple, rester constante) et peut exercer des forces sur le fluide. Dans l'expérience de la figure 9.2, on romprait également la réversibilité en remplaçant la tache de colorant par un fil souple qui, suivant les phases du mouvement, serait étiré ou replié.

Quittons maintenant le cas des flagelles et revenons à celui d'un objet articulé. Le théorème de la coquille Saint-Jacques nous indique que l'on ne peut avoir propulsion si l'on a un seul degré de liberté (l'ouverture-fermeture de la

coquille modèle). En revanche, la possibilité d’une propulsion a été démontrée pour des objets présentant deux articulations (ensemble de trois tiges articulées par exemple) : dans ce cas, avec une séquence bien choisie de mouvements séparés des articulations ramenant finalement à l’état initial sans nécessiter de mouvements exactement inverses, on arrive à générer une propulsion. Cela est également possible avec une chaîne de trois sphères par une séquence de variations de leurs positions relatives : on peut ainsi modéliser la propulsion de certains micro-organismes par déformation de leur corps.

9.4 Déplacement d’une sphère dans un fluide visqueux

9.4.1 Champ de vitesse autour d’une sphère en mouvement

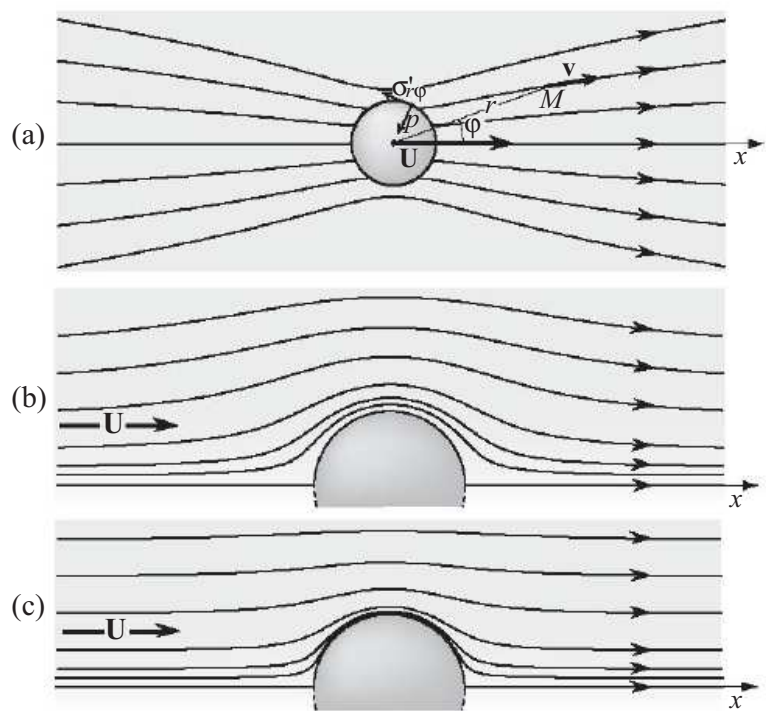


FIG. 9.10 – (a) Lignes de courant de l’écoulement autour d’une sphère se déplaçant à une vitesse constante U dans un fluide au repos. On a indiqué les composantes des contraintes normales et tangentielles qui s’exercent sur un point de la surface de la sphère; (b) lignes de courant de l’écoulement d’un fluide visqueux autour d’une sphère avec une vitesse U loin de la sphère et $Re \ll 1$; (c) Écoulement potentiel d’un fluide parfait autour de la même sphère (section 6.2.4).

On exprime le champ de vitesse en coordonnées sphériques (r, φ, θ) dans un repère au sein duquel le fluide loin de la sphère est au repos et dont l'origine O coïncide à chaque instant avec le centre de la sphère. L'axe Ox ($\varphi = 0$) coïncide avec la direction de la vitesse $\mathbf{U}$ de la sphère de rayon R (Fig. 9.10a). Par suite de l'invariance du problème par rotation autour de l'axe Ox , le champ de vitesse est de révolution autour de cet axe avec une composante v_θ qui est nulle et des composantes v_r et v_φ indépendantes de θ . Après des calculs dont le détail est donné plus loin, on trouve pour les deux composantes v_r et v_φ :

$$v_r = U \cos \varphi \left(\frac{3R}{2r} - \frac{R^3}{2r^3} \right), \quad (9.36a)$$

$$v_\varphi = -U \sin \varphi \left(\frac{3R}{4r} + \frac{R^3}{4r^3} \right). \quad (9.36b)$$

On vérifie que la vitesse du fluide s'annule bien à l'infini et devient égale à celle de la sphère à la surface de cette dernière ($r = R$). Cette solution est valable seulement si le nombre de Reynolds est très petit devant l'unité et si la vitesse U de la sphère est constante.

Le point le plus remarquable de ce résultat est la décroissance en $1/r$ avec la distance r de la vitesse de l'écoulement à petit nombre de Reynolds. Ce résultat doit être comparé à la décroissance plus rapide en $1/r^3$ pour la vitesse autour d'une sphère, dans le problème d'écoulement potentiel étudié à la section 6.2.4.

Cette décroissance lente de la perturbation de vitesse est due à la faible efficacité de la diffusion pour transporter loin du corps la quantité de mouvement communiquée au fluide par les forces de frottement visqueux. Nous pouvons retrouver cette variation en $1/r$ par un raisonnement physique simple. Supposons que la vitesse décroisse en $r^{-\alpha}$ loin de la sphère ; le flux de quantité de mouvement associé à la diffusion s'exprime par des gradients des composantes de vitesse et varie en $r^{-\alpha-1}$. L'intégrale de ce flux sur une sphère de rayon r varie donc en $r^{-\alpha+1}$ et doit être une constante indépendante de r , de l'ordre de la force de frottement totale sur le corps : on retrouve bien $\alpha = 1$, correspondant à un champ de vitesse en $1/r$.

Pour une sphère immobile dans un écoulement de vitesse $\mathbf{U}$ loin de la sphère, la vitesse $\mathbf{V}$ du fluide s'obtient en retranchant de la vitesse $\mathbf{U}$ la vitesse donnée par les équations (9.36) :

$$V_r = (U \cos \varphi) - v_r = U \cos \varphi \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right), \quad (9.37a)$$

$$V_\varphi = (-U \sin \varphi) - v_\varphi = -U \sin \varphi \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right). \quad (9.37b)$$

Dans ce référentiel où la sphère est au repos, les lignes de courant retournent beaucoup plus lentement à une configuration de vitesse uniforme lorsque l'on s'éloigne de la sphère que pour un écoulement potentiel (Fig. 9.10b-c).

Nous allons établir, par étapes, les expressions (9.36) du champ de vitesse. Cette démonstration est basée sur une détermination intuitive initiale d'une fonction d'essai pour la distribution de pression autour de la sphère ; à partir de cette dernière, on calcule ensuite un champ de vitesse qui vérifie les conditions aux limites imposées, puis les valeurs des paramètres inconnus de la fonction d'essai. D'après le théorème d'unicité, on obtient alors le champ de vitesse cherché.

Détermination du champ de pression

Le champ de pression $p(r)$ vérifie $\Delta p = 0$ (Éq. 9.9) et il est, par suite, une fonction harmonique. On peut donc développer $p(r)$ dans un système de coordonnées sphériques (r, φ, θ) sous forme d'une combinaison linéaire d'un terme en $1/r$ et de ses dérivées successives par rapport aux coordonnées ; ces dernières sont solutions de l'équation de Laplace scalaire $\Delta \phi = 0$, et correspondent au champ créé par une charge, un dipôle, un quadrupôle... Les fonctions d'ordre le plus bas de ce type sont :

$$\phi_0 = \frac{A}{r}, \quad \phi_1 = \mathbf{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{et} \quad [\phi_2] \quad \text{tel que :} \quad \phi_{2ij} = \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right).$$

Supposons que l'on néglige le terme de pression hydrostatique et que l'on prenne une valeur de la pression p égale à 0 à l'infini (elle n'intervient que comme une constante additive) : il n'y a alors pas de terme constant ou contenant une puissance positive de r dans $p(r)$. Utilisons comme fonction d'essai la plus simple des fonctions ϕ respectant la symétrie du problème. Le champ de pression doit se mettre sous la forme $\phi \eta U$ puisque p est proportionnelle à U et à η (section 9.2.4) ; ϕ est une combinaison linéaire des fonctions de base introduites plus haut. La composante d'ordre le plus faible compatible avec la forme scalaire de p est la composante de ϕ_1 parallèle à $\mathbf{U}$, soit $(\partial/\partial x)(1/r) = -(\cos \varphi)/r^2$ (en effet, les termes en $(\sin \varphi \cos \theta)/r^2$ et $(\sin \varphi \sin \theta)/r^2$ ne respectent pas la symétrie de révolution autour de l'axe Ox parallèle à $\mathbf{U}$). D'autre part, le terme ϕ_0 donnerait un gradient de pression radial et, donc, une source de courant. On peut donc écrire :

$$p = C \eta U \frac{\cos \varphi}{r^2} = -C \eta \mathbf{U} \cdot \mathbf{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -C \eta \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{U}}{r} \right). \quad (9.38)$$

Les forces exercées sont donc proportionnelles à la vitesse et à la viscosité. Nous allons maintenant examiner s'il existe un champ de vitesse correspondant à cette distribution de pression, vérifiant l'équation de Stokes et les conditions aux limites sur les parois de la sphère. Si ce n'était pas le cas, il faudrait introduire dans $p(\mathbf{r})$ les termes du développement d'ordre supérieur (ce serait, par exemple, nécessaire pour un corps de forme plus complexe qu'une sphère).

Champ de vorticité correspondant à la répartition de pression

On part de la forme (9.8) de l'équation de Stokes. En utilisant le résultat (9.38), elle devient :

$$-C \eta \mathbf{grad} \operatorname{div}(\mathbf{U}/r) = -C \eta \mathbf{rot} \mathbf{rot}(\mathbf{U}/r) - C \eta \Delta(\mathbf{U}/r) = -\eta \mathbf{rot} \boldsymbol{\omega}. \quad (9.39)$$

Or on a :

$$\Delta\left(\frac{\mathbf{U}}{r}\right) = \mathbf{U} \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad (9.40)$$

donc :

$$\boldsymbol{\omega} = C \mathbf{rot} \left(\frac{\mathbf{U}}{r} \right) + \mathbf{grad} g(\mathbf{r}) \quad (9.41)$$

où $g(\mathbf{r})$ est une fonction de laplacien nul, comme on le voit en prenant la divergence de la relation (9.41). Or, seule la composante ω_θ est non nulle car $v_\theta = 0$ et $\mathbf{v}$ est indépendant de θ . La fonction inconnue $g(\mathbf{r})$ doit donc être de la forme $\alpha\theta + \beta$ où α et β sont des constantes. Mais ω_θ est indépendant de θ car $\mathbf{v}$ l'est aussi ; la constante α est donc nulle. De plus, comme g intervient uniquement par son gradient, on peut prendre, $\beta = 0$. Ainsi, la fonction g est identiquement nulle. En utilisant l'identité : $\mathbf{rot}(m\mathbf{A}) = m \mathbf{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{grad} m) \wedge \mathbf{A}$, on en déduit :

$$\boldsymbol{\omega} = C \mathbf{rot} \left(\frac{\mathbf{U}}{r} \right) = -C \mathbf{U} \wedge \mathbf{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (9.42)$$

soit :

$$\omega_\theta = CU \frac{\sin \varphi}{r^2} \quad (9.43)$$

Calcul de la fonction de courant Ψ à partir du champ de vorticité

Introduisons maintenant la fonction de courant de Stokes Ψ (section 3.4.3), telle que :

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \quad (9.44)$$

et :

$$v_\varphi = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (9.45)$$

On a alors :

$$\omega_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right). \quad (9.46)$$

En reportant (9.46) dans (9.43), on obtient :

$$-\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) = CU \frac{\sin \varphi}{r^2} \quad (9.47)$$

On peut séparer les variables en posant $\Psi = (\sin^2 \varphi)f(r)$. Ce choix se justifie car l'axe Ox doit être une ligne de courant. L'équation (9.47) devient alors, après avoir simplifié par $\sin \varphi$:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2f}{r^3} = \frac{CU}{r^2}. \quad (9.48)$$

$CU r/2$ est une solution particulière. Les solutions générales de l'équation sans second membre sont L'/r et $(M' r^2)$ où L' et M' sont des constantes. D'où, en posant $L = L'/U$ et $M = M'/U$:

$$\Psi = U \sin^2 \varphi \left(\frac{L}{r} + M r^2 + \frac{Cr}{2} \right). \quad (9.49)$$

Calcul du champ de vitesse

Les composantes du champ de vitesse peuvent maintenant être calculées à partir des relations (9.44) et (9.45) :

$$v_r = U \cos \varphi \left(\frac{C}{r} + \frac{2L}{r^3} + 2M \right), \quad (9.50a)$$

$$v_\varphi = -U \sin \varphi \left(\frac{C}{2r} - \frac{L}{r^3} + 2M \right). \quad (9.50b)$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions aux limites :

- pour $r \rightarrow \infty$, $\mathbf{v} \rightarrow 0$ et donc $M = 0$;
- pour $r = R$, on doit avoir : $v_r = U$ pour $\varphi = 0$ et $v_\varphi = -U$ pour $\varphi = \pi/2$.

Donc $C = 3R/2$ et $L = -R^3/4$.

On obtient donc bien le champ de vitesse donné par les équations (9.36), ainsi que les expressions suivantes des champs de pression et de vorticité ($\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire le long du rayon vecteur $\mathbf{OM}$) :

$$p = \frac{3}{2} \eta U R \frac{\cos \varphi}{r^2} = \frac{3}{2} \eta R \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}}{r^2} \quad (9.51)$$

et :

$$\omega_\theta = \frac{3}{2} U R \frac{\sin \varphi}{r^2} = \frac{3}{2} R \frac{(\mathbf{U} \wedge \mathbf{n})_\theta}{r^2}. \quad (9.52)$$

9.4.2 Force exercée sur une sphère en mouvement dans un fluide – coefficient de traînée

Cas d'un milieu infini

En utilisant les résultats précédents, on trouve que la force de traînée totale sur une sphère de rayon R et de vitesse $\mathbf{U}$ dans un fluide de viscosité η vaut :

$$\mathbf{F} = -6\pi \eta R \mathbf{U}. \quad (9.53)$$

Cette formule, dite *formule de Stokes*, est bien vérifiée expérimentalement jusqu'à un nombre de Reynolds de l'ordre de l'unité (alors qu'elle a été établie sous l'hypothèse plus restrictive $Re \ll 1$). Par ailleurs, la force $\mathbf{F}$ de traînée a bien la forme dimensionnelle que nous avons trouvée à la section 9.2.4 (Éq. 9.19b).

Démonstration. La contrainte normale à la surface de la sphère s'écrit :

$$\sigma_{rr} = \left[-p + 2\eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right]_{r=R} = -\frac{3}{2} \eta U \frac{\cos \varphi}{R}. \quad (9.54a)$$

Soulignons que la contribution due au gradient de vitesse s'annule à la surface de la sphère. L'effet de cette contrainte normale est maximal sur l'axe Ox . Par ailleurs, il

existe une contrainte tangentielle due à la viscosité, dont l'expression est donnée à l'annexe A-2 du chapitre 4 :

$$\sigma_{r\varphi} = \eta \left[\left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right]_{r=R} = \frac{3}{2} \frac{\eta U \sin \varphi}{R}. \quad (9.54b)$$

Elle est maximale à angle droit de l'axe Ox . Tous les autres termes du tenseur des contraintes sont nuls. La force résultante par unité de surface en tout point de la sphère s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}}{dS} &= [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} = \sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\varphi} \mathbf{e}_\varphi; \\ \text{soit : } \frac{d\mathbf{F}}{dS} &= \frac{3\eta U}{2R} (-\cos \varphi \mathbf{e}_r + \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi) = -\frac{3\eta \mathbf{U}}{2R}. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Cette force par unité de surface est opposée à $\mathbf{U}$ car les composantes radiale et orthoradiale de $\mathbf{U}$ sont respectivement $(U \cos \varphi)$ et $(-U \sin \varphi)$ et elle est constante avec φ et θ . On obtient alors la force de traînée totale, simplement en multipliant la valeur de $d\mathbf{F}/dS$ par l'aire $4\pi R^2$ de la sphère.

Pour tenir compte de l'effet de la pesanteur, il faut ajouter à la contribution de la pression celle due au terme de pression hydrostatique en $\rho g z$. Après intégration sur la surface de la sphère, ce terme conduit à la poussée d'Archimède $(\rho_{\text{fluide}} V_{\text{sphère}} g)$. ■

Application à la détermination de la vitesse limite de chute d'une bille dans un fluide visqueux à petit nombre de Reynolds

Une bille de rayon R et de densité ρ_s tombe dans un fluide s'étendant à l'infini, de densité ρ_f et de viscosité η avec une vitesse terminale qui correspond à un équilibre entre le poids, diminué de la poussée d'Archimède, et la force de friction visqueuse exercée par le fluide (force de Stokes). Cette vitesse s'écrit :

$$V_{\text{terminale}} = \frac{2}{9} \frac{(\rho_s - \rho_f) g R^2}{\eta}. \quad (9.56)$$

Exemple. Pour une bille de verre ($\rho_s = 2,5 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$) de 1 mm de diamètre, tombant dans de la glycérine ($\rho_f = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\eta \approx 1 \text{ Pa.s}$), on obtient $V_{\text{terminale}} \approx 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$; si nous calculons le nombre de Reynolds correspondant à cet écoulement, nous trouvons $Re = 10^{-3}$. La condition de petit nombre de Reynolds est donc bien vérifiée.

Cette relation entre la vitesse de chute d'une bille et la viscosité du fluide est mise à profit dans des viscosimètres qui utilisent la mesure du temps de chute d'une bille calibrée sur une distance connue. En pratique, on utilise des tubes verticaux dont le diamètre n'est pas grand devant celui de la bille (voir Fig. 9.11). Il en résulte, comme nous allons le voir, un facteur de correction important sur la force de friction. La viscosité est déterminée en utilisant un étalonnage avec des liquides de viscosité connue.

Le *coefficient de traînée*, défini par l'équation (9.20), peut être calculé à partir de la force de Stokes, sous la forme :

$$C_d = \frac{F}{(\pi R^2)^{\frac{1}{2}} \rho U^2} = \frac{24}{Re} \quad (9.57)$$

avec $Re = \rho U(2R)/\eta$. Ce coefficient de traînée a bien le type de variation en $(1/Re)$ prévu dimensionnellement dans la section 9.2.4. C'est également la même forme que celle du coefficient de frottement dans l'écoulement de Poiseuille obtenue à la section 4.5.3.

Remarque. Nous voyons ainsi que le calcul complet de la force exercée par un écoulement à petit nombre de Reynolds autour d'une sphère (problème pourtant très simple par ses symétries) est beaucoup plus complexe que la détermination de sa forme dimensionnelle. Cela souligne l'intérêt, en mécanique des fluides, de la recherche de solutions approchées qui dégagent les mécanismes fondamentaux et conduisent à des expressions en termes de nombres sans dimension comme la relation (9.19b). La détermination des préfacteurs corrects, qui dépendent des effets de forme, ne pourra souvent se faire, en pratique, que par des approches numériques ou des séries d'essais expérimentaux.

Influence de parois

La présence de parois planes ou cylindriques, placées parallèlement ou perpendiculairement au mouvement d'une sphère qui sédimente, augmente les effets de la friction. Il faut souligner la grande sensibilité de la force de Stokes à ces obstacles.

À titre d'exemple, pour une sphère placée dans un tube de rayon dix fois celui de la sphère, l'augmentation de la force est de 20 %. Cette augmentation résulte pour l'essentiel de l'influence de la paroi du tube, ainsi que, dans une moindre mesure, du contre-écoulement vers le haut du liquide déplacé par la sphère en mouvement qui contribue aussi au freinage (ce dernier effet, lié au rapport de la surface de la particule projetée parallèlement à la direction de son mouvement, à celle du tube, est donc proportionnel au *carré* du rapport du rayon de la particule à celui du tube, alors que le premier effet est proportionnel à ce rapport).

Les figures 9.11a et 9.11b, montrent les lignes de courant autour d'une sphère en mouvement le long de l'axe d'un tube cylindrique dans un référentiel respectivement fixe par rapport à la sphère (Fig. 9.11a) et fixe par rapport au tube (Fig. 9.11b). Sur cette seconde vue, on remarque nettement l'existence d'une recirculation due à un écoulement ascendant (contre-écoulement), à proximité des parois du tube, opposé au mouvement descendant de la sphère (et du fluide proche de celle-la). Dans les deux cas, les lignes de courant sont symétriques par rapport au plan diamétral horizontal de la sphère, ce qui ne serait plus le cas à un plus grand nombre de Reynolds.

Dans le cas d'une sphère se déplaçant perpendiculairement à une paroi plane, nous avons établi à la section 8.1.6 l'expression (8.33) de la force de

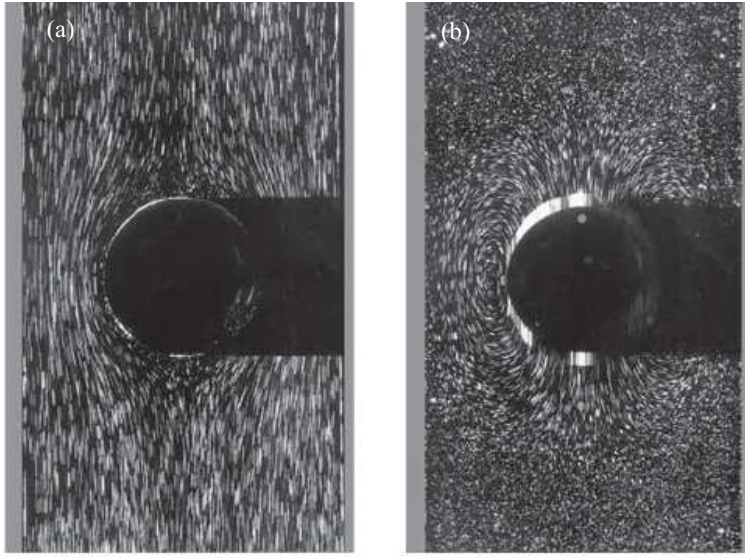


FIG. 9.11 – Visualisation de l'écoulement induit par la chute d'une sphère le long de l'axe d'un tube cylindrique vertical rempli de glycérol et de diamètre 163 mm, double de celui de la sphère. Le nombre de Reynolds est $Re = 0,1$. Les lignes de courant sont rendues visibles par de petites particules de magnésium éclairées par un fin plan de lumière (l'éclairage est réalisé par le côté gauche de la figure, et la partie sombre de la photographie correspond à l'ombre de la sphère) ; (a) l'appareil photo se déplace de manière à être fixe par rapport à la sphère ; (b) l'appareil est fixe par rapport au tube. Durant le temps d'exposition, la sphère s'est déplacée d'une petite fraction de son diamètre (docs. M. Coutanceau).

résistance lorsque la sphère est très proche de la paroi. On constate que, dans ce cas, l'expression (9.53) de la force de résistance est corrigée par un facteur multiplicatif R/h , où h est la distance minimale entre la sphère et la paroi, avec :

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta R \mathbf{U} \frac{R}{h}$$

Précisons que, par suite de la réversibilité des écoulements aux petits nombres de Reynolds, cette expression est valable lorsque la sphère se rapproche de la paroi comme lorsqu'elle s'en éloigne.

Remarque. On peut raccorder cette expression, valable quand $h \ll R$, avec l'équation (9.53) qui s'applique dans la limite $h \gg R$ pour obtenir :

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta R \left(1 + \frac{R}{h}\right) \mathbf{U}.$$

La force donnée par cette relation (*a priori* valable dans les deux limites $R/h \gg 1$ et $R/h \ll 1$) reste proche de la valeur exacte (déterminée par un calcul faisant intervenir un développement en une série de termes) à mieux que 6,5% pour les valeurs intermédiaires du rapport R/h .

9.4.3 Extensions de la résolution de l'équation de Stokes à d'autres problèmes

Le problème de Stokes peut être généralisé à d'autres géométries mettant en jeu des sphères en présence de parois, à une sphère en rotation, à un ensemble de sphères, à des objets ellipsoïdaux (dont le bâtonnet cylindrique, discuté à la section 9.3.2 est un cas limite) ou encore, plus simplement, au cas où la sphère solide est remplacée par un fluide. Nous analysons maintenant plusieurs de ces situations.

Sphère en rotation

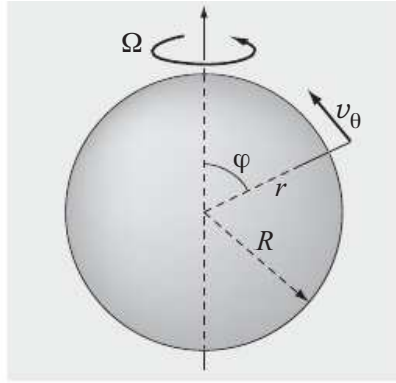


FIG. 9.12 – Rotation d'une sphère dans un fluide.

De façon générale, tout déplacement d'un solide peut se décomposer en une translation et une rotation. Après la translation d'une sphère, nous allons étudier l'écoulement créé par sa rotation sur elle-même dans un fluide au repos à grande distance (Fig. 9.12). On trouve que la composante azimutale v_θ du champ de vitesse vaut :

$$v_\theta(r, \varphi) = \frac{\Omega R^3 \sin \varphi}{r^2}. \quad (9.58)$$

Le moment des forces résistant à cette rotation est parallèle à Oz avec :

$$\mathbf{G} = -8\pi \eta R^3 \mathbf{\Omega}; \quad (9.59)$$

on avait prévu cette forme par analyse dimensionnelle à la section 9.3.2 (Éq. 9.34).

Démonstration. Compte tenu de la symétrie du problème, la seule composante non nulle de la vitesse est v_θ , qui ne dépend que de r et de l'angle polaire φ et qui est telle que $v_\theta(r = R) = \Omega R \sin \varphi$. Également pour des raisons de symétrie, la pression doit être indépendante de θ . La composante suivant θ de l'équation du mouvement en coordonnées sphériques (annexe A-2 du chapitre 4) s'écrit donc :

$$\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r v_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\cotan \varphi}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \varphi} \right) = 0.$$

On utilise la décomposition $v_\theta(r, \varphi) = f(r)g(\varphi)$ où $g(\varphi) = \sin \varphi$ pour respecter la condition aux limites sur la surface de la sphère. L'équation se simplifie alors en :

$$\frac{\ell^2 f}{r^2} + \frac{2 \ell f}{r} - \frac{2f(r)}{r^2} = 0.$$

Si l'on recherche une solution de la forme $f = r^\alpha$, on trouve les valeurs $\beta = 1$ ou -2 ; seule la seconde valeur permet de satisfaire la condition de vitesse nulle à l'infini. On obtient alors l'équation (9.58) en choisissant la constante de proportionnalité pour vérifier la condition aux limites sur la sphère.

On en déduit la valeur de la seule composante non nulle des contraintes exercées sur la sphère :

$\sigma_{\theta r} = \theta (\ell v_\theta / \ell r - v_\theta / r) = -3\theta \Psi \sin \varphi$ pour $r = R$. Le moment résistant est obtenu en multipliant $\sigma_{\theta r}$ par la distance $R \sin \varphi$ et en intégrant sur toute la surface de la sphère. On retrouve alors l'expression (9.59). ■

Influence mutuelle de deux sphères

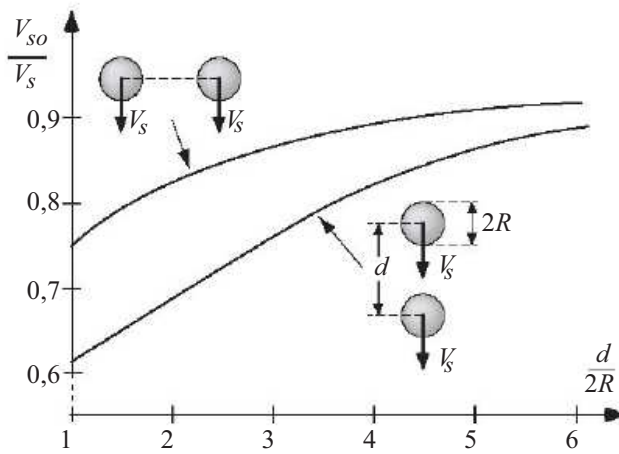


FIG. 9.13 – Comparaison entre la vitesse de sédimentation V_s de deux sphères identiques, à la verticale ou à l'horizontale l'une de l'autre. V_{so} est la vitesse d'une sphère isolée.

Nous envisageons le cas de deux sphères identiques, sédimentant dans un fluide s'étendant à l'infini, et suffisamment proches pour que le champ de vitesse créé par le déplacement de chaque sphère influence le mouvement de l'autre. La vitesse de sédimentation peut être évaluée en ajoutant la vitesse propre de sédimentation d'une sphère à celle induite par le mouvement de l'autre. En utilisant la propriété de réversibilité des écoulements aux faibles nombres de Reynolds, discutée à la section 9.2.3, on montre que les vitesses résultantes des deux sphères sont nécessairement les mêmes. La droite joignant les centres ne tourne donc pas pendant la chute, quelle que soit son orientation initiale, et la distance entre les centres reste constante; l'ensemble des deux sphères se comporte comme un solide de révolution avec un plan de symétrie

perpendiculaire à l'axe. L'inverse de la vitesse de sédimentation V_s (normalisée à sa valeur V_{so} pour une sphère unique en milieu infini) est portée sur la figure 9.13 en fonction de $d/2R$, pour les deux cas où la droite joignant les centres des sphères est verticale ou horizontale.

Supposons la distance d entre les centres suffisamment grande devant le rayon R pour qu'on puisse négliger les termes en $1/d^3$ dans le champ de vitesse induit par chacune des sphères sur l'autre (Éq. 9.36). Lorsque la ligne joignant les centres est verticale, chaque sphère induit, au niveau de l'autre, une composante de vitesse v_i de l'ordre de $(3/2)V_s R/d$, parallèle à la vitesse de sédimentation $\mathbf{V}_s$. La vitesse relative des sphères par rapport au fluide est donc diminuée de la quantité v_i ; elle doit être égale à la vitesse terminale de chute V_{so} d'une sphère isolée pour que l'on ait équilibre entre son poids et les forces de frottement visqueux. On a donc :

$$V_{so} = V_s - v_i \approx V_s \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R}{d} \right) \quad (9.60)$$

d'où :

$$\frac{V_{so}}{V_s} \approx 1 - \frac{3}{2} \frac{R}{d}. \quad (9.61)$$

Dans le cas où la ligne joignant les centres est horizontale, on obtient :

$$\frac{V_{so}}{V_s} \approx 1 - \frac{3}{4} \frac{R}{d}. \quad (9.62)$$

Rappelons que les deux expressions ci-dessus ne sont valables que pour une distance entre les sphères suffisamment grande ; les courbes de la Figure 9.13 ont été obtenues par un calcul exact.

Goutte fluide en mouvement dans un autre fluide

On considère une sphère fluide de viscosité η_i , dans un autre fluide non miscible de viscosité $\eta_e = \lambda \eta_k$ en mouvement à une vitesse $\mathbf{U}$ à l'infini. Pour déterminer le champ de vitesse à l'extérieur, on utilise la forme générale donnée par les formules (9.50) (on prend $M = 1/2$). À l'intérieur, un calcul analogue au précédent conduit, pour le champ de vitesse induit, à un résultat de la forme :

$$v_r = U \cos \varphi (A + Br^2), \quad (9.63a)$$

$$v_\varphi = -U \sin \varphi (A + 2Br^2). \quad (9.63b)$$

Les constantes A et B sont déterminées en exprimant la continuité du champ de vitesse et des contraintes de cisaillement à la surface de la sphère. La dépendance par rapport à r de ces deux composantes de vitesse est tout à fait différente de celle des équations (9.36a-b). Cela peut se comprendre car, d'une part, la répartition de vorticité à l'intérieur de la sphère n'a pas la même forme que celle obtenue dans l'équation (9.43) et, d'autre part, les conditions

aux limites sont différentes ; en particulier, les termes en $1/r^n$ ($n > 0$) doivent être nuls pour le champ de vitesse intérieur car la vitesse est finie au centre de la sphère.

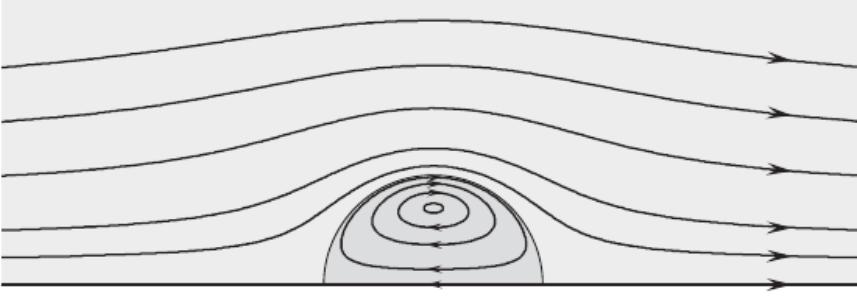


FIG. 9.14 – Écoulements extérieur et intérieur à une sphère fluide placée dans un écoulement de vitesse $\mathbf{U}$ à l'infini (configuration comparable à celle de la Fig. 9.10b).

On obtient, pour chacun des deux champs de vitesse :

– à l'extérieur :

$$v_r = U \cos \varphi \left[1 - \frac{3 + 2\lambda}{2(1 + \lambda)} \frac{R}{r} + \frac{1}{2(1 + \lambda)} \frac{R^3}{r^3} \right], \quad (9.64a)$$

$$v_\varphi = -U \sin \varphi \left[1 - \frac{3 + 2\lambda}{4(1 + \lambda)} \frac{R}{r} - \frac{1}{4(1 + \lambda)} \frac{R^3}{r^3} \right]; \quad (9.64b)$$

– à l'intérieur :

$$v_r = -U \cos \varphi \frac{\lambda}{2(1 + \lambda)} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (9.65a)$$

$$v_\varphi = U \sin \varphi \frac{\lambda}{2(1 + \lambda)} \left[1 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (9.65b)$$

La force de Stokes qui s'exerce sur la sphère est donnée par la formule :

$$\mathbf{F} = 2\pi \eta_e R \mathbf{U} \frac{3 + 2\lambda}{1 + \lambda}. \quad (9.66)$$

Pour une sphère en mouvement à une vitesse $\mathbf{U}$ dans un fluide au repos, il faudrait ajouter un signe $-$ au second membre de l'expression précédente. L'équation (9.66) redonne la formule de Stokes (9.53) dans la limite où λ tend vers zéro (fluide intérieur infiniment visqueux) ; dans la limite opposée où λ tend vers l'infini, on obtient la formule correspondant à une bulle de gaz dans un liquide :

$$\mathbf{F} = 4\pi \eta_e R \mathbf{U}. \quad (9.67)$$

Le changement du préfacteur 6π en 4π provient de la différence entre les conditions aux limites dans les deux cas. Si la surface d'une bulle est partiellement rigidifiée par la présence d'agents tensioactifs en solution qui se fixent à l'interface, on obtient, en effet, une valeur intermédiaire entre 4π et 6π ; c'est souvent le cas, en pratique, pour une bulle montant dans de l'eau insuffisamment purifiée.

Champ de vitesse à grande distance pour un corps de forme quelconque, notion de Stokeslet

À grande distance $L \gg R$ d'une sphère en mouvement dans un fluide au repos, les termes d'ordre supérieur à $(1/r)$ des expressions (9.36a-b) du champ de vitesse deviennent négligeables, de telle sorte que :

$$v_r = \frac{3}{2} U R \frac{\cos \varphi}{r}, \quad (9.68a)$$

$$v_\varphi = -\frac{3}{2} U R \frac{\sin \varphi}{2r}. \quad (9.68b)$$

En combinant ces relations avec l'expression $F = 6\pi \eta R U$ de la force exercée par la sphère sur le fluide (opposée à la force de traînée de Stokes), elles deviennent :

$$v_r = \frac{F}{4\pi \eta} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad (9.69a)$$

$$v_\varphi = -\frac{F}{4\pi \eta} \frac{\sin \varphi}{2r}. \quad (9.69b)$$

En utilisant la relation (9.51), on peut également exprimer la pression à grande distance en fonction de F avec :

$$p = \frac{F}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r^2}. \quad (9.70)$$

On peut montrer que les relations (9.69) et (9.70) s'appliquent à un corps de forme quelconque : il faut seulement qu'il ait trois dimensions finies (d'ordre de grandeur noté R pour la plus grande), que la distance $r \gg R$ soit grande devant ces dimensions et que l'axe de coordonnées $\varphi = 0$ corresponde à la direction de la force $\mathbf{F}$. Ces relations sont, en particulier, valables même si le corps n'a pas de symétrie sphérique et/ou que la direction de la force $\mathbf{F}$ n'est pas parallèle à celle de la vitesse $\mathbf{U}$ du corps.

Il peut sembler surprenant que ce soit la force exercée sur le fluide qui détermine la vitesse à grande distance et non pas la vitesse du corps. En fait, cette dernière vitesse impose des conditions aux limites à courte distance et leur influence ne se fait plus sentir loin du corps. En revanche, la force $\mathbf{F}$ exercée par le corps sur le fluide lui communique une quantité de mouvement $\mathbf{F}$ par unité de temps. Pour assurer un régime d'écoulement stationnaire, cet apport doit être compensé par un flux de quantité de mouvement s'éloignant

du corps : $\mathbf{F}$ doit alors être égale à la valeur globale de ce flux à travers une surface entourant le corps, une sphère par exemple. Cette valeur doit être indépendante du rayon $r \gg R$ de la sphère d'intégration. En régime de Stokes, la quantité de mouvement est uniquement transportée par diffusion visqueuse (on verra quand même plus loin que ce n'est vrai que si $r/R \ll 1/Re$) : le flux local de quantité de mouvement est alors déterminé par les gradients des composantes de la vitesse et varie donc en $1/r^2$ si la vitesse varie en $1/r$. L'intégrale du flux sur la sphère de rayon r sera de l'ordre de grandeur du produit de la surface $4\pi r^2$ par un flux local en $1/r^2$ et peut donc bien être constante (elle ne le serait pas pour toute autre loi de décroissance de la vitesse en fonction de r). Le champ de vitesse, qui s'établit à grande distance, est donc bien déterminé par le flux diffusif total $\mathbf{F}$ de quantité de mouvement et non pas par l'écoulement près du corps.

En fait, ce champ de vitesse sera le même que si la force $\mathbf{F}$ était appliquée ponctuellement, auquel cas les relations (9.69a-b) sont valables quelle que soit la distance à ce point : on parle, pour un tel champ de vitesse et de pression, de *Stokeslet*. Tant que l'on ne s'intéresse pas au champ de vitesse local près de celles-la, le champ de vitesse créé par le mouvement d'un grand nombre de particules peut être modélisé par celui créé par un ensemble de Stokeslets coïncidant avec le centre des particules (on parle alors de techniques de simulation de type *dynamique stokesienne*).

Relation force de résistance-vitesse pour un corps de forme quelconque

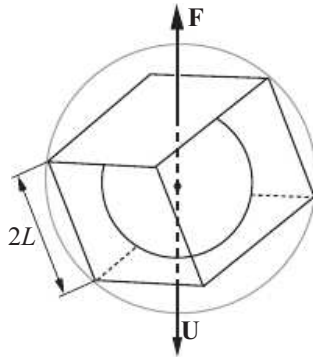


FIG. 9.15 – Géométrie conduisant à l'évaluation approchée de la force de résistance hydrodynamique $\mathbf{F}$ sur un cube (C) en mouvement à la vitesse $\mathbf{U}$.

Nous avons déjà évoqué ce problème à la section 9.3.2. Pour chaque géométrie, on aura des coefficients différents reliant les composantes de la force à celles de la vitesse.

Le théorème de dissipation minimale d'énergie (section 9.2.3) permet d'évaluer la force de Stokes exercée sur un cube de côté $2L$ se déplaçant avec une vitesse $\mathbf{U}$ (Fig. 9.15). Notons d'abord, comme nous l'avons justifié plus

haut (section 9.3.2, exemple (ii)), que la force $\mathbf{F}$ sur le cube est indépendante de l'orientation de ce dernier par rapport à $\mathbf{U}$; elle est, par ailleurs, toujours parallèle à $\mathbf{U}$ et de sens contraire. Considérons la sphère ($\mathcal{S}$) de rayon $L\sqrt{3}$ circonscrite au cube ($\mathcal{C}$). Remplaçons le champ de vitesse réel $\mathbf{v}_c(\mathbf{r})$ autour de ($\mathcal{C}$) par la juxtaposition du champ de vitesse $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ autour de la sphère et d'un champ uniforme égal à la vitesse $\mathbf{U}$ entre ($\mathcal{S}$) et ($\mathcal{C}$). Cette seconde solution, qui satisfait à la condition aux limites sur ($\mathcal{S}$) et ($\mathcal{C}$), correspond à une dissipation d'énergie supérieure à la solution réelle. En appliquant la formule de Stokes à l'écoulement autour de la sphère, on obtient un *majorant* de l'énergie dissipée, soit :

$$-\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} < 6\pi\eta\sqrt{3}LU^2,$$

F et U sont les modules de la force et de la vitesse et $-\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}$ est le taux de dissipation réel autour du cube ($\mathcal{C}$). Le membre de gauche représente, en effet, la puissance dissipée autour de la sphère de rayon $L\sqrt{3}$, la dissipation entre la sphère et ($\mathcal{C}$) est nulle car la vitesse est uniforme. Prenons de même la sphère ($\mathcal{S}'$) *inscrite* dans ($\mathcal{C}$); la dissipation autour de ($\mathcal{S}'$) est inférieure à celle obtenue pour une solution correspondant à un écoulement uniforme de vitesse $\mathbf{U}$ entre ($\mathcal{S}'$) et ($\mathcal{C}$), et à l'écoulement inconnu autour de ($\mathcal{C}$). On trouve donc un *minorant* égal cette fois-ci à $6\pi\eta LU^2$. En combinant les deux inégalités, on peut borner la force F exercée sur le cube par :

$$6\pi\eta LU < F < 6\pi\eta\sqrt{3}LU.$$

Remarquons que ces bornes sont assez proches l'une de l'autre. De façon très générale, la force sur un objet de taille finie et de dimension maximale L est voisine de celle sur une sphère de diamètre L .

Remarque. La correspondance avec le cas sphérique que nous venons d'évoquer permet d'évaluer des ordres de grandeur de vitesses de sédimentation de macromolécules de polymères, qui ont, en solution, une configuration de pelotes ou d'agrégats colloïdaux; ce sont des objets non compacts, pour lesquels on peut cependant définir un *rayon hydrodynamique* R_h compatible avec l'application de la formule de Stokes. Ce rayon R_h reste de l'ordre de grandeur du rayon de la sphère circonscrite à l'objet. On peut accéder à la valeur de ce rayon hydrodynamique par des mesures de diffusion de lumière.

Forces sur des cylindres allongés

Pour un cylindre allongé de rayon R et de longueur L , d'axe parallèle ($\mathbf{F}_{\parallel}$) ou perpendiculaire ($\mathbf{F}_{\perp}$) à sa vitesse $\mathbf{U}$ dans un fluide au repos, un calcul complet (Cox, 1970) donne les expressions :

$$\mathbf{F}_{\parallel} \simeq - \frac{2\pi\eta L\mathbf{U}}{\text{Log} \left(\frac{L}{R} \right) - (3/2) + \text{Log} 2} \quad (9.71a)$$

et :

$$\mathbf{F}_\perp \simeq -\frac{4\pi \eta L \mathbf{U}}{\text{Log} \left(\frac{L}{R} \right) - (1/2) + \text{Log} 2}. \quad (9.71b)$$

Le rapport des valeurs des forces est très voisin de 2 ; c'est ce résultat que nous avons utilisé dans les calculs de l'angle de chute d'un bâtonnet et de la force induite par la rotation d'un fil en hélice (section 9.3.2). Ces deux valeurs sont bien voisines de la force sur la sphère circonscrite de rayon $L/2$ comme pour les autres géométries de corps. C'est une nouvelle manifestation de la grande portée des interactions hydrodynamiques aux petits nombres de Reynolds : il en résulte une faible variation des champs de vitesse d'écoulement à grande distance, ainsi que des forces, en fonction des détails de la forme de l'objet en déplacement.

9.5 Limites de la description de Stokes des écoulements à faible nombre de Reynolds

9.5.1 Équation d'Oseen

La démonstration de l'équation de Stokes, au début de ce chapitre, repose sur l'hypothèse que les termes d'inertie $((\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v})$ et d'instationnarité $(\partial \mathbf{v} / \partial t)$ sont négligeables devant les termes de viscosité dans l'équation de mouvement. Nous allons montrer, à partir du cas de l'écoulement autour d'une sphère, que ces hypothèses ne sont plus vérifiées à suffisamment grande distance de la sphère. L'équation de Stokes n'y est alors plus valable et sera remplacée par l'équation d'Oseen.

Énergie cinétique du fluide loin de la sphère

À grande distance de la sphère ($r \gg R$), on peut approcher les valeurs des composantes de la vitesse (Éqs. 9.36) par :

$$v_r \approx \frac{3R}{2} \frac{U}{r} \cos \varphi \quad (9.72a)$$

et :

$$v_\varphi \approx -\frac{3R}{4} \frac{U}{r} \sin \varphi. \quad (9.72b)$$

On en déduit une borne inférieure de l'énergie cinétique du fluide e_c par unité de volume, en écrivant :

$$e_c = \frac{1}{2} \rho v^2(r) > \frac{9}{32} \rho U^2 \frac{R^2}{r^2}.$$

L'énergie cinétique $(dE_c/dr) dr$ comprise entre les rayons r et $r + dr$ vérifie donc :

$$dE_c = 4\pi e_c r^2 dr > \frac{9\pi}{8} \rho U^2 R^2 dr. \quad (9.73)$$

L'intégration dans tout l'espace donne une énergie cinétique totale infinie. L'équation de Stokes cesse donc certainement d'être valable à grande distance de la sphère.

Effets de convection et d'accélération loin de la sphère – équation d'Oseen

Supposons la sphère ($\mathcal{S}$) en mouvement à une vitesse $\mathbf{U}$ dans un fluide immobile à l'infini avec un nombre de Reynolds $Re = (2\rho UR/\eta) \ll 1$. Évaluons l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation de Navier-Stokes à grande distance L de la sphère. L'ordre de grandeur de la vitesse à cette distance est $v \approx U (R/L)$ (Éqs. 9.72). Un observateur, fixe par rapport au fluide à l'infini et situé à une distance L de ($\mathcal{S}$), voit défiler le champ de vitesse décrit par les équations (9.36), entraîné par le mouvement de ($\mathcal{S}$).

Même si la vitesse de ($\mathcal{S}$) est constante, l'écoulement du fluide n'est pas stationnaire dans le référentiel de l'observateur et l'on a :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \quad \text{soit} : \quad \rho \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right| \approx \rho U \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \right| \approx \rho U \left(U \frac{R}{L} \right) \frac{1}{L} = \rho \frac{U^2 R}{L^2}.$$

Démonstration. Appelons O et O' les positions du centre de la sphère respectivement aux temps t et $t + dt$. Si l'on définit le rayon vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ avec $r \gg R$, le rayon vecteur au temps $t + dt$ sera $\mathbf{O'M} = \mathbf{O'O} + \mathbf{r} = -\mathbf{U} dt + \mathbf{r}$. La variation de vitesse au point fixe M entre t et $t + dt$ sera donc : $\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{U} dt) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -(\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} dt$. En écrivant que cette variation représente $(\partial \mathbf{v} / \partial t) dt$, on retrouve l'équation cherchée. ■

Le terme $\rho \partial \mathbf{v} / \partial t$ décroît donc en $1/L^2$, contrairement au terme de contraintes visqueuses, qui est de l'ordre de :

$$\eta |\Delta \mathbf{v}| \approx \eta \left(U \frac{R}{L} \right) \frac{1}{L^2} \approx \eta \frac{UR}{L^3}$$

et qui varie donc en $1/L^3$. Le rapport de ces deux termes est ainsi de l'ordre de $\rho UL/\eta$, et augmente avec la distance. Ainsi, à une distance L de la sphère telle que :

$$\frac{L}{R} \approx \frac{1}{Re} \quad \text{ou} \quad L \approx \frac{\nu}{U}$$

on a $\rho UL/\eta \approx 1$ et l'hypothèse de quasi stationnarité cesse d'être valable. En revanche, toujours pour un fluide immobile à l'infini, le terme de transport par convection $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$ vérifie :

$$|\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}| \approx \frac{U^2 R^2}{L^3} \ll \eta |\Delta \mathbf{v}| \approx \eta \frac{UR}{L^3}.$$

Il varie donc en $1/L^3$ et reste toujours négligeable si $Re \ll 1$.

Analysons maintenant le cas d'une sphère immobile dans un fluide de vitesse constante $\mathbf{U}$ à l'infini : dans ce cas, au contraire, le terme de non-stationnarité ($\partial \mathbf{v} / \partial t$) reste identiquement nul pour tout observateur fixe, quelle que soit sa position. A distance suffisamment grande, la vitesse $\mathbf{v}$ du fluide tend vers $\mathbf{U}$ et le terme convectif ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$) $\mathbf{v}$ est voisin de $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$. C'est donc ce terme convectif qui est alors de l'ordre de $U^2 R / L^2$ et n'est plus négligeable, à grande distance, par rapport au terme de dissipation visqueuse.

Ainsi, dans un volume de fluide infini, l'équation de Stokes n'est qu'une approximation valable suffisamment près du solide ; en raison de la lente décroissance du champ de vitesse, les erreurs correspondantes pourront être importantes. Loin de la sphère, on remplacera donc, en première approximation, l'équation de Stokes par l'équation d'Oseen :

$$\rho (\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (9.74a)$$

Revenons au premier cas envisagé où le solide se déplace à vitesse constante dans un fluide immobile à l'infini ; il suffit d'ajouter à l'équation de Stokes le terme de variation temporelle $\rho \partial \mathbf{v} / \partial t = -(\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$, que nous avons déterminé plus haut, pour obtenir :

$$\rho (-\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (9.74b)$$

À partir de ces équations, on obtient une valeur corrigée de la force de traînée $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = -6\pi \eta R \mathbf{U} \left(1 + \frac{3}{8} Re \right) + O(Re^2), \quad (9.75)$$

où

$$Re = \frac{RU}{\nu}.$$

Remarque. Si l'équation d'Oseen décrit mieux l'écoulement que l'équation de Stokes loin de la sphère, elle est incorrecte près de cette dernière car l'estimation des termes non linéaires ou d'accélération est erronée. Des développements plus complexes (méthodes de raccordements asymptotiques) sont nécessaires pour raccorder les deux types de solutions dans le domaine de distances $R \ll L \ll R/Re$. La valeur correspondante de $\mathbf{F}$ est, en fait, intermédiaire entre celles prédites par la formule de Stokes (9.53) et par l'équation (9.75) avec :

$$\mathbf{F} = -6\pi \eta R \mathbf{U} \sqrt{1 + \frac{3}{16} Re} + O(Re^2).$$

Contrairement aux écoulements de Stokes, les champs de vitesse obtenus sont dissymétriques par rapport au plan diamétral perpendiculaire à l'écoulement. La figure 9.16 correspond à une sphère en mouvement dans un fluide immobile à l'infini ; les lignes de courant sont plus resserrées en arrière de la sphère qu'en avant de celle-ci (la vorticité est plus concentrée en aval). En effet, aux échelles de distance $L \approx R/Re$, la vorticité, cr  e localement par le passage de la sphère, ne diffuse pas assez vite pour se répartir également

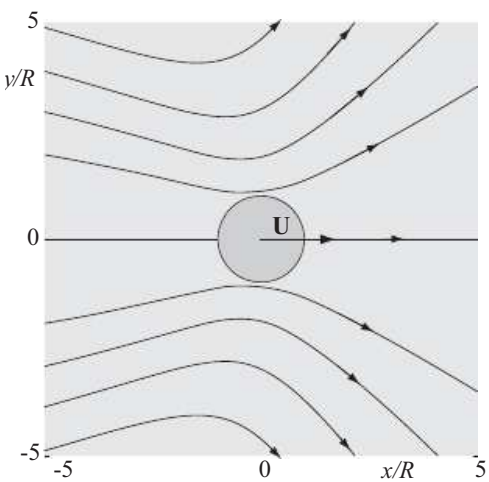


FIG. 9.16 – Écoulement asymétrique autour d’une sphère se déplaçant à vitesse constante ($Re = 0,5$). Le champ de vitesse a été obtenu par résolution de l’équation d’Oseen dans un référentiel où le fluide est au repos à l’infini. Cette configuration d’écoulement est à comparer à celle de la figure 9.10a, qui correspondait à un nombre de Reynolds beaucoup plus faible que 1 (doc. E. Guazzelli, IUSTI).

entre l’amont et l’aval de cette dernière, et elle est entraînée vers l’arrière. Nous verrons dans la section 10.7 que, aux grands nombres de Reynolds ou aux très grandes distances $L \gg R/Re$, la dissymétrie est telle que les gradients de vitesse restent concentrés dans un sillage de très faible largeur en aval du corps (précisons que cela n’est vrai que pour les corps aérodynamiques, bien profilés, pour lesquels le sillage reste laminaire).

L’analyse précédente reste valable à grande distance d’un solide de forme quelconque, pourvu que ses trois dimensions soient finies. Le terme dominant du champ de vitesse est, en effet, encore d’ordre $1/r$ à grande distance et les approximations précédentes restent applicables.

9.5.2 Forces sur un cylindre circulaire infini dans un écoulement uniforme ($Re \ll 1$)

On suppose un cylindre circulaire de longueur infinie et de rayon R dans un écoulement de vitesse $\mathbf{U}$ perpendiculaire à son axe. Le point marquant de ce problème est le *paradoxe de Stokes* : contrairement à la sphère, on ne peut pas trouver de solution de l’équation de Stokes vérifiant les conditions aux limites à la fois sur le cylindre et à l’infini. Une explication physique de ce résultat mathématique est que des écoulements à 2D entièrement contrôlés par la viscosité ont une décroissance encore plus lente des champs de vitesse et de pression qu’autour d’une sphère. En utilisant le même type d’argument qu’à la section 9.4.1, on trouve en effet une variation de la vitesse en $\text{Log } r$ et de la pression en $1/r$ (au lieu de $1/r$ et $1/r^2$ pour une sphère). Le calcul

de l'énergie cinétique effectué à la section 9.5.1 indique alors que l'énergie cinétique entre deux cylindres de rayon r et $r + \delta r$ augmente avec r : on ne peut donc pas traiter un tel écoulement avec l'approximation de Stokes qui est valable, comme nous venons de le voir, aux courtes distances.

Justification. Supposons une variation en $Uf(r)$ de la vitesse avec la distance r pour $r \gg R$ (R étant le rayon du cylindre) : les contraintes visqueuses (et également les variations de pression) décroîtront comme $\eta U df/dr$. Le flux de quantité de mouvement doit, cette fois-ci, être calculé à travers des cylindres de rayon r et de longueur unité (et non plus des sphères) : le produit $(2\pi r) \eta U df/dr$ est proportionnelle à la force F par unité de longueur et doit être indépendant de r : $r df/dr$ doit donc être une constante, ce qui conduit à $f(r) \propto \text{Log } r$, $p(r) \propto 1/r$ et $F \propto \eta U$. Avec une telle variation de $v(r)$, l'énergie cinétique par unité de longueur entre deux cylindres de rayons r et $r + \delta r$ variera comme $U^2 r \text{Log}^2(r)$ et augmentera donc avec r .

C'est donc l'équation d'Oseen qui, tout en n'étant pas valable près du cylindre (comme près d'une sphère), fournit une première approximation de la force de traînée par unité de longueur :

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi\eta\mathbf{U}}{1/2 - \gamma - \text{Log}(Re/8)} \cong \frac{4\pi\eta\mathbf{U}}{2 - \text{Log } Re} \quad (9.76)$$

où $Re = 2UR/\nu$ et $\gamma \simeq 0,577$ est la constante d'Euler.

Aux distances assez faibles pour avoir $Ur/\nu \ll 1$, l'écoulement vérifie cependant l'équation de Stokes. En cherchant la solution de vitesse nulle sur le cylindre correspondant à la valeur de la force donnée par l'équation (9.76), on obtient la fonction de courant (Lamb, 1911) :

$$\Psi = \frac{U}{2(2 - \text{Log } Re)} \left(2r \text{Log } \frac{r}{R} - r + \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta,$$

avec $Re = 2RU/\nu$ et les composantes radiale et tangentielle de la vitesse :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{U}{2(2 - \text{Log } Re)} \left(2 \text{Log } \frac{r}{R} - 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (9.77a)$$

et

$$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{U}{2(2 - \text{Log } Re)} \left(2 \text{Log } \frac{r}{R} + 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (9.77b)$$

Le terme en $\text{Log } r$ devient donc bien dominant dès que l'on s'éloigne un peu du cylindre et que $r^2/R^2 \ll 1$. Comme pour la sphère, un calcul plus exact requiert un raccordement asymptotique entre les solutions de l'équation de Stokes près du cylindre et d'Oseen loin de ce dernier. On trouverait, bien sûr, les mêmes résultats pour un cylindre en mouvement dans un fluide immobile (au signe près pour la force de traînée et à un terme additif près pour les composantes de la vitesse).

Il est intéressant de comparer la formule (9.76) à l'expression (9.71b) de la force par unité de longueur pour un cylindre de longueur finie L . Les deux expressions sont similaires mais, à un coefficient près, le rapport L/R est remplacé par $1/Re$ pour le cylindre infini et, donc, L est remplacé par ν/U . Cela suggère que ν/U représente une distance maximum au-delà de laquelle on n'a plus influence des différentes parties de la longueur du cylindre les unes sur les autres.

Remarque. Dans la section 9.5.1, ν/U était également la distance pour laquelle les termes instationnaires ou convectifs de l'équation de Stokes devenaient importants.

9.6 Dynamique des suspensions

Les deux dernières sections 9.6 et 9.7 portent sur les écoulements aux faibles valeurs de Re pour des suspensions et des milieux poreux. Elles se distinguent, tout d'abord, des précédentes par le fait que l'on considère un grand nombre de particules solides distribuées de façon désordonnée dans un écoulement (libres de se déplacer pour les suspensions et fixes pour les milieux poreux) ; d'autre part, on s'intéresse à des lois moyennes d'écoulement et non au champ de vitesse détaillé autour de chaque particule. Ces domaines sont voisins dans la mesure où les lois pour des suspensions très concentrées se recoupent avec celles pour des milieux poreux.

Le problème des suspensions de particules est d'une grande importance pratique. Il recouvre aussi bien la sédimentation de particules, l'écoulement de suspensions (boues de forage argileuses, ciments, pâtes...) que le comportement des *lits fluidisés* (ces derniers sont formés d'un ensemble de particules mises en lévitation par l'injection de fluide vers le haut à la base du système, ce qui maintient les particules en suspension).

Le comportement des suspensions sera très différent suivant la taille L des particules. Pour de très petites particules, dites browniennes (section 1.3.1), les effets d'agitation thermique sont très importants. Pour des plus grosses particules, les effets hydrodynamiques sont dominants. L'importance relative de ces deux effets est mesurée par le *nombre de Péclet* Pe , défini par l'équation (2.16) :

$$Pe = \frac{UL}{D}$$

où U est la vitesse de l'écoulement et D le coefficient de diffusion brownienne des particules. Ici, nous allons déterminer le nombre de Péclet à partir du rapport du temps de diffusion de particules sphériques sur une distance de l'ordre de leur rayon R , au temps de convection des particules par l'écoulement sur la même distance R . Nous avons montré que le coefficient de diffusion brownienne D des particules s'écrit (Éq. 1.48) :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi \eta R}$$

où R est le rayon des particules et η la viscosité du fluide. Le temps de diffusion brownienne τ_D des particules sur la distance R est $\tau_D \approx R^2/D$. Le temps de convection des particules à la vitesse caractéristique $U \approx \dot{\gamma}R$ de l'écoulement est $\tau_C \approx R/U \approx 1/\dot{\gamma}$ ($\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement de l'écoulement). Donc, le nombre de Péclet s'écrit :

$$Pe = \frac{\tau_D}{\tau_C} = \frac{6\pi\eta\dot{\gamma}R^3}{k_B T}. \quad (9.78)$$

A priori, le passage d'une particule d'un comportement brownien pour $Pe = 1$ à un comportement non brownien pour $Pe \gg 1$ dépend de la valeur du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Cependant, à cause de l'exposant élevé du facteur R^3 , c'est surtout la taille des particules qui détermine la frontière entre les deux comportements. Pratiquement, on peut fixer approximativement la frontière entre particules browniennes et non browniennes à une taille des particules de l'ordre de $1 \mu\text{m}$.

Justification. Prenons des particules dans l'eau à température ambiante ; la limite $Pe \approx 1$ correspond à un diamètre des particules de l'ordre de $1 \mu\text{m}$, pour des taux de cisaillement $\dot{\gamma} \approx 1 \text{ s}^{-1}$. Signalons la coïncidence suivante qui permet de mémoriser la frontière entre les deux domaines : des particules de $1 \mu\text{m}$ de diamètre, en suspension dans de l'eau à température ambiante et en écoulement avec des taux de cisaillement de 1 s^{-1} , ont un coefficient de diffusion brownienne $D \approx 1 \mu\text{m}^2.\text{s}^{-1}$, un temps caractéristique correspondant $\tau_D \approx R^2/D \approx 1 \text{ s}$, et un nombre de Péclet de l'ordre de l'unité. En prenant le micromètre et la seconde comme unités de base de ces différentes grandeurs, on peut résumer cette propriété par :

$$2R \approx D \approx \dot{\gamma} \approx \tau_D \approx Pe \approx 1. \quad (9.79)$$

Dans l'étude des mouvements hydrodynamiques des objets de petite taille, il existe un facteur supplémentaire qui provient de la nécessité de prendre en compte les forces interparticulaires de type Van der Waals et les forces électrostatiques dans le cas de particules chargées ou de solvants polaires. Les interactions correspondantes (interactions colloïdales) jouent un rôle prépondérant dans le cas de faibles séparations entre particules (typiquement inférieures à la centaine de nanomètres).

9.6.1 Rhéologie des suspensions

Les suspensions diluées se comportent comme des fluides homogènes newtoniens de viscosité η supérieure à celle du fluide suspendant η_0 . Le coefficient de viscosité η vérifie la relation établie par A. Einstein dans son article de 1905 sur la théorie du mouvement brownien :

$$\eta = \eta_0(1 + 2,5 C) \quad (9.80)$$

où $C(\ll 1)$ est la fraction de volume occupée par les sphères (volume total occupé par les sphères sur volume total de la suspension). Ce résultat

remarquablement simple est général : il ne dépend pas, en particulier, du caractère brownien ou non brownien des particules, ni de la nature de l'écoulement dans lequel se trouvent les particules. La seule hypothèse faite pour la démonstration est l'absence d'interactions hydrodynamiques entre ces dernières. Cela permet de ne considérer dans le calcul que la modification du champ de vitesse induite par la présence d'une seule particule et de sommer sur toutes les particules la modification ainsi calculée. C'est cette sommation qui fait apparaître dans la viscosité une contribution totale proportionnelle à la concentration volumique C . La démonstration complète, obtenue en calculant l'augmentation de l'énergie dissipée dans la suspension due à la présence des particules, est assez complexe.

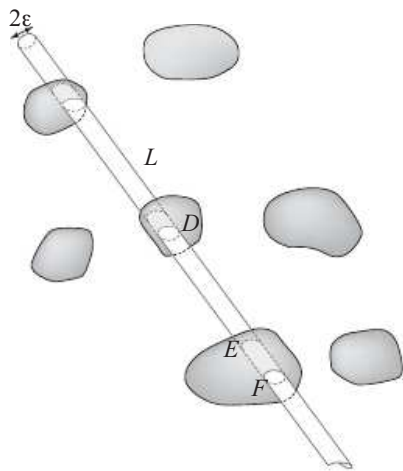


FIG. 9.17 – Vue schématique d'une suspension de particules et de la manière d'estimer sa viscosité.

Justification qualitative de la relation (9.80). Imaginons le transport de quantité de mouvement le long d'une ligne tracée au hasard dans la suspension (Fig. 9.17). Ce transport est diffusif dans la région fluide DE entre deux particules, mais se fait instantanément le long du segment EF dans un grain solide qui joue le rôle de court-circuit. Globalement, tout se passe comme si la longueur de la ligne était réduite par l'effet de la fraction de solide (particules) qu'elle traverse. Comme nous le justifierons ci-dessous, la fraction de longueur située à l'intérieur des particules solides, pour une droite traversant la suspension, est égale à la fraction volumique C des particules. Le rapport des longueurs DE et DF vaut donc en moyenne :

$$\frac{DE}{DF} = 1 - \frac{EF}{DF} = 1 - C.$$

Écrivons le temps de diffusion τ_D de la quantité de mouvement sur la longueur DF sous deux formes :

$$\tau_D = \frac{DF^2}{\eta/\rho} = \frac{DE^2}{\eta_0/\rho} = \frac{[DF(1 - C)]^2}{\eta_0/\rho}.$$

La première forme fait intervenir la viscosité globale η de l'ensemble fluide + particules que l'on suppose de densités voisines ; la seconde n'inclut que la viscosité du

fluide, mais on tient compte du fait que la diffusion dans celui-ci ne se fait que sur la longueur DE . En développant au premier ordre en C , on obtient $\eta = \eta_0(1 + 2C)$, en accord raisonnable avec le résultat exact.

Justification de la relation concentration de particules-fraction de longueur de ligne interceptée. Sur un élément de ligne L tracé au hasard à travers la suspension de particules (Fig. 9.17), construisons un cylindre de rayon infinitésimal ε (tel que ε soit très inférieur aux dimensions caractéristiques des particules). La fraction de volume de ce cylindre et la fraction f de la longueur de la ligne L situées à l'intérieur des particules sont égales : les volumes concernés se déduisent, en effet, des longueurs correspondantes en multipliant par la même section $\pi\varepsilon^2$. Comme la ligne a été tracée au hasard à l'intérieur du milieu, la fraction volumique dans le cylindre sera égale à celle dans l'ensemble de l'échantillon, à condition que la longueur de la ligne L soit grande devant la taille des particules et que la suspension soit homogène.

Le résultat (9.80) est valable jusqu'à des concentrations de quelques pourcent. Pour ces valeurs, la distance entre les particules de la suspension est, en moyenne, de 5 à 10 fois leur rayon. On comprend pourquoi il est raisonnable, dans ces conditions, de négliger l'effet de la présence des particules voisines sur le mouvement d'une particule, malgré la lente décroissance des perturbations hydrodynamiques qu'elles induisent (rappelons que ces perturbations sont proportionnelles au rapport du rayon de la particule à la distance à une particule voisine). Pour des concentrations plus importantes, les termes négligés dans l'approximation précédente deviennent plus importants que la correction du premier ordre à la viscosité. Il faut alors prendre en compte les interactions hydrodynamiques entre les particules. Dans une première approche, on ne considère que les interactions de paires de particules et l'on somme les effets dus à toutes ces paires. Cela donne une contribution supplémentaire à la viscosité, qui est proportionnelle au carré de la fraction volumique C :

$$\eta = \eta_0(1 + 2,5C + kC^2). \quad (9.81)$$

Cependant, malgré les hypothèses simplificatrices, le calcul qui conduit à cette expression est très complexe (notamment à cause de la lente décroissance des perturbations de vitesse induites par la présence des particules). Par ailleurs, le coefficient k du terme en C^2 dépend du type d'écoulement auquel est soumise la suspension, ainsi que de la diffusion brownienne (suivant les cas, il varie de 5,2 à 7,6). Cela provient de l'influence de l'écoulement sur l'organisation spatiale des particules (formation d'agrégats, effet d'orientation pour des particules allongées...). Ainsi, la viscosité d'une suspension soumise à un écoulement élongationnel ne sera pas identique à celle de la même suspension soumise à un écoulement de cisaillement par suite d'effets de formation temporaire de chaînes de particules. La viscosité dépendra de la nature et de la vitesse de l'écoulement auquel est soumise la suspension et pourra également dépendre du temps (voir section 4.4.3).

9.6.2 Sédimentation d’une suspension de particules

Sédimentation de suspensions diluées

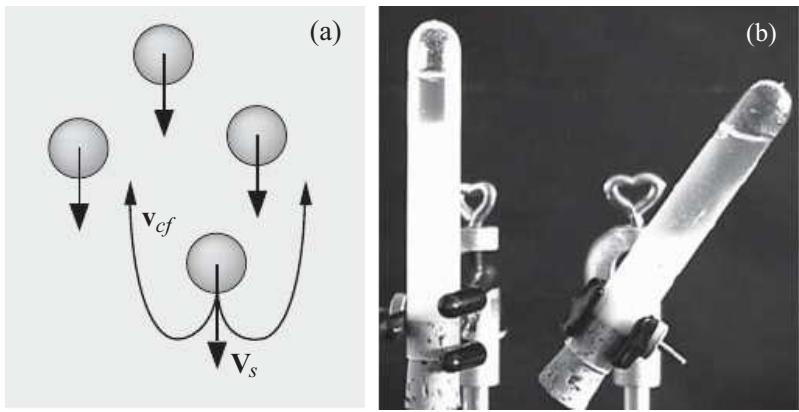


FIG. 9.18 – (a) Effets des écoulements de retour lors de la sédimentation d’une suspension dans un tube vertical. (b) Effet Boycott lors de la sédimentation d’une suspension de particules dans un tube incliné (à droite). Les deux tubes contenant une suspension de même concentration ont été retournés au même moment (doc. L. Petit).

Lors de l’étude de l’influence de la présence d’une sphère sur l’écoulement induit par le mouvement d’une autre sphère (section 9.4.3), nous avons vu que cette interaction mutuelle conduit à une augmentation de la vitesse de sédimentation des deux sphères. En fait, pour une suspension comportant un grand nombre de particules, cet effet est masqué par des écoulements de retour de vitesse v_{cf} autour de chaque particule (Fig. 9.18a). De tels écoulements étaient visibles sur la figure 9.11b ; ils assurent la conservation du débit du fluide, supposé incompressible, à travers toute section perpendiculaire au mouvement des particules.

Ainsi, la vitesse de sédimentation V_s d’une suspension diluée de sphères de concentration volumique C est plus faible que celle V_{so} d’une sphère isolée. Dans une géométrie idéale, pour la sédimentation d’une suspension vers un plan infiniment éloigné, on a :

$$V_s(C) = V_{so}(1 - 6,5 C). \tag{9.82}$$

Cette expression est un développement au premier ordre de la vitesse de sédimentation par rapport à la concentration C , qui tient compte des interactions entre deux particules. On sait déterminer le terme du second ordre, mais le calcul est compliqué et l’on doit faire des hypothèses sur la répartition spatiale des particules qui n’est pas connue *a priori*. De plus, les effets à longue portée (toujours liés à la variation lente de la vitesse en $1/r$ avec la distance) font qu’il n’est pas possible de se limiter dans le calcul aux interactions avec les plus proches voisins de chaque particule.

Influence des hétérogénéités de concentration, effet Boycott

Lorsque l'on a des hétérogénéités de concentration de particules dans un plan horizontal, il en résulte un gradient horizontal de la densité moyenne de la suspension. Comme nous l'avons montré à la section 4.5.5, un tel gradient induit un mouvement de recirculation : suivant la composante verticale locale de la vitesse, la sédimentation sera donc accélérée ou retardée. Ces mouvements peuvent être favorisés par la géométrie des parois (par exemple pour une paroi sphérique).

Un processus d'origine similaire est l'*effet Boycott*, découvert par A.E. Boycott sur la sédimentation de globules rouges dans un tube incliné : elle est beaucoup plus rapide dans ce cas que dans un tube vertical (Fig. 9.18b). En effet, dans le tube vertical, on a uniquement la vitesse de sédimentation de l'équation (9.82) ralentie par les écoulements de retour. Dans le tube incliné, en revanche, la composante de la gravité transverse à l'axe du tube provoque une ségrégation transverse des particules vers la partie basse de chaque section. Il apparaît donc un gradient horizontal de concentration, et donc de densité, provoquant un écoulement de recirculation. Ce dernier est dirigé vers le bas dans la partie où les particules se sont regroupées : il les entraîne et accélère fortement la sédimentation.

Sédimentation de suspensions concentrées

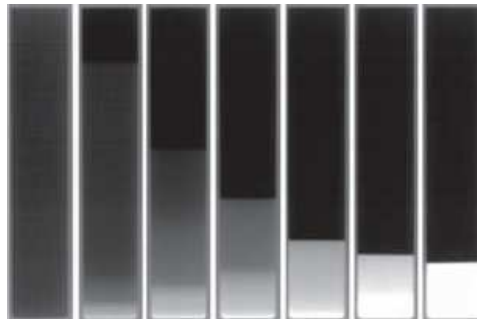


FIG. 9.19 – Sédimentation d'une suspension de particules observée grâce à une coupe au scanner à rayons X pour des temps croissants de gauche à droite. Les niveaux de gris correspondent à la concentration en particules qui est maximale dans les zones les plus claires (doc. F. Auzerais).

Aux fortes concentrations C , les interactions entre particules augmentent et leurs mouvements relatifs deviennent négligeables au fur et à mesure que C se rapproche de la valeur C_m correspondant à un empilement immobile de particules.

Remarque. À un mouvement de translation globale près, la limite de cet écoulement à forte concentration peut être rapprochée de l'écoulement dans un milieu

poreux, où l'ensemble des particules reste fixe et le fluide s'écoule entre ces de (section 9.7.3).

Par ailleurs, aux fortes concentrations, la vitesse V_s varie plus rapidement avec C que la dépendance linéaire prédite par l'équation (9.82). On utilise très fréquemment l'expression empirique de Richardson-Zaki : $V_s(C) = V_{s0}(1 - C)^n$ avec $n \simeq 5,5$ valable aux faibles valeurs de Re pour $C \leq 0,5$.

La sédimentation de suspensions concentrées ($C > 20\%$) de particules de même taille fait souvent apparaître des variations brusques de la concentration avec la hauteur, comme celles visibles sur les photos de la figure 9.19. La limite supérieure de la suspension est très nette : les particules laissées en arrière se déplacent, en effet, plus vite que celles à l'intérieur de la suspension car l'effet de freinage dû aux particules voisines est moins important ; elles peuvent ainsi rattraper leur retard, même si les variations de vitesse propre dues à la dispersion des tailles des particules sont notables. On voit également, sur la partie inférieure des images de cette figure, un front avant qui remonte le long de l'écoulement moyen et qui correspond à la frontière supérieure du sédiment immobile formé au fond du récipient. On observe également des fronts intermédiaires de type *ondes de choc* : ceux-là sont dus à la variation non monotone du débit $C.V_s(C)$ avec C .

Remarque. Le débit $C.V_s(C)$ part de 0 pour $C = 0$ et présente un maximum pour une concentration intermédiaire avant de redescendre à 0 pour la concentration du sédiment. Cette variation entraîne l'apparition de discontinuités de C (on ne peut avoir une variation continue car des couches peu concentrées rattraperaient les couches plus concentrées situées au-dessous). C'est le même type de variation non monotone du débit de véhicules avec leur concentration qui est à l'origine du phénomène de formation de bouchons lorsque le trafic routier devient trop dense.

9.7 Écoulements dans les milieux poreux

9.7.1 Quelques exemples

Un milieu poreux est un matériau massif à l'intérieur duquel se trouvent des cavités ou des fissures, reliées entre elles par des canaux ou éventuellement isolées. On peut voir, sur les photographies de la figure 9.20, deux exemples de tels matériaux observés en microscopie. Dans la plupart des cas pratiques, la taille des pores est assez faible et les écoulements assez lents pour que la condition de petites valeurs du nombre de Reynolds soit satisfaite. On peut distinguer trois classes de problèmes suivant les phases en présence à l'intérieur des pores.

Une première classe d'écoulements correspond à des milieux saturés (c'est-à-dire remplis complètement) par une seule phase fluide ; ce sera, par exemple, le cas d'un sol complètement imbibé d'eau.

Dans une deuxième famille de problèmes, plusieurs fluides non miscibles coexistent dans le milieu. Tout un ensemble de ménisques séparent les diffé-

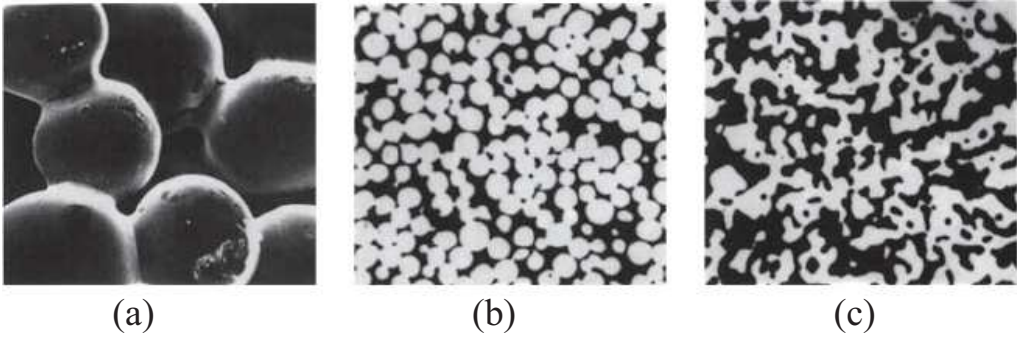


FIG. 9.20 – (a) Vue au microscope à balayage d’une poudre de bronze frittée par chauffage à une température de 700 °C (grossissement 500 fois). (b) Coupe de ce même matériau fritté (grossissement 100 fois) : l’espace des pores apparaît en noir sur l’image. (c) Coupe d’un échantillon de poudre de cobalt irrégulière : la distribution des pores, toujours en noir, est plus hétérogène (docs. J.-P. Jernot). La porosité de tels milieux, supposés homogènes à plus grande échelle, peut être estimée à partir de la fraction de la surface des coupes occupée par les pores (section 9.7.2).

rentes phases en présence et les effets capillaires discutés dans la section 1.4 doivent être pris en compte pour caractériser les écoulements relatifs des différentes phases. Cette situation, que nous discuterons brièvement à la section 9.7.6, se rencontre dans de très nombreux exemples : sols partiellement saturés en eau (la deuxième phase est l’air chargé de vapeur d’eau), mélanges eau-huile dans les roches pétrolifères...

Enfin, le transport de particules solides est important dans les problèmes de filtration à la surface ou dans le volume d’un filtre. Il conduit, en général, à une modification au cours du temps des propriétés hydrodynamiques du milieu (par bouchage du filtre).

9.7.2 Paramètres caractérisant un milieu poreux

Porosité

Elle est définie par le rapport :

$$\phi = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}} = 1 - C \quad (9.83)$$

où C est la *compacité* définie à la section 1.1.1. Pour un matériau homogène et isotrope, ϕ est aussi égal à la fraction de surface ϕ_S occupée par les pores dans une section plane du matériau, ainsi qu’à la fraction de longueur ϕ_L située à l’intérieur des pores pour une ligne traversant le matériau.

Justification. On démontre l’égalité de ϕ_S et de ϕ en prenant une surface de coupe de section S donnée et en la déplaçant dans la direction z perpendiculaire d’une distance Δz : on balaye ainsi un volume $S \Delta z$ à l’intérieur duquel le volume des

pores sera, par définition, $\phi S \Delta z$. Par ailleurs, on peut aussi calculer ce volume poreux en intégrant suivant z la surface de chaque section situé à l'intérieur des pores qui sera égale à $\phi_S S$. En identifiant le résultat $\phi_S S \Delta z$ de cette intégration à la valeur précédente, on trouve bien $\phi = \phi_S$. La seconde relation (avec ϕ_L) est établie comme celle entre la concentration de particules d'une suspension et la fraction de longueur de ligne à l'intérieur de ces particules (voir section 9.6.1 et Fig. 9.17).

Aire spécifique

L'*aire spécifique*, notée S_V dans la suite, est la surface interne par unité de volume d'un poreux (c'est-à-dire la surface des parois des pores) ; elle a la dimension de l'inverse d'une longueur.

Dans le cas de pores de géométrie simple (en particulier lorsque leurs parois sont presque lisses), la quantité S_V est de l'ordre de l'inverse de la taille locale de pores. Ainsi, pour un cylindre de longueur L et de diamètre d , on trouve :

$$S_V = \frac{(\pi d)L}{\pi d^2 L/4} = \frac{4}{d}. \quad (9.84)$$

On mesure classiquement l'aire spécifique d'un matériau poreux mis préalablement sous vide à partir de l'adsorption progressive d'une espèce moléculaire gazeuse ; la fin de la formation d'une première couche moléculaire adsorbée sur la surface interne se traduit par un palier dans l'augmentation de la pression. Si a représente la taille des molécules adsorbées et V_a le volume total de ces molécules adsorbées dans le volume V du milieu poreux, on a :

$$S_V = \frac{V_a}{V \cdot a}. \quad (9.85)$$

Remarque. S_V peut aussi être déterminée en comptant, sur une image d'une coupe du matériau, le nombre de points d'intersection par unité de longueur avec les parois des pores d'une ligne traversant le milieu poreux. Si l'on se reporte à la figure 9.17, on voit que l'élément de cylindre qui coupe les grains intercepte une surface totale de parois de grains égale au nombre d'interceptions n par le segment, multipliée par la surface de base du cylindre S et par un facteur numérique F qui traduit l'effet de l'inclinaison par rapport à l'axe du cylindre des surfaces élémentaires interceptées. Le rapport surface (nSF) sur volume (SL) vaut donc Fn/L . Pour un matériau isotrope, on montre que $F = 2$: l'aire spécifique S_V est donc égale, dans ce cas, au double du nombre d'interceptions des parois des pores du milieu par une ligne aléatoire de longueur unité.

L'aire spécifique est un paramètre essentiel pour tous les processus d'adsorption et de catalyse : ils dépendent en effet très fortement de la surface disponible dans le matériau pour des réactions chimiques ou physicochimiques. Dans le cas où les grains sont eux-mêmes poreux, il faut distinguer les effets de porosité intragranulaire, qui contribue majoritairement aux effets d'adsorption, et de porosité intergranulaire, qui contrôle la valeur de la porosité.

Pour les applications, on caractérise fréquemment l'aire spécifique des matériaux en divisant S_V par leur masse volumique, ce qui donne la surface de pore pour une masse unité de matériau. Ce rapport atteint plusieurs millions de $\text{m}^2.\text{kg}^{-1}$ pour du charbon actif ou des catalyseurs divisés, et il est d'une valeur de l'ordre de $1\,000\text{ m}^2.\text{kg}^{-1}$ pour un empilement de grains d'une taille de l'ordre du micron.

Remarque. Les paramètres tels que la porosité ou l'aire spécifique sont, dans les modèles classiques, obtenus par une moyenne sur un certain *volume élémentaire représentatif* ($\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{R}$) du matériau, ainsi que nous l'avons discuté à la section 1.3.2. La dimension de ce volume est au minimum d'une dizaine de tailles de pores pour des matériaux très homogènes ; il est beaucoup plus grand, et même parfois impossible à définir, pour des matériaux hétérogènes ou dont la structure présente une très large gamme d'échelles de longueur caractéristiques.

Tortuosité

Les propriétés de transport des matériaux poreux (écoulement de fluides ou passage de courant électrique) font intervenir d'autres caractéristiques géométriques que l'aire spécifique et la porosité. La topologie du milieu (nombre de pores auquel est relié chacun d'entre eux), la complexité des chemins de passage à travers l'espace des pores, les tailles caractéristiques des pores et des canaux qui les joignent ont également une influence importante. De plus, il faut tenir compte des bras morts (les « voies de garage » de l'écoulement), qui seront importants dans les matériaux peu poreux et très hétérogènes. Pour rendre compte de tels effets, on définit un paramètre T , appelé *tortuosité*, à partir de la conductivité électrique σ_p d'un milieu poreux isolant, saturé d'un liquide conducteur de conductivité connue σ_f :

$$T = \phi \frac{\sigma_f}{\sigma_p}. \quad (9.86)$$

On peut se faire une idée de la signification de la tortuosité dans le cas modèle d'un réseau de capillaires ondulés (Fig. 9.21a). On trouve dans ce cas :

$$T = \left(\frac{L_{cap}}{L} \right)^2 \quad (9.87)$$

où L_{cap} est la longueur totale des capillaires et L celle de l'échantillon. Pour des capillaires ondulés, L_{cap} est supérieur à L et la tortuosité est supérieure à l'unité ; en revanche T est égale à 1 s'ils sont rectilignes.

Démonstration. Calculons la conductivité électrique effective σ_p d'un milieu poreux saturé de fluide conducteur. Notons ΔV la différence de potentiel entre deux sections d'aire S du milieu (Fig. 9.21a) et I l'intensité du courant électrique circulant à travers celui-ci ; on a :

$$\Delta V = (1/\sigma_p) (L/S)I. \quad (9.88)$$

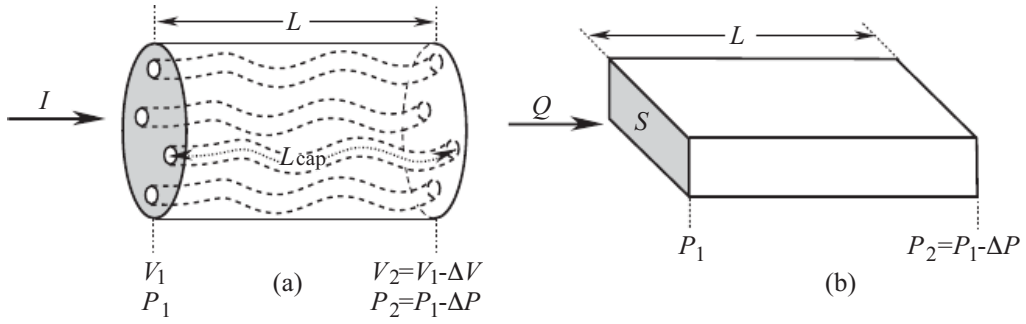


FIG. 9.21 – (a) Modélisation de la géométrie d'un milieu poreux, sous la forme d'un ensemble de capillaires ondulés. Ce modèle permet de définir la tortuosité du milieu à partir de sa conductivité électrique déterminée en appliquant une différence de potentiel ΔV et en mesurant l'intensité I du courant circulant à travers le milieu ; (b) paramètres intervenant dans l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux.

De même, pour chaque capillaire individuel, on peut écrire :

$$\Delta V = (1/\sigma_f) (L_{cap}/S_{cap}) I_{cap} \quad (9.89)$$

où L_{cap} représente la longueur moyenne des capillaires. Le rapport de ces deux relations vérifie :

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_f} = \frac{L}{L_{cap}} \frac{I}{I_{cap}} \frac{S_{cap}}{S} = \left(\frac{L}{L_{cap}} \right)^2 \phi \quad (9.90)$$

car $I = N I_{cap}$ et $\phi = (N S_{cap} L_{cap}) / (SL)$ où N est le nombre de capillaires dans la surface S . En utilisant la définition de l'équation (9.86), on retrouve bien l'expression (9.87) pour la tortuosité. Nous utiliserons ce modèle plus loin (section 9.7.4) pour calculer le débit Q induit à travers un tel milieu par une différence de pression ΔP . ■

9.7.3 Écoulements dans les milieux poreux saturés – loi de Darcy

Écoulements unidirectionnels à faible vitesse

On s'intéresse ici aux milieux poreux saturés pour lesquels l'espace des pores est entièrement rempli d'un seul fluide supposé newtonien et incompressible. Si le débit est assez faible pour que le nombre de Reynolds, défini à partir de la taille des pores et de la vitesse locale, soit très inférieur à l'unité, on peut admettre, en écoulement stationnaire, que les gradients de pression sont proportionnels à la vitesse d'écoulement dans les pores (loi de Poiseuille appliquée à chaque canal). Cette relation de proportionnalité, valable pour tous les pores individuellement, se conserve si l'on moyenne le débit et les gradients de pression sur un volume grand devant celui construit sur la taille des pores. Pour un échantillon homogène de longueur L et de section S constante

(Fig. 9.21b) et pour un gradient de pression parallèle à la longueur, le débit volumique Q vérifie :

$$Q = \frac{K}{\eta} S \frac{\Delta P}{L}. \tag{9.91}$$

La constante de proportionnalité K est la *perméabilité*, qui est une caractéristique du milieu poreux. Elle est homogène à une surface et son ordre de grandeur correspond à la section d'un pore individuel, comme nous le verrons plus loin (section 9.7.4). Une unité courante est le darcy ($\cong 1 \mu\text{m}^2$), qui est bien adaptée aux ordres de grandeur de perméabilité de milieux naturels (voir tableau 9.1).

TAB. 9.1 – Quelques valeurs caractéristiques de perméabilité de matériaux poreux.

Matériau	Perméabilité (darcy)
Terre	0,3–15
Brique	0,005–0,2
Calcaire	0,002–0,05
Grès	0,0005–5
Cigarette	1000
Fibres de verre	20–50
Sable	20–200
Poudre de silice	0,01–0,05

Équation de Darcy généralisée à trois dimensions

À trois dimensions et en présence de pesanteur, l'équation (9.91) se généralise, pour un milieu isotrope, en :

$$\mathbf{v}_s = \frac{Q \mathbf{n}_u}{S} = -\frac{K}{\eta} (\mathbf{grad} p - \rho \mathbf{g}). \tag{9.92}$$

où $\mathbf{n}_u$ est un vecteur unitaire. Chaque composante v_{si} de $\mathbf{v}_s$ correspond au débit Q_i à travers une surface unité de normale orientée suivant l'axe correspondant. La vitesse $\mathbf{v}_s$ est souvent appelée *vitesse débitante*.

Remarque. La vitesse moyenne réelle $\mathbf{v}_p$ à l'intérieur des pores peut être très supérieure à $\mathbf{v}_s$ car seule une partie du volume total de matériau est disponible pour le transport de fluide. Ainsi, pour un ensemble de capillaires parallèles, de porosité globale ϕ , $\mathbf{v}_p$ vérifiera $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_s / \phi$. En effet, le débit moyen par unité de section de matériau perpendiculaire aux capillaires est, d'une part, égal à v_s et, d'autre part, égal au produit de v_p par la fraction de surface de section occupée par les pores ; cette dernière est égale à ϕ comme nous l'avons vu plus haut (section 9.7.1). Il faut noter également que, pour un milieu poreux homogène mais anisotrope comme un milieu stratifié, on généralise l'équation (9.92) en remplaçant le scalaire K par un tenseur.

Si K et η sont constants, on a, d'après (9.92) :

$$\mathbf{rot} \mathbf{v}_s = 0 \quad \text{d'où :} \quad \mathbf{v}_s = -\mathbf{grad} \Phi \tag{9.93}$$

avec :

$$\Phi = \frac{K}{\eta}(p + \rho g z).$$

Si le fluide est incompressible, le champ de vitesse $\mathbf{v}_s$ vérifie $\text{div} \mathbf{v}_s = 0$, d'où :

$$\Delta \Phi = 0. \tag{9.94}$$

Le champ de vitesse débitante $\mathbf{v}_s$ dérive donc d'un potentiel Φ , dont le laplacien est nul, comme ce serait le cas pour le champ de vitesse d'un fluide parfait. Or, du fait de la petite taille des pores, l'écoulement d'un fluide visqueux dans un poreux est l'un des cas où l'influence de la viscosité est la plus forte et où le comportement du fluide est le plus éloigné du cas d'un fluide parfait ! L'explication de ce paradoxe tient au fait que $\mathbf{v}_s$ n'est pas une vitesse locale, mais un champ de vitesse *macroscopique*, défini par une moyenne sur un volume grand par rapport à celui des pores. On moyenne donc les effets de la viscosité qui interviennent sur des petites échelles de longueur.

Application de la loi de Darcy à l'écoulement dans un talus poreux

À titre d'exemple, analysons l'écoulement à travers un talus poreux de perméabilité K et de largeur L qui sépare deux nappes d'eau de niveaux différents y_0 et y_1 (Fig. 9.22). Nous supposons que l'on a atteint un régime stationnaire où le niveau de l'eau $y_s(x)$ à l'intérieur du massif est constant au cours du temps, avec un débit volumique Q constant dans chaque section $x = \text{cte}$ et indépendant de x . Si la pente de la surface libre est assez faible à l'intérieur du massif poreux (*approximation de Forcheimer*), nous montrerons

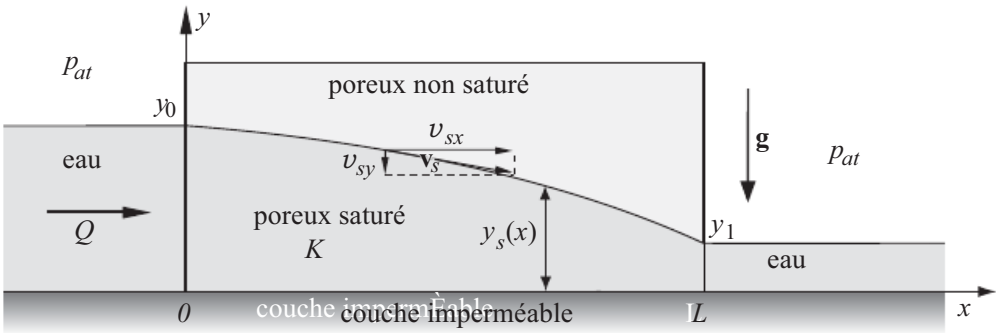


FIG. 9.22 – Écoulement entre deux nappes d'eau à des niveaux différents y_0 et y_1 à travers un massif poreux limité par les plans $x = 0, L$. On suppose une géométrie bidimensionnelle.

plus loin que la variation du niveau d'eau avec la distance vérifie :

$$\frac{y_0^2 - y_s^2(x)}{y_0^2 - y_1^2} = \frac{x}{L}. \quad (9.95)$$

On obtient un profil parabolique comme pour un jet d'eau fluide sortant librement d'un récipient (malgré la différence complète de nature des forces qui interviennent). Le débit Q vérifie :

$$Q = Kg \frac{y_0^2 - y_1^2}{2L\nu}. \quad (9.96)$$

Démonstration. Si la partie non saturée d'eau du poreux est remplie d'air et si l'on néglige les effets de tension superficielle, la pression dans l'eau juste au-dessous de la surface $y_s(x)$ est égale à la pression atmosphérique p_{at} . Écrivons alors l'égalité de pression entre deux points de la surface d'abscisses x et $x + \delta x$. On a $p(x, y_s(x)) = p(x + \delta x, y_s(x + \delta x))$ d'où, en développant :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{\partial p}{\partial y} \delta y_s = 0. \quad (9.97)$$

Si $\partial y_s(x)/\partial x$ est assez petit, on peut considérer que la composante v_{sy} de la vitesse superficielle $\mathbf{v}_s$ est très inférieure à la composante v_{sx} et que le gradient de pression $\partial p/\partial y$ suivant Oy se réduit au gradient de pression hydrostatique $-\rho g$ (ces hypothèses ne sont pas sans rappeler celles utilisées pour les écoulements quasi parallèles). On déduit alors de l'équation (9.97) le gradient de pression horizontal :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{dy_s(x)}{dx} \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{dy_s(x)}{dx}. \quad (9.98)$$

On applique la loi de Darcy (9.92) pour calculer la composante horizontale $v_{sx}(x)$ de la vitesse débitante qui vaut $-(K/\eta) \partial p/\partial x$ ($\partial p/\partial x$ et, par conséquent, $v_{sx}(x)$ sont en effet tous deux indépendants de y). On obtient le débit $Q = v_{sx}(x) y_s(x)$:

$$Q = -\rho g \frac{K}{\eta} y_s(x) \frac{dy_s(x)}{dx} = -\frac{Kg}{\nu} y_s(x) \frac{dy_s(x)}{dx}. \quad (9.99)$$

On en déduit la relation (9.96) par intégration de (9.99) entre 0 et L et le profil de la surface en intégrant entre O et x . On obtient alors l'équation (9.95) en combinant ces deux derniers résultats. ■

Régimes d'écoulement non linéaire dans les poreux

La relation (9.92) est valable à des faibles vitesses telles que le nombre de Reynolds Re (calculé en prenant la taille des pores comme échelle de longueur) soit très inférieur à 1. À des vitesses plus élevées (et des valeurs de Re de quelques unités), la relation pression-débit n'est plus linéaire. On peut la représenter par une loi de puissance :

$$|\mathbf{grad} p| \propto v^n, \quad (9.100)$$

l'exposant n étant de l'ordre de 2. Cette loi traduit l'effet des termes convectifs non linéaires de l'équation du mouvement du fluide. Dans ce cas, on n'a pas encore apparition de turbulence dans les pores ; mais, même avec un écoulement laminaire, les fortes variations de module et de direction de la vitesse d'un pore à l'autre peuvent rendre notable l'effet des termes $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$. Cela représente un cas limite opposé à celui des écoulements parallèles, où ces termes peuvent rester négligeables même pour des nombres de Reynolds nettement plus grands que l'unité.

Signalons également que, à plus grand nombre de Reynolds, des zones de recirculation de fluide peuvent apparaître derrière les grains constituant le milieu poreux. Ces zones sont du même type que celles que nous avons décrites aux sections 2.4.2 et 2.4.3 lors de l'étude de l'évolution de l'écoulement autour d'un cylindre et d'une sphère avec le nombre de Reynolds.

Un modèle à deux dimensions des milieux poreux : la cellule de Hele-Shaw

Une cellule de Hele-Shaw est constituée de deux plaques parallèles très proches l'une de l'autre, entre lesquelles sont placées des cales simulant des formes d'obstacles (Fig. 9.23). La distance a entre plaques est très petite devant l'extension L des obstacles.

Ce système est utilisé pour reproduire des champs de vitesse d'écoulements potentiels bidimensionnels de fluides parfaits autour d'obstacles. Nous en avons donné un exemple pour l'écoulement autour d'un cylindre au chapitre 6 (Fig. 6.5).

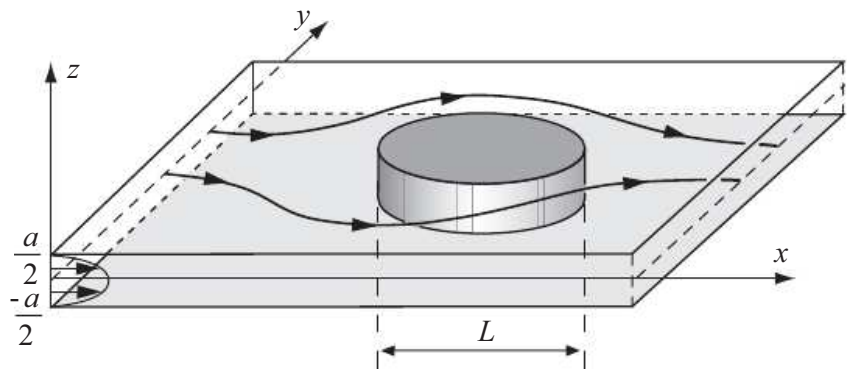


FIG. 9.23 – Géométrie d'une cellule de Hele-Shaw avec un obstacle d'extension L grande devant l'épaisseur a de la cellule.

Comme pour les milieux poreux, ce résultat semble, au premier abord, paradoxal puisque, étant donné la proximité des plaques, les forces de frottement visqueux joueront un rôle essentiel sur les caractéristiques de l'écoulement. En fait, comme dans le cas des milieux poreux, c'est la moyenne du champ de

vitesse prise sur l'intervalle entre les plaques qui dérive d'un potentiel et non la *vitesse locale*.

Entre les plaques, l'écoulement est quasi parallèle au plan xOy et on a donc : $v_z \approx 0$. On peut le justifier à partir de l'équation de conservation de la masse, qui s'écrit : $\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z = 0$.

Les échelles de longueur suivant Oz (de l'ordre de a) sont très inférieures à celles suivant Ox (ou Oy) qui sont de l'ordre de L . On en déduit un ordre de grandeur de la composante v_z :

$$v_z \approx (a/L) v_{x(y)} \ll v_{x(y)}. \quad (9.101)$$

La grande différence entre les échelles de longueur, perpendiculairement et parallèlement au plan des plaques permet également d'écrire l'inégalité :

$$\frac{\partial^2 v_{x(y)}}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v_{x(y)}}{\partial z^2}. \quad (9.102)$$

Par ailleurs, les termes en $|\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}|$ sont négligeables devant ceux en $|\eta \Delta \mathbf{v}|$ puisque l'écoulement est à petit nombre de Reynolds. Compte tenu des relations (9.101) et (9.102), l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\eta \frac{\partial^2 \mathbf{v}_{\parallel}}{\partial z^2} = -\mathbf{grad}_{\parallel} p \quad (9.103)$$

avec : $p = p(x, y)$. L'indice $\parallel$ désigne la composante des vecteurs (vitesse ou gradient de pression) dans le plan xOy . On peut séparer les variables en écrivant :

$$\mathbf{v}_{\parallel}(x, y, z) = \mathbf{v}_{\parallel}(x, y, 0) f(z) \quad (9.104)$$

car la variation de $\mathbf{v}_{\parallel}$ avec x et y est très lente par rapport à celle de $f(z)$ avec z d'après l'équation (9.102). De (9.103) et (9.104), on tire : $f(z) = (1 - 4z^2/a^2)$.

Finalement, le champ de vitesse à mi-distance entre les plaques vérifie :

$$\mathbf{v}_{\parallel}(x, y, 0) = -\frac{a^2}{8\eta} \mathbf{grad}_{\parallel} p \quad (9.105)$$

et :

$$v_z(x, y, 0) = 0. \quad (9.106)$$

Donc, la direction de la vitesse $\mathbf{v}_{\parallel}$ est en tout point parallèle à celle de $\mathbf{grad} p$. Par ailleurs, cette direction ne varie pas sur l'épaisseur de la lame de fluide, même si le *module* de $\mathbf{v}$ dépend beaucoup de z . L'équation (9.105) représente, pour la cellule de Hele-Shaw, l'équivalent de la loi de Darcy pour les milieux poreux. De l'égalité (9.105), on tire :

$$\mathbf{rot}_{\parallel} [\mathbf{v}_{\parallel}(x, y, 0)] = \mathbf{rot}_{\parallel}(\mathbf{grad} p) = \mathbf{0}. \quad (9.107)$$

Les lignes de courant dans des plans $z = \text{cte}$ sont donc les mêmes pour les différentes valeurs de z et sont identiques à celles d'un écoulement potentiel

bidimensionnel de fluide parfait autour d'obstacles de même géométrie que les cales. Près des cales, on a une condition aux limites de vitesse nulle, mais cette influence se limitera à une distance du contour qui est de l'ordre de l'épaisseur a .

La cellule de Hele-Shaw peut être utilisée expérimentalement comme un *milieu poreux modèle*. On peut ainsi modéliser l'écoulement dans un talus poreux décrit plus haut à l'aide d'une cellule de Hele-Shaw dont les plaques sont verticales, avec ses deux bords verticaux reliés à deux bains de hauteurs différentes. La surface libre dans la cellule sera parabolique, conformément aux prédictions de l'équation (9.95). On peut également modéliser des variations spatiales de perméabilité en faisant varier l'épaisseur a entre les plaques.

9.7.4 Modèles simples de la perméabilité des matériaux poreux

Perméabilité d'un ensemble de capillaires ondulés

On représente souvent les milieux poreux, où les pores sont bien connectés et de section assez uniforme, comme un ensemble de capillaires ondulés de diamètres individuels d (Fig. 9.21a). Nous avons déjà utilisé cette approche pour en évaluer la conductivité électrique à la section 9.7.2. Comme nous le démontrons ci-dessous, la perméabilité équivalente de cet ensemble de capillaires est :

$$K = \frac{\phi d^2}{32} \frac{1}{T}. \quad (9.108)$$

Ainsi, pour une porosité donnée, la perméabilité varie comme le carré du diamètre des canaux : la chute de pression, pour un débit de fluide donné, augmente très rapidement lorsque la taille des pores décroît, même si le volume poreux total reste constant. Ce résultat est très différent de celui obtenu pour la conductivité électrique σ_p du même milieu poreux rempli d'un fluide de conductivité σ_f donnée. Dans ce dernier cas, le rapport σ_p/σ_f pour des canaux circulaires est proportionnel à la porosité ϕ et indépendant de d .

Démonstration. Pour un capillaire unique, la relation entre la perte de charge et le débit δQ est donnée par la relation de Poiseuille (4.78) :

$$\delta Q = \frac{\pi}{128 \eta} \frac{\Delta P}{L_{\text{cap}}} d^4. \quad (9.109)$$

N le nombre de capillaires dans la surface S perpendiculaire au sens de l'écoulement et K la perméabilité pour les écoulements dans cette direction. Le débit total par unité de surface à travers l'ensemble de la section S est donné par :

$$Q = N \delta Q = N \frac{\pi d^4}{128 \eta} \frac{\Delta P}{L_{\text{cap}}}. \quad (9.110)$$

D'après la loi de Darcy (9.91), Q vérifie également : $Q/S = (K/\eta)(\Delta P/L)$. En tenant compte de l'expression de la porosité $\phi = N(\pi d^2/4)L_{cap}/(SL)$, on trouve alors l'équation (9.108). ■

Dans le précédent modèle, on a supposé que l'ensemble des capillaires était *en moyenne* parallèle à une direction, une hypothèse qui correspond à des milieux qui seraient très anisotropes. On peut trouver une estimation de la perméabilité d'un milieu poreux isotrope en considérant qu'il est formé de trois ensembles de capillaires perpendiculaires deux à deux. Pour une différence de pression appliquée dans l'une des trois directions, seul un ensemble de capillaires participera au transport du fluide. La perméabilité sera de ce fait réduite d'un facteur 3 par rapport au cas précédent. On obtient alors :

$$K = \frac{\phi d^2}{96} \frac{1}{T}. \quad (9.111)$$

Relation de Kozeny-Carman

L'expression (9.111) fait intervenir un diamètre des pores qui est presque impossible à définir sans ambiguïté, même si l'on dispose de coupes des matériaux. La relation de Kozeny-Carman permet de relier la perméabilité K d'un milieu poreux à des paramètres physiques mesurables expérimentalement, tels que la porosité et l'aire spécifique du milieu poreux. L'aire spécifique S_V est utilisée dans cette approche pour évaluer l'ouverture des pores, ce qui n'est possible que dans le cas de pores de géométrie simple, bien connectés entre eux. Ainsi, dans le cas d'une modélisation par un ensemble de capillaires (Fig. 9.21a), la perméabilité K vérifie :

$$K = \frac{1}{6} \frac{\phi^3}{S_V^2 T}. \quad (9.112)$$

La constante $1/6$ provient de l'utilisation d'une modélisation du milieu par un ensemble de trois systèmes de capillaires perpendiculaires deux à deux. Un intérêt essentiel de la relation de Kozeny-Carman est le fait que, pour des milieux poreux réels formés de grains ou de poudres empilés ou comprimés, $6T$ peut être remplacé par une valeur expérimentale presque constante de l'ordre de 5. Cette approche n'est cependant utilisable que pour des grains et des empilements de géométries simples, lorsque les tailles des pores ne varient pas dans de trop larges proportions.

Démonstration. L'aire spécifique S_V (surface interne des pores par unité de volume du milieu poreux) d'un tel milieu est :

$$S_V = \frac{N(\pi d)L_{cap}}{SL} \quad (9.113)$$

où N est le nombre de capillaires sur la section S du milieu poreux. La porosité ϕ du milieu s'écrit :

$$\phi = \frac{N(\pi d^2/4)L_{cap}}{SL}. \quad (9.114)$$

À partir des deux relations précédentes, on trouve alors, pour l'aire spécifique en fonction de la porosité :

$$S_V = \frac{4}{d}\phi \quad (9.115a)$$

soit :

$$d = \frac{4\phi}{S_V}. \quad (9.115b)$$

En remplaçant d par cette dernière valeur dans l'équation (9.111), on obtient alors l'équation (9.112). ■

Par ailleurs, on peut remplacer la quantité S_V dans l'équation (9.115) par la surface $S'_V = S_V/(1-\phi)$ de paroi de pores par unité de volume de solide. La deuxième forme est particulièrement intéressante lorsque l'on a affaire à des grains identiques de forme simple, car S'_V représente le rapport surface/volume des grains individuels. Ainsi, pour un empilement poreux de grains sphériques de diamètre D , $S'_V = 6/D$ et l'on obtient la relation dite d'Ergun :

$$K = \frac{\phi^3 D^2}{180(1-\phi)^2}. \quad (9.116)$$

Exemple. Pour un empilement de grains sphériques de diamètre $D = 100 \mu\text{m}$ et de porosité $\phi = 0,4$ (correspondant à une compacité de 60 %), on trouve $K \approx 10^{-11} \text{ m}^2$.

9.7.5 Relations conductivité électrique – perméabilité des poreux

Nous utilisons ici une approche différente de l'évaluation de la perméabilité des milieux poreux, applicable à une plus large gamme de matériaux réels où les géométries des pores et des chemins d'écoulement sont plus complexes. Dans cette approche, on cherche à établir des relations entre la perméabilité et la conductivité électrique du matériau saturé d'un fluide conducteur. Cette dernière est également sensible, bien que d'une manière différente de la perméabilité, aux variations de structure et d'ouverture des canaux qui traversent le milieu.

Modèle de matériaux poreux à deux échelles de longueur

Nous représentons le milieu poreux comme un ensemble de grains de taille caractéristique a (qui est aussi de l'ordre de la longueur des canaux) dont les surfaces sont séparées par une distance caractéristique d (qui représente le diamètre des canaux) (Fig. 9.24). Cette approche a des points communs avec les modèles de capillaires décrits précédemment (elle est même plus simple car on ne fait pas intervenir explicitement la tortuosité) : elle en diffère par l'introduction de ces deux échelles de taille au lieu d'utiliser des tubes de longueur infinie.

Évaluons maintenant la relation entre la perméabilité du milieu poreux et sa conductivité électrique ou, plus précisément, le rapport de la conductivité

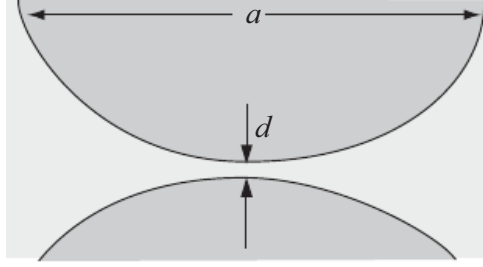


FIG. 9.24 – Représentation schématique d'un élément d'un milieu poreux constitué de grains de taille a (a est aussi la longueur caractéristique des canaux) dont les surfaces sont séparées par une distance d , qui représente le diamètre des canaux.

électrique σ_f du fluide remplissant les canaux du milieu poreux à celle σ_p du milieu poreux. Au lieu d'utiliser séparément les paramètres σ_p et σ_f , on introduit le facteur de formation F supérieur ou égal à l'unité du milieu qui est égal à leur rapport avec :

$$F = \sigma_f / \sigma_p. \quad (9.117)$$

Les longueurs a et d peuvent être reliées à F et à la perméabilité K par :

$$d \approx \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_p}\right) K} = \sqrt{FK} \quad (9.118a)$$

et :

$$a \approx \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_p}\right) \sqrt{K} = F\sqrt{K}. \quad (9.118b)$$

Démonstration. Évaluons d'abord F dans la géométrie de la figure 9.24. En utilisant les relations (9.88) et (9.89) et en considérant que les sections à prendre en compte pour la conduction électrique globale du milieu poreux et pour la conduction dans les canaux sont respectivement $S_p \approx a^2$ et $S_c \approx d^2$, nous obtenons :

$$F = \frac{\sigma_f}{\sigma_p} \approx \frac{a^2}{d^2}. \quad (9.119a)$$

Par ailleurs, d'après la relation (9.109), le débit à travers les canaux est de l'ordre de $\delta Q \approx (1/\eta)(\Delta P/a) d^4$. À partir de la loi de Darcy (Éq. 9.91), on obtient, pour la perméabilité :

$$K \approx \frac{d^4}{a^2}. \quad (9.119b)$$

En combinant les deux relations précédentes, on obtient les expressions (9.118a-b). ■

Nous allons maintenant explorer deux approches pour utiliser les relations (9.118) : dans la première, on détermine une ouverture caractéristique

d_c des canaux, par une mesure physique auxiliaire ; dans la seconde, on utilise des milieux poreux formés de grains de taille a connue et peu variable, mais de degrés de compaction (et donc de porosités) différents (comme on peut les obtenir par un frittage plus ou moins poussé).

Remarque. Notons que, dans la discussion précédente, on applique la loi de Darcy sur un cube de taille a , qui est considéré ainsi implicitement comme un volume élémentaire représentatif sur lequel on peut définir des variables macroscopiques, comme K et F . Malgré cette approximation injustifiable pour les poreux très hétérogènes, nous verrons plus bas que les relations obtenues sont utilisables sur les roches naturelles. Cela montre la nature de type *lois d'échelle* des équations (9.118) et (9.119), dont le principal intérêt est de prédire le type de dépendance des coefficients de perméabilité et conductivité électrique par rapport aux tailles caractéristiques de la structure du milieu, sans fournir de valeur numérique des coefficients.

Utilisation de la relation conductivité-perméabilité-taille des canaux

Dans cette approche, due à Katz et Thomson, on évalue une valeur caractéristique de d par une technique voisine de la *porosimétrie au mercure* que nous décrirons plus en détail à la section 9.7.6. Le diamètre caractéristique d_c ainsi déterminé est bien adapté à une utilisation dans l'expression (9.118a) : la conductance électrique (ou hydraulique) d'un chemin donné à travers l'échantillon est, en effet, déterminée par les passages les plus étroits (ceux sur lesquels la chute du potentiel électrique ou de la pression sera la plus forte). La conductance globale de plusieurs chemins en parallèle est, au contraire, déterminée par les plus faciles d'entre eux, par lesquels passe la plus large part du courant électrique (ou du débit de fluide). C'est donc le passage le plus étroit sur les chemins les plus faciles qui contrôle ces propriétés de transport et nous verrons que c'est précisément son ouverture qui est déterminée par les mesures de porosimétrie.

On s'attend donc, en élevant au carré la relation (9.118a), à avoir : $d_c^2 \approx FK$. Cette relation a bien été vérifiée sur des échantillons de perméabilité variant sur une très large gamme (de 1 à 10^8) et de porosités et de compositions minéralogique très différentes ; ces mesures ont conduit à la relation quantitative suivante, valable à un facteur deux près :

$$K = \frac{\sigma_p}{\sigma_f} \frac{d_c^2}{226}. \quad (9.120)$$

Remarque. Le type d'analyse que nous avons faite en utilisant la notion de taille critique d_c pour les canaux est utilisée pour d'autres problèmes de transport dans les milieux hétérogènes, comme par exemple la conductivité électrique de solides très hétérogènes. L'idée est que, pour un système dont un paramètre varie très fortement d'un point à un autre du milieu (la résistance d'un réseau d'éléments conducteurs de résistances individuelles très diverses), la conductivité globale est peu sensible aux éléments très bons conducteurs : ils agissent, en effet, localement comme des courts-circuits. Il en est de même pour les éléments du réseau qui sont mauvais

conducteurs : ils participent faiblement à la conductivité globale car ils sont en général court-circuités par des éléments plus conducteurs. Ce sont les éléments de résistance intermédiaire, mais en nombre suffisant pour former un chemin continu à travers l'échantillon, qui déterminent la conductivité de l'ensemble.

Utilisation de la relation conductivité-perméabilité-taille des grains

La forme (9.118b) des équations, de domaine d'application plus restreint, fournit des prédictions dans le cas de matériaux granulaires compactés au cours du temps (roches sédimentaires) ou soudés par frittage sans que la taille des grains ne varie. Des expériences systématiques ont été réalisées sur des matériaux poreux modèles obtenus par frittage à chaud pendant un temps plus ou moins long de billes de verre de même diamètre (quelques centaines de μm) ; lorsque le degré de frittage augmente, l'ouverture d des canaux diminue tandis que la longueur a reste constante. Des séries d'échantillons préparés à partir de billes de diamètres différents ont également été comparées. Ces mesures conduisent à la relation suivante entre la perméabilité K normalisée par le carré de la taille des grains et le facteur de formation :

$$K = 14,1 a^2 \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_f} \right)^2 = 14,1 \frac{a^2}{F^2}. \quad (9.121)$$

On retrouve bien la forme de l'équation (9.118b) élevée au carré. Ces résultats ne sont toutefois valables que pour des degrés de frittage modérés, correspondant à des porosités $\phi \geq 10\%$. Pour des porosités plus faibles et jusqu'à ce que le fritté cesse d'être perméable, les effets de bras morts (pores non connectés) altèrent la validité du modèle.

9.7.6 Écoulement de fluides non miscibles dans les milieux poreux

Ce type d'écoulement se rencontre lorsque deux fluides (ou plus) non miscibles sont simultanément présents dans un milieu poreux. C'est le cas des sols poreux contenant de l'eau et de l'air en hydrogéologie, de la récupération assistée du pétrole (mélange eau et huile) et dans l'expérience de porosimétrie au mercure, citée plus haut. Il convient alors de tenir compte à la fois des pertes de charge visqueuses dans chacune des phases dues aux écoulements, ainsi que des différences de pression capillaires reflétant la courbure des interfaces entre les deux fluides. L'importance relative de ces deux phénomènes peut être mesurée par la quantité sans dimension $Ca = \eta v / \gamma$ – le *nombre capillaire* – : ce dernier évalue le rapport des effets de la viscosité et de la pression capillaire et a déjà été défini à la section 8.2.2.

Nous présenterons d'abord l'approche la plus classique, celle du modèle de perméabilités relatives, utilisable lorsque les gradients de pression visqueux

jouent un rôle important et que la distribution des deux phases dans les sections du matériau poreux est relativement homogène. Cette approche généralise la loi de Darcy en conservant l'utilisation de variables macroscopiques (définies par une moyenne sur un volume élémentaire représentatif) pour caractériser la distribution et le déplacement des fluides. Nous présenterons ensuite quelques problèmes associés à l'action des forces de capillarité et quelques cas où elles jouent un rôle dominant. Dans ce dernier cas, les phénomènes observés sont très différents suivant que le fluide initialement présent est déplacé par un fluide qui mouille moins bien le matériau (processus de *drainage*), ou qui le mouille mieux (processus d'*imbibition*).

Modèles de perméabilité relative

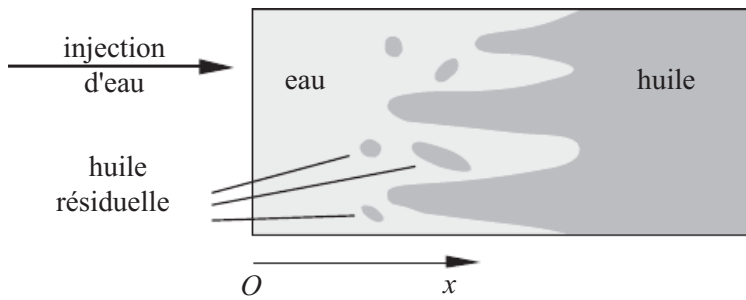


FIG. 9.25 – Schéma de principe du déplacement d'huile par de l'eau dans un milieu poreux.

Analysons la pénétration par de l'eau d'un échantillon cylindrique initialement saturé d'huile (Fig. 9.25). Un premier paramètre important est la *saturation* en eau S_e du matériau poreux définie comme la fraction du volume des pores occupée par l'eau. On définit, de même, une saturation en huile S_h (si les pores sont complètement saturés et qu'aucun autre fluide n'est présent, on a $S_h + S_e = 1$). Les paramètres S_e et S_h , ainsi que les vitesses débitantes locales $\mathbf{v}_{se}$ et $\mathbf{v}_{sh}$ respectives d'huile et d'eau, sont des moyennes sur un volume élémentaire représentatif, et varient lorsque l'on s'éloigne de la face d'injection. Au centre, il y a un domaine où les deux phases eau et huile sont continues ; aux deux extrémités, seule la phase eau ou la phase huile est continue.

On définit, à une distance x donnée de la face d'injection, des coefficients appelés perméabilités relatives moyennes k_{re} et k_{rh} par :

$$\frac{Q_e}{A} \mathbf{n}_e = \mathbf{v}_{se} = -K \frac{k_{re}}{\eta_e} (\mathbf{grad} p_e - \rho_e \mathbf{g}) \quad (9.122a)$$

et

$$\frac{Q_h}{A} \mathbf{n}_h = \mathbf{v}_{sh} = -K \frac{k_{rh}}{\eta_h} (\mathbf{grad} p_h - \rho_h \mathbf{g}) \quad (9.122b)$$

où K est la perméabilité moyenne de Darcy telle que l'on la mesurerait s'il n'y avait qu'une seule phase. Q_e et Q_h sont les débits d'eau et d'huile, A la section de l'échantillon et $\mathbf{n}_e$ et $\mathbf{n}_h$ des vecteurs unitaires. Cette approche généralise la loi de Darcy de la manière la plus simple possible et prend en compte la présence des deux fluides en introduisant simplement les deux coefficients multiplicatifs supplémentaires k_{re} et k_{rh} . Les viscosités et les densités de l'eau et de l'huile sont η_e , ρ_e , η_h et ρ_h ; les pressions p_e et p_h dans l'eau et de l'huile peuvent être différentes en raison de la différence de pression capillaire entre les deux côtés des ménisques d'interface eau-huile. Les formules (9.122a-b) incluent les variations de pression dues aux gradients de pression hydrostatiques, qui sont différentes dans la phase eau et la phase huile. Ces équations supposent implicitement qu'il y a une distribution homogène d'eau et d'huile à l'échelle du volume représentatif sur lequel on définit S_e , ainsi que les débits Q_e et Q_h . Cette condition sera très difficile à vérifier dans les milieux poreux hétérogènes ou en présence d'instabilités hydrodynamiques dues, par exemple, aux différences de viscosité entre les deux fluides.

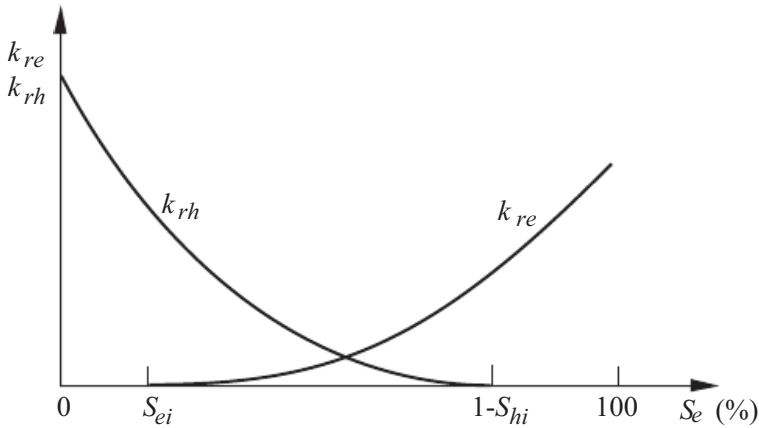


FIG. 9.26 – Variation typique des perméabilités relatives k_{re} pour l'eau et k_{rh} pour l'huile en fonction de la saturation relative S_e en eau dans l'espace des pores. Les saturations résiduelles en eau et huile sont S_{ei} et S_{hi} .

Dans la pratique, on suppose généralement également que les perméabilités relatives k_{re} et k_{rh} ne dépendent que de la saturation locale S_e et non de l'histoire de l'écoulement. Il est alors possible de déterminer expérimentalement k_{re} et k_{rh} en fonction de S_e , en mesurant en fonction du temps les quantités d'eau et d'huile qui sortent de l'échantillon au cours du déplacement, ainsi que la variation temporelle de la différence de pression entre ses extrémités. Cette hypothèse très simplifiée n'est généralement pas vérifiée, en particulier si l'on compare une première invasion d'un échantillon initialement saturé d'un seul fluide avec des invasions réalisées après plusieurs injections de l'un et l'autre fluide. Aussi, les mesures de perméabilité relative de routine sont-elles toujours effectuées avec une procédure expérimentale bien déterminée, de façon à fournir des résultats comparables d'un matériau à un autre.

La figure 9.26 montre l'allure typique de la variation de k_{re} et k_{rh} avec la saturation S_e . On constate que k_{re} s'annule pour une valeur finie S_{ei} non nulle de la saturation S_e : cela signifie que les gouttes ou les films d'eau présents à des saturations en eau plus faibles ne forment pas un chemin continu à travers l'échantillon et ne peuvent donc pas être mis en mouvement sous des gradients de pression faibles. De même, il faudra une saturation minimale $1 - S_{hi}$ en huile pour avoir un chemin continu d'huile et pour pouvoir mettre de l'huile en mouvement sous une faible différence de pression. La notion de perméabilité relative, malgré sa nature empirique, permet de rendre compte, en particulier, des profils des fronts d'invasion lorsqu'un fluide en chasse un autre à l'intérieur d'un massif poreux. Elle intervient dans de nombreuses autres situations où le milieu poreux est partiellement saturé d'eau comme dans la science des sols et en agronomie.

Effets de mouillabilité dans les écoulements diphasiques en poreux

Nous nous plaçons ici dans le cas où le nombre capillaire Ca est assez faible pour que les effets capillaires deviennent importants, ou même dominants. On suppose que l'on part d'un milieu poreux initialement complètement saturé d'un fluide (ou complètement vide) et dans lequel on injecte un autre fluide. Comme nous l'avons mentionné plus haut, on aura deux types de phénomènes : le *drainage* et l'*imbibition*.

Un exemple de drainage : la porosimétrie

Le terme de *porosimétrie* désigne une technique de caractérisation de la taille des pores d'un matériau où l'on force, par une surpression, du mercure non mouillant à pénétrer dans un échantillon poreux initialement vidé de fluide. Pour vaincre les forces de capillarité et pénétrer dans un pore cylindrique de diamètre d , il faut appliquer une surpression Δp variant avec d comme :

$$\Delta p = \frac{4\gamma \cos \theta}{d} \quad (9.123)$$

où $\cos \theta$ est l'angle de mouillage et γ la tension superficielle du mercure (si le ménisque est une calotte sphérique se raccordant aux parois avec un angle θ son rayon de courbure est en effet $R = d/(2 \cos \theta)$ et Δp est donnée par l'équation de Laplace 1.55).

Remarque. La porosimétrie représente un cas particulier de drainage dans lequel le fluide non mouillant est le mercure et le fluide mouillant est représenté par le vide. De ce fait, la différence de pression capillaire Δp coïncide avec la pression du mercure.

Pratiquement, on mesure la variation du volume de mercure pénétrant dans l'échantillon en fonction de la surpression appliquée (Fig. 9.27a) : la

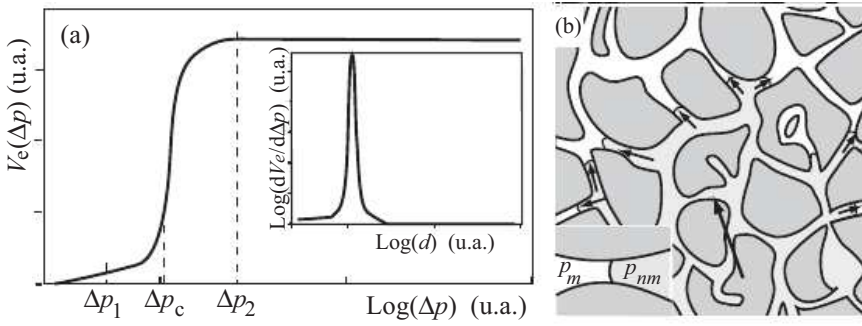


FIG. 9.27 – (a) Mesure de porosimétrie : variation du volume poreux V_e envahi par le mercure en fonction de la pression d'injection Δp . Insert : estimation de l'histogramme des tailles de pores d obtenue par dérivation de $V_e(\Delta p)$. (b) Représentation schématique à l'échelle du pore du processus de porosimétrie avec pénétration du mercure non mouillant (en gris clair) dans un échantillon initialement vide (parties blanches). Insert : vue agrandie d'un ménisque à l'intérieur d'un chenal de connexion.

vitesse d'injection est choisie très faible pour que l'influence des forces de viscosité soit négligeable et que seules les forces capillaires interviennent.

La figure 9.27b représente schématiquement, à l'échelle de quelques pores, la distribution de la phase non mouillante (nm , ici le mercure) lorsqu'elle déplace la phase mouillante (m , ici le vide) et les ménisques d'interface correspondants. Pour une surpression Δp donnée, seuls sont envahis les pores connectés à l'extérieur du poreux par un chemin le long duquel les diamètres des chenaux et pores sont tous supérieurs au diamètre $d(\Delta p)$ obtenu par l'équation (9.123) : les ménisques d'interface ne peuvent, en effet, emprunter un chenal que si son diamètre est plus grand que $d(\Delta p)$. De même, un pore de grande taille, mais entouré de toute part d'accès étroits, n'est envahi que si la surpression est suffisante pour progresser dans ces accès. Enfin, à tout instant, la progression du front s'effectue toujours sur les pores de plus grand diamètre situé sur ce dernier.

Aux faibles valeurs Δp_1 de la surpression Δp , le fluide nm n'envahit que les plus grands pores proches de la surface d'injection et il est bloqué par des chenaux étroits proches de la face d'entrée : le volume envahi V_e est alors faible ($\Delta p \approx \Delta p_1$ sur la Fig. 9.27a). Quand Δp augmente, la pénétration est de plus en plus profonde. Pour une valeur critique Δp_c apparaît un premier chemin traversant tout le milieu poreux. Physiquement, $d_c(\Delta p_c)$ est l'ouverture du passage le plus étroit sur le chemin le plus facile à travers le poreux : c'est, en effet, ce passage qui détermine la pression Δp_c à appliquer pour pouvoir parcourir le chemin en entier. De nombreux pores de taille $d > d_c$ ne sont pas envahis s'ils ne sont pas connectés à la face d'injection, et la fraction de volume poreux envahie ne représente alors qu'une partie faible du volume poreux total.

Note. On détecte l'apparition de ce chemin en mesurant la conductance électrique entre les faces d'entrée et de sortie de l'échantillon ; elle correspond au moment où cette conductance cesse d'être nulle. C'est donc cette valeur d_c qui est utilisée dans l'équation (9.120) pour évaluer la perméabilité.

Si l'on continue d'augmenter Δp , la pénétration autour de ce chemin critique augmente et d'autres chemins apparaissent : la valeur de V_e augmente alors rapidement avant de saturer lorsque presque tous les pores sont envahis, comme c'est le cas pour $\Delta p \approx \Delta p_2$ dans la figure 9.27a.

Dans les interprétations élémentaires de la mesure de porosimétrie, on considère que le volume envahi pour une surpression Δp représente le volume total des pores de taille supérieure à la valeur $d(\Delta p)$, obtenue par l'équation (9.123). Il suffit alors de dériver la courbe par rapport à Δp et de convertir les pressions d'injection en diamètres par cette même équation pour estimer la distribution du volume des pores en fonction de leur diamètre (insert de la Fig. 9.27a). La discussion précédente du mécanisme physique de l'invasion montre, cependant, que ces hypothèses sont très approximatives même si elles sont fréquemment utilisées : tout d'abord, le volume V_e est largement déterminé par le volume des pores alors que $d(\Delta p)$ reflète le diamètre des chenaux d'accès. D'autre part, nous avons vu que, à une pression d'injection donnée, une part importante des grands canaux de diamètre supérieur à $d(\Delta p)$ restent vides.

La description précédente du processus d'invasion très lente d'un poreux par un fluide non mouillant est un exemple particulier du phénomène général de *percolation*. Ce concept a été inventé en premier sur l'exemple d'un filtre initialement constitué de canaux ouverts interconnectés, que l'on bouche l'un après l'autre progressivement et au hasard. Dans ce cas, le seuil de percolation correspond au moment où la perméabilité s'annule. La situation de la porosimétrie à mercure correspond, au contraire, au cas d'un poreux que l'on débouche progressivement en augmentant la pression ΔP jusqu'à la pression seuil ΔP_c pour laquelle le mercure traverse tout le poreux et la conductivité électrique de l'ensemble de l'échantillon devient non nulle.

Le processus de percolation s'inscrit dans la famille des phénomènes critiques, caractérisés par le fait que certaines propriétés (ici, par exemple, la conductivité électrique ou la perméabilité) suivent des lois universelles en fonction de la distance au seuil (ici $\Delta P - \Delta P_c$).

D'autres exemples de drainage

La porosimétrie n'est pas le seul processus de drainage possible dans les milieux poreux. Il s'est, par exemple, produit (il y a des millions d'années) lors du remplissage des roches réservoirs au moment de la formation du gisement d'arrivée de pétrole venant des roches mères et remplaçant l'eau de mer initialement en place. De plus, dans certains cas, les roches réservoirs actuelles sont devenues mouillables préférentiellement à l'huile : la récupération

du pétrole par injection d'eau devient alors un processus de drainage. Dans ce cas, comme le fluide déplacé (eau ou huile) est incompressible, il pourra rester finalement du fluide déplacé résiduel immobile à la fin du processus.

Imbibition

Il s'agit de l'opération inverse du drainage : un fluide mouillant bien la surface des pores chasse spontanément un fluide moins mouillant qui remplissait initialement le matériau. Il s'agira, par exemple, de la pénétration de l'eau dans un poreux mouillable à l'eau et rempli au départ d'air (fluide non mouillant), ce qui correspond bien à la définition courante du mot imbibition. Si, au contraire, l'on part d'un poreux saturé d'eau et que l'on le laisse se vider par gravité, la pénétration de l'air venant remplacer l'eau est un processus de drainage.

Lors de la production de pétrole à partir d'une roche réservoir, celui-là est en général remplacé par de l'eau (injectée ou venant d'une profondeur plus grande). Si les roches sont mouillées préférentiellement par l'eau plutôt que par le pétrole, comme c'est souvent le cas, on aura, là aussi, imbibition.

Dans ces processus, ce sont les pores les plus petits qui sont envahis en premier par le fluide mouillant (au contraire du drainage) : en effet, les forces capillaires favorisent l'invasion et sont plus élevées dans les chenaux les plus étroits.

Il existe fréquemment des films continus de fluide mouillant le long des parois d'un milieu poreux : ils joueront un rôle clé dans le phénomène d'imbibition en permettant la pénétration de fluide mouillant en avant du front de déplacement moyen. Le fluide non mouillant, au contraire, reste sous forme de gouttes résiduelles isolées après le passage du front de déplacement.

Les phénomènes de drainage et d'imbibition occupent une place considérable en sciences des sols. Néanmoins, pour les particules de petite taille (argiles) une fraction de l'eau est liée chimiquement aux particules du sol.

Chapitre 10

Transports couplés. Couches limites laminaires

LES EFFETS COMBINÉS de la diffusion et de la convection et, éventuellement, de réactions chimiques font intervenir des échelles de longueur qui caractérisent les efficacités relatives de ces mécanismes. Le problème le plus classique est celui de la couche limite autour d'un solide qui se forme en régime laminaire à grand nombre de Reynolds : loin du corps, et tant que l'écoulement incident n'est pas turbulent, les termes de viscosité de l'équation du mouvement sont négligeables et l'écoulement a pratiquement le même profil que si le fluide était parfait. Le raccordement avec la condition de vitesse nulle sur des parois solides au repos se fait sur une zone appelée couche limite, d'épaisseur d'autant plus faible que le nombre de Reynolds est grand. Ce chapitre complète donc l'étude du fluide parfait en écoulement potentiel du chapitre 6.

Après l'introduction, nous établirons, dans la section 10.2, la structure de la couche limite, en comparant les effets de la viscosité et de la convection : cette comparaison dégage la notion d'échelles de longueur caractéristiques différentes pour les déplacements perpendiculaire et parallèle à la surface de l'obstacle. Puis, une approche plus fine, dans les sections 10.3 et 10.4, nous permettra d'étudier de façon détaillée la structure autosimilaire des écoulements de couche limite. Nous évaluerons ensuite, à la section 10.5, l'effet supplémentaire d'un gradient de pression dans la direction de l'écoulement. Le phénomène de décollement de couche limite qui peut en résulter joue un rôle essentiel en aérodynamique : nous en présenterons quelques exemples dans la section 10.6. La section 10.7 traite le problème du sillage laminaire derrière un obstacle : ce dernier peut, en effet, être considéré comme une couche limite se développant en l'absence d'une paroi solide. L'existence de gradients de température ou de concentration au voisinage des parois d'un objet entraîne celle de couches limites pour le transfert thermique ou de masse (couplées à celles correspondant à la vitesse). La section 10.8 aborde ces problèmes, qui ont de nombreuses applications en génie thermique et chimique. Nous illustrerons ces propriétés dans deux cas de couches limites de concentration d'ions

au voisinage d'une électrode électrochimique. Enfin, nous aborderons, dans la section 10.9, le problème de la combustion sous deux formes limites – flamme de diffusion et flamme prémélangée. En plus de la convection et de la diffusion, il faut alors faire intervenir la réaction chimique de combustion et les effets thermiques associés.

10.1 Introduction

Dans un écoulement laminaire à grand nombre de Reynolds ($Re = UL/\nu \gg 1$) autour d'un solide, les termes de viscosité de l'équation du mouvement (4.30) ne sont à prendre en compte que dans une zone de petite épaisseur autour de l'obstacle appelée *couche limite*.

La vorticité générée près des parois est entraînée dans un sillage (Fig. 10.1a). Nous verrons, par ailleurs, en fin de chapitre que, en aval d'un corps solide, les gradients de vitesse restent concentrés dans une faible partie du volume total de l'écoulement. Ainsi, l'étude des écoulements de fluides parfaits se trouve-t-elle justifiée *a posteriori*, puisque les profils d'écoulement correspondants seront utilisables presque partout : les effets de viscosité n'interviendront qu'à l'intérieur de la couche limite, au voisinage d'une paroi solide, ou dans le sillage en aval du corps. La notion de couche limite représente ainsi le point de liaison entre deux domaines importants de la mécanique des fluides : l'étude des champs de vitesse de fluides parfaits en écoulement potentiel, présentée au chapitre 6, et la détermination pratique de l'écoulement de fluides visqueux à un nombre de Reynolds fini.

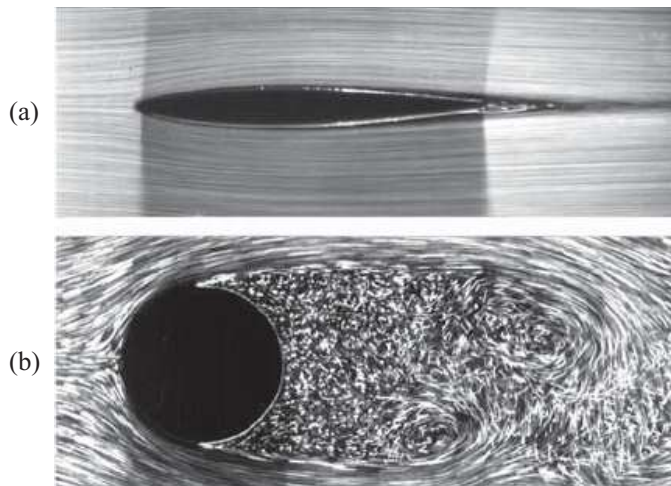


FIG. 10.1 – (a) Couche limite et sillage laminaire le long et en arrière d'un profil d'aile placé sous incidence nulle dans un écoulement uniforme; (b) couche limite décollée de la surface d'un corps mal profilé, avec présence d'un sillage important; dans ce dernier cas, la largeur du sillage est du même ordre de grandeur que celle de l'objet (docs. H. Werlé, ONERA).

Cette notion, due à Ludwig Prandtl (1905), doit être adaptée dans plusieurs situations pratiques :

- écoulements turbulents en amont du corps et/ou dans la couche limite ; le transport convectif de quantité de mouvement joue alors un rôle important et se substitue aux transferts diffusifs transverses que l'on a dans la couche limite laminaire. Les profils de vitesse d'écoulement sont, de ce fait, considérablement modifiés. Il existe encore une couche limite mais, cette fois, turbulente ;
- corps solides mal profilés : la couche limite n'existe alors que sur une partie de la surface du corps, et un *sillage* turbulent de largeur comparable à celle du corps apparaît en aval de celui-ci ; cela correspond au phénomène de *décollement* de couches limites, qui apparaît sur la figure 10.1b. Dans ce cas, l'écoulement aval n'a plus rien à voir avec celui d'un fluide parfait et la dissipation d'énergie ainsi que la force de traînée sur le corps sont considérablement augmentées.

Nous nous limiterons dans ce chapitre à l'étude des couches limites laminares, à l'intérieur desquelles le champ de vitesse ne varie que lentement dans le temps. Nous reviendrons sur les caractéristiques propres aux écoulements turbulents à la section 12.5.5.

10.2 Structure de la couche limite près d'une plaque plane dans un écoulement uniforme

Considérons un écoulement laminaire uniforme de vitesse U arrivant parallèlement à une plaque plane semi-infinie, d'arête parallèle à l'axe Oz et perpendiculaire au plan de la figure (Fig. 10.2). Si la vitesse est assez grande, l'influence de la plaque ne se fera pas sentir en amont de l'arête. En effet, les gradients de vitesse n'auront pas diffusé sur une distance appréciable depuis l'arête de la plaque avant d'avoir été entraînés en aval par l'écoulement. Il en résulte que, près de l'arête, les gradients de vitesse et la vorticité seront concentrés très près de la paroi. Comme dans le problème de la mise en mouvement d'une plaque plane parallèlement à elle-même étudié à la section 2.1.2, les gradients de vitesse s'atténuent avec le temps ; en effet, une distribution spatiale de vorticité initialement localisée sur la paroi s'élargit par diffusion visqueuse à partir de cette dernière sur une distance de l'ordre de : $\delta \approx \sqrt{\nu t}$ où ν est la viscosité cinématique du fluide.

Cependant, contrairement au cas du problème du chapitre 2, le fluide est, dans le même temps, entraîné parallèlement à la plaque, avec une vitesse qui est de l'ordre de U , assez loin de la plaque. L'ordre de grandeur du temps t   cou   dans le référentiel du fluide en mouvement, pendant que ce dernier se déplace d'une distance x_0 vers l'aval à partir de l'arête de la plaque, vérifie donc : $t \approx x_0 / U$. En reportant cet ordre de grandeur de t dans l'expression

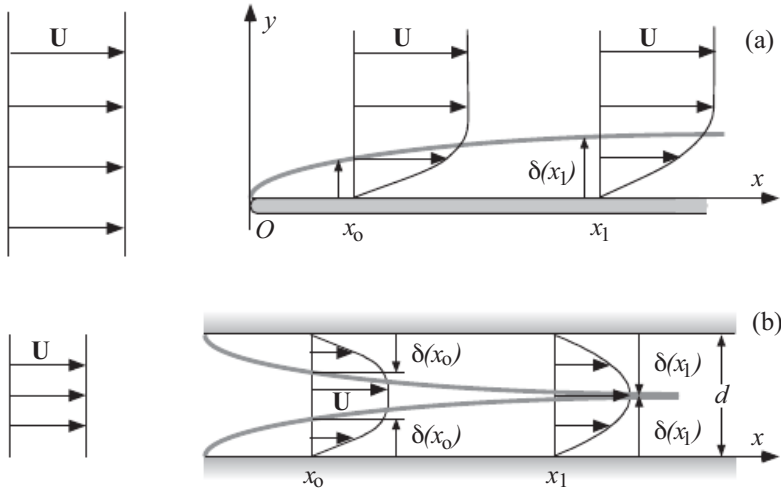


FIG. 10.2 – (a) Développement d’une couche limite le long d’une plaque plane semi-infinie, d’arête perpendiculaire en O au plan de la figure, placée dans un écoulement uniforme de vitesse U ; (b) effet de longueur d’entrée pour l’écoulement entre deux plaques planes semi-infinies parallèles placées dans un écoulement. On retrouve l’écoulement de Poiseuille après une distance x_1 . Dans les deux cas, l’échelle suivant Oy est fortement dilatée par rapport à celle suivant Ox .

$\delta \approx \sqrt{\nu t}$, on trouve que, à une abscisse x_0 par rapport à l’arête, les gradients de vitesse sont concentrés sur une distance à la paroi de l’ordre de :

$$\delta(x_0) \approx \sqrt{\frac{\nu x_0}{U}}. \quad (10.1a)$$

$\delta(x_0)$ représente donc l’épaisseur de la *couche limite* sur laquelle a lieu la transition entre l’écoulement de fluide parfait loin de la plaque et l’écoulement près de celle-ci ; ce dernier est contrôlé par la viscosité (qui impose, en particulier, la condition de vitesse nulle à la paroi). On a alors :

$$\frac{\delta(x_0)}{x_0} \approx \sqrt{\frac{\nu}{U x_0}} \approx \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}} \ll 1. \quad (10.1b)$$

où Re_{x_0} est le nombre de Reynolds local obtenu en prenant la distance x_0 à l’arête comme échelle locale de longueur. Ainsi, lorsque Re_{x_0} tend vers l’infini, l’épaisseur maximale de la couche limite devient infiniment petite devant une échelle caractéristique de la longueur des parois. Ce résultat explique pourquoi, dans cette situation, le régime d’écoulement externe non turbulent d’un fluide visqueux se rapproche de celui d’un fluide parfait : en effet, l’épaisseur de la zone où les effets de la viscosité se font sentir tend vers zéro.

Remarque. Cela ne veut pas dire pour autant que les effets d’une telle couche, même infiniment mince, soient négligeables. Bien au contraire : à partir des résultats

établis à la section 5.3.1, on trouve que la dissipation d'énergie due à une variation finie de vitesse sur une couche d'épaisseur infiniment faible est infinie. On parle ainsi de *perturbation singulière* pour décrire le passage à la limite $\delta = 0$.

Nous verrons à la section 10.4.4 que le contour de la couche limite n'est pas une ligne de courant et que le débit à l'intérieur augmente comme $\sqrt{x_0}$. De plus, si Re_{x_0} prend une valeur trop élevée, la couche limite elle-même devient instable et turbulente : les évaluations précédentes ne sont plus valables car le transport de quantité de mouvement par convection turbulente fait augmenter δ beaucoup plus rapidement que dans le cas laminaire.

Un phénomène étroitement lié à l'existence de la couche limite est l'effet de *longueur d'entrée*, qui retarde le développement d'un profil d'écoulement stationnaire près de l'ouverture amont d'une conduite. La Figure 10.2b schématise ce processus, dans le cas simple d'un écoulement entre deux plaques semi-infinies perpendiculaires au plan de figure et distantes de d . À une faible distance x_0 des arêtes O et O' qui limitent les deux plaques, on a une vitesse presque uniforme entre les plaques avec un module égal à la valeur U en amont ; on parle, dans ce cas, d'*écoulement bouchon*. La transition avec la condition de vitesse nulle à la surface des plaques se fait sur la faible épaisseur locale $\delta(x_0)$ de la couche limite. Au fur et à mesure qu'on s'éloigne vers l'aval, l'épaisseur $\delta(x)$ augmente. Les deux couches limites finissent alors par se rejoindre autour d'une distance x_1 telle que :

$$\frac{x_1}{d} \approx \frac{Ud}{\nu} \approx Re_d,$$

où Re_d est le nombre de Reynolds construit à partir de la vitesse U et de la distance d entre plaques. La longueur x_1 est donc la longueur nécessaire pour que s'établisse, entre les deux plans, le profil de vitesse parabolique stationnaire déterminé à la section 4.5.3 : elle sera d'autant plus grande que Re_d est plus élevé (1 000 fois le diamètre pour $Re = 1000$). Pour une conduite cylindrique, le comportement est qualitativement le même.

Justification. On obtient l'estimation précédente de x_1 à partir de l'équation (10.1a) en écrivant que $\delta(x_1) \approx d/2$.

10.3 Équations de mouvement dans la couche limite – théorie de Prandtl

10.3.1 Équations de mouvement près d'une plaque plane

Analysons l'écoulement bidimensionnel stationnaire dans le plan (xOy) près d'une plaque plane $y = 0$, pour un écoulement extérieur potentiel $U(x)$ que l'on supposera parallèle à la paroi. Les résultats que nous allons obtenir resteront valables pour des parois courbes si leur rayon de courbure est très supérieur à l'épaisseur δ de la couche limite.

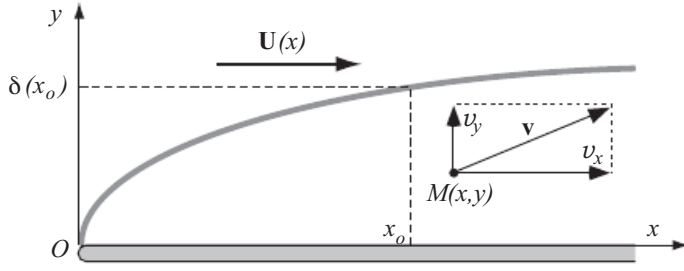


FIG. 10.3 – Couche limite le long d'une plaque plane semi-infinie placée dans un champ de vitesse externe $U(x)$ parallèle à la plaque; $\delta(x_0)$ est l'ordre de grandeur de l'épaisseur locale de la couche limite en un point d'abscisse x_0 en aval de l'arête de la plaque.

La dimension caractéristique dans la direction parallèle à l'écoulement est localement, en un point M donné, de l'ordre de sa distance x_0 à l'arête (Fig. 10.3). La dimension caractéristique, perpendiculairement à l'écoulement, est l'épaisseur locale de la couche limite $\delta(x_0)$ qui est très inférieure à x_0 (Éqs. 10.1a et b). Ce qui suit est basé sur l'existence de ces *deux échelles de longueur très différentes* dans la direction parallèle ou perpendiculaire à la paroi. Sous ces hypothèses, on trouve que l'équation de mouvement suivant Ox devient :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = U(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (10.2)$$

tandis que la pression vérifie :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (10.3)$$

et :

$$p(x) + \frac{1}{2} \rho U^2(x) = \text{cte.} \quad (10.4)$$

L'équation (10.3) est similaire à l'absence de gradient de pression perpendiculairement aux lignes de courant d'un écoulement parallèle ou plutôt, dans le cas présent, quasi parallèle. Comme dans le chapitre 9, la pression est corrigée de la pression hydrostatique $p_o = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ et la notation p représente implicitement la différence $p - p_o$.

Démonstration. L'écoulement étudié étant bidimensionnel et incompressible, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (10.5)$$

où v_x et v_y sont les composantes de la vitesse $\mathbf{v}$ du fluide respectivement dans les directions x et y . L'équation (10.5) montre que la composante de la vitesse perpendiculaire à la paroi est d'un ordre de grandeur inférieur à la composante parallèle avec :

$$v_y \approx v_x \frac{\delta(x_0)}{x_0} \approx \frac{v_x}{\sqrt{Re_{x_0}}} \ll v_x \quad (10.6)$$

puisque $\delta(x_0) \approx x_0 / \sqrt{Re_{x_0}} \ll x_0$. On en déduit :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \frac{v_x}{\delta^2(x_0)} \gg \frac{v_x}{x_0^2} \approx \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad (10.7a)$$

et :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \approx \frac{v_y}{\delta^2(x_0)} \gg \frac{v_y}{x_0^2} \approx \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}. \quad (10.7b)$$

Ces inégalités permettent d'écrire les équations de Navier-Stokes sous la forme simplifiée :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (10.8a)$$

et :

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}. \quad (10.8b)$$

On a conservé le terme $v_y \partial v_x / \partial y$ dans l'équation (10.8a). Ce dernier est, en effet, du même ordre de grandeur que $v_x (\partial v_x / \partial x)$ car : $v_y (\partial v_x / \partial y) \approx v_x (\delta(x_0) / x_0) (v_x / \delta(x_0)) = v_x^2 / x_0 \approx v_x (\partial v_x / \partial x)$. La faible valeur de v_x est compensée par la forte valeur du gradient $\partial v_x / \partial y$ dans la direction normale à la paroi, suivant laquelle les échelles de longueur sont les plus faibles. De même, les termes $v_y (\partial v_y / \partial y)$ et $v_x (\partial v_y / \partial x)$ sont du même ordre dans l'équation (10.8b).

On passe de l'équation (10.8a) à l'équation (10.8b) en remplaçant $\partial p / \partial x$ par $\partial p / \partial y$ et en substituant la composante v_y à v_x dans les trois autres termes ; comme v_y est très inférieur à v_x , ces trois termes seront d'un ordre de grandeur inférieur aux termes correspondants de l'équation (10.8a). Les variations de pression dans la direction y n'ont donc qu'une influence négligeable sur le profil de vitesse par rapport aux variations dans la direction x qui interviennent dans l'équation (10.8a). On peut donc réduire l'équation (10.8b) à $\partial p / \partial y = 0$ (Éq. 10.3) d'où :

$$p = p(x). \quad (10.9)$$

En dehors de la couche limite, les effets de la viscosité sont négligeables et l'on peut appliquer l'équation de Bernoulli (10.4) comme pour un fluide parfait ; en dérivant cette dernière par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho U(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0. \quad (10.10)$$

En combinant les relations (10.8a) et (10.10), on obtient alors l'équation (10.2). ■

Remarque. Au bord de la couche limite, à la distance $\delta(x_0)$ de la paroi, le terme de transport de quantité de mouvement par convection $v_x (\partial v_x / \partial x)$ et le terme de transport de quantité de mouvement par diffusion visqueuse $\nu (\partial^2 v_x / \partial y^2)$ sont du même ordre de grandeur. En effet, $v_x (\partial v_x / \partial x)$ est de l'ordre de $U^2(x_0) / x_0$, tandis que $\nu (\partial^2 v_x / \partial y^2)$ vérifie, pour $y \approx \delta(x_0)$:

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \approx \nu \frac{U(x_0)}{\delta^2(x_0)} \approx \nu \frac{U(x_0) Re_{x_0}}{x_0^2} \approx \frac{U^2(x_0)}{x_0}.$$

10.3.2 Transport de vorticité dans la couche limite

L'équation générale (7.41) du transport de la vorticité dans un fluide newtonien :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (10.11)$$

Elle se simplifie dans le cas présent d'un écoulement bidimensionnel car seule la composante ω_z est non nulle : le terme $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$ est donc nul ; par ailleurs, l'écoulement est stationnaire. On obtient donc :

$$v_x \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}. \quad (10.12)$$

Cette équation exprime l'équilibre entre les transports de vorticité par convection et par diffusion. Les variations de ω_z associées à l'étirement des tubes de vorticité n'interviennent, en effet, pas en raison du caractère bidimensionnel de l'écoulement (nous avons analysé cette propriété au chapitre 7 consacré à l'étude de la vorticité).

10.3.3 Autosimilarité des profils de vitesse dans la couche limite pour une vitesse extérieure uniforme et constante

Comme nous l'avons déjà vu plus haut, les échelles de longueur x_0 et $\delta(x_0)$ parallèle et perpendiculaire à la paroi sont très différentes. Il en est de même des échelles correspondantes de vitesse v_x ($\approx U$) et v_y ($\approx U/\sqrt{Re}$). De plus, il n'existe pas une seule échelle de longueur caractéristique valable pour tous les points de l'écoulement. Nous utiliserons localement *deux*  chelles de longueur différentes :

- la distance x_0   l'arête de la plaque parallèlement à cette dernière ;
- l'épaisseur locale $\delta(x_0) \approx \sqrt{\nu x_0 / U} \approx x_0 / \sqrt{Re_{x_0}}$ de la couche limite dans la direction y perpendiculaire à la paroi.

Écrivons alors l'équation de Navier-Stokes, en utilisant un ensemble de variables sans dimension (que nous notons par des "primes") définies à partir de ces deux échelles de longueur et des deux échelles de vitesse correspondantes :

- U parallèlement à la plaque ;
- $U/\sqrt{Re_{x_0}}$ perpendiculairement ( q. 10.6).

Nous avons alors :

$$x' = \frac{x}{x_0}, \quad (10.13a)$$

$$y' = \frac{y}{\delta(x_0)} = \frac{y\sqrt{Re_{x_0}}}{x_0}, \quad (10.13b)$$

$$v'_x = \frac{v_x}{U}, \quad (10.13c)$$

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{Re_{x_0}}}{U}. \quad (10.13d)$$

Plaçons-nous dans le cas où la vitesse $U(x)$ à l'extérieur de la couche limite est constante avec x . On a alors : $\partial U(x)/\partial x = 0$ et, par suite, $\partial p/\partial x = 0$ d'après la relation (10.10). Les équations (10.2) et (10.5) deviennent alors :

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} = 0 \quad (10.14)$$

et :

$$v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} = \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2}. \quad (10.15)$$

Remarque. Le terme de transport de quantité de mouvement par viscosité joue, dans la relation (10.15), un rôle aussi important que les termes convectifs, ce qui correspond bien à la réalité physique. Ce n'est pas le cas pour la limite, à nombre de Reynolds infini, de l'équation de Navier-Stokes sans dimension obtenue en utilisant une seule échelle de longueur à la section 4.2.4. En effet, on aboutit alors simplement à l'équation d'Euler (4.31) des fluides parfaits. C'est l'utilisation de deux échelles de longueur différentes, perpendiculairement et parallèlement à la paroi, qui permet de tenir compte du gradient de vitesse (et donc des forces visqueuses) élevé dans l'épaisseur de couche limite près des parois.

Montrons maintenant que, toujours pour une vitesse extérieure U constante, il existe des solutions des équations (10.14) et (10.15) fonction, non de x' et y' séparément, mais d'une seule variable sans dimension :

$$\theta = \frac{y'}{\sqrt{x'}} = \frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}. \quad (10.16)$$

Les variations correspondantes des composantes de la vitesse sont de la forme :

$$\frac{v_x}{U} = f\left(\frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}\right) = f(\theta) \quad (10.17)$$

et :

$$\frac{v_y}{U} = \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} h\left(\frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}\right) = \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} h(\theta). \quad (10.18)$$

Un tel profil est dit *autosimilaire* : la variation de la composante v_x de la vitesse avec la distance y à la surface de la plaque est toujours la même, à un facteur d'échelle $\sqrt{\nu x/U}$ près, lorsque la distance x à l'arête de la plaque change.

Démonstration. Les équations (10.14) et (10.15) ont des solutions de la forme :

$$v'_x = f(x', y') \quad (10.19)$$

et :

$$v'_y = g(x', y'); \quad (10.20)$$

on a donc :

$$v_x = U f\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{\delta(x_0)}\right), \quad (10.21)$$

et :

$$v_y = \sqrt{\frac{\nu U}{x_0}} g\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{\delta(x_0)}\right) \quad (10.22)$$

ou :

$$v_y = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} h\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{\delta(x_0)}\right) \quad (10.23)$$

avec $h = \sqrt{x/x_0} g$. Les composantes v_x et v_y dépendent, *a priori* séparément, des deux variables x/x_0 et $y/\delta(x_0)$. Cependant, les fonctions f et h ne peuvent pas faire intervenir indépendamment ces deux variables, mais seulement une combinaison dans laquelle n'apparaît pas x_0 : en effet, le choix initial de l'échelle de longueur x_0 parallèlement à la plaque étant arbitraire, la solution finale du problème, qui est indépendante de x_0 , ne saurait dépendre de ce choix. On choisit donc la variable $\theta = y'/\sqrt{x'}$, qui est la combinaison la plus simple ne faisant pas intervenir x_0 . ■

La notion de profil autosimilaire et la méthode que nous avons utilisée sont très générales. Nous avons déjà rencontré un tel exemple de profil à la section 2.1.2 dans l'étude de l'écoulement induit par la mise en mouvement d'une plaque plane parallèlement à elle-même. Dans ce cas, le profil de vitesse ne dépendait que de la combinaison sans dimension $y/\sqrt{\nu t}$, de la distance y à la plaque et du temps t : ce dernier est l'analogue, pour ce problème instationnaire, de la distance x à l'arête de la plaque pour la couche limite stationnaire que nous étudions ici. Nous en verrons un autre exemple dans la section 10.7 où nous étudierons la forme du profil de vitesse transverse dans un sillage laminaire derrière un corps solide. Nous rencontrerons aussi des profils autosimilaires pour les jets et les couches de mélange entre deux fluides de vitesses différentes, aussi bien en régime laminaire qu'en régime turbulent.

Remarque. La propriété d'autosimilarité du profil de vitesse dans la couche limite est observée dès qu'il n'existe pas de longueur caractéristique dans le profil de vitesse à l'extérieur de la couche limite ; nous venons d'en voir un exemple dans le cas de la plaque plane. Un autre exemple est constitué par la famille d'écoulements de la forme $U(x) = Cx^m$ qui correspond à l'écoulement au voisinage d'un dièdre,

introduits à la section 6.6.2 (iv) et que nous retrouverons à propos du comportement d'une couche limite en présence d'un gradient de pression de l'écoulement extérieur (section 10.5.2).

10.4 Profils de vitesse dans les couches limites

10.4.1 Équation de Blasius pour un écoulement extérieur uniforme

On cherche à déterminer l'équation différentielle vérifiée par le champ de vitesse à l'intérieur de la couche limite, le long d'une plaque plane placée dans un écoulement uniforme de vitesse $\mathbf{U}$, parallèle à son plan. On exprime pour cela la composante de vitesse $v_x(x, y)$ (Éq. 10.17) en fonction de la variable réduite θ , introduite dans l'équation (10.16), et du module U de la vitesse :

$$v_x(x, y) = U f(\theta) \quad \text{et} \quad \theta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / U}}.$$

En reportant ces expressions dans les équations (10.2) et (10.5), valables dans la couche limite, on obtient l'équation dite de Blasius :

$$f''(\theta) = -\frac{1}{2} f'(\theta) \int_0^\theta f(\xi) d\xi. \quad (10.24)$$

Démonstration. Utilisons la condition d'incompressibilité (10.5) et exprimons la variable y en fonction de x et de θ . On obtient :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} = U f'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} = -U f'(\theta) \frac{\theta}{2x}. \quad (10.25)$$

Par ailleurs :

$$\frac{\partial v_y}{\partial \theta} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (10.26)$$

En combinant ces deux équations, on obtient alors :

$$\frac{\partial v_y}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \theta \frac{f'(\theta)}{2}. \quad (10.27)$$

On en déduit, en intégrant par parties par rapport à θ à x constant (ξ est la variable d'intégration entre 0 et θ) :

$$v_y = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(\frac{1}{2} \theta f(\theta) - \frac{1}{2} \int f(\xi) d\xi \right). \quad (10.28)$$

La constante d'intégration, qui fixe les bornes de l'intégrale dans l'expression de v_y sera déterminée plus bas à partir des conditions aux limites. Calculons les termes de l'équation (10.2) en remplaçant v_y par l'expression précédente :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (10.29)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{U^2}{x} \left(-\theta f(\theta) \frac{f'(\theta)}{2} \right), \quad (10.30)$$

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{U^2}{x} f'(\theta) \left(\frac{1}{2} \theta f(\theta) - \frac{1}{2} \int f(\xi) d\xi \right) \quad (10.31)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{U^2}{x} f''(\theta). \quad (10.32)$$

On obtient alors :

$$f''(\theta) = -\frac{1}{2} f'(\theta) \int f(\xi) d\xi \quad (10.33)$$

en combinant les différents termes de l'équation (10.2), que nous venons de calculer, et en simplifiant par U^2/x . Cela permet d'éliminer complètement la variable x de l'équation, et confirme la propriété d'autosimilarité (θ est en effet, la seule variable restante). Déterminons maintenant les bornes d'intégration dans les équations (10.28) et (10.33) à partir des conditions aux limites à la surface de la plaque et à l'infini. On a en effet :

$$\frac{v_x(y=0)}{U} = f(\theta=0) = 0 \quad (10.34a)$$

$$\frac{v_y(y=0)}{\sqrt{\nu U/x}} = \frac{v_y(\theta=0)}{\sqrt{\nu U/x}} = 0 \quad (10.34b)$$

et

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{v_x}{U} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} f(\theta) = 1. \quad (10.34c)$$

La condition (10.34b) fixe les bornes d'intégration dans l'expression (10.28) de v_y , qui devient :

$$v_y = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(\frac{1}{2} \theta f(\theta) - \frac{1}{2} \int_0^\theta f(\xi) d\xi \right). \quad (10.35)$$

De même, les conditions (10.34) fixent les bornes de l'intégrale qui apparaît dans l'équation (10.33) : celle-ci prend alors bien la forme de l'équation (10.24). ■

10.4.2 Profil de vitesse solution de l'équation de Blasius

La Figure 10.4 montre, en utilisant les quantités sans dimension $f = v_x/U$ et θ , la variation de la composante longitudinale de la vitesse avec la distance à la plaque. Aux faibles distances, la variation est pratiquement linéaire avec une pente $(df/d\theta)(0) \simeq 0,332$. Entre $\theta = 3$ et $\theta = 5$, on a une transition vers la valeur limite $\theta = 1$ à grande distance ($v_x/U = 0,99$ pour $\theta = 5$). Ce résultat confirme toute la valeur de la notion de couche limite : dès que l'on s'éloigne de la paroi, on retrouve pratiquement l'écoulement uniforme extérieur. Comme nous allons le voir, ces caractéristiques du profil de vitesse

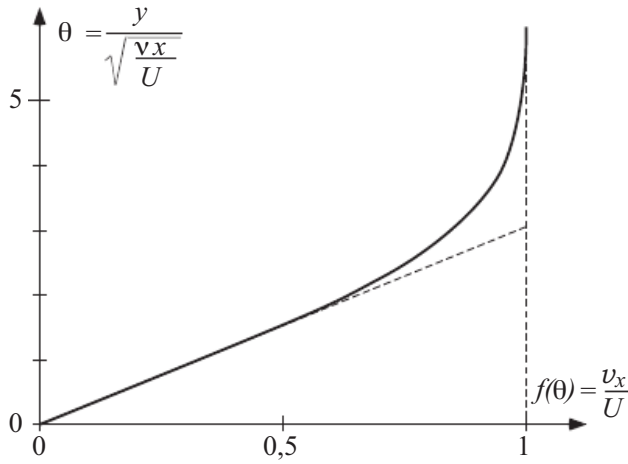


FIG. 10.4 – Variation de la composante de vitesse normalisée parallèle à la plaque en fonction de la distance normalisée $\theta = y / \sqrt{\nu x / U}$.

de la figure peuvent, pour une large part, être déduites simplement de la forme (10.24) de l'équation de Blasius. Dans le cas des écoulements de couches limites turbulentes, nous verrons, au chapitre 12, que la vitesse rejoint plus lentement sa valeur asymptotique.

Démonstration. La dérivée de l'équation (10.24) s'écrit :

$$f'''(\theta) = -\frac{1}{2} \left(f'(\theta)f(\theta) + f''(\theta) \int_0^\theta f(\xi) d\xi \right). \quad (10.36)$$

Pour $\theta = 0$, on a $f(0) = 0$ (condition (10.34a)) et, d'après l'équation (10.24), $f''(0) = 0$; on a donc : $f'''(0) = 0$. Ainsi, aux faibles valeurs de θ , la variation de la composante de vitesse v_x parallèle à la plaque en fonction de la distance à cette dernière reste pratiquement linéaire et peut s'exprimer sous forme d'un développement limité :

$$\frac{v_x(\theta)}{U} = f(\theta) \approx \theta f'(0) + b \theta^4 + O(\theta^5). \quad (10.37)$$

Reportons ce développement dans l'équation (10.36) et écrivons l'égalité des termes d'ordre θ .

On trouve :

$$b = -\frac{1}{48} f'^2(0). \quad (10.38)$$

Ainsi :

- la concavité du profil $f(\theta)$ est dirigée vers l'amont de l'écoulement car $f''(\theta) < 0$ (Fig. 10.4) ;
- même pour une valeur de θ aussi élevée que 2, la correction relative $b \theta^4$ par rapport à une variation linéaire est seulement de l'ordre de $f'(0)/6$.

Dans la limite opposée des grandes valeurs de θ , $f(\theta)$ tend vers 1 (Éq. 10.34c) et $\int_0^\theta f(\xi) d\xi$ devient de l'ordre de θ . L'équation de Blasius (10.24) tend donc vers

la forme limite :

$$f''(\theta) \approx -\frac{1}{2} \theta f'(\theta). \quad (10.39)$$

En intégrant cette expression, on trouve que $f'(\theta)$ est de l'ordre de $Ke^{-\theta^2/4}$. Ainsi, le profil $f(\theta)$ rejoint exponentiellement sa valeur asymptotique 1 : dès que θ vaudra 4 ou 5, $f'(\theta)$ sera, en effet, de l'ordre de quelques millièmes. En combinant les deux limites précédentes ($\theta \rightarrow 0$ et $\theta \rightarrow \infty$), on prédit que $f(\theta)$ passera d'une manière abrupte d'une variation linéaire à sa valeur asymptotique : on vérifie bien ce résultat sur la variation de la figure 10.4 obtenue par intégration numérique de l'équation (10.24).

Déterminons maintenant l'ordre de grandeur de la valeur $f'(0)$ de la pente à l'origine à partir du développement approché de la formule (10.37). Celui-ci prédit, en effet, une variation initiale très linéaire, suivie d'un arrondi brusque (correspondant au coude du profil présenté sur la Fig. 10.4), après lequel $f(\theta)$ atteindrait un maximum pour une valeur θ_m , obtenue en dérivant la relation (10.37) par rapport à θ :

$$\theta_m = (12/f'(0))^{\frac{1}{3}}. \quad (10.40)$$

La valeur maximale de $f(\theta)$ correspondante devra être proche de 1 (la valeur asymptotique est rejointe très rapidement – exponentiellement – par le profil de vitesse après le coude). On a, en première approximation :

$$f(\theta_m) = \theta_m f'(0) - \frac{1}{48} f'^2(0) \theta_m^4 \approx 1.$$

En remplaçant dans cette équation θ_m par la valeur donnée par l'équation (10.40), on trouve :

$$f'(0) \approx 0,29 \quad \text{et} \quad \theta_m \approx 3,44.$$

Cette valeur de $f'(0)$ est du même ordre que la valeur exacte $f'(0) = 0,332 \approx 1/3$ obtenue par l'intégration numérique directe de l'équation (10.24). ■

10.4.3 Force de frottement sur une plaque plane dans un écoulement uniforme

Pour un écoulement suivant Ox , la force de frottement sur une surface de normale orientée suivant Oy , de longueur L suivant Ox et de largeur unité vaut :

$$F_{\text{totale}} = \frac{4}{3} \rho U^2 L \frac{1}{\sqrt{Re_L}}. \quad (10.41)$$

Le coefficient de traînée C_d est obtenu en normalisant cette valeur par le produit de la pression dynamique ($1/2 \rho U^2$) et de la surface en contact avec le fluide ($2L$). D'où :

$$C_d = \frac{F_{\text{totale}}}{\rho U^2 L} = \frac{1,33}{\sqrt{Re_L}}. \quad (10.42)$$

Cette variation en $1/\sqrt{Re_L}$ du coefficient C_d est plus lente que la variation en $1/Re$, obtenue dans le cas des écoulements aux petits nombres de Reynolds pour lesquels le transport est assuré par diffusion visqueuse (Éq. 9.20). Le

transport de quantité de mouvement par diffusion visqueuse est, en effet, concentré ici dans la faible épaisseur de la couche limite, et est favorisé par la présence de gradients de vitesse plus importants que lorsque le nombre de Reynolds est très inférieur à l'unité. En revanche, la variation est plus rapide que pour les écoulements turbulents (section 12.5.4) : dans ce dernier cas, le transport convectif domine ; la force est proportionnelle au carré de la vitesse, et C_d est approximativement indépendant du nombre de Reynolds (Éq. 12.74).

Démonstration. La force de frottement par unité de surface à une distance x de l'arête est la composante σ_{xy} de la contrainte :

$$\sigma_{xy} = \eta \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_{y=0} = \eta U f'(0) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \eta U f'(0) \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (10.43)$$

ou, en faisant apparaître un terme de la forme ρU^2 , homogène à une pression :

$$\sigma_{xy} = \rho U^2 f'(0) \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}. \quad (10.44)$$

Pour obtenir la force totale exercée par le fluide sur la plaque, nous intégrons σ_{xy} par rapport à x sur l'ensemble des deux faces de la plaque plane de longueur L . On trouve :

$$F_{\text{totale}} = 2 \rho U^2 f'(0) \sqrt{\frac{\nu}{U}} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4 \rho U^2 f'(0) \sqrt{\frac{\nu L}{U}}. \quad (10.45)$$

En définissant un nombre de Reynolds $Re_L = UL/\nu$ à partir de la dimension caractéristique L de la plaque dans la direction de l'écoulement et en prenant $f'(0) \approx 1/3$, on obtient alors l'équation (10.41). ■

10.4.4 Épaisseurs de couche limite

Nous avons démontré que, en présence d'un écoulement de vitesse U , l'épaisseur de la couche limite varie comme $\sqrt{\nu x/U}$. Pour préciser le coefficient de proportionnalité, la définition la plus simple consiste à prendre l'épaisseur de couche limite δ égale prend la valeur de y pour laquelle $f(\theta) = v_x(y)/U$ prend une valeur donnée. Ainsi $\delta_{0,99}$ (correspondant à $v_x/U = 0,99$) vérifie :

$$\delta_{0,99} = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (10.46)$$

Le choix de la valeur de f étant arbitraire, d'autres définitions, de caractère plus universel car basées sur un effet physique, ont été introduites. Leur expression ne diffère, cependant, de celle de $\delta_{0,99}$ que par une constante numérique.

(i) Épaisseur de déplacement δ^*

Cette définition correspond au déplacement δ^* des lignes de courant de l'écoulement potentiel extérieurement à la couche limite. Cet écartement varie

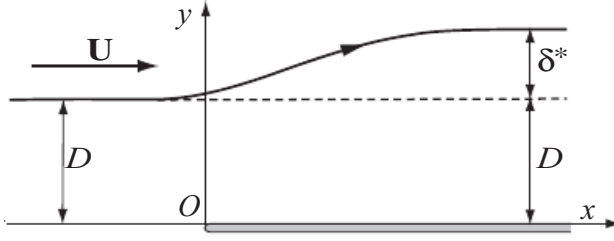


FIG. 10.5 – Évaluation de l'épaisseur de la couche limite le long d'une plaque plane, à partir du déplacement δ^* des lignes de courant de l'écoulement extérieur à la couche limite (l'échelle verticale est fortement dilatée).

avec la distance à l'arête de la plaque dans la direction de l'écoulement. Pour évaluer la quantité δ^* , écrivons la variation du débit volumique à l'intérieur d'un tube de courant de largeur unité suivant la perpendiculaire au plan de la figure 10.5 et d'épaisseur D en amont de la plaque (D doit être très largement supérieure à δ^*) :

$$\int_0^D U \, dy = \int_0^{D+\delta^*} v_x \, dy = \int_0^{D+\delta^*} (v_x - U) \, dy + \int_0^{D+\delta^*} U \, dy. \quad (10.47)$$

Si D est assez grande, on peut considérer que $(v_x - U)$ est égal à 0 au-delà de la distance $(D + \delta^*)$ et admettre que :

$$\int_0^{D+\delta^*} (v_x - U) \, dy = \int_0^\infty (v_x - U) \, dy. \quad (10.48)$$

La relation (10.47) devient alors, si l'écoulement est uniforme :

$$U D - U(D + \delta^*) = \int_0^\infty (v_x - U) \, dy \quad (10.49)$$

soit :

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x(x, y)}{U} \right) dy. \quad (10.50)$$

On obtient alors par intégration numérique :

$$\delta^* = 1,73 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (10.51)$$

(ii) Épaisseur de quantité de mouvement δ^{**}

De manière analogue à l'épaisseur de déplacement, on peut définir une épaisseur de couche limite à partir de la variation de quantité de mouvement à

l'intérieur d'un tube de courant ou à partir de la variation d'énergie cinétique. Ainsi :

$$\delta^{**} = \frac{\text{flux de quantité de mouvement en amont} - \text{flux à la distance } x}{\rho U^2} \quad (10.52a)$$

soit :

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{v_x(U - v_x)}{U^2} dy. \quad (10.52b)$$

Pour un écoulement extérieur uniforme, on obtient numériquement :

$$\delta^{**}(x) = 0,66 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (10.53)$$

Le produit $\rho U^2 \delta^{**}$ est égal la force de frottement sur une face de paroi entre l'arête et la distance x (c'est-à-dire à la moitié de la valeur pour $L = x$ donnée par l'équation (10.41) qui correspond à deux faces).

10.4.5 Stabilité hydrodynamique d'une couche limite laminaire – Couches limites turbulentes

Dans ce chapitre, jusqu'à présent, nous avons défini des nombres de Reynolds avec, comme échelles de longueur, les distances dans la direction de l'écoulement. Nous avons ainsi utilisé $Re_{x_0} = Ux_0/\nu$ et $Re_L = UL/\nu$, où x_0 et L sont respectivement la distance locale à l'arête de la paroi et la longueur totale de cette-dernière suivant l'écoulement : les conditions $Re_{x_0} \gg 1$ et $Re_L \gg 1$ doivent être vérifiées pour que l'épaisseur δ de la couche limite soit faible devant x_0 et L . La stabilité d'une couche limite laminaire est, en revanche, déterminée par la valeur d'un nombre de Reynolds local qui utilise l'épaisseur de la couche limite comme échelle de longueur (de même, pour déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent dans un tube, on prend pour longueur caractéristique, dans le nombre de Reynolds, le diamètre du tube et non sa longueur). On définit par exemple :

$$Re_{\delta_{0,99}} = \frac{U\delta_{0,99}}{\nu} \propto \sqrt{\frac{Ux}{\nu}}. \quad (10.54)$$

Ce nombre augmente comme la racine carrée de la distance x à l'arête. Aussi, même à des vitesses d'écoulement élevées, les instabilités hydrodynamiques n'apparaîtront qu'au-delà d'une certaine distance x . Elles prendront la forme d'oscillations régulières de la vitesse dans le plan (x, y) puis de fluctuations tridimensionnelles. Au-delà d'une certaine amplitude des fluctuations, des zones turbulentes apparaissent. À vitesse encore plus élevée, l'ensemble de la couche limite présente des fluctuations rapides de la vitesse locale instantanée. Nous étudierons à la section 12.5.5 les caractéristiques de ces *couches limites turbulentes* où, dès qu'on s'éloigne un peu de la plaque, le transport de quantité de mouvement n'est plus effectué par la viscosité, mais par les fluctuations turbulentes de la vitesse.

10.5 Couche limite laminaire en présence d'un gradient de pression externe : décollement des couches limites

10.5.1 Analyse physique simplifiée du problème

Supposons que la vitesse de l'écoulement potentiel extérieur $U(x)$ décroisse avec la distance x en aval de l'arête de la paroi comme, par exemple, dans le cas d'un écoulement divergent. En dehors de la couche limite, la pression $p(x)$ augmente avec la distance car le gradient de pression $\partial p/\partial x$ dans cette direction vérifie l'équation de Bernoulli (10.4) :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U \frac{\partial U}{\partial x} > 0. \quad (10.55)$$

Par ailleurs, comme, d'après l'équation (10.3), les variations de pression dans la direction transverse sont négligeables, on retrouve le même gradient de pression longitudinal à l'intérieur de la couche limite. Ainsi, dans les zones de faible vitesse près de la paroi, la dynamique des éléments de fluide résulte de deux influences opposées : d'une part, le gradient de pression $\partial p/\partial x$ positif freine leur déplacement et, d'autre part, l'apport de quantité de mouvement par diffusion visqueuse à partir des zones de plus grande vitesse les accélère. Si le gradient de vitesse $\partial U/\partial x$ est suffisamment grand en valeur absolue, on aura donc renversement local du sens de l'écoulement près de la paroi. Ce phénomène est appelé *décollement des couches limites* (voir Figs. 10.1b et 10.7). Dans le cas opposé d'un gradient de vitesse positif vers l'aval, le gradient de pression $\partial p/\partial x$ correspondant est négatif ; le fluide proche de la paroi est accéléré et la couche limite s'amincit, ce qui la stabilise.

10.5.2 Profils de vitesse autosimilaires – écoulements de la forme $U(x) = Cx^m$

À la section 6.6.2 (iv), nous avons vu que le potentiel complexe $f(z) = Cz^{m+1}$ décrit l'écoulement le long de deux demi-plans solides formant entre eux un angle $\pi/(m+1)$. Le long du plan $\theta = 0$, la vitesse se réduit à sa composante radiale :

$$v_r = C(m+1)r^m$$

où le rayon vecteur r est égal, dans le plan, à la distance x à l'arête de l'angle. Ainsi, en prenant une variation de vitesse $U(x) = Cx^m$ juste à l'extérieur de la couche limite, nous pouvons analyser le comportement de celle-ci pour l'écoulement autour de l'angle entre plans. Nous allons commencer par établir l'équation différentielle vérifiée par le champ de vitesse dans la couche limite ; ce sera, dans ce cas, l'analogie de l'équation de Blasius pour un écoulement extérieur uniforme.

Équation de Falkner-Skan

Suivons une démarche calquée sur celle utilisée dans le cas de l'écoulement uniforme (section 10.4.1) ; on trouve que la combinaison des variables sans dimension, x/x_0 (x = distance à l'arête du dièdre) et $y/\sqrt{\nu U(x_0)/x_0}$ (y = distance au plan), qui ne dépend pas de la distance locale x_0 à l'arête est, cette fois-ci :

$$\theta = y\sqrt{\frac{U(x)}{\nu x}} = y\sqrt{\frac{C x^{m-1}}{\nu}}. \quad (10.56)$$

Écrivons les différents termes de l'équation (10.2) à l'aide de la variable θ : nous trouvons ainsi l'équation différentielle vérifiée par le rapport $v_x(x, y)/U(x)$ de la composante de vitesse parallèle au plan à la vitesse extérieure $U(x)$:

$$m(1 - f^2(\theta)) + f''(\theta) = -\frac{m+1}{2} f'(\theta) \int_0^\theta f(\xi) d\xi. \quad (10.57)$$

Cette équation est appelée *équation de Falkner-Skan*. Elle redonne bien l'équation de Blasius (10.24) dans le cas particulier $m = 0$.

Profils de vitesse dans la couche limite

En résolvant numériquement l'équation de Falkner-Skan, on trouve des profils de vitesse du type représenté à la figure 10.6 : plus m est grand et positif, plus la couche limite s'amincit. Quand m décroît, l'épaisseur augmente et, pour une faible valeur critique négative $m_c = -0,0905$, le gradient de vitesse à la paroi s'annule. Aux valeurs de m encore plus faibles, le sens de l'écoulement s'inverse près de la paroi : on a le décollement de la couche limite déjà discuté à la section 10.5.1.

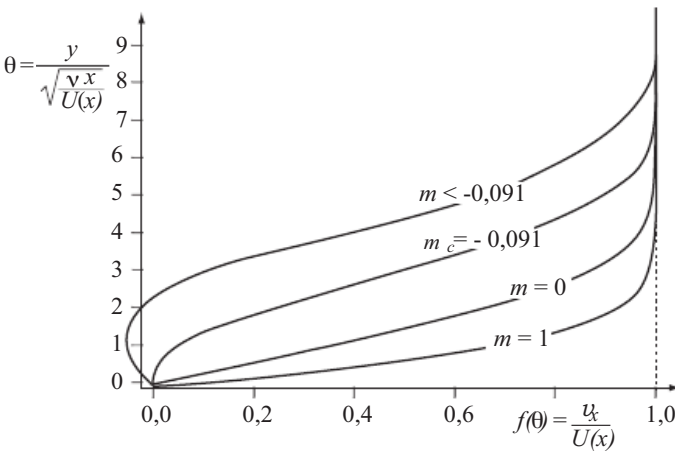


FIG. 10.6 – Forme des profils de vitesse à l'intérieur de la couche limite dans le cas d'écoulements extérieurs de la forme $U(x) = Cx^m$; $v_x(x, y)$ est la composante de vitesse parallèle à la paroi. La solution $m = 0$ est celle de la figure 10.4.

L'angle critique α_c , correspondant à l'apparition du renversement, vérifie :

$$\alpha_c = \frac{\pi}{m_c + 1} = 198^\circ.$$

On a donc alors une « cassure » entre les deux plans d'angle : $198^\circ - 180^\circ = 18^\circ$. La figure 10.7 correspond au type d'écoulement observé lorsque la cassure est supérieure à cette valeur.

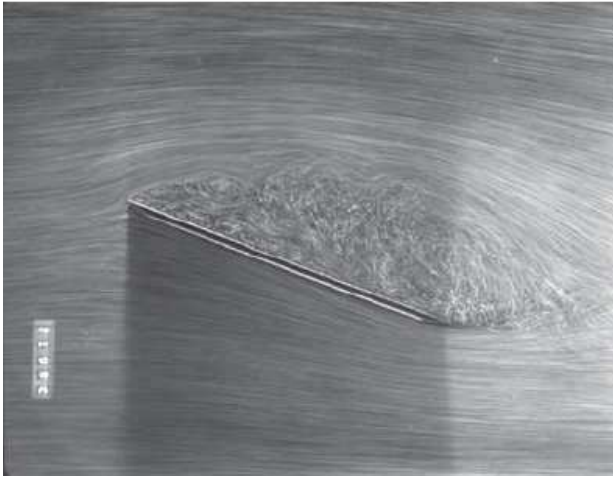


FIG. 10.7 – Décollement généralisé d'un écoulement au bord d'attaque d'une plaque inclinée. La figure correspond à un angle d'attaque un peu supérieur à la valeur de 18° au-delà de laquelle se produit le décollement de la couche limite (doc. ONERA).

Plus $|m|$ décroît (avec $m < 0$), plus $f(\theta)$ atteint lentement la valeur 1. Dans la limite où $m = -1$, la vitesse n'atteint plus d'asymptote. Physiquement, ce cas ($U \propto 1/x$) correspond à un écoulement divergent à partir d'une arête entre deux plans : il n'apparaît alors effectivement aucune couche limite. Pour $m > 0$, la couche limite est plus fine que pour $U = \text{cte}$. Pour $m = 1$ (écoulement vers un point de stagnation), son épaisseur est constante lorsque l'on s'éloigne du point d'incidence (Fig. 10.8a).

Remarque. On peut se demander pourquoi il n'y a pas de renversement du sens de l'écoulement dans la partie divergente de l'écoulement dans l'exemple de la figure 10.8a. Cela est dû à l'absence de paroi solide en amont de la plaque : il n'y a donc pas de zone de faible vitesse où l'énergie cinétique du fluide peut être facilement annulée par un gradient de pression opposé à l'écoulement. Si l'on place une deuxième plaque plane perpendiculaire à la paroi que rencontre le fluide (Fig. 10.8b), une zone de recirculation apparaît dans les angles formés par les plaques.

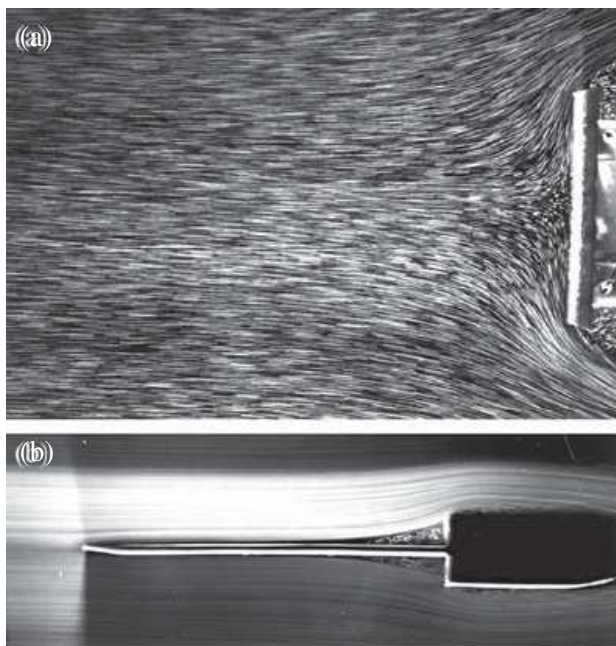


FIG. 10.8 – Écoulement vers un plan avec point de stagnation ; (a) l'absence de paroi solide empêche la formation d'une couche limite dans la partie divergente de l'écoulement ; (b) si une paroi est rajoutée, apparaissent deux zones tourbillonnaires provenant du décollement des couches limites de part et d'autre de cette paroi (docs. H. Werlé, ONERA).

Évaluation approximative de la condition de décollement des couches limites

Reprenons l'équation de Falkner-Skan (10.57) sous la forme :

$$m(1 - f'^2(\theta)) + f''(\theta) = -\frac{m+1}{2}f'(\theta) \int_0^\theta f(\xi) d\xi. \quad (10.58)$$

– Pour $\theta = 0$:

$$f(0) = 0. \quad (10.59)$$

D'où :

$$m + f''(0) = 0.$$

Donc, aux faibles valeurs de θ :

$$f(\theta) = \theta f'(0) - \frac{m}{2}\theta^2 + O(\theta^3). \quad (10.60)$$

– Pour θ élevé :

$$f(\theta) \rightarrow 1 \quad (10.61)$$

et, par suite :

$$\int_0^\theta f(\xi) d\xi \rightarrow \theta.$$

Donc, la relation (10.58) prend la forme limite :

$$f''(\theta) = -\frac{m+1}{2} \theta f'(\theta). \quad (10.62)$$

D'où :

$$f'(\theta) \approx C e^{-\frac{(m+1)\theta^2}{4}}. \quad (10.63)$$

$f'(\theta)$ tend donc vers 0 plus lentement pour $m < 0$ ($\partial U/\partial x < 0$) que lorsque $m > 0$ ($\partial U/\partial x > 0$). Cela concorde avec la valeur plus grande de l'épaisseur de la couche limite pour $m < 0$ que pour $m > 0$ (Fig. 10.6).

Nous pouvons maintenant raccorder la variation donnée par l'équation (10.63) pour $\theta \rightarrow \infty$ avec celle donnée par l'équation (10.60) pour θ proche de 0 :

– Pour $m > 0$, $f''(0)$ est négatif ; la courbure du profil de vitesse est donc dirigée vers la gauche sur la figure 10.6 et il n'a pas de point d'inflexion. Pour rejoindre la valeur asymptotique plus vite que dans le cas $U = \text{cte}$, $f'(0)$ doit donc être plus élevé que dans ce dernier cas pour une même vitesse à l'extérieur de la couche limite.

– Si m est négatif, $f'(0)$ est au contraire plus faible et la courbure du profil de vitesse est dirigée vers la droite près du point O . Pour $|m|$ assez grand, on a alors renversement du sens de l'écoulement près de la paroi ($f'(0) < 0$).

Estimons très approximativement la valeur critique m_c pour laquelle $f'(0) = 0$. On a alors pour θ petit :

$$f(\theta) = -m_c \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^3).$$

Par ailleurs, $f(\theta)$ doit ensuite augmenter vers la valeur limite 1 lorsque θ est de l'ordre de quelques unités. En prenant dans l'expression précédente $f = 1$ pour $\theta = 5$, on obtient l'ordre de grandeur $m_c \approx -1/12$ (la valeur exacte est $-0,0905$).

10.5.3 Couches limites d'épaisseur constante

Nous allons examiner plusieurs situations dans lesquelles la couche limite formée sur un plaque conserve une épaisseur constante. Une première manière d'obtenir ce résultat est de compenser l'épaississement de la couche limite, causée par la diffusion de la vorticité, par une composante de vitesse dirigée vers la paroi.

Écoulement vers un point de stagnation

On voit, dans l'exemple de la figure 10.8a, que ce type d'écoulement présente une telle composante. Dans le cas modèle d'un point de stagnation à deux dimensions de coordonnées $x = 0$ et $y = 0$, la fonction de courant en dehors de la couche limite est $\Psi = kxy$ et les composantes de vitesse correspondantes sont $v_x = kx$ et $v_y = -ky$. L'épaisseur $\delta(x)$ de la couche limite vérifie la relation :

$$\delta(x) \approx \sqrt{\frac{\nu x}{v_x(x)}} \approx \sqrt{\frac{\nu}{k}}. \quad (10.64)$$

δ ne dépend alors pas de la distance à l'axe : on a équilibre entre les influences opposées de la convection vers la paroi et de la diffusion à partir de cette dernière.

Écoulement avec aspiration de fluide

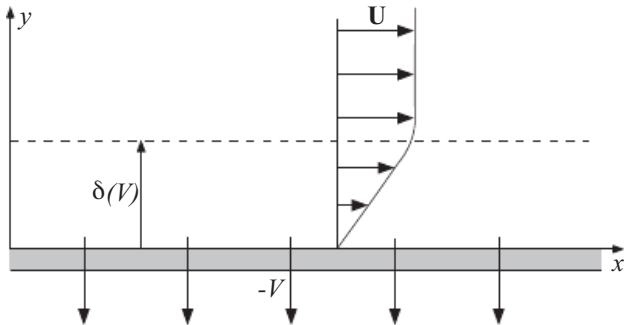


FIG. 10.9 – Couche limite en présence d'une aspiration de vitesse V uniforme sur la paroi.

Reprenons le problème de Blasius en supposant que l'on a une aspiration du fluide perpendiculairement à la plaque, avec une composante normale de vitesse à la paroi $v_y = -V$, indépendante de x (Fig. 10.9) ; cette technique a été envisagée pour limiter le décollement de la couche limite sur des voitures et des avions (section 10.6). Supposons qu'il existe une solution des équations de mouvement qui corresponde à une couche limite où l'épaisseur et le profil de vitesse sont indépendants de x . Dans ce cas, v_x et v_y dépendent seulement de y et la composante v_y normale à la paroi vérifie $\partial v_y / \partial y = 0$, par suite de la condition d'incompressibilité. On a donc $v_y = \text{cte} = -V$ dans tout le volume fluide. L'équation (10.12) de transport de la vorticité en régime stationnaire s'écrit :

$$-V \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \quad (10.65)$$



FIG. 10.10 – Profil de vitesse dans un diffuseur à pente élevée. On remarque l'existence d'une zone stagnante suivie d'une zone de recirculation (doc. H. Werlé, ONERA).

Démonstration. Dans le cas général, d'après les équations (10.14) et (10.15), le champ de vitesse $v_x(x, y)$ à l'intérieur de la couche limite vérifie :

$$\frac{v_x(x, y)}{U(x)} = f\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{\delta_L}\right). \quad (10.67)$$

x et y sont des coordonnées locales respectivement parallèle et perpendiculaire à la paroi, L est une longueur caractéristique de l'écoulement dans la direction parallèle à la paroi et δ_L est l'épaisseur de couche limite correspondante. Lorsque l'épaisseur δ_L est faible devant L , le profil de vitesse potentiel extérieur $U(x)$ est indépendant du nombre de Reynolds (l'influence de la zone de couche limite sur l'écoulement extérieur est négligeable). La condition $[\partial v_x / \partial y]_{y=0} = 0$, qui donne la position du point de décollement, devient donc :

$$f'(x/L, 0) = 0. \quad (10.68)$$

Ainsi, la valeur du rapport x/L , qui détermine la position du point de décollement, est indépendante du nombre de Reynolds, si celui-ci est suffisamment élevé pour qu'une couche limite ait pu s'établir en amont. ■

10.5.5 Conséquences pratiques du décollement des couches limites

Les zones d'écoulement présentant une recirculation sont généralement très instables. Le nombre de Reynolds minimal, pour lequel des instabilités peuvent être amplifiées, descend alors à quelques dizaines. Il apparaît ainsi, en arrière du point de décollement, une zone turbulente de grande largeur avec une dissipation d'énergie importante. La force de traînée (composante de la force de frottement parallèle à l'écoulement) augmente alors de façon considérable : on observe un tel effet pour les corps non profilés, comme dans l'exemple de la figure 10.1b. Au contraire, la force de traînée est peu élevée pour un corps aérodynamique sur lequel ne se produit pas de décollement de couche limite et qui induit un sillage de faible largeur (Fig. 10.1a).

Remarque. Soulignons la différence entre l'apparition de turbulence accompagnant le décollement de la couche limite, cause d'une dissipation d'énergie souvent très importante, et la transition vers la turbulence de la couche limite elle-même au niveau de parois solides qui augmente la dissipation... mais peut retarder l'apparition du décollement. Dans certains cas, on peut même observer le réattachement de couches limites turbulentes qui étaient décollées alors qu'elles étaient encore laminares. Nous étudierons ces effets au chapitre 12 consacré aux écoulements turbulents (sections 12.5.5 et 12.5.6).

10.6 Aérodynamique et couches limites

L'aérodynamique des véhicules terrestres et aériens est un vaste champ d'applications de la notion de couches limites laminares et turbulentes : même si d'autres facteurs jouent un rôle important, le contrôle de la couche limite représentera en particulier un enjeu économique considérable pour l'amélioration des performances et de la consommation d'énergie de ces véhicules. Ce sujet très large déborde du cadre d'un ouvrage généraliste : nous nous limiterons donc à une présentation schématique en commençant par l'aile d'avion qui, en première approximation, peut être considéré comme un objet allongé avec une géométrie bidimensionnelle. En revanche, pour les automobiles, les dimensions dans toutes les directions sont du même ordre de grandeur et nous verrons que les effets 3D sont alors essentiels.

10.6.1 Contrôle de couche limite sur l'aile d'avion

Phénomène de décrochage

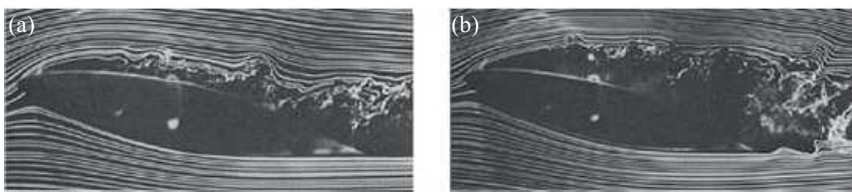


FIG. 10.11 – Visualisation de l'écoulement autour d'un profil d'aile d'avion à deux angles d'incidence avec et sans décollement de la couche limite ; (a) en dessous de l'angle de décrochage, (b) au-dessus (docs. Illustrated Experiments in Fluid Mechanics, NCFMF, MIT Press).

Nous avons discuté plus haut dans les sections 6.6.3 et 7.5.2 la portance des ailes d'avion ; nous avons montré en particulier qu'elle correspondait à la force de Magnus due à la circulation de la vitesse autour de l'aile. Pour assurer sa sustentation, la force de portance F_p doit équilibrer le poids de l'avion. Elle est proportionnelle au carré de la vitesse U et augmente linéairement avec l'incidence α aux faibles valeurs de α (Éq. 6.106). Pour diminuer les longueurs d'atterrissage et de décollage d'un avion, il faut *réduire* la vitesse de celui-ci

pendant les phases de vol correspondantes et, par suite, augmenter l'angle d'incidence α de l'aile ; le produit $U^2 C_z$, où C_z est le coefficient de portance défini par l'équation (7.75a), doit, en effet, rester constant.

Aux valeurs de α modérées, les lignes de courant suivent le profil de l'aile (Fig. 10.11a) : la couche limite reste attachée. Si on augmente α au-delà de l'angle critique α_c , on a décollement de la couche limite sur la face supérieure de l'aile et apparition d'un sillage turbulent de grande dimension (Fig. 10.11b). La pression sur la face supérieure de l'aile augmente, la portance diminue rapidement et la traînée croît, comme on le voit sur la figure 10.12. Cela mène à une chute de l'avion souvent difficile à contrôler.

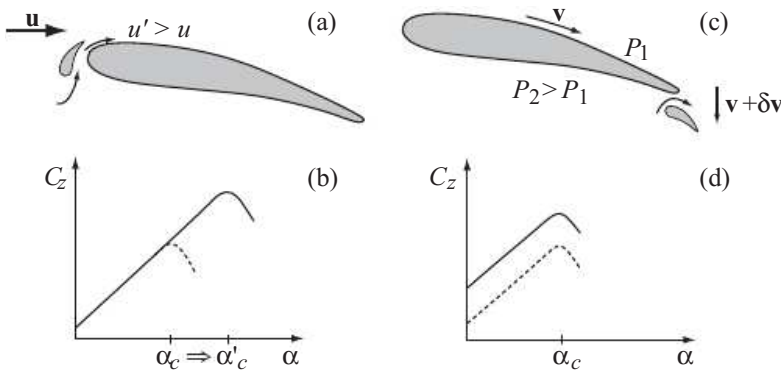


FIG. 10.12 – (a) Voilet de bord d'attaque sur une aile d'avion. (b) Comparaison des variations du coefficient de portance C_z avec l'angle d'incidence, obtenues avec (ligne continue) et sans (tirets) mise en place d'un voilet de bord d'attaque. (c) Voilet de bord de fuite sur une aile d'avion, permettant d'augmenter fortement la circulation autour d'une aile à angle d'incidence et à vitesse donnés. (d) Comparaison des variations du coefficient de portance C_z avec l'angle d'incidence α , avec (ligne continue) et sans (tirets) voilet de bord de fuite.

Contrôle du décollement de la couche limite des ailes d'avion

Il faut donc augmenter la valeur de α correspondant à l'apparition de ce phénomène, dit de *décrochage*, pour pouvoir obtenir des valeurs de portance suffisante lors du vol des avions à basse vitesse : on obtient ainsi des vitesses de décollage et d'atterrissage raisonnables.

Deux stratégies complémentaires couramment utilisées dans la pratique consistent à :

- augmenter la valeur de l'angle d'incidence critique α_c à l'aide de *volets de bord d'attaque* ;
- augmenter le coefficient de portance C_z pour une valeur de α donnée à l'aide de *volets de bord de fuite*.

– **Un volet de bord d'attaque**, tel que celui représenté sur la figure 10.12a, permet d'augmenter la valeur de l'angle critique α_c dans la variation du coefficient C_z avec α (Fig. 10.12b). Grâce à ce volet, de l'air provenant de l'intrados est injecté tangentiellement sur l'extrados : il *réactive* ainsi la couche limite d'extrados en augmentant la vitesse du fluide près de la paroi. À grande incidence, l'effet du gradient inverse de pression se trouve donc diminué et l'angle d'incidence critique α_c est augmenté.

Un volet de bord de fuite (Fig. 10.12 c) permet, lorsqu'il est déployé, d'augmenter la circulation autour du profil d'aile à une vitesse donnée ; il en résulte une translation de la courbe $C_z(\alpha)$ vers le haut (Fig. 10.12d). Sur les gros avions de transport, ces volets peuvent eux-mêmes être suivis d'autres volets (jusqu'à trois étages successifs sur le Boeing 747 et l'Airbus A340) ; on a ainsi une série de plusieurs volets sortis les uns derrière les autres, le volet le plus en arrière étant presque vertical. Ces systèmes augmentent considérablement la traînée de l'aile et ne sont donc utilisés qu'au décollage et à l'atterrissage, lorsque la vitesse est trop faible pour que la portance soit suffisante en configuration normale. Le principe de fonctionnement de ces volets combine deux effets :

- leur détachement par rapport à la voilure principale permet de *réactiver* la couche limite à l'extrados, en induisant un écoulement de l'intrados vers l'extrados (analogue à celui que nous avons rencontré précédemment pour les volets avant). On évite ainsi d'avoir un décollement de la couche limite sur les volets, en dépit de leur fort angle d'incidence par rapport à l'écoulement principal ;
- ils induisent une forte déviation $\delta \mathbf{v}$, vers le bas, de la vitesse de l'écoulement fluide sur la partie arrière de l'aile et dans le sillage : il en résulte une forte augmentation de la portance et de la circulation.

- Quelques autres méthodes de contrôle du décollement des couches limites

De nombreuses autres méthodes ont été utilisées ou étudiées pour retarder le décollement des couches limites. Certaines sont des variantes des précédentes : on peut par exemple, au lieu d'utiliser des volets de bord d'attaque, déformer l'aile elle-même au voisinage de ce bord d'attaque pour arriver à un résultat comparable. Citons aussi la mise en place de petites lamelles perpendiculairement aux ailes : celles-elles génèrent des tourbillons parallèles à l'écoulement moyen qui apportent un peu d'air en écoulement rapide vers la paroi. Cette technique a été utilisée en pratique pour retarder le décollement, mais provoque une augmentation de la traînée.

10.6.2 Aérodynamique automobile

Spécificités de l'aérodynamique automobile

Dans les applications pratiques, on cherche prioritairement à minimiser la force de traînée. Cette-dernière est due principalement à la variation de pression entre l'amont et l'aval, contrairement à l'avion pour lequel c'est le frottement qui domine. Contrairement aussi au cas de l'avion, la force de portance ne doit plus compenser le poids du véhicule : elle doit être dirigée vers le bas pour assurer un bon contact des pneus avec la chaussée et améliorer la tenue de route, mais ne pas être trop élevée pour limiter les frottements et l'usure des pneus.

La force de traînée F_d est caractérisée par un coefficient C_x (voir section 9.4.2) dont la valeur est passé d'une valeur supérieure à 0,5 pour les voitures anciennes à une valeur inférieure à 0,3 pour les véhicules actuels. La diminution de ce C_x est un des enjeux majeurs des constructeurs automobiles (en raison de son impact sur la consommation) : ils doivent cependant tenir compte de l'habitabilité du véhicule qui impose souvent des contraintes opposées.

Remarque. Le coefficient C_x est défini par $C_x = |F_d|/(\rho U^2 A/2)$ où A est l'aire de la projection du contour du véhicule sur un plan perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{U}$. Cette définition se déduit de celle du coefficient de traînée C_d (Éq. 9.20), en remplaçant le carré de la longueur caractéristique L par l'aire A .

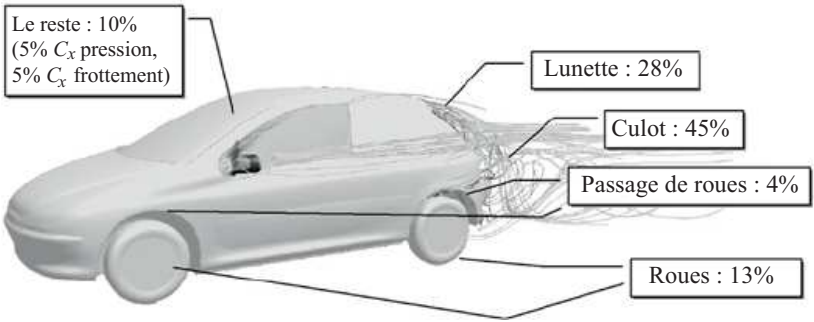


FIG. 10.13 – Contribution respective des différents éléments d'une automobile à la traînée (doc. J-L. Aider, PSA Peugeot-Citroën).

La Figure 10.13 montre la contribution relative à la traînée des différentes parties de la carrosserie : si la partie arrière du véhicule joue un rôle essentiel, la contribution des éléments externes, comme les roues, les rétroviseurs ou les poignées de portes, n'est pas négligeable. Cette traînée résulte de la combinaison de forces de friction (visqueuses ou, plus souvent, turbulentes) et de pression : ces dernières sont les plus importantes.

Contrairement à une aile d'avion, une automobile a une largeur et une hauteur du même ordre que sa longueur. L'écoulement de l'air autour de

la carrosserie a donc un caractère tridimensionnel très marqué, influençant fortement les forces aérodynamiques sur le véhicule.

Nous allons concentrer la discussion sur la partie arrière du véhicule qui, d'après la figure 10.13, contribue à près des trois quarts de la force de traînée. En effet, c'est là que sont localisés les décollements de couche limite : ces derniers provoquent la formation de zones de recirculation et de tourbillons, sources de dissipation d'énergie.

Champ de vitesse d'écoulement en arrière d'une automobile – corps d'Ahmed

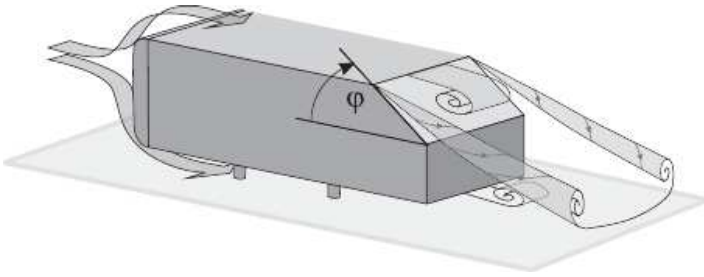


FIG. 10.14 – Schéma de l'écoulement autour d'un corps 3D non profilé (corps d'Ahmed) modélisant de manière simplifiée l'écoulement autour d'une automobile. Les structures qui contribuent à la dissipation en aval sont la circulation de la vitesse transverse à l'écoulement principal au niveau de la lunette arrière et du culot inférieur, ainsi que les tourbillons longitudinaux émis à partir des deux coins arrière du toit (d'après A. Brunn et al.).

Pour modéliser la structure de cet écoulement, les aérodynamiciens ont introduit un modèle standard simple : le corps d'Ahmed (Fig. 10.14). Ce dernier permet de reproduire expérimentalement ou numériquement, de manière assez réaliste, la structure de l'écoulement à l'arrière du véhicule et de faire varier commodément des paramètres comme l'angle de la lunette arrière. Le champ de vitesse à l'arrière du corps associe deux types de structures :

- une **paire de vortex axiaux contrarotatifs** parallèles à la vitesse moyenne et émis au niveau des bords latéraux arrière du profil modèle, réminiscente des tourbillons de bout d'aile des avions (Fig. 7.27c) ou de ceux produits derrière une sphère (Fig. 2.11 CC). La Figure 10.15 CC montre une simulation numérique de l'écoulement derrière un corps d'Ahmed (angle 25°). L'importance de ces tourbillons témoigne du caractère fortement *tridimensionnel* de l'écoulement ;

- Des **écoulements de recirculation d'axe perpendiculaire au plan de symétrie du corps**, situés dans la partie centrale de l'arrière de véhicule autour de ce plan. Ces écoulements sont similaires à ceux derrière un obstacle *bidimensionnel* (rampe montante ou marche descendante) et dépendent fortement de l'angle d'inclinaison.

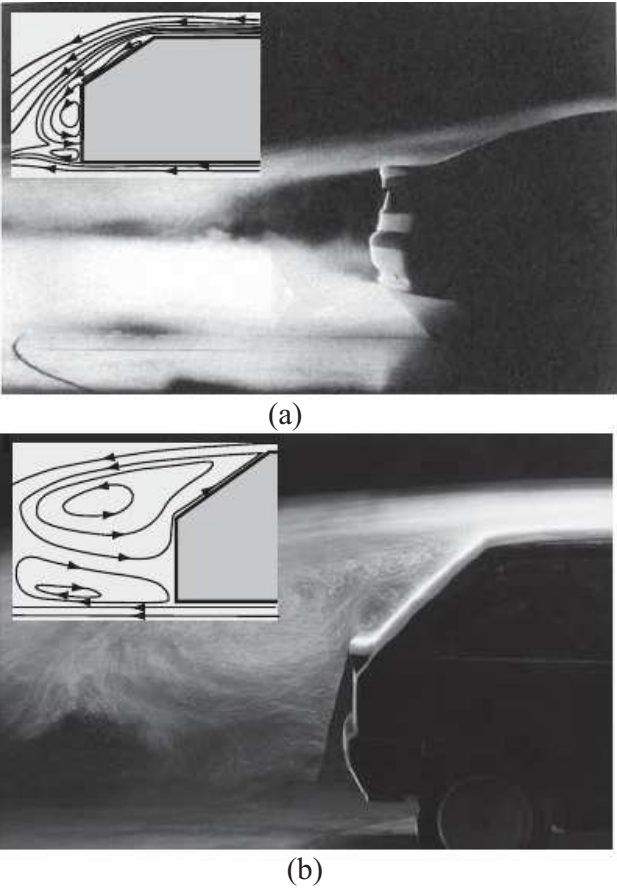


FIG. 10.16 – Visualisations en soufflerie dans le plan de symétrie vertical des sillages d'un véhicule à hayon arrière (a) faiblement incliné (Renault Laguna, doc. Renault) et (b) plus fortement incliné (Citroën AX, doc. PSA Peugeot-Citroën). Les véhicules sont immobiles et le courant fluide est dirigé de la droite vers la gauche. On remarque la forte différence entre les largeurs des zones lumineuses marquant la recirculation transverse dans les cas (a) et (b). Inserts : schéma des écoulements de recirculation dans le plan de symétrie de deux corps d'A Ahmed d'angles d'inclinaison comparables dans chaque cas : (a) $\varphi = 25^\circ$, (b) $\varphi = 35^\circ$. Comme dans les visualisations, la taille des zones de recirculation est beaucoup plus importante dans le cas (b) où la couche limite décolle juste en arrière du toit.

La figure 10.16 montre l'influence de cet angle à travers des visualisations en soufflerie et des simulations numériques de l'écoulement dans le plan de symétrie vertical, respectivement derrière un véhicule réel et un corps d'A Ahmed.

- Pour les angles d'inclinaison faibles de la lunette arrière (cas (a)), la zone de recirculation est nulle ou très réduite au niveau de la lunette arrière : la couche limite est soit attachée, soit faiblement décollée. En revanche, on a une forte zone de recirculation derrière la partie inférieure verticale (ou culot) et une petite recirculation de sens inverse sous la première zone.

- Pour les angles d'inclinaison élevés, la couche limite décolle dès le haut de la lunette arrière et il apparaît une grande zone de recirculation, recouvrant également une partie du culot avec une recirculation plus faible plus bas. La transition entre les deux régimes se produit vers 25° : cette valeur est du même ordre que l'angle limite ($\approx 18^\circ$) qui correspond à un maximum de traînée et au-delà duquel on a décollement de la couche limite au-dessus d'un coin (section 10.5.2).

Remarque. On note aussi, dans le véhicule de la figure 10.16a une légère remontée du profil de la carrosserie à la jonction entre la lunette arrière et le culot, qui crée une zone de haute pression à cet endroit : il en résulte une composante de la force dirigée vers le bas (augmentant l'adhérence) et vers l'avant (réduisant la traînée). La hauteur de cette remontée ne doit pas être trop importante pour ne pas créer une nouvelle zone de turbulence en aval qui, elle, augmenterait la traînée.

Les deux types de recirculation (longitudinale et transverse) contribuent à la force de traînée, mais d'une manière différente suivant l'angle φ . Ainsi, aux faibles valeurs de φ , comme sur la figure 10.16a, la contribution de la recirculation transverse est réduite mais l'effet des tourbillons axiaux est fortement renforcé. Globalement, la variation résultante de la traînée avec l'angle est non monotone (on observe souvent des valeurs élevées autour de $\varphi = 30^\circ$) ; dans certains cas, d'ailleurs, les valeurs $\varphi < 10^\circ$ ou $\varphi > 35^\circ$ (fast back) donnent même des valeurs acceptables et comparables de la traînée.

Remarque. Tout en cherchant à réduire la traînée, il faut éviter qu'à grande vitesse la portance négative, indispensable à une bonne tenue de route, diminue trop ou, même, s'annule. En sens contraire, les véhicules d'une marque sportive prestigieuse étaient connus pour avoir une mauvaise tenue de route à basse vitesse mais excellente à vitesse élevée grâce à une portance négative augmentée.

10.6.3 Aérodynamique d'autres véhicules terrestres

Forces de traînée sur un train à grande vitesse

Pour une voiture, les forces de frottement au niveau du toit ou des côtés sont faibles devant les forces de pression : ce n'est plus le cas pour un camion ... ou pour un train, particulièrement aux grandes vitesses des TGV où les forces aérodynamiques sont dominantes. Contrairement au cas d'une voiture, les forces de pression à l'avant et à l'arrière ne représentent plus que 10 % de la traînée aérodynamique, alors que 30 % de cette dernière est la friction qui provient des couches limites turbulentes sur le côté et sur le toit. Mais une contribution très importante vient des bogies (40–50 %) ainsi que des pantographes (10–20 %) qui génèrent une turbulence importante sur le toit. L'espace entre les wagons ou entre deux rames où apparaissent des écoulements de recirculation sources de dissipation joue aussi un rôle.

Enfin, pour l'aérodynamique des TGV, une contrainte supplémentaire vient du fait que le train doit pouvoir circuler dans un sens ou dans l'autre : l'avant et l'arrière d'un TGV ont donc la même géométrie !

Remarque. Même si sa contribution à la traînée est faible, l'écoulement à l'arrière du TGV présente des caractéristiques intéressantes. L'écoulement y est, en particulier, fortement turbulent car la couche limite du toit se poursuit sur l'arrière et l'on n'a pas d'apparition de recirculation à l'échelle de l'ensemble de la hauteur. Comme pour une voiture, on a apparition de deux tourbillons longitudinaux.

Camion semi-remorque. Une région de recirculation turbulente apparaît souvent dans l'intervalle entre le camion-tracteur et la remorque, en particulier s'ils sont de hauteurs différentes. Il peut en résulter une importante traînée supplémentaire. La mise en place d'un profilage au-dessus du camion tracteur et une variation progressive de la hauteur réduisent ces perturbations en assurant une meilleure continuité du profil.

10.6.4 Contrôle actif et réactif de la traînée ou de la portance

Nous avons vu que l'utilisation d'un carénage au-dessus d'un camion ou l'amélioration de la forme d'un rétroviseur ou d'une poignée de porte peuvent réduire la traînée : il s'agit alors d'un *contrôle passif* car ces modifications sont faites une fois pour toutes, sans apport d'énergie.

Dans le *contrôle actif*, on agit directement sur l'écoulement en fonction des caractéristiques instantanées de ce dernier et/ou de son environnement. Comme c'est le pilote qui dose cette action en fonction des indications de son tableau de bord et des caractéristiques de l'environnement, on a affaire à un contrôle en *boucle ouverte*. Dans une étape ultérieure, l'action à effectuer sera contrôlée par un ordinateur connecté à des capteurs : on aura alors un contrôle en *boucle fermée* ou *contrôle réactif*.

Un contrôle actif possible du décollement des couches limites consiste à aspirer l'air de faible vitesse proche de la paroi ou au contraire à l'accélérer par des jets tangentiels. Cela permet d'éviter que le gradient de pression adverse, dû à la décroissance de la vitesse de l'écoulement extérieur, ne parvienne à inverser le sens de l'écoulement du fluide lent : on peut ainsi retarder le décollement de la couche limite, même à de forts angles d'incidence. L'aspiration et l'injection de l'air requièrent cependant une puissance supplémentaire, de telle sorte que l'aspiration ne sera mise en route qu'en cas de risque de décrochage.

Remarque. Cette méthode est peu utilisée en pratique. Elle a cependant trouvé une application à la navigation à voile : la *turbovoile* développée par Malavard et Cousteau pour leur catamaran *Moulin à Vent* est, en fait, une aile très épaisse placée verticalement. On l'oriente par rapport au vent comme une voile habituelle et le décollement de la couche limite est empêché en aspirant l'air par une fente située dans la zone où le décollement a lieu. On parvient ainsi à générer des circulations de la vitesse autour de la « voile » (et donc des forces de portance horizontales) très importantes.

Une autre application possible du contrôle actif est la réduction de la traînée associée à l'émission de tourbillons de Bénard-Von Kármán derrière un cylindre perpendiculaire à un écoulement (section 11.1.2). On peut, par exemple, contrôler cette émission en imposant des rotations de sens alterné du cylindre autour de son axe. La variation de la traînée dépend du rapport de la fréquence de rotation à celle de l'émission des tourbillons : aux valeurs élevées du rapport, la traînée diminue ainsi que la longueur de l'allée de tourbillons en aval de l'obstacle.

Remarque. – L'utilisation des volets de bord de fuite représente aussi un exemple de *contrôle actif en boucle ouverte* de la portance : le pilote sort plus ou moins ces volets suivant la vitesse de l'avion et la proximité de l'aéroport.

– Le *contrôle réactif en boucle fermée*, lui, fait l'objet de recherches amont sans être encore appliqué industriellement : on a ainsi pu démontrer une réduction de traînée en plaçant en fin de pavillon (toit) d'un corps d'Achmed des générateurs de vortex motorisés contrôlés par un capteur.

10.7 Sillage et jet laminaire

10.7.1 Équation de mouvement du sillage

Caractéristiques qualitatives

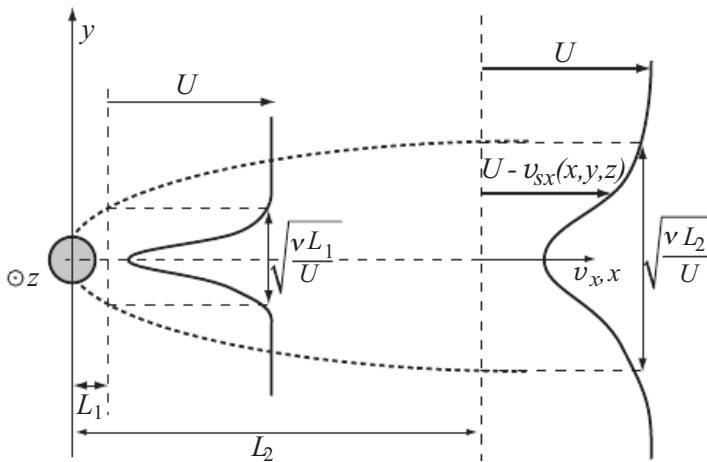


FIG. 10.17 – Sillage en aval d'un corps solide placé dans un écoulement de vitesse $\mathbf{U}$ à l'infini. Les courbes montrent les profils transverses de la vitesse v_x à deux distances L_1 et L_2 du corps.

On étudie l'écoulement derrière un solide immobile de taille caractéristique a comparable dans les trois directions placé dans un fluide de vitesse uniforme $\mathbf{U}$ en amont (Fig. 10.17). L'écoulement est supposé laminaire et stationnaire dans tout l'espace : cela impose d'avoir un nombre de Reynolds

$Re = Ua/\nu$ assez faible pour éviter l'apparition d'instabilités de sillage (moins de quelques dizaines pour une sphère par exemple) ; celles ci seront étudiées dans la section 12.4. Cependant, même si Re est faible devant 1, cela n'empêche pas, comme on l'a vu, d'avoir des termes convectifs dominants si on est à une distance L suffisamment grande du corps ($L \gg a/Re$).

On analyse la perturbation apportée à l'écoulement moyen $\mathbf{U}$ à une distance suffisamment grande en aval du corps par rapport à sa taille caractéristique pour que :

- la forme exacte du solide n'intervienne pas ;
- l'équation d'Oseen (9.74a) soit valable ;
- le terme de convection de cette équation soit dominant.

Nous utilisons maintenant un raisonnement similaire à celui de la section 10.2 (Fig. 10.2). Le passage sur le corps d'un volume de fluide y crée, par suite de la condition de vitesse nulle sur la paroi, un défaut de vitesse par rapport à la valeur U (Fig. 10.17) : celui-ci, ainsi que la vorticité associée, est initialement localisé sur une distance transverse de l'ordre de la taille du corps. Le temps mis par ce volume de fluide, pour arriver jusqu'à une distance L en aval de l'obstacle, est $\Delta t \approx L/U$. Pendant ce temps, la vorticité (et, donc, les gradients de vitesse) ont diffusé sur une distance transverse à l'écoulement de l'ordre de :

$$e \approx \sqrt{\nu \Delta t} \approx \sqrt{\frac{\nu L}{U}}. \quad (10.69)$$

Ils sont donc concentrés sur un *sillage* d'épaisseur e qui augmente comme $\sqrt{L}$ avec la distance (Fig. 10.17), donc plus lentement que la distance L au solide. Comme nous l'avons déjà mentionné au début de ce chapitre, ce type de profil est typique des écoulements où le transport de quantité de mouvement et de vorticité par convection s'opère dans une seule direction (le transport dans la direction perpendiculaire étant uniquement diffusif).

  partir du corps, l'épaisseur e du sillage à la distance L est vue sous un angle :

$$\alpha \approx \frac{e}{L} \approx \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \sqrt{\frac{\nu}{Ua}} \sqrt{\frac{a}{L}} = \frac{1}{\sqrt{Re_a}} \sqrt{\frac{a}{L}}. \quad (10.70)$$

Le nombre de Reynolds Re_a , obtenu en prenant la taille a du solide comme échelle de longueur. Ainsi, même si le nombre de Reynolds n'est pas très grand, l'angle α devient petit ($\alpha \ll 1$) lorsque la distance L vérifie :

$$\frac{L}{a} \gg \frac{1}{Re_a}. \quad (10.71)$$

Les gradients de vitesse et la vorticité sont concentrés dans une faible partie de l'espace. Par rapport au cas d'une couche limite près d'une plaque, on n'a pas une condition de vitesse nulle sur l'axe mais un défaut de vitesse $\mathbf{v}_s = \mathbf{U} - \mathbf{v}$ dont la valeur diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne du corps.

Équation de mouvement dans le sillage

Compte tenu des hypothèses faites, la composante suivant Ox de l'équation de mouvement peut être mise sous la forme :

$$U \frac{\partial v_{sx}}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_{sx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_{sx}}{\partial z^2} \right). \quad (10.72)$$

Cette équation a la forme de l'équation de diffusion thermique à deux dimensions (où la variable temps est remplacée par x/U).

Démonstration. La condition (10.71) est également la condition de validité discutée à la section 9.5.1 pour l'équation d'Oseen (9.74), qui peut être réécrite pour $\mathbf{v}_s = \mathbf{U} - \mathbf{v}$ sous la forme :

$$-\rho (\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_s = -\mathbf{grad} p - \eta \Delta \mathbf{v}_s. \quad (10.73)$$

On utilise $\mathbf{v}_s$ dans ces démonstrations plutôt que $\mathbf{v}$ car $\mathbf{v}_s$ s'annule à grande distance alors que $\mathbf{v}$ tend vers la valeur constante $\mathbf{U}$. Compte tenu de la forte différence entre les échelles de longueur e suivant y et z et L suivant x , on trouve, en procédant comme nous l'avons fait pour les équations des couches limites :

$$v_{sy} \approx v_{sz} \approx v_{sx} e / L \ll v_{sx}. \quad (10.74)$$

En prenant les différentes composantes de l'équation (10.73) suivant les directions x , y et z , on trouve que les termes qui déterminent $\partial p / \partial y$ et $\partial p / \partial z$ sont d'un ordre de grandeur en e/L inférieurs à ceux qui déterminent $\partial p / \partial x$. On peut donc négliger les variations de pression dans les directions perpendiculaires à la vitesse du fluide, dans le sillage comme en dehors. Par ailleurs, comme on néglige la pesanteur, la pression en dehors du sillage (là où la vitesse du fluide est très faible) est uniforme, dès que l'on est suffisamment loin du corps en mouvement. On peut donc négliger les variations de pression dans la direction parallèle à l'écoulement extérieur. En combinant les deux résultats précédents, on conclut que la pression à l'intérieur du sillage peut être supposée uniforme : c'était d'ailleurs déjà le cas pour les couches limites laminares. ■

Par ailleurs :

$$\frac{\partial^2 v_{sx}}{\partial x^2} \approx \frac{e^2}{L^2} \frac{\partial^2 v_{sx}}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 v_{sx}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v_{sx}}{\partial z^2}. \quad (10.75)$$

En utilisant ces résultats, la composante suivant Ox de la relation (10.73) donne la relation (10.72).

Sillage derrière un corps dont toutes les dimensions sont finies

En utilisant l'équation (10.72), nous allons montrer que :

$$v_{sx} = U - v_x = \frac{QU}{4\pi\nu x} e^{-\frac{Ur^2}{4\nu x}}, \quad (10.76)$$

où :

$$Q = \iint v_{sx} \, dy \, dz \quad (10.77)$$

est le défaut de débit du fluide à travers le sillage et $r^2 = (y^2 + z^2)$ (nous montrons ci-dessous que ce défaut de débit est indépendant de la distance x). Le défaut de vitesse sur l'axe décroît donc en $1/x$ avec la distance. Nous montrerons par ailleurs à la section 10.7.2 que Q est reliée à la force de traînée sur le corps.

Démonstration. On trouve comme solution de révolution de l'équation (10.72) satisfaisant la condition $v_{sx} = 0$ à l'infini :

$$v_{sx} = \frac{CU}{\pi\nu x} e^{-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}} = \frac{CU}{\pi\nu x} e^{-\frac{Ur^2}{4\nu x}} \quad (10.78)$$

où C est une constante d'intégration. Le débit Q à travers le sillage est donc donné par :

$$Q(x) = \int 2\pi r v_{sx}(x, r) dr \approx 4C \int_0^\infty e^{-\theta^2} d(\theta^2) \quad \text{avec} \quad \theta^2 = Ur^2/(4\nu x)$$

d'où :

$$Q(x) = 4C.$$

On retrouve donc bien le fait que Q est constant avec x , ainsi que l'équation (10.76), en remplaçant C par sa valeur dans l'équation (10.78). ■

Remarque. Plaçons-nous dans le référentiel qui se déplace à la vitesse $\mathbf{U}$ et où le fluide est immobile à l'infini et l'objet a une vitesse $-\mathbf{U}$: dans ce cas, la vitesse dans le sillage est $-v_{sx}$ et le débit Q est simplement l'opposé du débit de fluide localisé dans le sillage. Ce courant est compensé par un écoulement dans la direction de l'objet distribué dans tout l'espace.

On note dans l'équation (10.76) que, sur les paraboloïdes d'équation $Ur^2/4\nu x = \text{cte}$, le défaut de vitesse v_{sx} est une fraction constante de sa valeur maximale $QU/4\pi\nu x$ sur l'axe.

Remarque. Ces paraboloïdes sont en même temps des tubes de courant dans le référentiel immobile par rapport au fluide à l'infini. D'après l'équation (10.74), le défaut de débit $Q(r_0(x))$ à travers une section de rayon $r_0(x)$ de ces surfaces vérifie en effet :

$$\begin{aligned} \int_0^{r_0(x)} 2\pi v_{sx} r dr &= \int_0^{r_0(x)} \frac{QU}{2\nu x} e^{-\frac{Ur^2}{4\nu x}} r dr = \int_0^{r_0(x)} Q e^{-\frac{Ur^2}{4\nu x}} d\left(\frac{Ur^2}{4\nu x}\right) \\ &= Q \left(1 - e^{-\frac{Ur_0^2(x)}{4\nu x}}\right). \end{aligned}$$

Ce flux est donc bien indépendant de x pour un paraboloïde donné ($r_0^2(x)/x = \text{cte}$).

Sillage derrière un cylindre de longueur infinie

Pour un écoulement bidimensionnel derrière un cylindre de longueur infinie suivant Oz , on conserve la variation en $\sqrt{x}$ de la largeur du sillage avec la distance x au cylindre parallèlement à l'écoulement. En supprimant les dérivées par rapport à z dans l'équation d'Oseen et en intégrant, on trouve un défaut de vitesse :

$$v_{sx} = U - v_x = Q \sqrt{\frac{U}{4\pi\nu x}} e^{-\frac{Uy^2}{4\nu x}}. \quad (10.79)$$

Q représente, là encore, le flux en volume à l'intérieur du sillage (par unité de longueur suivant Oz) ; il est indépendant de x comme dans le cas précédent. En revanche, la décroissance du maximum de vitesse avec la distance est nettement plus lente, en $1/\sqrt{L}$ au lieu de $1/L$.

10.7.2 Force de traînée sur un corps – relation avec la vitesse dans le sillage

Dans la discussion précédente (section 10.7.1), le débit Q de fluide à travers le sillage était une inconnue. Nous montrerons plus bas que, pour un corps placé dans un écoulement de vitesse uniforme $\mathbf{U}$, Q est relié à la force de traînée $\mathbf{F}$ sur le corps par :

$$\mathbf{F} = \iint \rho \mathbf{U} (U - v_x) dy dz = \rho \mathbf{U} Q. \quad (10.80)$$

Cette expression n'est valable cependant sous cette forme que pour des corps ayant la symétrie d'une sphère ou d'un polyèdre régulier, pour lesquels la force $\mathbf{F}$ est toujours parallèle à la vitesse $\mathbf{U}$.

Ainsi, dans le cas particulier d'une sphère et d'un nombre de Reynolds $Re = UR/\nu \ll 1$:

$$\mathbf{F} = 6\pi \eta R \mathbf{U}$$

d'où

$$Q = 6\pi \nu R. \quad (10.81)$$

D'une façon inattendue, le défaut de débit Q dans le sillage ne dépend pas de la vitesse U : une augmentation de U entraîne une augmentation de v_{sx} mais cette dernière est exactement compensée par la diminution correspondante de la largeur e du sillage.

Donc (Eq. 10.76), la composante v_{sx} du défaut de vitesse dans le sillage vérifie (toujours pour une sphère à $Re \ll 1$) :

$$v_{sx} = U - v_x = \frac{3RU}{2x} e^{-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}} \quad (10.82)$$

où x représente la distance au centre de la sphère en aval de celle-ci.

Remarque. Comme nous l'avons noté plus haut, l'utilisation de l'équation d'Oseen n'est pas contradictoire avec l'hypothèse $Re \ll 1$ faite pour établir l'équation (10.81), mais l'équation (10.82) n'est valable que si $x/R \gg 1/Re$.

Le problème d'une sphère de vitesse $\mathbf{U}$ en mouvement dans un fluide au repos à l'infini est équivalent, à une translation près, au cas précédent d'une sphère immobile dans un fluide de vitesse $-\mathbf{U}$. Dans ce cas, l'expression (10.82) représente directement la composante v_x suivant Ox de la vitesse du fluide créée par le déplacement de la sphère. D'autre part, la force de traînée est alors de direction et de sens opposés à la vitesse $\mathbf{U}$.

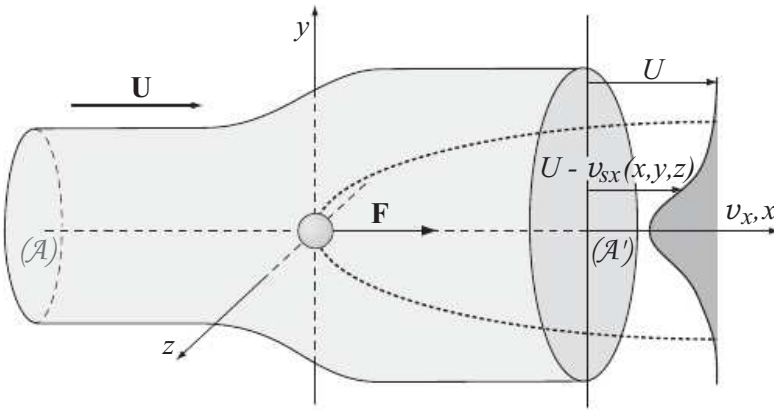


FIG. 10.18 – Évaluation de la force de traînée sur un corps de révolution au repos à partir du débit de fluide dans le sillage. Loin du corps, le fluide est en mouvement à la vitesse $\mathbf{U}$.

Démonstration de l'équation (10.80). Plaçons-nous dans le cas d'une sphère immobile dans un écoulement uniforme où le défaut de vitesse v_{sx} vérifie l'équation (10.76). D'après cette dernière, v_{sx} varie surtout jusqu'à des distances de l'axe de l'ordre de $\sqrt{\nu x/U}$ et décroît exponentiellement avec r^2 ensuite. En dehors du sillage et, en particulier, en amont du corps, la perturbation par rapport à la vitesse moyenne U diminue en $1/L^2$ avec la distance L au corps (au lieu de $1/L$ dans le sillage). Loin du corps, on a, en effet, un écoulement approximativement radial de vitesse de l'ordre de Q/L^2 dirigée vers l'extérieur, qui compense le débit volumique Q dans le sillage (on trouve l'allure du champ de vitesse dans la Fig. 9.16). Écrivons la conservation du débit total à travers les sections $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ d'un même tube de courant, situées respectivement loin en amont et en aval du corps :

$$\iint_{\mathcal{A}} v_x(y, z) dy dz = AU = \iint_{\mathcal{A}'} v_x(y, z) dy dz. \quad (10.83)$$

En effet, si la section $\mathcal{A}$ est suffisamment en amont du corps, la contribution de l'écoulement radial (qui décroît en $1/L^2$) à l'intégrale sur la section $\mathcal{A}$ sera négligeable devant celle due au sillage (décroissance en $1/L$ du défaut de vitesse dans le sillage).

Écrivons de même l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans le volume du tube de courant limité par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ (Éq. 5.12) :

$$\iint_{(\text{nappe de courant})} \rho v_x v_j n_j dS = \iint_{(\text{nappe de courant})} \sigma_{xj} n_j dS + (-F_x). \quad (10.84)$$

La seule force en volume qui apparaît est la force $(-F_x)$, opposée de la traînée : c'est celle qu'il faut appliquer au corps pour le maintenir au repos.

Toujours dans le second membre de l'équation (10.84), le terme σ_{ij} comprend les composantes associées à la fois aux forces visqueuses et aux forces de pression. En dehors du sillage, on peut négliger l'influence des forces de viscosité. À l'intérieur (partie de l'intégrale sur la section $\mathcal{A}'$), seul σ'_{xy} est non nul et ne contribuera pas à l'intégrale ; d'où :

$$\iint \sigma'_{xj} n_j dS = 0.$$

L'intégrale $\iint (-p) n_x dS$ (contribution de la pression) est, elle aussi, nulle. En effet, en dehors du sillage, on peut appliquer l'équation de Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{cte.}$$

U et, par suite, p sont donc constants. À l'intérieur du sillage, les lignes de courant sont presque parallèles ; la pression ne varie donc pas quand on se déplace perpendiculairement aux lignes de courant. Elle a, par conséquent, la même valeur constante à l'intérieur du sillage qu'à l'extérieur. L'intégrale $\iint (-p) n_x dS$ se ramène à $-p \iint n_x dS$ et elle est nulle sur toute surface fermée.

En ce qui concerne maintenant l'intégrale au premier membre de l'équation (10.84), la contribution des parois du tube de courant est nulle. Cette intégrale se réduit donc à la différence suivante entre les flux de quantité de mouvement dans les sections $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ perpendiculaires à la direction Ox :

$$\iint_{\mathcal{A}'} \rho v_x^2 dS - \iint_{\mathcal{A}} \rho v_x^2 dS = \iint_{\mathcal{A}'} \rho v_x^2 dS - \rho A U^2,$$

où A est l'aire de la section $\mathcal{A}$. En multipliant l'équation (10.83) par ρU , on obtient une valeur de $\rho A U^2$ à remplacer dans l'expression précédente pour obtenir, après changement de signe, la forme suivante de l'équation (10.84) :

$$\rho \iint_{\mathcal{A}'} v_x (U - v_x) dy dz = F_x. \quad (10.85)$$

Cette équation se réduit à l'expression (10.80) lorsque l'on est suffisamment loin du corps pour que $U - v_x \ll U$ et qu'on puisse prendre le premier facteur $v_x \simeq U$.

On note que, l'équation (10.85) impose que l'intégrale $\rho \iint_{\mathcal{A}'} v_x (U - v_x) dy dz$ soit constante et, que par suite, si $v_x \simeq U$, $Q = \rho \iint_{\mathcal{A}'} (U - v_x) dy dz$ soit indépendante de la section $\mathcal{A}'$ choisie. La valeur constante du débit Q et l'équation (10.85) elle-même sont donc des conséquences de la combinaison de la conservation de la quantité de mouvement et de la masse. ■

La relation *traînée – débit de fluide* dans le sillage a un sens physique très général qui ne se limite pas aux écoulements laminaires. Derrière un corps bien

profilé, le sillage a une faible largeur et le débit à l'intérieur du sillage est donc petit (le défaut de vitesse ($U - v_x$) est, au plus, de l'ordre de grandeur de U); on a donc, d'après (10.80), une faible force de traînée induite. En revanche, derrière un corps mal profilé, la couche limite se décolle, se déstabilise et se disperse rapidement. Cela occasionne une dissipation supplémentaire et est généralement associé à l'apparition de turbulence en aval de l'obstacle (comme dans le cas de la Fig. 10.1b). Le débit à l'intérieur de la couche limite et la force de traînée sont alors très augmentés.

10.7.3 Jet laminaire à deux dimensions

Le problème du jet laminaire correspond à l'injection d'un fluide visqueux dans le même fluide au repos ($U = 0$). Comme pour la couche limite et le sillage, les gradients de vitesse sont localisés dans la largeur $e(x)$ du jet qui augmente par diffusion visqueuse transverse comme $e \approx \sqrt{\nu t}$ avec la distance x suivant la direction d'injection. En procédant comme pour le sillage laminaire, on démontre que l'intégrale $\rho \iint v_x^2 dy$ (correspondant au premier membre de l'équation (10.85) avec $U = 0$) est constante avec la distance x pourvu que l'on calcule l'intégrale suivant y sur l'ensemble de la section du jet (et sur une épaisseur unité suivant Oz). On doit donc avoir $v_x^2(x) e(x) \approx M/\rho \approx \text{cte}$ (M est le flux de quantité de mouvement pour une distance unité et ρ la masse volumique). La vitesse v_x va donc également diminuer avec la distance x . En raison de cette variation de la vitesse, on récrit la variation de la largeur sous la forme différentielle :

$$\frac{\partial e^2}{\partial t} \approx \nu \approx \frac{\partial e^2}{\partial x} v_x \approx \frac{\partial e^2}{\partial x} \sqrt{\frac{M}{e\rho}}. \quad (10.86)$$

On obtient alors par intégration sur x puisque ν est constant :

$$e(x) \approx x^{2/3} \nu^{2/3} \left(\frac{\rho}{M} \right)^{1/3} \quad (10.87)$$

et également :

$$v_x(x) \approx x^{-1/3} \nu^{-1/3} \left(\frac{M}{\rho} \right)^{2/3}. \quad (10.88)$$

Les exposants diffèrent, comme on pouvait s'y attendre, de ceux obtenus pour un sillage : cependant, comme pour le sillage, le rapport $e(x)/x$ diminue avec la distance x (cette fois en $x^{-1/3}$). L'hypothèse d'une forte localisation de la vorticité à grande distance reste donc valable.

Un calcul complet montre que l'on a des profils autosimilaires de la vitesse v_x avec :

$$v_x(x, \xi) \approx x^{-1/3} \nu^{-1/3} \left(\frac{3M}{32\rho} \right)^{2/3} \frac{1}{\cosh^2 \xi} \quad (10.89a)$$

où :

$$\xi \approx \frac{y}{x^{2/3}} \left(\frac{M}{48\rho \nu^2} \right)^{1/3}. \quad (10.89b)$$

On retrouve bien la même forme que les équations (10.87) et (10.88) en prenant $v_x(x, y = 0)$ et $\xi = z/e$.

Dans le cas d'un jet à trois dimensions, il faut intégrer suivant z et y pour calculer le flux de quantité de mouvement et sa valeur constante entraîne que $v_x \propto e(x)^{-1}$. En procédant comme dans l'équation (10.86), on trouve alors $\partial e / \partial x = \text{cte}$. Dans ce cas, l'approche de type *couche limite* prise jusqu'ici n'est plus valable car le rapport e/x ne tend plus vers 0 à grande distance.

10.8 Couches limites thermiques et massiques

La notion de couche limite n'est pas seulement utile pour caractériser les régimes d'écoulement et les efforts exercés sur un solide. Elle intervient directement dans l'évaluation des transferts thermiques et de masse entre un corps solide et le fluide environnant. Ces transferts sont modifiés par les écoulements au voisinage du solide, comme nous en faisons l'expérience chaque fois que nous soufflons sur la surface d'un corps chaud pour le refroidir. De même, le problème de la tenue thermique d'une tête d'ogive dans la rentrée en atmosphère terrestre est lié aux échanges qui se produisent dans une mince couche limite autour de la tête : dans ce cas, l'énergie thermique est produite par les écoulements aérodynamiques au voisinage de l'obstacle. La notion de *couche limite thermique* ou *massique* découle de celle de couche limite hydrodynamique étudiée précédemment. Elle résulte de l'association des effets de la convection thermique par le champ de vitesse et du transfert diffusif transverse. Néanmoins, sa structure est très influencée par sa coexistence avec la couche limite de vitesse. Plus précisément, cette structure dépend de l'efficacité relative des transferts diffusifs thermiques et de quantité de mouvement qui est mesurée par le *nombre de Prandtl*, $Pr = \nu/\kappa$ défini à la section 2.3.2. Les notions de couches limites thermique et massique ont de nombreuses applications pratiques dans le domaine du transfert thermique ou de masse. Ce sera, en particulier, le cas pour des réactions électrochimiques sur des électrodes planes. Nous verrons que, lorsque ces couches limites sont d'épaisseur faible devant celle de la couche limite de vitesse, la mesure des caractéristiques de transfert de masse permet de déterminer le gradient de vitesse près des parois.

10.8.1 Couches limites thermiques

Considérons de nouveau la géométrie de la figure 10.2a, en introduisant une différence entre la température T_0 de la plaque et celle, uniforme, T_1 du fluide loin de l'obstacle. Lorsque les profils stationnaires de température et de vitesse se sont établis, la température ne diffère de T_1 d'une façon appréciable que sur une couche mince près de la paroi. Pour étudier la structure de cette *couche limite thermique*, nous devons adjoindre à l'équation de Navier-Stokes, qui conduit au profil de Blasius, une équation de transport thermique. Cette

dernière s'établit comme l'équation de mouvement du fluide en écrivant que, dans un repère lié au mouvement moyen de celui-ci, la variation dT/dt de la température vérifie l'équation de Fourier (1.17); elle prend alors la forme :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})T = \kappa \Delta T. \quad (10.90a)$$

Nous avons utilisé l'équation (3.2) pour relier les dérivées temporelles dT/dt et $\partial T/\partial t$ de la température respectivement le long de la trajectoire d'une particule de fluide et en un point fixe. Comme pour la couche limite de vitesse, les dérivées spatiales dans le sens de l'écoulement sont d'un ordre de grandeur plus faible que celles dans la direction normale à la paroi. On peut donc écrire :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (10.90b)$$

en négligeant le terme diffusif $\kappa(\partial^2 T/\partial x^2)$ devant $\kappa(\partial^2 T/\partial y^2)$. Les second et troisième termes – convectifs – de l'équation jouent pour l'énergie thermique le même rôle que celui de l'équation de Navier-Stokes pour la quantité de mouvement. Ajoutons les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} T(x, y=0) &= T_0 \quad \text{pour } x > 0. \\ T(x, y) &= T_1 \quad \text{pour } y \text{ grand.} \end{aligned}$$

Notons que la forme des équations (10.90a–b) suppose les hypothèses suivantes :

- il n'existe pas de sources d'énergie thermique telles que celles qui apparaîtraient en présence d'écoulements rapides et de forts gradients de vitesse au voisinage de parois solides (c'est le cas de la rentrée de l'ogive citée plus haut). Le cas de la combustion sera traité dans la section 10.9 ;
- nous négligeons l'effet de la poussée d'Archimède sur le fluide chaud moins dense ;
- enfin, nous supposons que la viscosité ne dépend pas de la température.

Quand ces hypothèses sont vérifiées, le problème thermique peut en principe être résolu à partir de la seule donnée du champ de vitesse du fluide ; il n'y a pas d'effet en retour de la variation du champ thermique sur le comportement hydrodynamique en raison de l'absence de couplage entre les champs de température et de vitesse du fluide. Étudions maintenant les structures de couches limites rencontrées pour différentes valeurs du nombre de Prandtl Pr .

Cas d'un nombre de Prandtl largement supérieur à l'unité

C'est le cas des liquides isolants thermiquement et/ou visqueux. La diffusion thermique transverse est alors peu efficace devant celle de la quantité

de mouvement. Or, c'est cette diffusion transverse qui détermine la croissance de l'épaisseur des couches limites lorsqu'on se déplace vers l'aval de l'écoulement. Cette épaisseur marque, en effet, la distance de la paroi pour laquelle les transports diffusif et convectif s'équilibrent (nous avons signalé ce résultat pour la couche limite de vitesse à la fin de la section 10.3.1).

L'épaisseur $\delta_\theta(x)$ de la couche limite thermique est donc faible devant celle de la couche de vitesse $\delta(x)$ (Fig. 10.19) : on suppose alors que, dans l'épaisseur de la couche limite thermique ($0 < y < \delta_\theta$), la vitesse varie linéairement avec y , et que :

$$v_x \simeq U \frac{y}{\delta(x)} \quad (10.91)$$

où $\delta(x) = \sqrt{\nu x/U}$ est l'épaisseur de la couche limite de vitesse.

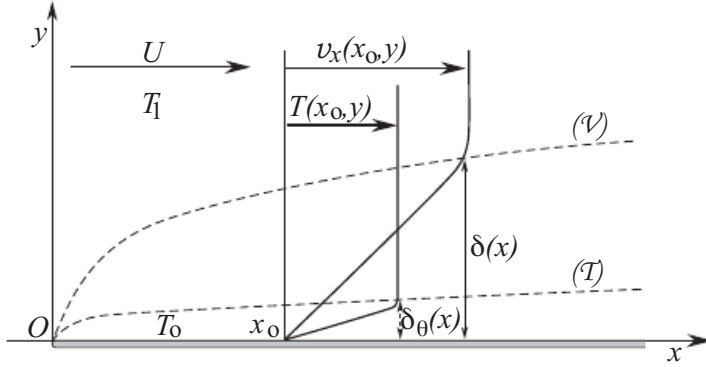


FIG. 10.19 – Couches limites thermiques (T) et de vitesse (V) dans le cas d'un nombre de Prandtl très supérieur à l'unité.

Ces hypothèses permettent de montrer que le rapport δ_θ/δ est indépendant de x avec :

$$\left(\frac{\delta_\theta}{\delta}\right)^3 \approx \frac{\kappa}{\nu} \quad (10.92a)$$

soit :

$$\frac{\delta_\theta}{\delta} \approx \left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{Pr}\right)^{1/3} \ll 1. \quad (10.92b)$$

Ainsi, δ_θ augmente en $\sqrt{x}$ avec la distance avec, d'après les équations (10.1a) et (10.92b) : $\delta_\theta \simeq (\kappa \nu^{1/2})^{1/3} \sqrt{x/U}$.

Justification. L'épaisseur $\delta_\theta(x)$ est de l'ordre de $\sqrt{\kappa t_\theta(x)}$ où $t_\theta(x)$ est le temps mis par le fluide au bord de la couche limite thermique ($y = \delta_\theta$) pour parcourir la distance x . D'après l'équation (10.91), la vitesse correspondante est $v_{x(y=\delta_\theta)} \simeq U(\delta_\theta/\delta)$. L'hypothèse d'absence de variation de δ_θ/δ avec x est en accord avec ce

dernier résultat car elle conduit à une vitesse $v_{x(y=\delta_\theta)}$ également constante avec x , de sorte que :

$$t_\theta \approx \frac{x}{U} \frac{\delta(x)}{\delta_\theta(x)} \quad (10.93a)$$

et :

$$\delta_\theta(x) \approx \sqrt{\kappa t_\theta(x)} \approx \sqrt{\kappa \frac{x}{U} \frac{\delta(x)}{\delta_\theta(x)}}. \quad (10.93b)$$

En divisant membre à membre (10.93b) par l'équation (10.1a), on retrouve bien la valeur constante avec x du rapport δ_θ/δ donnée par l'équation (10.92b).

Comme dans l'équation (10.2), les deux termes convectifs $v_x(\partial T/\partial x)$ et $v_y(\partial T/\partial y)$ et le terme diffusif $\kappa(\partial^2 T/\partial y^2)$ de l'équation de transport thermique (10.90b) sont du même ordre au bord de la couche limite thermique ($y \simeq \delta_\theta$). Comme la couche limite de vitesse, cette dernière marque la limite entre les régions où le transport diffusif (cette fois-ci thermique) est dominant ($y < \delta_\theta$) et celles où c'est le transport convectif ($y > \delta_\theta$).

Justification. Exprimons l'équation (10.5) de conservation de la masse en utilisant l'équation (10.91). On obtient :

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} \approx U \frac{y}{\delta^2(x)} \frac{d\delta}{dx}$$

soit, en intégrant :

$$v_y \approx U \frac{y^2}{\delta^2} \frac{d\delta}{dx}. \quad (10.94)$$

Évaluons, par analogie avec le calcul de la section 10.3.1, l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation (10.90b) du transport thermique sur le bord de la couche limite thermique ($y = \delta_\theta(x)$) : on utilisera, pour la température, la variable réduite $\theta(y) = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ (attention à la signification différente de θ par rapport à celle utilisée au début du chapitre !). On obtient tout d'abord :

$$v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \approx U \frac{\delta_\theta^2}{\delta^2} \frac{d\delta}{dx} \frac{\theta(\delta_\theta)}{\delta_\theta(x)} \approx U \frac{\delta_\theta}{\delta^2} \frac{d\delta}{dx} \quad (10.95a)$$

car $\partial \theta / \partial y \approx \theta(\delta_\theta) / \delta_\theta(x)$ et, au bord de la couche limite thermique ($y = \delta_\theta(x)$), on a $T(\delta_\theta) = T_1$ soit : $\theta(\delta_\theta) \simeq 1$. De même, on trouve que le deuxième terme convectif $v_x(\partial \theta / \partial x)$ et le terme de diffusion $\kappa(\partial^2 \theta / \partial y^2)$ vérifient respectivement (toujours pour $y = \delta_\theta(x)$) :

$$v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \approx U \frac{\delta_\theta}{\delta} \frac{\theta}{\delta_\theta} \frac{d\delta_\theta}{dx} \approx \frac{U}{\delta} \frac{d\delta_\theta}{dx} \quad (10.95b)$$

et :

$$\kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \approx \kappa \frac{\theta(\delta_\theta)}{\delta_\theta^2} \approx \frac{\kappa}{\delta_\theta^2}. \quad (10.95c)$$

On a utilisé l'estimation $\partial \theta / \partial x \approx (\partial \theta / \partial y)(d\delta_\theta/dx) \approx (\theta/\delta_\theta)(d\delta_\theta/dx)$: celle-ci revient à supposer que le rapport entre les distances suivant y et x sur lesquelles on a une variation importante de θ est de l'ordre de $d\delta_\theta/dx$. Les deux termes convectifs donnés par (10.95a) et (10.95b) sont, tout d'abord, du même ordre, car le fait que δ_θ/δ soit indépendant de x entraîne que $d\delta_\theta/dx \approx (\delta_\theta/\delta)(d\delta/dx)$. En remplaçant

dans les équations (10.95a) et (10.95c) δ_θ par son expression (10.92b) en fonction de δ , on obtient respectivement (toujours pour $y = \delta_\theta(x)$) :

$$v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \approx U \left(\frac{\kappa}{\nu} \right)^{1/3} \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \approx U \left(\frac{\kappa}{\nu} \right)^{1/3} \frac{1}{x}$$

et

$$\kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \approx \frac{\kappa}{\delta^2} \left(\frac{\nu}{\kappa} \right)^{2/3} \approx \frac{U}{x} \frac{\kappa}{\nu} \left(\frac{\nu}{\kappa} \right)^{2/3}$$

qui sont bien du même ordre de grandeur. ■

À partir des résultats précédents, on évalue le flux thermique entre le solide et le fluide avec :

$$Q \propto k \Delta T Re^{1/2} Pr^{1/3}. \quad (10.96)$$

Le nombre de Reynolds Re est ici pris égal à UL/ν où L est la longueur totale de la paroi parallèlement à l'écoulement ; $\Delta T = T_0 - T_1$.

Démonstration. Nous venons de voir que, à l'intérieur de la couche limite thermique, les échanges diffusifs thermiques dominent ; le flux thermique dQ à travers un élément de surface de longueur dx dans la direction de la vitesse U et de dimension unité dans la direction Oz vérifie donc :

$$dQ = -k \frac{T_1 - T_0}{\delta_\theta} dx = k (T_0 - T_1) \frac{Pr^{1/3}}{\delta} dx. \quad (10.97)$$

La conductivité k rendant compte de la diffusion de la chaleur dans le fluide a été définie à la section 1.2.1. En intégrant la relation (10.97) sur la longueur totale L de la plaque, on trouve le flux global et l'on en déduit l'expression (10.96). ■

La loi (10.96) de variation du flux thermique en fonction de Pr et Re est le résultat crucial du calcul : on la récrit souvent en remplaçant Q par la combinaison adimensionnelle $Nu = Q/(k \Delta T)$. Ce *nombre de Nusselt* Nu est le rapport entre le flux Q en présence de l'écoulement, et celui qui serait obtenu dans les mêmes conditions de géométrie et de température sans effet convectif. On obtient alors :

$$Nu = C Re^{1/2} Pr^{1/3}. \quad (10.98)$$

Cette forme est similaire aux expressions empiriques utilisées pour dimensionner des installations de transfert thermique : le préfacteur C dépend alors de la géométrie et vaut, par exemple, 0,339 pour un écoulement parallèle à une plaque chauffée. Les exposants $1/3$ et $1/2$ de Pr et de Re , eux, sont caractéristiques des transferts thermiques pour des nombres de Prandtl très grands devant l'unité.

Cas d'un nombre de Prandtl très inférieur à l'unité

Cette situation se rencontre avec les métaux liquides ($Pr = 0,01$ pour le mercure). La couche limite visqueuse est, contrairement au cas précédent, beaucoup plus mince que la couche limite thermique ; On peut donc considérer que la vitesse est uniforme et de valeur U dans presque toute l'épaisseur δ_θ . Dans ce cas, on peut utiliser les raisonnements de la section 10.2, en remplaçant la viscosité cinématique ν par la diffusivité thermique κ (on peut aussi faire le même calcul que pour $Pr \gg 1$, mais en prenant $v_x = U$ dans la couche limite thermique). On a alors :

$$\delta_\theta(x) \approx \sqrt{\frac{\kappa x}{U}}$$

et

$$\frac{\delta(x)}{\delta_\theta(x)} \approx \sqrt{\frac{\nu}{\kappa}}. \quad (10.99)$$

En poursuivant le calcul comme précédemment, on arrive à une variation du nombre de Nusselt du type $Nu \approx Re^{1/2} Pr^{1/2}$. On conserve la dépendance en $Re^{1/2}$ par rapport à la vitesse, mais la variation des épaisseurs relatives des couches limites de vitesse et de température fait passer l'exposant du nombre de Prandtl de $1/3$ à $1/2$.

Cas d'un nombre de Prandtl de l'ordre de l'unité

Cette situation correspond physiquement au cas des gaz, où les coefficients de diffusion thermique et de quantité de mouvement sont du même ordre. Dans ce cas, la croissance de la couche limite thermique se fait à la même vitesse que celle de la couche limite visqueuse, et les deux épaisseurs sont du même ordre (ce qui correspond d'ailleurs à la limite pour $Pr = 1$ des formules de cette section et de la précédente).

Une application des lois d'échange de chaleur entre un solide et un écoulement : l'anémomètre à fil chaud

Ce dispositif, décrit à la section 3.5.3, utilise un fil chauffé par un courant électrique et refroidi par un écoulement pour mesurer la vitesse de ce dernier. La température des fils est déterminée par l'équilibre entre l'échauffement du fil par effet Joule et le refroidissement par la convection forcée et par la diffusion thermique. Pratiquement, seule la composante U_n de la vitesse du fluide perpendiculaire au fil intervient pour le refroidissement. On trouve, à partir des mesures expérimentales, que le nombre de Nusselt, qui correspond à l'échange thermique du fil avec l'écoulement, vérifie la relation :

$$Nu = 0,57 Pr^{1/3} Re^{1/2} + 0,42 Pr^{1/5} \quad (10.100)$$

Quand Pr est grand et que Re est assez élevé, la loi d'échange de chaleur se réduit au premier terme et elle est la même que pour une couche limite laminaire près d'une paroi. On peut s'étonner de ce résultat puisque ces sondes sont précisément utilisées dans des écoulements turbulents. De fait, la sonde est suffisamment petite par rapport à la taille des tourbillons intervenant dans l'écoulement pour que, à l'échelle de son diamètre, l'écoulement apparaisse comme laminaire. Le fait que la sonde ne soit pas une plaque plane parallèle à l'écoulement, mais un barreau circulaire avec des points de stagnation, explique l'origine du terme additif indépendant du nombre de Reynolds.

Remarque. Le nombre de Nusselt Nu est proportionnel au rapport entre la puissance thermique $P = RI^2$ produite dans le fil par le chauffage électrique et la différence de température $T_f - T_0$ entre le fil et le fluide loin de celui-ci. La température T_f du fil est mesurée par sa résistance électrique R qui vérifie $R = R_0(1 + a(T_f - T_0))$ où R_0 est la résistance du fil à la température T_0 . La résistance électrique du fil chaud R suit la loi de variation expérimentale suivante en fonction de la vitesse normale au fil U_n :

$$\frac{RI^2}{R - R_0} = A + B U_n^{0,5} \quad (10.101)$$

ce qui correspond bien à la variation de Nu donnée plus haut puisque $R - R_0 \propto T - T_0$ et $Re \propto U_n$.

10.8.2 Couches limites de concentration, polarographie

Couche limite de concentration induite par une électrode noyée dans une paroi

Le phénomène de couche limite de concentration apparaît chaque fois que l'on a une réaction chimique sur une paroi solide, avec absorption ou émission d'un des composants du mélange en écoulement. C'est en particulier le cas pour les réactions électrochimiques induites par une électrode métallique dans un écoulement. Nous allons illustrer ces phénomènes par l'exemple de la technique de polarographie, qui permet de mesurer le gradient de vitesse d'un liquide près d'une paroi solide et, par conséquent, la contrainte pariétale. Elle utilise une réaction électrochimique contrôlée d'oxydo-réduction d'un réactif en écoulement ; on prend, par exemple, la réaction ferrocyanure/ferricyanure en présence d'un électrolyte support (comme KCl par exemple), lequel permet de réduire les différences de potentiel parasites dues aux courants électriques dans le volume de la solution.

La réaction est induite par injection de courant dans une électrode de petite dimension (largeur L parallèlement à l'écoulement, longueur W) noyée dans la surface de la paroi près de laquelle on veut mesurer le gradient de vitesse (Fig. 10.20). Supposons, par exemple, que la solution contienne des ions Fe^{2+} (en général sous forme du complexe $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$) en concentration

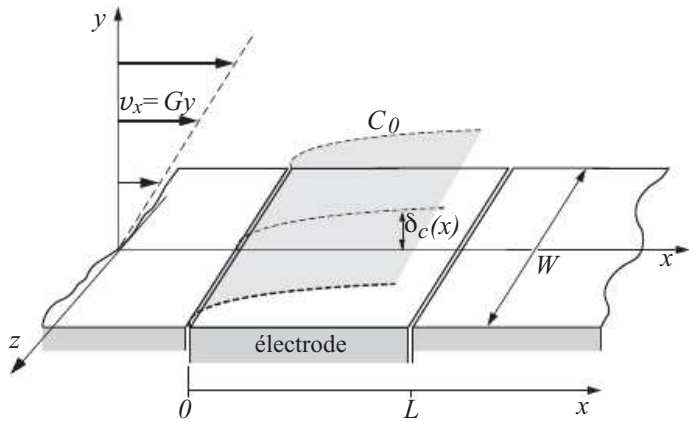


FIG. 10.20 – Formation d’une couche limite de concentration (représentée par la courbe en tirets) au voisinage d’une électrode sur laquelle est induite une réaction d’oxydoréduction.

C_0 . Si l’électrode est une anode, un courant électrique oxyde les ions Fe^{2+} en ions Fe^{3+} . Cette réaction d’oxydation anodique diminue la concentration d’ions Fe^{2+} à la paroi, C_P , et fait apparaître un gradient de concentration par rapport à la valeur C_0 : ce gradient crée un flux diffusif $J = -D_m(\partial C/\partial y)$ d’ions vers la paroi, compensé par un apport d’ions entraînés par le courant convectif venant de l’amont (D_m est le coefficient de diffusion moléculaire des ions). Plus on augmente l’intensité du courant (par le biais du potentiel de polarisation), plus on augmente le gradient de concentration, jusqu’à ce que la concentration C_P devienne nulle. Alors, tous les ions Fe^{2+} apportés sur l’électrode par diffusion et convection sont oxydés (le phénomène inverse, consistant en une réduction cathodique des ions Fe^{3+} au niveau de l’électrode, peut aussi être utilisé). Cette condition aux limites est équivalente à une condition de température constante ou de vitesse nulle aux parois. Comme dans le cas des couches limites thermique et de vitesse, l’épaisseur δ_c de la couche limite de concentration représente la distance pour laquelle les flux diffusifs et convectifs sont du même ordre.

Dans la plupart des solutions liquides, le coefficient D_m est beaucoup plus faible que la viscosité cinématique ν . Le problème est donc proche de celui d’une couche limite thermique pour un nombre de Prandtl très supérieur à l’unité. Le rapport $Sc = \nu/D_m$, qui joue le rôle du nombre de Prandtl Pr , est le *nombre de Schmidt*, introduit à la section 2.3.2, Tab. 2.1) ; des valeurs de ce nombre de l’ordre de 1 000 sont courantes pour les liquides. De ce point de vue, la dynamique des échanges est donc analogue à celle que nous avons rencontrée à la section 10.8.1 pour la couche limite thermique (avec $Pr \gg 1$) : la couche limite de concentration est donc beaucoup moins épaisse que celle

de vitesse et son épaisseur δ_c vérifie l'équivalent de l'équation (10.92b) :

$$\frac{\delta_c(x)}{\delta(x)} \approx \left(\frac{D_m}{\nu} \right)^{1/3} \approx \left(\frac{1}{Sc} \right)^{1/3} \ll 1. \quad (10.102)$$

La différence avec le problème thermique vient du fait que l'électrode n'occupe qu'une partie de la longueur de la paroi solide suivant l'écoulement (dans l'exemple de la section 10.8.1, la plaque était au contraire supposée chauffée sur toute sa longueur). En particulier, la couche limite de quantité de mouvement qui a son origine très en amont est déjà développée au niveau de l'électrode : on supposera donc que son épaisseur et, par suite, le gradient de vitesse $G = \partial v_x / \partial y$ à la paroi sont constants le long de l'électrode.

Comme nous le montrerons plus loin, l'épaisseur δ_c de la couche limite de concentration varie alors comme :

$$\delta_c(x) \approx \left(\frac{D_m x}{G} \right)^{1/3} \quad (10.103)$$

avec la distance x au bord amont de l'électrode. On a donc une croissance en $x^{1/3}$ de la couche limite de concentration avec la distance, au lieu de $x^{1/2}$ dans l'exemple de la section 10.8.1) : la différence vient du fait que le gradient de vitesse G , normal à la paroi, est, comme nous venons de le voir, constant dans la zone active des électrodes, au lieu de diminuer avec la distance x . Notons que des couches limites de concentration peuvent apparaître même dans des écoulements développés où il n'existe pas de couche limite au sens de la vitesse. Il suffit que l'on ait :

$$\frac{\delta_c(x)}{x} \approx \left(\frac{D_m}{G x^2} \right)^{1/3} \ll 1.$$

Démonstration. Évaluons la variation de l'épaisseur $\delta_c(x)$ de cette couche limite en prenant comme origine $x = 0$ la limite amont de l'électrode. C_0 est la concentration d'ions dans la solution incidente en dehors de la couche limite. On montre, comme pour l'équation de transport thermique (10.90a), que l'équation de transport de la concentration C (ici d'ions) est dans le cas général :

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})C = D_m \Delta C. \quad (10.104a)$$

En régime stationnaire et en utilisant les approximations habituelles pour les couches limites, l'équation devient :

$$v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \frac{\partial C}{\partial y} = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (10.104b)$$

Estimons les différents termes de l'équation ; comme à la section 10.8.1, nous déterminerons l'épaisseur δ_c de la couche limite de concentration en écrivant que c'est la distance à la paroi pour laquelle le transport convectif et le transport diffusif sont du même ordre. Comme on suppose le gradient de vitesse G constant sur toute la

surface de la microélectrode, on a un écoulement parallèle avec $v_y = 0$ et $v_x = Gy$; le deuxième terme convectif $v_y(\partial C/\partial y)$ est donc nul. Par ailleurs, au bord de la couche limite de concentration ($y = \delta_c(x)$), on a : $v_x = G\delta_c(x)$; ainsi, le premier terme convectif a pour ordre de grandeur :

$$v_x \frac{\partial C}{\partial x} \approx v_x \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial \delta_c(x)}{\partial x} \approx G\delta_c(x) \frac{C_0}{\delta_c(x)} \frac{\partial \delta_c(x)}{\partial x} \approx G C_0 \frac{\partial \delta_c(x)}{\partial x}. \quad (10.105)$$

Comme dans l'équation (10.95b), on a pris : $\partial C/\partial x \approx \partial C/\partial y (d\delta_c(x)/dx) \approx (C_0/\delta_c(x))(d\delta_c(x)/dx)$. Le terme de diffusion $D_m(\partial^2 C/\partial y^2)$ est, lui, de l'ordre de $D_m C_0/\delta_c^2$ puisque l'échelle caractéristique de la distance de variation de la concentration dans la direction Oy est δ_c . En écrivant l'égalité des estimations du terme diffusif et du terme convectif que nous venons d'obtenir, on a, en simplifiant par C_0 :

$$\delta_c^2 \frac{\partial \delta_c(x)}{\partial x} \approx \frac{D_m}{G},$$

d'où l'on déduit l'équation (10.103) en intégrant par rapport à x . ■

Nous allons maintenant voir que l'analyse du transfert de masse dans la couche limite de concentration permet de mesurer le gradient de vitesse transverse G près des parois solides.

Mesure d'un gradient de vitesse près d'une paroi par polarographie

En pratique, on impose la différence de potentiel ΔV entre l'électrode de mesure et une électrode de référence (cette dernière est, par construction, placée à un potentiel bien déterminé par rapport à la solution). Après stabilisation, on mesure le courant I sur l'électrode pour plusieurs valeurs de ΔV (Fig. 10.21). Ce courant résulte d'un transfert de charge électronique entre l'électrode et les ions qui viennent en contact de cette dernière.

Sur la *courbe voltamétrique* $I = f(\Delta V)$ de la figure 10.21, une tension minimale est nécessaire pour pouvoir induire l'oxydation $\text{Fe}^{2+} \rightarrow \text{Fe}^{3+} + e^-$ (ou, plus exactement, la réaction $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-} \rightarrow \text{Fe}(\text{CN})_6^{3-} + e^-$). Au-delà de cette valeur, le courant augmente avec ΔV en même temps que la concentration C_P de traceur sur la paroi diminue. La valeur palier du courant – appelée palier d'oxydation anodique – est atteinte quand la concentration des ions à la paroi $C_P = 0$ et que tous les ions Fe^{2+} apportés par diffusion à partir de la couche limite sont oxydés. Aux valeurs de ΔV encore plus élevées, le courant augmente de nouveau, soit parce qu'on induit d'autres réactions d'oxydoréduction, soit parce qu'il y a électrolyse du solvant. La valeur palier I_p du courant est reliée au gradient de vitesse $G = \partial v_x/\partial y$ près de la paroi par :

$$I_p \propto G^{1/3}; \quad (10.106)$$

c'est donc la mesure de I_p qui permet de déterminer G . Cette variation du signal en $G^{1/3}$ complique l'exploitation de la mesure, mais les lectures sont fidèles et la perturbation de l'écoulement due à la mesure est très faible. Cette mesure de gradient de vitesse à la paroi est particulièrement fiable.

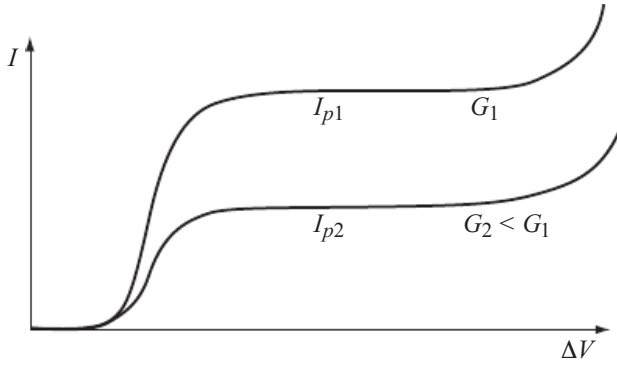


FIG. 10.21 – Variations du courant sur l'électrode de mesure en fonction de la différence de potentiel par rapport à une électrode de référence, lors d'une réaction d'oxydoréduction. Les deux courbes correspondent à des valeurs différentes du gradient de vitesse G à la paroi. Les différences de potentiel dépendent des réactions ioniques utilisées et sont de l'ordre de quelques centaines de millivolts; les intensités dépendent de la surface des électrodes et peuvent aller d'une fraction de microampère à plusieurs milliampères.

Démonstration. Le déplacement des ions résulte de la combinaison de trois mécanismes :

- (i) la migration des ions actifs due au champ électrique (associé à un potentiel électrique ϕ);
- (ii) la diffusion moléculaire due au gradient de concentration de l'ion actif créé par la réaction au niveau de l'électrode;
- (iii) la convection due à l'écoulement près de l'électrode.

Le flux $\mathbf{J}$, en moles par unité de surface et de temps, de l'ion actif (Fe^{2+}) de concentration molaire C a alors pour expression :

$$\mathbf{J} = \frac{\beta F}{RT} D_m C \mathbf{grad} \phi - D_m \mathbf{grad} C + C \mathbf{v}, \quad (10.107)$$

où :

D_m = diffusivité moléculaire du réactif;

β = nombre d'électrons actifs par molécule de réactif, avec $\beta = 1$ dans le cas des ions Fe^{2+} ;

F = constante de Faraday ($F = \mathcal{N}e = 96\,500$ coulombs).

Au niveau de la paroi ($y = 0$), C et $\mathbf{v}$ s'annulent et seul est non nul le flux associé à la diffusion moléculaire. Quand la concentration C_p d'ions à la paroi est nulle, ce flux diffusif est égal à : $J = -D_m (\partial C / \partial y) \approx -D_m C_0 / \delta_c$; il en résulte une densité de courant électrique :

$$j(x) \approx -\beta F D_m \frac{C_0}{\delta_c}. \quad (10.108)$$

Le courant total par unité de largeur d'électrode (perpendiculairement à l'écoulement) vaut donc :

$$I = -\beta F D_m C_0 \int_0^L \frac{dx}{\delta_c(x)} \quad (10.109)$$

d’où, en remplaçant δ_c par l’expression (10.103) :

$$I \propto \beta F C_0 D^{2/3} G^{1/3} L^{2/3}, \tag{10.110}$$

où L est la longueur de l’électrode parallèlement à l’écoulement. On retrouve donc bien la variation en $G^{1/3}$ de la formule (10.106). ■

Remarque. Si la réaction électrochimique mise en jeu est suffisamment rapide, les sondes électrochimiques permettent d’effectuer aussi des mesures instationnaires (fluctuations du gradient de vitesse pariétal en présence d’instabilités ou de turbulence). Cependant, si cette mesure du gradient de vitesse pariétal par l’intermédiaire du courant électrique I ne pose aucun problème en régime stationnaire, en régime instationnaire, les fonctions de transfert reliant les différentes grandeurs mises en jeu seront plus complexes.

Couches limites de masse et de vitesse sur une électrode à disque tournant

Champ de vitesse près d’un disque tournant. Des mesures du type de celles que nous venons de décrire sont fréquemment réalisées à l’aide d’électrodes à disque tournant : ces dernières utilisent une électrode circulaire insérée près de l’axe de rotation à la surface d’un disque tournant dans un bain d’électrolytes avec une vitesse angulaire Ω_0 constante (Fig. 10.22). Le disque agit comme une pompe centrifuge : le fluide est aspiré axialement vers le disque puis éjecté radialement. L’intérêt de ce système est la présence d’une couche limite de vitesse d’épaisseur constante sur la surface avec $\delta \approx \sqrt{\nu/\Omega_0}$. D’autre part, la vitesse axiale v_z est également indépendante de r et de θ et elle est de l’ordre de $-\Omega_0^{3/2}\nu^{-1/2}z^2$ (on parle d’électrode *uniformément accessible*). Par ailleurs, les composantes radiale et tangentielle sont proportionnelles à r .

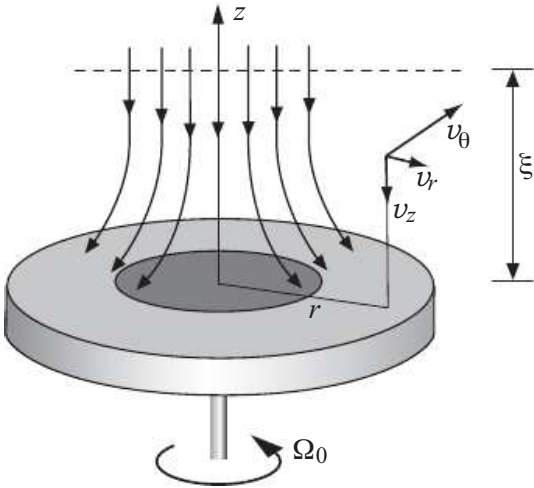


FIG. 10.22 – Vue schématique d’une électrode à disque tournant.

Justification. Plaçons-nous en coordonnées cylindriques en supposant l'écoulement stationnaire et de révolution autour de l'axe de rotation. On néglige l'influence de la gravité de telle sorte que la pression est constante en dehors de la couche limite de vitesse : on la supposera constante partout par continuité comme dans les cas précédents. Dans tout cet exemple, nous nous plaçons dans le repère du laboratoire fixe par rapport à l'électrode tournante et on n'a donc pas à introduire de terme de force de Coriolis dans les équations de mouvement.

Sur la paroi de l'électrode ($z = 0$), la vitesse du fluide est purement orthoradiale avec $v_\theta(r, 0) = \Omega_0 r$, $v_r(r, 0) = 0$ et $v_z(r, 0) = 0$; v_r et v_θ s'annuleront pour les distances z plus grandes que quelques épaisseurs de couche limite δ . Dans la couche limite, la composante radiale de l'écoulement résulte de l'équilibre entre la force centrifuge et la contrainte visqueuse : écrivons cet équilibre entre les forces radiales pour un cylindre de fluide de hauteur de l'ordre de δ suivant Oz et de base $r dr d\theta$. En supposant, pour simplifier, que les vitesses v_r et v_θ s'annulent en dehors de la couche limite ($z \geq \delta$), la seule contrainte visqueuse à prendre en compte est celle sur le disque $\tau_0 \approx \eta[\partial v_r / \partial z]_{z=0}$. En simplifiant par $r dr d\theta$, l'équilibre des forces radiales sur le cylindre peut être écrit sous la forme :

$$(\rho \Omega_0^2 r) \delta \approx \eta \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} \right]_{z=0} \quad (10.111a)$$

soit, près de la paroi :

$$v_r \approx \frac{\Omega_0^2}{\nu} r z \delta. \quad (10.111b)$$

Pour estimer maintenant la vitesse v_z , on utilise l'équation d'incompressibilité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

d'où, près de la paroi :

$$v_z \approx -\frac{\Omega_0^2}{\nu} z^2 \delta. \quad (10.112)$$

Pour estimer l'épaisseur δ , on considère que c'est la distance pour laquelle on a équilibre entre l'effet de la convection transverse de la quantité de mouvement (à la vitesse v_z) et celui de la diffusion visqueuse de la projection $\rho \mathbf{v}_\parallel$ de la quantité de mouvement sur le disque (de composantes ρv_r et ρv_θ). Le processus est comparable à la couche limite d'aspiration (section 10.5.3). La projection $\mathbf{v}_\parallel$ de la vitesse doit donc vérifier :

$$\nu \frac{\partial \mathbf{v}_\parallel}{\partial z} \approx \nu \frac{\mathbf{v}_\parallel}{\delta} \approx -v_z(\delta) \mathbf{v}_\parallel,$$

soit :

$$\delta \approx \frac{\nu}{|v_z(\delta)|}.$$

En utilisant l'expression (10.112) avec $z = \delta$, on obtient alors :

$$\delta \approx \sqrt{\nu / \Omega_0}. \quad (10.113)$$

L'équation (10.113) indique que l'épaisseur δ de la couche limite de vitesse est constante sur la surface du disque. En remplaçant δ par sa valeur dans les équations (10.111b) et (10.112), on obtient alors :

$$v_r \approx \Omega_0^{3/2} \nu^{-1/2} r z. \quad (10.114)$$

(pour $z \approx \delta$, v_r est de l'ordre de la vitesse tangentielle $v_\theta \approx \Omega_0 r$) et :

$$v_z = -\alpha_0 z^2 \approx -\Omega_0^{3/2} \nu^{-1/2} z^2 \quad (10.115a)$$

avec

$$\alpha_0 = \Omega_0^{3/2} \nu^{-1/2}. \quad (10.115b)$$

La valeur de v_z à la surface du disque est donc constante. Le calcul analytique complet donne l'expression similaire valable au second ordre en z :

$$v_z = -c \Omega_0^{3/2} \nu^{-1/2} z^2 \quad (10.116a)$$

avec

$$c = 0,51. \quad (10.116b)$$

Les expressions (10.114) et (10.115) ne sont valables qu'à l'intérieur de la couche limite ($z < \delta$). En dehors, v_z tend vers une constante quand la distance z augmente et les vitesses v_r et v_θ tendent vers 0.

Transfert massique vers une « électrode à disque tournant ». On suppose que la partie centrale du disque tournant est occupée par une électrode de rayon R faible devant celui du disque (pour pouvoir négliger les effets de bord) et ne créant pas de surépaisseur sur ce dernier. On suppose la vitesse de rotation Ω_0 constante et qu'un régime stationnaire a été atteint pour la distribution de vitesse comme pour celle de concentration. On admet enfin que, comme la vitesse, la concentration C est seulement fonction de z . L'équation de transport de la concentration se réduit alors à :

$$v_z(z) \frac{dC}{dz} = D_m \frac{d^2C}{dz^2} \quad (10.117)$$

avec les conditions limites $C = C_0$ pour $z \rightarrow \infty$ et $C = 0$ en $z = 0$. Comme dans les autres cas discutés dans cette section, nous considérerons que l'épaisseur δ_c de la couche limite de concentration est la distance à la paroi pour laquelle le transport convectif et le transport diffusif sont du même ordre et que $C \approx C_0$. On trouve alors l'ordre de grandeur suivant de l'épaisseur de la couche limite massique :

$$\delta_c \approx \left(\frac{D_m}{\alpha_0} \right)^{1/3} \approx D_m^{1/3} \nu^{1/6} \Omega_0^{-1/2} \quad (10.118a)$$

d'où :

$$\frac{\delta_c}{\delta} \approx \left(\frac{D_m}{\nu} \right)^{1/3} \propto Sc^{-1/3}. \quad (10.118b)$$

On retrouve la même variation en $Sc^{-1/3}$ du rapport des épaisseurs des deux couches limites que dans le cas de la polarographie. Le courant électrique total dans l'électrode correspondant à ce transfert d'ions vaut :

$$I \approx \beta F (\pi R^2) D_m^{2/3} \nu^{-1/6} \Omega_0^{1/2} C_0. \quad (10.119)$$

Le résultat exact, appelé *formule de Levich* du nom d'un physicochimiste russe contemporain, est identique à un préfacteur près, égal à 0,62. L'équation (10.119) permet, en particulier, de mesurer le coefficient de diffusion D_m des ions lorsque la viscosité ν est connue.

Justification. On utilise l'équation (10.115a) pour estimer les deux termes de la relation (10.117) pour $z = \delta_c$ avec :

$$v_z \frac{dC}{dz} \approx \alpha_0 \delta_c^2 \frac{C_0}{\delta_c} \approx \alpha_0 \delta_c C_0 \quad (10.120a)$$

et :

$$D_m \frac{d^2 C}{dz^2} \approx D_m \frac{C_0}{\delta_c^2}. \quad (10.120b)$$

En écrivant que les deux termes sont du même ordre et en remplaçant α_0 par sa valeur, on retrouve les relations (10.118a) et (10.118b).

Sur l'électrode ($z = 0$), comme on l'a vu dans l'exemple précédent de la polarographie, la densité de courant électrique j est entièrement associée à la diffusion avec :

$$j = \beta F D_m \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right]_{z=0} \approx \beta F D_m \frac{C_0}{\delta_c}. \quad (10.121)$$

Il suffit alors de remplacer δ_c par la valeur donnée par l'équation (10.118a) et de multiplier le résultat par l'aire πR^2 de l'électrode pour obtenir l'équation (10.119).

Le résultat précédent correspond à la limite où la réaction électrochimique à la paroi est instantanée. Dans le cas général, il faudrait tenir compte de la constante de temps de la réaction en plus de celle du temps d'accès des espèces à la paroi. Ce sera particulièrement le cas pour les réactions lentes telles que de la corrosion.

10.8.3 Dispersion de Taylor

Dans les deux exemples de la couche limite thermique et de la polarographie, on a eu affaire à un transport longitudinal convectif d'une quantité scalaire (l'énergie thermique ou la masse) et à un transport transverse par diffusion. Les variations de température et de concentration restaient cependant localisées dans une couche limite d'épaisseur faible devant la largeur globale de l'écoulement.

Dans la dispersion de Taylor, on a toujours un transport convectif longitudinal et diffusif transverse mais ce dernier peut s'étendre à toute l'ouverture de l'écoulement et il n'apparaît pas de couche limite. Un processus générique de dispersion de Taylor est l'étalement d'une petite tache de colorant injectée dans un tube de faible diamètre où l'on a établi un écoulement. Une version bidimensionnelle de ce processus est présentée sur la Figure 10.23 : une bande étroite de colorant est injectée initialement à l'entrée d'un canal constitué de deux plans parallèles distants de a entre lesquels on a un profil parabolique de vitesse de Poiseuille. Les points représentent des molécules entraînées par

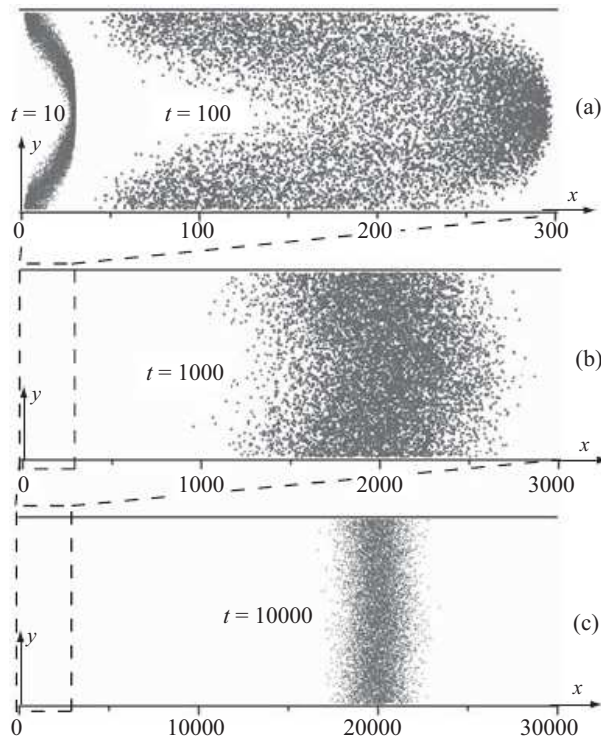


FIG. 10.23 – Vue schématique à quatre instants successifs de l'étalement d'une bande de traceur (représentée par un nuage de points) dans un écoulement de Poiseuille entre deux plans parallèles. Les distances suivant x sont contractées d'un facteur 10 chaque fois que l'on passe d'un graphe au suivant.

l'écoulement local et animées en même temps d'un mouvement brownien représentant la diffusion moléculaire. Le nombre de Péclet $Pe = aU/D_m$, défini par l'équation (2.16), et qui caractérise l'importance relative des processus convectif et diffusif de transport joue un rôle clé ici (U = vitesse moyenne, a = ouverture du canal).

En l'absence d'écoulement, on aurait seulement diffusion moléculaire à la fois parallèle et perpendiculaire aux parois du canal : l'étalement au bout d'un temps t suivant la direction x est alors :

$$\Delta x \approx \sqrt{D_m t}. \tag{10.122}$$

En présence d'un écoulement, aux temps courts, la bande de colorant se déforme en suivant le mouvement local du fluide et prend une forme parabolique qui reflète le profil de vitesse ; la vitesse des particules de colorant est, en effet, différente suivant leur distance aux parois (courbe $t = 10$ sur la Fig. 10.23). Dans ce cas, la distance sur laquelle la tache de colorant s'étale dans la direction x de l'écoulement est :

$$\Delta x \approx Ut \tag{10.123}$$

où U est la vitesse moyenne de l'écoulement.

Remarque. Pour un écoulement entre plans, il faudrait ajouter un facteur $3/2$ correspondant au rapport entre la vitesse maximale et la vitesse moyenne. D'autre part, aux temps très courts, la diffusion moléculaire suivant l'écoulement est dominante; il faut pour cela, d'après les équations (10.122), et (10.123) que $\sqrt{D_m t} > Ut$, soit : $t < D_m/U^2$.

Aux temps plus longs ($t = 100$ et $t = 1\,000$ dans la Fig. 10.23), la diffusion moléculaire étale le colorant sur l'intervalle entre les plans. On atteint une distribution presque homogène ($t = 10\,000$ sur la figure) pour $t \gg \tau_D$ où τ_D est le temps caractéristique de diffusion sur la distance a avec :

$$\tau_D \sim \frac{a^2}{D_m}. \quad (10.124)$$

On constate alors expérimentalement (ou numériquement) que la variation avec la distance x de la concentration moyennée sur y est assez proche d'une fonction gaussienne et que la largeur Δx augmente comme la racine carrée du temps avec :

$$\Delta x \approx \sqrt{D_{Taylor} t}. \quad (10.125)$$

On a donc un étalement *macroscopiquement diffusif* (superposé au déplacement moyen de vitesse U) caractérisé par le coefficient D_{Taylor} (coefficient de dispersion de Taylor). On estime D_{Taylor} en supposant qu'au temps $t = \tau_D$ de transition entre l'étalement convectif et diffusif, les équations (10.123) et (10.125) sont simultanément vérifiées d'où :

$$\Delta x \approx \sqrt{D_{Taylor} \frac{a^2}{D_m}} \approx U \frac{a^2}{D_m}$$

soit :

$$D_{Taylor} \approx \frac{a^2 U^2}{D_m}. \quad (10.126)$$

Remarque. Un point surprenant est la diminution de la dispersion lorsque D_m augmente, (pour Ua constant) contrairement au cas de la diffusion moléculaire pure. En fait, plus la diffusion moléculaire transverse est importante, plus l'homogénéisation se fait vite dans la section et moins les différences de vitesse entre les différents points de celle-ci peuvent étaler le traceur.

Pour deux plans parallèles, le calcul fait par Taylor et complété par Aris donne :

$$D_{Taylor} = D_m + \frac{a^2 U^2}{210 D_m} \quad (10.127a)$$

ou :

$$\frac{D_{Taylor}}{D_m} = 1 + \frac{Pe^2}{210}. \quad (10.127b)$$

Pour un capillaire cylindrique de diamètre d , on a :

$$D_{Taylor} = D_m + \frac{d^2 U^2}{192 D_m} \quad (10.128a)$$

ou

$$\frac{D_{Taylor}}{D_m} = 1 + \frac{Pe^2}{192} \quad (10.128b)$$

avec, ici, $Pe = Ud/D_m$. Aux faibles nombres de Péclet ($Pe \ll 1$), la diffusion moléculaire est dominante, et on retrouve le coefficient de diffusion moléculaire D_m .

La dispersion de Taylor joue un rôle important dans les mouvements et le mélange de réactifs chimiques dans les réseaux de canaux de petite taille utilisés en microfluidique. Elle représente aussi un moyen pratique de déterminer le coefficient de diffusion moléculaire D_m .

Démonstration. Dans la géométrie de la figure 10.23, l'équation de convection-diffusion (10.104a) devient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_0 \left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right) \frac{\partial C}{\partial x} = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (10.129)$$

où $v_x(y) = U_0(1 - 4y^2/a^2)$ représente le profil d'écoulement de Poiseuille entre les deux plans $y = \pm a/2$ ($U_0 = 3U/2$). On a supposé les variations de concentration suffisamment lentes suivant Ox (tube long par rapport à son diamètre) pour pouvoir négliger la dérivée $\partial^2 C/\partial x^2$. Pour estimer la dérivée $\partial C/\partial t$, plaçons nous dans le référentiel en mouvement à la vitesse moyenne du fluide (ici $2U_0/3$) par le changement de coordonnées :

$$x_1 = x - 2U_0 t/3 \quad \text{et} \quad t_1 = t$$

et utilisons la relation :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_{x_1} - \frac{2U_0}{3} \left(\frac{\partial C}{\partial x_1}\right)_t. \quad (10.130)$$

On suppose de plus que, dans ce référentiel, le profil de concentration est pratiquement indépendant du temps ($(\partial C/\partial t)_{x_1} = 0$) car, en se déplaçant à la vitesse de l'écoulement, on supprime l'exploration du profil de concentration réalisée par un observateur immobile. L'équation (10.129) devient alors :

$$U_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{4y^2}{a^2}\right) \frac{\partial C}{\partial x_1} = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (10.131)$$

Cette équation exprime la compensation des variations du flux convectif de traceur parallèle à l'écoulement moyen par le transport transverse diffusif. Enfin, pour que le profil $C(x_1, t_1)$ n'évolue que lentement quand x_1 varie, on doit supposer que $(\partial C/\partial x_1)_t$ est indépendant de y . En intégrant l'équation (10.131) entre 0 et y et en tenant compte du fait que C doit être une fonction paire de y , on trouve :

$$C(x_1, y) = C(x_1, 0) + \frac{U_0}{3 D_m} \frac{\partial C}{\partial x_1} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{a^2}\right). \quad (10.132)$$

Calculons maintenant le flux moyen J de traceur par unité de surface transporté par convection à travers l'ensemble d'une section $x_1 = cte$ dans la direction de l'écoulement (on note que la valeur de la constante $C(x, 0)$ choisie est sans importance car elle est multipliée par une fonction d'intégrale nulle dans l'équation (10.133)) :

$$a J = 2 \int_0^{a/2} C(x_1, y) U_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{4y^2}{a^2} \right) dy. \quad (10.133)$$

En remplaçant $C(x_1, y)$ par l'expression (10.132) et la vitesse maximum U_0 par son expression en fonction de la vitesse moyenne U , on trouve

$$J = - \frac{a^2 U^2}{210 D_m} \frac{\partial C}{\partial x_1}, \quad (10.134)$$

ce qui correspond bien à l'expression d'un flux diffusif $J = -D_{Taylor} (\partial C / \partial x_1)_t$ avec une valeur de D_{Taylor} correspondant bien au terme en U^2 de l'équation (10.127a). Un modèle plus élaboré est nécessaire pour retrouver le terme additif D_m des équations (10.127) qui est le seul non nul pour un fluide au repos. ■

10.9 Flammes

L'étude des flammes relève à la fois de la mécanique des fluides, des phénomènes de transport moléculaire et de la cinétique chimique. Elle ne met pas en jeu des couches limites au sens du reste du présent chapitre : en revanche, comme dans ces dernières, les flammes impliquent simultanément des processus de convection et de diffusion thermique et de masse, présentant chacun leur propre temps caractéristique. De plus, les flammes font intervenir une réaction chimique de combustion, souvent localisée dans une zone de faible épaisseur, et caractérisée par son propre temps caractéristique. Enfin, l'équation de Navier-Stokes doit prendre en compte des variations de masse volumique dues à la dilatation thermique et à la production d'espèces chimiques.

Nous ne chercherons pas ici à donner une vue d'ensemble du problème très complexe des flammes et de la combustion, et renvoyons pour cela à des ouvrages spécialisés cités en référence : nous voulons simplement donner à travers quelques exemples une idée de la liaison entre ces phénomènes et les processus de transport étudiés dans le reste de ce livre.

Remarque. Nous utiliserons une forme très simplifiée des réactions chimiques en supposant une réaction globale unique rendant compte de la totalité du dégagement d'énergie thermique et de la disparition du réactif (dans la réalité, le cas « simple » du mélange H_2 -air fait intervenir une douzaine de réactions réversibles entre huit espèces ; pour un cas très répandu en pratique comme le mélange kérosène-air, il faut prendre en compte 1 800 réactions entre 220 espèces). Le problème des flammes est, ainsi, déjà redoutable même sous la forme simple !

10.9.1 Flammes, mélange et réactions chimiques

Flammes de diffusion et flammes prémélangées

Une flamme met en jeu une réaction chimique fortement exothermique entre un *combustible* (le gaz de ville par exemple) et un *comburant* (généralement l'oxygène de l'air) dans des fluides en écoulement. Une flamme ne peut donc apparaître que s'il existe une zone où ces réactifs sont mélangés : plusieurs types de flamme seront donc observés suivant la géométrie de la zone de mélange et le mécanisme de ce mélange.

Le fonctionnement d'un bec Bunsen illustre les types très différents de flammes observés suivant les conditions du mélange des deux composants : ce dispositif est constitué d'un tube vertical où est injecté le combustible (gaz de ville) ; un orifice latéral réglable en faisant tourner une virole permet d'admettre une quantité plus ou moins importante d'air (Fig. 10.24a CC).

Si la virole est fermée, du gaz combustible pur sort du bec et l'air ambiant sert de comburant : si l'écoulement est laminaire, le mélange s'opère par diffusion moléculaire et la flamme apparaît dans cette zone de mélange. On a alors une *flamme de diffusion non prémélangée* à l'interface entre le combustible et le comburant purs. Dans ce cas, la combustion est souvent incomplète et il apparaît des particules de suie : ces dernières rayonnent lorsqu'elles sont portées à haute température, ce qui explique la zone brillante en haut de la flamme de la figure 10.24b CC. Nous discuterons ce cas à la section 10.9.2.

Si la virole est ouverte, l'air entrant par l'ouverture latérale se mélange au gaz à l'intérieur du tube : c'est ce mélange qui réagit (en général après la sortie de l'embouchure) lorsqu'il atteint une zone où la température est suffisante (Fig. 10.24c CC). Nous verrons plus bas (section 10.9.3) que, dans une telle *flamme prémélangée*, cette zone de réaction est une fine couche séparant les gaz frais en amont et les gaz brûlés en aval. Comme on le voit sur la figure, non seulement la géométrie mais aussi la couleur de la flamme sont différentes du cas précédent de la flamme non prémélangée. La réaction est, en effet, plus complète car le mélange peut être plus proche de la composition stoechiométrique. Il ne se forme alors pas de particules de suie : la couleur bleue visible sur la photo correspond directement à la zone à haute température de la flamme.

Temps caractéristique réactionnel – nombre de Damköhler

L'obtention d'un mélange combustible-comburant de composition convenable n'est pas la seule condition pour obtenir une flamme. La vitesse de réaction dépend, en effet, non seulement de la fraction par unité de masse des espèces fraîches réagissantes, mais aussi de la cinétique de la réaction : cette dernière est caractérisée dans les cas simples par un temps τ_R qui varie très rapidement avec la température suivant une loi d'Arrhenius :

$$\tau_R(T) = \tau_0 e^{E/RT} \quad (10.135)$$

(E est l'énergie d'activation de la réaction de combustion et τ_0 un temps de collision élastique du gaz). Cette variation très rapide de la vitesse de réaction avec la température est une caractéristique essentielle de la flamme par rapport aux opérations usuelles du génie chimique. Au voisinage de la température T_B maximale dans la flamme ($T_B \approx 2\,000\text{ K}$), on a :

$$\tau_R(T_B) = \tau_0 e^{E/RT_B} = \tau_0 e^\beta \quad (10.136)$$

où :

$$\beta = \frac{E}{RT_B}. \quad (10.137)$$

Typiquement, β est de l'ordre de 10 et τ_R de l'ordre de quelques 10^{-4} s .

Pour évaluer l'influence de ce temps caractéristique, on utilise fréquemment un *nombre de Damköhler* Da égal au rapport τ_A/τ_R où τ_A est le temps caractéristique d'apport des réactifs. Suivant le type de flamme (*diffusion* ou *prémélange*), le temps τ_A sera un temps caractéristique de la diffusion ou de la convection. Les valeurs de nombre de Damköhler élevées reflètent une combustion rapide localisée dans une couche de faible épaisseur ; celle-ci sépare le comburant et le combustible pour une flamme de diffusion et le mélange de gaz frais des gaz brûlés pour une flamme prémélangée. Au contraire, un nombre de Damköhler faible ou nul correspond à une réaction chimique « ge-lée » avec interpénétration passive des espèces sous l'effet de la diffusion ou de la convection.

Dans la suite, nous supposons toujours le nombre de Damköhler élevé (durées de réaction courtes). Cette hypothèse est, en effet, très souvent vérifiée en pratique aussi bien pour les moteurs automobiles, turbines à gaz et moteurs de fusées (flammes de prémélange), que pour les flammes d'incendie ou les torchères (flammes de diffusion).

Évaluation de la température de flamme T_B . Supposons un schéma réactionnel simple de la forme $O \rightarrow F + Q$ rendant compte du passage des produits initiaux non brûlés O (le combustible et le comburant) à des produits de combustion F (en particulier le dioxyde de carbone et la vapeur d'eau) avec un dégagement d'énergie thermique Q . On peut ainsi estimer la température maximum T_B atteinte dans la flamme par une hypothèse (dite adiabatique) en supposant que l'énergie dégagée par la réaction d'un volume donné est utilisée pour chauffer le volume correspondant de gaz réactif, soit $Q = C_P(T_B - T_0)$ où T_0 est la température des gaz frais. Dans le cas général, les flammes n'apparaissent pas spontanément : il sera nécessaire d'induire une élévation de température par une intervention extérieure (allumette, étincelle ...) pour initier la réaction qui s'entretiendra ensuite grâce à l'énergie thermique qu'elle dégage.

Flammes laminaires et turbulentes

Le bec Bunsen modèle correspond à un régime d'écoulement laminaire : ce n'est nullement le cas général et le régime d'écoulement influence fortement

les caractéristiques des flammes. En régime turbulent, la diffusion laminaire est remplacée par le transport par les fluctuations de vitesse turbulentes (section 12.2.3) qui est beaucoup plus efficace. Il joue, par exemple, un rôle essentiel pour la combustion dans les cylindres de moteurs de voitures.

Remarque. En régime turbulent, il y a un couplage très fort entre les variations de volume dues aux fluctuations de température et de composition du mélange, et les fluctuations de vitesses des gaz ; ce problème ne peut être traité que très approximativement. D'autre part, les fluctuations de vitesse entraînent des déformations de la surface de la flamme (flamme plissée).

Dans les paragraphes suivants, nous nous limiterons à des écoulements laminaires et à des géométries simples pour lesquels on peut définir simplement les temps caractéristiques.

10.9.2 Flammes de diffusion laminaires

À côté du bec Bunsen avec virole fermée, la flamme d'une bougie est un second exemple de flamme de diffusion. Dans ce cas, les gaz réactifs créés par la pyrolyse au niveau de la mèche rencontrent l'oxygène de l'air dans un mouvement ascendant causé par la convection thermique des gaz chauds. Le mélange s'opère alors par diffusion moléculaire. Les flammes de diffusion sont aussi présentes dans de très nombreuses applications utilisant des jets ou des gouttes combustibles. Pour une flamme de diffusion, le nombre de Damköhler est pris égal à $Da = \tau_d/\tau_R$ où $\tau_d = l^2/D_m$ est le temps caractéristique de diffusion des gaz frais sur la largeur de la flamme.

Un cas particulier : le modèle de Burke-Schumann (1928)

Ce modèle simple de flamme de diffusion repose sur plusieurs hypothèses très simplificatrices, mais donne une bonne première idée physique du comportement de telles flammes. Nous supposons ici l'écoulement parallèle ($v_y = v_z = 0$), invariant dans la direction Oz et stationnaire (Fig. 10.25) : le combustible est injecté dans le comburant, lui-même en écoulement, par une fente perpendiculaire au plan de la figure. Le flux de masse $q_m = \rho v_x$ par unité de distance suivant y et z est supposé constant avec y et z et de même valeur dans les deux fluides. On ne prend pas en compte la viscosité des fluides et on appelle D_m le coefficient de diffusion moléculaire et κ le coefficient de diffusion thermique qui sont supposés égaux. On a donc couplage d'une diffusion moléculaire (et thermique) transverse et d'une convection longitudinale : mathématiquement ce problème est analogue au transport de quantité de mouvement dans un sillage laminaire (sections 10.7.1 et 10.7.2).

Dans le cas où on n'a pas de réaction chimique (par exemple si $\tau_R = \infty$), on a une diffusion passive transverse du combustible dans le comburant : on trouve alors (voir démonstration plus bas), à une distance assez grande de

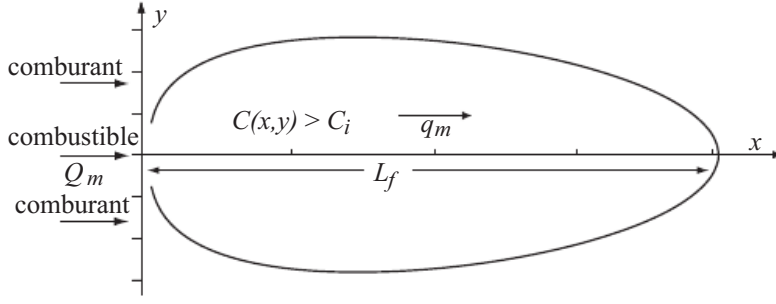


FIG. 10.25 – Vue schématique d'une flamme de diffusion suivant le modèle de Burke-Schumann. Le contour en trait continu a été calculé à partir de l'équation (10.139).

l'injection ($x = 0$), un champ de concentration :

$$C(x, y) = Q_m \sqrt{\frac{1}{4\pi \rho q_m D_m x}} e^{-\frac{q_m y^2}{4\rho D_m x}} \quad (10.138)$$

où Q_m est le débit total de combustible injecté par unité de longueur de fente suivant Oz . Au fur et à mesure que x augmente, le profil de la concentration $C(x, y)$ suivant y s'élargit également et la valeur maximum $C(x, 0)$ sur l'axe diminue en $1/\sqrt{x}$.

Démonstration. Comme l'écoulement est parallèle ($v_y = 0$), la condition (3.25) de conservation de la masse en régime stationnaire impose que $\rho v_x = q_m$ soit constant avec x . On note que la vitesse v_x peut varier au fur et à mesure que la température (et donc la densité) varient. Compte tenu de la similarité entre ce problème et le transport de quantité de mouvement dans un sillage laminaire, on utilise l'équation (10.72) en supprimant les dérivées par rapport à z , en remplaçant la viscosité ν par D_m et en multipliant l'équation par la masse volumique ρ : on obtient alors pour la variation de la concentration $C(x, y)$:

$$\rho v_x \frac{\partial C}{\partial x} = q_m \frac{\partial C}{\partial x} = \rho D_m \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}.$$

On aurait une équation du même type pour la variation de température en utilisant $\rho \kappa = k/C_p$ au lieu de ρD_m . Si l'on suppose que $\rho D_m = cte$ et que l'on se place à une assez grande distance pour pouvoir négliger la largeur de la fente d'injection devant celle du sillage, on utilise alors la solution (10.79) de l'équation de mouvement du sillage bidimensionnel pour obtenir :

$$C(x, y) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} C(x, y) dy \right) \sqrt{\frac{q_m}{4\pi \rho D_m x}} e^{-\frac{q_m y^2}{4\rho D_m x}}.$$

On en déduit alors l'équation (10.138) car le débit massique $Q_m = \int_{-\infty}^{\infty} \rho C v_x dy = q_m \int_{-\infty}^{\infty} C dy$ doit être constant avec x (comme q_m) : l'intégrale sur y de la concentration peut donc être remplacée par le rapport Q_m/q_m . ■

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un temps de réaction très court par rapport au temps de diffusion ($Da \gg 1$) : dans ce cas, la réaction s'opère sur une couche très fine que l'on considère comme le contour de la flamme. On supposera que la réaction se produit à la distance $y_i(x)$ pour laquelle $C(x, y)$ atteint une valeur C_i (ce peut être, par exemple, la valeur correspondant à une composition stoechiométrique du mélange). On suppose également que le profil de concentration (10.138) reste valable entre $y = 0$ et y_i . On obtient alors $y_i(x)$ en remplaçant y par y_i et C par C_i dans l'équation (10.138) et en prenant le logarithme du carré de cette expression :

$$y_i^2 = \frac{2\rho D_m x}{q_m} \left[\text{Log} \frac{Q_m^2}{4\pi \rho C_i^2 q_m D_m} - \text{Log} x \right]. \quad (10.139)$$

La longueur L_f de la flamme est la valeur de x pour laquelle la concentration sur l'axe est égale à C_i , de sorte que $y_i = 0$ (l'équation (10.139) ne donne plus de valeur réelle au-delà).

On a donc :

$$L_f = \frac{Q_m^2}{4\pi \rho q_m D_m C_i^2}. \quad (10.140)$$

Le rapport Q_m/q_m est constant avec x et représente la largeur h_0 de la fente sur laquelle est effectuée l'injection du combustible pur avec $C_i = 1$; L_f est alors proportionnelle au débit de combustible ainsi qu'à l'inverse du coefficient de diffusion moléculaire D_m (ou plutôt ici du produit ρD_m). On peut récrire l'équation (10.140) sous une forme alternative en appelant v_0 et ρ_0 la vitesse et la densité à l'intérieur de la fente d'injection : on a, en effet, alors $q_m = \rho v_0$ et $Q_m = \rho v_0 h_0$, soit :

$$L_f \approx \frac{v_0 h_0^2}{4\pi D_m^0 C_i^2} \quad (10.141a)$$

ou

$$\frac{L_f}{h_0} \approx \frac{Pe_0}{4\pi C_i^2} \quad (10.141b)$$

où $Pe_0 = v_0 h_0 / D_m^0$ est le nombre de Péclet au niveau de l'injection.

Note. L'hypothèse d'un nombre de Damköhler très grand, que nous avons utilisée, permet de ne pas faire intervenir de terme de production chimique.

Cas plus généraux

Le modèle de Burke-Schumann ne fait pas intervenir le mouvement du fluide chaud montant par convection qui peut avoir un rôle très important. On peut en tenir compte par l'intermédiaire du *nombre de Froude* $Fr_0 = v_0 / (\Delta \rho g d / \rho)^{1/2}$ de l'écoulement ($\Delta \rho$ étant l'ordre de grandeur des contrastes de masse volumique) ; on généralise alors l'expression (10.141b) sous forme de la loi d'échelle :

$$\frac{L_f}{h_0} \propto f(Fr_0) \frac{v_0 h_0}{D_m^0} \quad (10.142)$$

(où h_0 peut être remplacé par le diamètre d_0 dans le cas d'un tube circulaire). De telles lois d'échelle sont approximativement valables dans le cas d'écoulement assez lents pour que le temps τ_R puisse être considéré comme négligeable devant les autres temps caractéristiques. Le cas des écoulements rapides est beaucoup plus complexe.

Remarque. Il existe d'autres géométries possibles de flammes de diffusion : par exemple celles que l'on peut faire apparaître à l'interface entre un jet de comburant et un de combustible de direction opposée qui se rencontrent.

10.9.3 Flammes prémélangées

Déflagration et détonation

Discutons maintenant un modèle élémentaire de flamme prémélangée. Pour simplifier, nous la supposons créée par injection d'un mélange de gaz frais dans un tube dont la sortie est ouverte. Partons d'un tube entièrement rempli de mélange statique et allumons ce dernier à une extrémité : on observe, au fur et à mesure de combustion, une propagation vers l'arrière de la flamme qui sépare les gaz frais et froids des gaz brûlés chauds. La flamme progresse ainsi jusqu'à avoir consommé tous les gaz frais du tube. L'apparition d'un *front de flamme* mince séparant les gaz frais des gaz brûlés résulte de l'hypothèse de grandes valeurs de Da (comme celle d'une *surface de flamme* dans le cas précédent).

On observe deux régimes de propagation : dans la *déflagration*, on a une vitesse u_d de l'ordre du mètre par seconde et l'on peut considérer que la pression dans la flamme reste constante : c'est ce régime que nous allons étudier maintenant. En revanche, on a souvent transition vers un régime de *détonation* avec une vitesse de l'ordre de celle du son : nous ne l'étudierons pas dans le présent ouvrage qui ne traite que les écoulements incompressibles.

En pratique, dans un brûleur, on injecte un débit fini de gaz dans le tube. Lorsque la vitesse v_f des gaz au niveau du front de flamme est égale à u_d en valeur absolue, elle compense exactement la vitesse de déflagration, et on a une flamme plane stationnaire à la sortie du tube (Fig. 10.26a).

Remarque. Dans le cas d'un bec Bunsen et si $|v_f| < u_d$, la flamme est "avalée" par le bec : elle remonte à l'intérieur de celui-ci ce qui peut être très dommageable. Pour éviter cet accident, des dispositifs d'accrochage de flammes existent dans certains brûleurs au niveau de la sortie du mélange des gaz frais.

Pour $|v_f| > u_d$, le front de flamme prend une forme conique (Figs. 10.24c CC, 10.26b et 10.27 CC). Cela permet en effet d'avoir u_d égale en valeur absolue à la composante $v_f \sin \alpha$ de la vitesse des gaz perpendiculaire à la surface du front (α est le demi-angle au sommet du cône) : le front de flamme peut ainsi rester stationnaire. La valeur correspondante de α est donc déterminée par la condition :

$$u_d = |v_f| \sin \alpha. \quad (10.143)$$

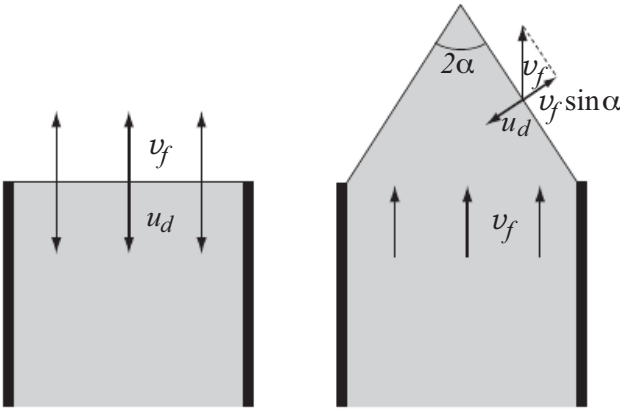


FIG. 10.26 – Flammes de prémélange. (a) On a une flamme plane lorsque la vitesse u_d de déflagration et celle v_f des gaz frais sont égales et opposées. (b) pour $|v_f| > u_d$, on a une flamme conique d’angle α fonction du rapport $|v_f|/u_d$.

Plus la vitesse des gaz est élevée, plus l’angle au sommet est faible.

Propagation d’une flamme unidimensionnelle

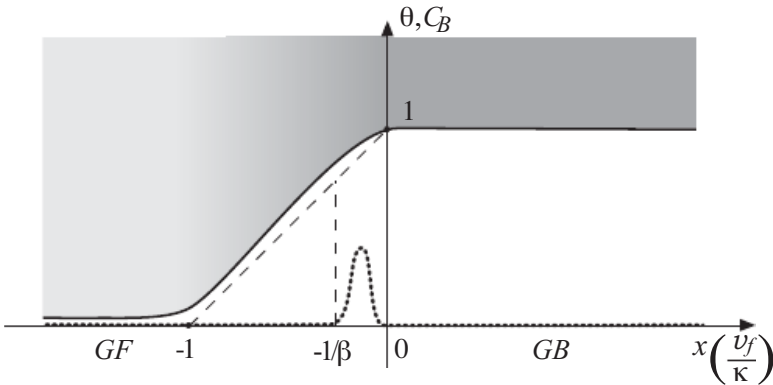


FIG. 10.28 – Variation de la température normalisée et de la concentration relative (courbe continue) ainsi que du taux de réaction (ligne pointillée) dans un référentiel fixe par rapport à un front de flamme unidimensionnel. La largeur de la zone de réaction est plus faible que celle de la zone de variation de température et de concentration. Le taux de réaction est en unité arbitraire. L’échelle horizontale correspond à la distance au front de flamme, normalisée par la largeur du front de température $x/\delta_\kappa \approx x/\delta_{Dm} \approx x v_f/\kappa$ (Eq. 10.146).

Revenons au cas d’une flamme plane en nous plaçant dans le repère immobile par rapport au front où l’on peut considérer l’écoulement et les profils de concentration et de température comme stationnaires. La figure 10.28 représente la variation de ces différentes quantités en fonction de la distance x au front de flamme. On a une augmentation continue à la fois de la température

réduite θ et de la concentration relative C_B en gaz brûlés entre les deux valeurs limite 0 et 1 en amont et en aval.

Remarque. On utilise pour la température la forme réduite :

$$\theta = (T - T_0)/(T_B - T_0) \quad (10.144)$$

qui varie continûment de zéro à 1, comme C_B , quand on passe des gaz frais aux gaz brûlés. On a supposé d'ailleurs pour simplifier dans la figure 10.28 que les variations de θ et C_B avec la distance x sont les mêmes ce qui sera justifié plus loin. La concentration C_0 en gaz frais est, elle, égale à $1 - C_B$ et décroît donc au contraire de 1 à 0 lorsque x augmente.

Curieusement, la réaction de combustion a lieu uniquement dans une zone très étroite où on a à la fois une quantité faible (mais suffisante de réactif) et une température élevée; c'est là également que l'on a le plus d'émission lumineuse, comme on le voit sur la figure 10.27 CC. Comme le montre la figure 10.28, il y a plus de réactif disponible en amont mais la température y est insuffisante pour que la réaction démarre. L'élévation de température due à la combustion se propage de proche en proche, en particulier par diffusion thermique, vers la zone de gaz frais juste en amont : la réaction de combustion peut alors y démarrer à son tour quand la température seuil est atteinte. Le front de flamme se propage ainsi de proche en proche dans la direction des gaz frais.

Remarque. La diffusion de gaz brûlés venant de la zone de réaction peut aussi jouer un rôle dans la propagation de l'élévation de température.

Distances caractéristiques dans une flamme unidimensionnelle

On se place dans le référentiel du front de flamme où l'écoulement est stationnaire et l'on suppose que les variables du problème (température T , masse volumique ρ , vitesse moyenne v) ne dépendent que de la distance x . On désigne par les indices 0 et B les valeurs de ces variables pour les gaz frais et brûlés respectivement en amont et en aval du front de flamme. Enfin, on suppose la pression constante.

On peut écrire l'équation de conservation de la masse de l'écoulement sous la forme :

$$\rho_0 w = \rho_B v_B \quad (10.145a)$$

avec :

$$\frac{\rho_B}{\rho_0} = \frac{n_0}{n_B} \frac{T_0}{T_B} \quad (10.145b)$$

dans la limite d'un gaz parfait et en notant n_0/n_B le rapport entre les nombres de molécules initial et final dans la réaction chimique. On a donc une diminution de la densité du mélange et une augmentation de la vitesse d'écoulement quand on passe de la région de gaz frais à celle de gaz brûlés.

Remarque. Cette variation de vitesse est à l'origine du changement d'orientation des lignes de courant au niveau du front de flamme observé dans la flamme conique de la figure 10.27 CC. Dans ce cas, la composante de vitesse normale au front suit la variation prédite par les équations (10.145) alors que la composante tangentielle reste constante.

Un point très important est la variation très similaire de la température et de la concentration relative des gaz brûlés avec la distance : cette similitude vient des valeurs très voisines des coefficients de diffusion thermique κ et de diffusion moléculaire D_m pour les gaz (sections 1.3.2 et 2.3.2). La largeur de la zone sur laquelle s'opère cette variation est de l'ordre de :

$$\delta_\kappa \approx \delta_D \approx \frac{\kappa}{v_f} \approx \frac{D_m}{v_f} \quad (10.146)$$

où v_f est une vitesse typique du mélange des gaz à l'intérieur du front.

Justification. La température normalisée θ est uniquement fonction de x car on est dans le référentiel du front où l'écoulement et le transfert thermique sont stationnaires et les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles. On peut donc écrire l'équation de bilan thermique (10.90a) sous les formes :

$$\rho C_p v_x \frac{d\theta}{dx} = k \frac{d^2\theta}{dx^2} + Q_R \quad (10.147a)$$

soit

$$v_x \frac{d\theta}{dx} = \kappa \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{Q_R}{\rho C_p} \quad (10.147b)$$

où C_p est la capacité thermique par unité de masse, Q_R l'énergie thermique dégagée par la réaction par unité de volume et de temps ; v_x est la vitesse locale qui est fonction de x . La concentration relative C_B vérifie, de son côté :

$$v_x \frac{dC_B}{dx} = D_m \frac{d^2C_B}{dx^2} + Q_B \quad (10.148)$$

où Q_B correspond à la production de gaz brûlés par la réaction. Quand la pression n'est pas trop élevée, on peut supposer que les valeurs de D_m et κ pour les gaz sont voisines (le nombre de Lewis $Le = D_m/\kappa$ est de l'ordre de 1). Par ailleurs, les quantités C_B et θ varient toutes les deux de 0 à 1 entre l'amont et l'aval de la flamme et, de plus, les termes Q_R et Q_B ont une variation identique avec x puisque le dégagement d'énergie thermique accompagne la production des gaz brûlés. Les variations de C_B et θ sont donc décrites par des équations pratiquement identiques avec des conditions aux limites voisines et ne peuvent donc être que très voisines.

En dehors de la zone (étroite) de réaction, les termes Q_R et Q_B peuvent être considérés comme nuls. Les termes de convection et de diffusion de l'équation (10.147b) (et d'ailleurs également de l'équation (10.148)) doivent alors être égaux. On obtient ainsi $v_f \theta / \delta_\kappa \approx \kappa \theta / \delta_\kappa^2$ où la vitesse v_f est choisie de l'ordre de celle correspondant au point d'inflexion de la courbe vers $\theta \approx 0,5$ et l'on en déduit l'ordre de grandeur (10.146).

L'autre échelle de longueur caractéristique essentielle du problème est la largeur δ_R de la zone où s'opère la réaction. Elle vérifie :

$$\delta_R \approx \frac{\delta_\kappa}{\beta} \approx \frac{\delta_D}{\beta} \quad (10.149)$$

où β , défini par l'équation (10.137), détermine la cinétique de la réaction. L'estimation $\beta \approx 10$ donnée plus haut confirme la faible valeur de δ_R par rapport à δ_D et δ_κ .

Justification. On admet que le terme de production de gaz brûlés de l'équation (10.148) est proportionnel à l'inverse du temps caractéristique de réaction $\tau_R(T)$ et à la concentration relative $(1 - C_B)$ de gaz frais disponibles pour la combustion avec, d'après l'équation (10.136) :

$$Q_B \propto (1 - C_B) e^{-\beta T_B/T} \simeq (1 - C_B) e^{-\beta/\theta}. \quad (10.150)$$

Nous avons supposé en effet que $T_0 \ll T_B$, d'où résulte, d'après l'équation (10.144) : $\theta \sim T/T_B$. Cette formule reflète la nécessité, déjà notée plus haut, d'avoir à la fois suffisamment de gaz frais et une température assez élevée pour produire la réaction. Comme nous l'avons vu, $(1 - C_B)$ varie approximativement avec la distance x comme $(1 - \theta)$ et donc beaucoup plus lentement que le terme exponentiel en $e^{-\beta/\theta}$. On admet alors que la largeur δ_R de la zone de réaction correspond à une variation de l'exponentielle par un facteur de l'ordre de $1/e$: la variation correspondante de θ est d'environ $1/\beta$ (Fig. 10.28). Comme la variation de θ est d'environ 1 sur la distance δ_κ , on en déduit bien l'estimation (10.149) de la largeur δ_R de la zone de réaction. Dans cette dernière région, on montre que le terme de diffusion est dominant devant le terme de convection, de sorte que les équations (10.147b) et (10.148) se réduisent à un équilibre *réaction-diffusion* alors que l'on a un équilibre *convection-diffusion* dans la partie de la zone d'épaisseur δ_κ où les réactions sont négligeables.

Vitesse de déflagration d'une flamme prémélangée

Comme nous l'avons indiqué plus haut, la propagation d'une flamme prémélangée se fait de proche en proche : la réaction de combustion à un endroit donné porte à la température T_B la couche adjacente où il reste les gaz frais. Pendant le temps τ_R de réaction (équation 10.136), on chauffe une couche d'épaisseur $e \approx \sqrt{\kappa \tau_R}$. La vitesse u_d de propagation de la déflagration a donc pour ordre de grandeur :

$$u_d \approx e/\tau_R \approx \sqrt{\kappa/\tau_R}. \quad (10.151)$$

Ordre de grandeur. Pour une valeur de κ typique de $5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ à $T_B \approx 2200 \text{ K}$ et avec $\tau_R \approx 3 \times 10^{-4} \text{ s}$ ce qui correspond à un mélange méthane-air, on obtient $u_d \approx 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $e \approx 0,12 \text{ mm}$. Pour un mélange air-hydrogène le temps τ_R serait plus court ($\tau_R \approx 8 \times 10^{-6} \text{ s}$ pour $T_B \approx 2400 \text{ K}$) ce qui conduit à une vitesse u_d plus élevée ($u_d \approx 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)

10.9.4 Instabilité d'une flamme plane de prémélange

Cette instabilité résulte d'effets de réfraction des lignes de courant, déjà notés dans les figures 10.26b et 10.27 CC, dans le cas où l'écoulement des gaz est incliné par rapport au front d'une flamme de prémélange. Prenons un front de flamme au départ plan et stationnaire auquel on applique une perturbation infinitésimale, par exemple sinusoïdale (Fig. 10.29) : si l'on suit les lignes de courant traversant le front de flamme, ces lignes sont plus serrées (et donc la vitesse plus élevée) dans la partie du front déformée dans la direction des gaz brûlés et la vitesse est plus faible dans la partie où la déformation est orientée vers les gaz frais.

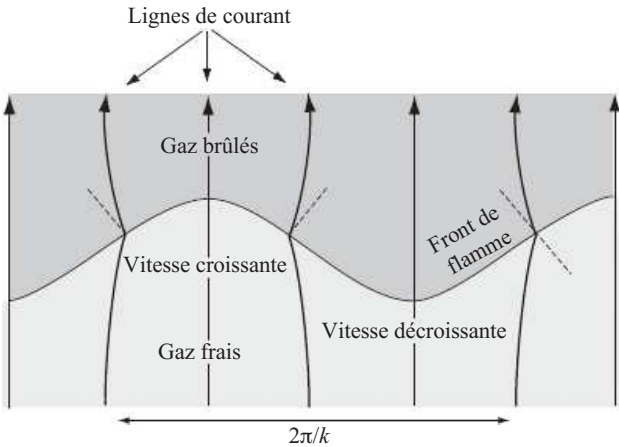


FIG. 10.29 – Schéma de l'instabilité de Landau-Darrieus : une modulation du profil transverse d'une flamme plane est amplifiée par la réfraction des lignes de courant.

Justification. Comme sur la figure 10.27 CC, la composante normale de la vitesse locale varie, en effet, au passage du front (Éq. 10.145a) alors que la composante tangentielle est continue ; on doit, d'autre part, retrouver une vitesse constante à la fois en amont et en aval.

Ainsi, dans les zones de vitesse croissante (Fig. 10.29), la vitesse v_f des gaz est plus faible en valeur absolue que la vitesse intrinsèque u_d en sens inverse du front : celui-ci n'est localement plus stationnaire et la déformation s'amplifie. Dans les zones de vitesse décroissante, on a au contraire $|v_f| < |u_d|$, mais la déformation (qui est en sens inverse) est également amplifiée.

Note. Le développement de ces instabilités peut être freiné par l'effet de la gravité (pour une flamme verticale et un contraste de densité stabilisant entre les deux côtés du front de flamme) : cet effet sera surtout sensible aux grandes longueurs d'onde alors que des phénomènes de diffusion empêchent le développement de déformations de courte longueur d'onde. On voit donc se développer préférentiellement des déformations de longueur caractéristique intermédiaire.

On observe également ces instabilités pour des flammes se propageant dans un mélange au repos comme sur la figure 10.30 CC.

This page intentionally left blank

Chapitre 11

Instabilités hydrodynamiques

LES INSTABILITÉS EN MÉCANIQUE DES FLUIDES recouvrent une large palette de phénomènes que l'on peut mettre en correspondance avec d'autres domaines de la science (changements de phase en physique de la matière condensée; flambage en mécanique des solides...). Ces instabilités correspondent à des bifurcations observées lorsqu'un paramètre de contrôle (différence de température en convection thermique par exemple) dépasse une valeur seuil. Elles entraînent généralement une réduction de la symétrie initiale de l'écoulement que l'on caractérise par un paramètre d'ordre. L'amplitude des instabilités les plus simples augmente de façon continue et réversible lorsque le paramètre de contrôle s'écarte du seuil. D'autres sont hystérétiques ou conduisent à une perte complète de symétrie (turbulence). Nous introduirons le formalisme général de Landau de description des instabilités (section 11.1) en commençant par un exemple mécanique; nous appliquerons ensuite ce formalisme aux régimes d'écoulement autour d'un cylindre déjà décrits de façon qualitative à la section 2.4.2. Nous nous intéresserons ensuite (section 11.2) à l'instabilité convective classique de Rayleigh-Bénard induite par un gradient de température vertical : elle se produit au-delà d'une différence de température seuil déterminée par la compétition entre les forces dues au gradient de densité qui créent l'écoulement et les effets diffusifs qui s'y opposent. Nous discuterons ensuite dans la section 11.3 la correspondance et les différences avec d'autres instabilités d'écoulements fermés gouvernées par la force centrifuge (instabilité de Taylor-Couette) ou par les gradients de tension superficielle (instabilité de Bénard-Marangoni). Ce dernier cas nous permettra d'introduire la notion d'instabilité sous-critique. Dans la section 11.4, nous aborderons les écoulements ouverts par l'exemple de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz pour deux écoulements parallèles de vitesses différentes; nous évoquerons ensuite l'influence de la forme des profils de vitesse de ces écoulements avant de discuter la stabilité des écoulements de Couette et de Poiseuille.

11.1 Une approche globale des instabilités : le modèle de Landau

Plutôt que de déterminer l'ensemble du champ de vitesse local pour décrire le passage, suite à une instabilité, d'un régime d'écoulement à un autre, une approche simple mais fructueuse consiste à le caractériser par des variables macroscopiques ; ce pourra être, par exemple, une composante de Fourier de la vitesse de l'écoulement si l'instabilité présente une périodicité spatiale ou temporelle. De tels modèles ont été initialement développés par le physicien Lev Landau pour décrire des transitions de phase autour d'un seuil (point critique) dans des systèmes à l'équilibre thermodynamique.

Dans ce type d'approche, on utilise un développement limité d'une quantité (*paramètre d'ordre*) caractéristique du degré d'évolution de la transition en fonction d'un *paramètre de contrôle* représentant la distance au seuil. Ainsi, pour le point critique liquide-gaz (modèle de Van der Waals), le paramètre de contrôle est l'écart relatif $(T - T_c)/T_c$ de la température T à la valeur critique T_c . Le paramètre d'ordre est la différence de densité entre le liquide et le gaz ; elle n'est non nulle qu'aux températures inférieures à T_c où liquide et gaz peuvent coexister. Nous utilisons ci-dessous une extension aux systèmes hors équilibre que constituent les écoulements. Mais, avant d'appliquer cette approche à un premier exemple (les écoulements derrière un cylindre), nous présentons un modèle analogique mécanique simple d'instabilité qui dégage les caractéristiques essentielles des approches « à la Landau ».

11.1.1 Un modèle expérimental simple d'instabilité mécanique

On considère une bille de masse m libre de glisser sans frottement le long d'un anneau circulaire vertical de rayon R , tournant à une vitesse angulaire Ω autour d'un axe vertical (Fig. 11.1a). Nous analysons l'évolution de la position d'équilibre de la bille en fonction de la vitesse angulaire Ω (cette position est caractérisée par l'angle θ avec la verticale). Dans le repère de l'anneau, l'énergie totale de la bille est son énergie potentielle, somme d'un terme de gravité et d'un terme de force centrifuge avec :

$$E_p = mgR(1 - \cos \theta) - \frac{m\Omega^2 R^2}{2} \sin^2 \theta. \quad (11.1)$$

Justification. Pour calculer cette énergie, on calcule le travail des composantes de forces tangentielles à l'anneau qui s'exercent sur la bille lorsque l'on déplace cette dernière de l'angle 0 à l'angle θ . Les composantes normales sont, en effet, équilibrées par la réaction de l'anneau. Pour un angle θ donné, les composantes tangentielles des forces sont respectivement $-mg \sin \theta$ et $m\Omega^2 R \sin \theta \cos \theta$, d'où une résultante :

$$F_t = -mg \sin \theta + m\Omega^2 R \sin \theta \cos \theta. \quad (11.2)$$

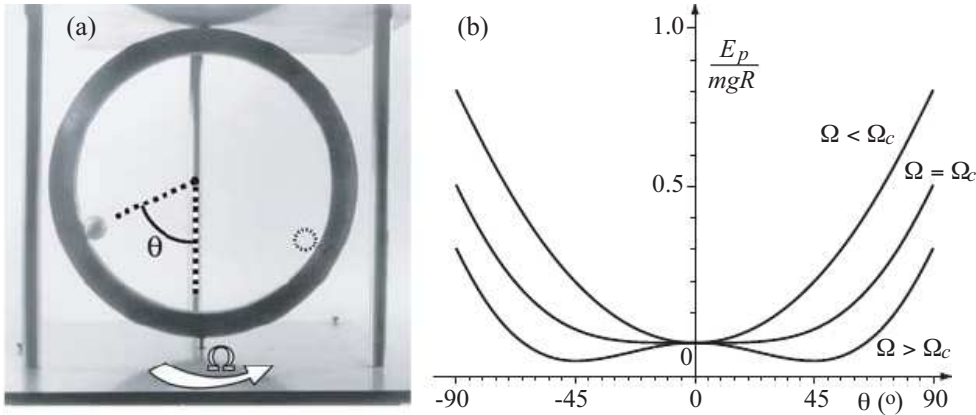


FIG. 11.1 – (a) Modèle expérimental d’instabilité mécanique d’une bille dans un cerceau en rotation autour d’un axe vertical (doc. C. Rousselin). (b) Variation de l’énergie potentielle totale normalisée E_p/mgR de la bille résultant de la gravité et de la force centrifuge avec sa position angulaire θ pour trois vitesses de rotation normalisées, avec : $\Omega/\Omega_c = 0,6$ (courbe supérieure), $=1$ (courbe centrale) et $=1,2$ (courbe inférieure); Ω_c est la vitesse critique $(g/R)^{1/2}$. Suivant la vitesse de rotation, on a soit une position d’équilibre stable, soit deux stables et une instable.

En choisissant la convention d’une énergie totale nulle pour $\theta = 0$, on obtient alors l’expression (11.1) en calculant l’intégrale $E_p = - \int_0^\theta F_t(\theta) R d\theta$.

La Figure 11.1b montre la variation de la valeur de E_p normalisée par mgR en fonction de θ pour trois vitesses de rotation différentes. Les positions d’équilibre de la bille correspondent aux extrema de E_p pour lesquels on a également $F_t = 0$ puisque $F_t = -dE_p/d\theta$. On trouve une seule position d’équilibre lorsque $\Omega \leq \Omega_c$ et deux positions d’équilibre stables et une instable pour $\Omega > \Omega_c$. La valeur seuil vaut :

$$\Omega_c = \sqrt{g/R}. \tag{11.3}$$

Justification. La valeur $\theta = 0$ sera toujours solution de $F_t = 0$. Les autres valeurs d’angle rendant F_t nul doivent vérifier : $\cos \theta = g/(\Omega^2 R)$; on ne trouvera de valeur d’angle correspondante que si $g/(\Omega^2 R) \leq 1$ ce qui redonne la valeur seuil précédente.

Suivant les valeurs de Ω , on a donc les résultats suivants :

- Pour $\Omega \leq \Omega_c$, La courbe de variation d’énergie $E_p(\theta)$ a un seul minimum correspondant à un équilibre stable à $\theta = 0$.
- Pour $\Omega > \Omega_c$, la position $\theta = 0$ correspond à un maximum et donc à un équilibre instable. Il existe deux positions d’équilibre stable symétriques $\pm\theta_e$, telles que $\cos \theta_e = g/(\Omega^2 R)$. Ces deux positions viennent se confondre en $\theta = 0$ pour $\Omega = \Omega_c$.

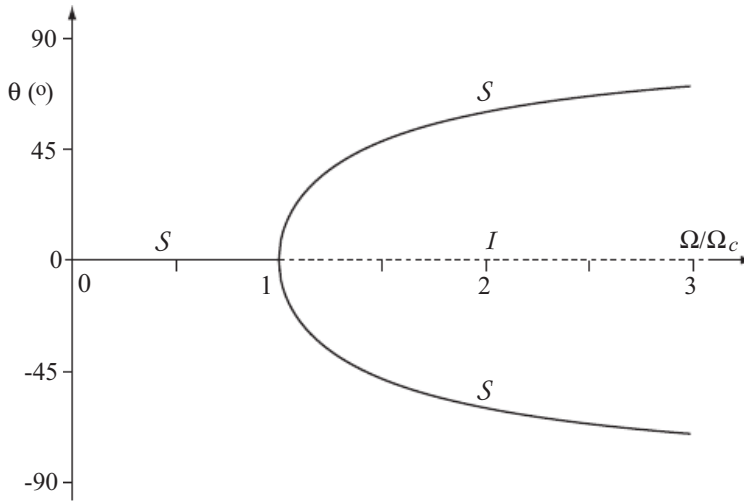


FIG. 11.2 – Variation de la position angulaire de la bille dans le modèle expérimental d'instabilité mécanique en fonction de la vitesse de rotation angulaire Ω . Ω_c est le seuil d'instabilité, les branches $\mathcal{S}$ correspondent à des équilibres stables, la branche $\mathcal{I}$ à un équilibre instable.

Dans le vocabulaire classique des modèles de type Landau, la variation en fonction de Ω des angles θ d'équilibre stable, représentée schématiquement sur la figure 11.2, est le *diagramme de bifurcation* du système. Dans cette transition mécanique, l'angle d'équilibre θ est le *paramètre d'ordre* et Ω le *paramètre de contrôle*. Au-dessus du seuil Ω_c , le système « choisit » l'une des solutions $+\theta$ ou $-\theta$ (l'une des deux branches du diagramme de stabilité). Ce choix s'accompagne d'une réduction de symétrie, dite *brisure de symétrie*, de l'ensemble du système {anneau + bille} : on perd, en effet, la symétrie par rapport à l'axe vertical dès lors que la bille s'écarte de la position $\theta = 0$.

Dans la limite $\Omega \rightarrow \Omega_c$ et aux faibles valeurs de θ , on peut écrire la variation de l'énergie potentielle sous forme du développement suivant par rapport à la variable $\Omega - \Omega_c$ (dit développement de Landau) :

$$E_p = mR^2 \left[-\theta^2 \Omega_c (\Omega - \Omega_c) + \theta^4 \left(\frac{\Omega_c^2}{8} \right) \right]. \quad (11.4)$$

Au-dessus du seuil, les solutions prennent la forme simplifiée :

$$\theta(\epsilon) = \pm 2 \epsilon^\beta \quad (11.5a)$$

avec :

$$\epsilon = \frac{\Omega - \Omega_c}{\Omega_c} \quad (11.5b)$$

et un exposant :

$$\beta = \frac{1}{2}.$$

L'exposant β , qualifié de critique, caractérise l'augmentation de l'angle θ (paramètre d'ordre) avec la vitesse de rotation Ω (paramètre de contrôle) au-dessus du seuil.

Remarque. Le modèle de Landau a été développé initialement pour expliquer les transitions de phase du deuxième ordre, puis appliqué aux instabilités hydrodynamiques. Il suppose que l'on peut moyenner les interactions locales à l'aide d'un *champ moyen*, ce qui est le cas pour plusieurs des instabilités hydrodynamiques que nous allons décrire. En revanche, pour une transition telle que le point critique des fluides, cette hypothèse, équivalente à celle du modèle simple de Van der Waals, n'est pas valable pour les fluides réels à cause des fortes fluctuations thermiques.

Notons une autre analogie entre le modèle mécanique et les transitions de phase : près du seuil Ω_c , la bille revient très lentement à sa position d'équilibre si on l'écarte de cette dernière : cela vient de la forme très plate de la courbe correspondante de variation d'énergie potentielle avec θ . De même, près du point critique d'un liquide, on a une divergence de la durée des fluctuations (par exemple de densité) observées : on parle alors de *ralentissement critique*.

11.1.2 Écoulement autour d'un cylindre au voisinage du seuil d'émission de tourbillons

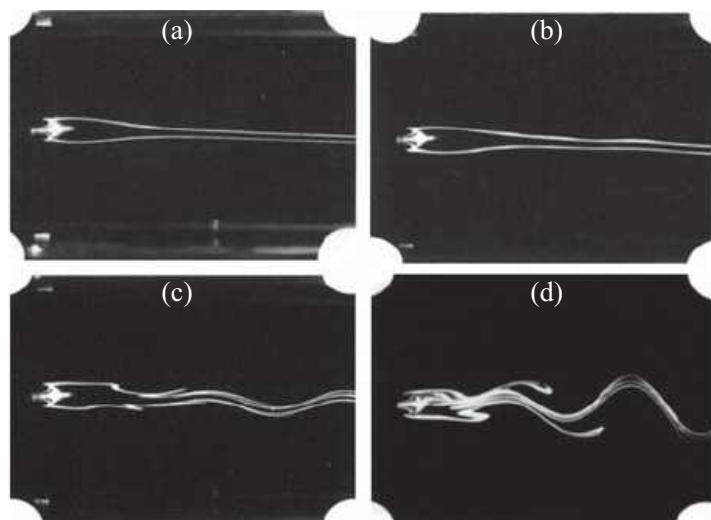


FIG. 11.3 – Écoulement visualisé par un colorant derrière un cylindre pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, voisines du seuil Re_c d'émission de tourbillons ; (a) $(Re - Re_c) = -0,4$, absence de tourbillons ; (b) $(Re - Re_c) = 0,3$, ondulation légère ; (c) $(Re - Re_c) = 1$, oscillation amplifiée ; (d) $(Re - Re_c) = 5,2$, formation de tourbillons alternés en aval du cylindre (docs. C. Mathis et M. Provansal).

L'émission de tourbillons alternés derrière un cylindre (section 2.4.2) conduit à une première application du modèle de Landau en mécanique des

fluides. On choisit comme *paramètre de contrôle* le rapport :

$$\varepsilon = \frac{Re - Re_c}{Re_c}. \quad (11.5)$$

Ce dernier caractérise l'écart relatif du nombre de Reynolds Re par rapport à sa valeur critique Re_c à la transition entre les régimes d'écoulement stationnaire et de décrochement périodique des tourbillons. L'amplitude A_y des oscillations de la composante de la vitesse transverse, induites par l'émission de tourbillons, sera utilisée comme *paramètre d'ordre* de la transition. Elle peut être mesurée par la technique de vélocimétrie laser (section 3.5.3) dans des zones de fortes vitesses et elle est non nulle lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à la valeur critique Re_c .

Analysons tout d'abord l'évolution de l'écoulement en aval du cylindre : on se place à des nombres de Reynolds Re légèrement supérieurs au seuil Re_c où l'on observe une émission périodique de tourbillons et donc une variation périodique de la vitesse. L'ensemble des photographies de la figure 11.3 présente de façon qualitative les écoulements au voisinage immédiat du seuil. Tant que l'amplitude A_y des oscillations de la vitesse est assez petite pour que l'analyse linéaire effectuée précédemment reste valable, on a :

$$A_y = 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon < 0 \quad (11.6)$$

et :

$$(A_y)^2 \propto \varepsilon = \frac{Re - Re_c}{Re_c} \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0. \quad (11.7)$$

Cette variation, tracée sur la figure 11.4a, est, dans ce cas, similaire à celle obtenue pour le système mécanique décrit à la section 11.1.1. La brisure de symétrie apparaît lors du choix du côté du cylindre où s'effectue l'émission du premier tourbillon.

Note. En toute rigueur, il convient de ne pas restreindre l'étude de l'analyse de la variation de l'amplitude $A_y(Re)$ à un point donné en aval de l'obstacle, mais il faudrait aussi analyser l'évolution temporelle de l'ensemble du profil. La géométrie de ce profil varie d'ailleurs avec le paramètre $(Re - Re_c)$, ce qui n'est pas inclus dans le simple modèle de Landau, mais dans un modèle dérivé de ce dernier, dit de *Ginzburg-Landau*, qui prend en compte les variations spatiales du paramètre d'ordre.

11.1.3 Évolution temporelle des instabilités dans le modèle de Landau

Nous allons maintenant présenter plus complètement ce modèle et, en particulier, inclure des effets de variations temporelles. Ces dernières peuvent résulter de l'apparition d'instabilités dépendant du temps comme, dans le cas présent, des émissions périodiques de tourbillons derrière un cylindre. Elles

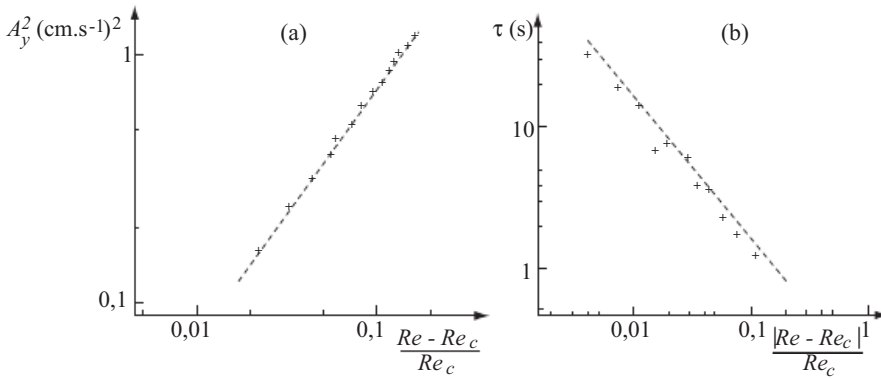


FIG. 11.4 – (a) Variation, en régime permanent, du carré de l’amplitude A_y des oscillations de vitesse induites par l’émission des tourbillons de Bénard-von Kármán derrière un cylindre de diamètre 6 mm en fonction de l’écart normalisé $(Re - Re_c)/Re_c$ du nombre de Reynolds au seuil Re_c . La droite pointillée correspond à une variation en $(Re - Re_c)/Re_c$. (b) Variation du temps caractéristique $\tau = 1/\sigma_r$ de relaxation d’une perturbation au-dessous du seuil Re_c en fonction de l’écart normalisé $(Re_c - Re)/Re_c$. La droite pointillée correspond à une variation en $((Re_c - Re)/Re_c)^{-1}$ (d’après C. Mathis et M. Provansal).

peuvent aussi correspondre à l’évolution de l’amplitude de l’instabilité après une variation du paramètre de contrôle. Dans le cas général, il peut se superposer tout un ensemble de modes d’instabilités à un écoulement laminaire initial (stable pour $Re < Re_c$). Nous nous intéresserons par la suite uniquement au mode dominant, qui est celui pour lequel le taux de croissance initiale des instabilités est le plus élevé.

En supposant une instabilité linéaire, l’amplitude $A(t)$ de ce mode est de la forme $\exp(\sigma t)$ où $\sigma = \sigma^r + i\sigma^i$ est le taux complexe de croissance de l’instabilité. Le terme imaginaire caractérise la fréquence des oscillations observées au-dessus du seuil. La partie réelle traduit la croissance ($\sigma^r > 0$) ou la décroissance ($\sigma^r < 0$) du mode :

- pour $Re < Re_c$, toutes les perturbations décroissent exponentiellement et la partie réelle de σ est négative ($\sigma^r < 0$) ;
- pour $Re = Re_c$, le mode dominant est *marginalelement stable* avec $\sigma^r = 0$;
- pour $Re > Re_c$, on a $\sigma^r > 0$; le mode dominant se développe alors au cours du temps et son amplitude augmente comme $A_y(t) \propto e^{\sigma^r t}$. Cela représentera ici le développement de l’émission de tourbillons.

Intéressons-nous maintenant à l’évolution de la moyenne temporelle $|A|^2 = \langle |A(t)|^2 \rangle$. Cette moyenne doit être calculée sur un temps long devant

la période $T \approx 2\pi/\sigma^i$ de l'oscillation, mais suffisamment court devant le temps caractéristique $\tau \approx 1/\sigma^r$ de croissance ou de décroissance de l'amplitude. Ces deux contraintes définissent le domaine de validité de l'équation de Landau ; elles ne peuvent être simultanément vérifiées que si $\sigma^i \gg \sigma^r$, ce qui est vrai près du seuil où σ^r s'annule. Dans cette limite, la vitesse croît alors exponentiellement selon $A_y(t) \propto e^{\sigma^r t}$. Le carré du module de l'amplitude est donc solution de l'équation :

$$\Phi(A) = 2\sigma^r |A|^2. \quad (11.8)$$

L'expression de l'amplitude $A(t)$ de la perturbation résultant de la relation (11.8) n'est cependant pas valable aux temps longs car cette amplitude doit rester bornée. Pour assurer cette saturation, Landau a complété l'équation (11.8) en incluant un terme supplémentaire au développement en puissances dans le membre de droite soit :

$$\frac{d}{dt} |A(t)|^2 = -\Phi(A) \quad (11.9a)$$

où :

$$\Phi(A) = -2\sigma^r |A|^2 + 2b |A|^4. \quad (11.9b)$$

Le terme du troisième ordre contient, en effet, un facteur périodique dont la valeur moyenne est nulle. Le second terme non nul est d'ordre 4 et son amplitude doit être positive ($b > 0$) pour éviter la divergence de la solution aux temps longs.

Remarque. La forme de ce potentiel est la même que celle que nous avons trouvée pour le développement (11.4) de l'énergie totale dans l'exemple de la bille. Le paramètre d'ordre θ dans ce dernier cas correspond à la variable A dans le présent exemple. Dans l'exemple de la bille, nous avons cependant laissé de côté l'évolution temporelle en ne nous préoccupant que des positions d'équilibre.

On obtient donc :

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\sigma^r |A|^2 - 2b |A|^4. \quad (11.10)$$

L'équation (11.10) peut être transformée pour décrire l'évolution de l'amplitude $|A|$:

$$\frac{d|A|}{dt} = \sigma^r |A| - b |A|^3. \quad (11.11)$$

Cette équation sera suffisante pour décrire une instabilité conduisant à un écoulement stationnaire, telle que l'instabilité de Rayleigh-Bénard étudiée dans la section 11.2.

Pour une instabilité générant un écoulement périodique, comme l'émission de tourbillons, on utilisera la forme plus générale portant sur l'amplitude complexe $|A|(t) e^{i\varphi}$ et utilisant une valeur complexe $\sigma = \sigma^r + i\sigma^i$ de σ :

$$\frac{dA}{dt} = \sigma A - b |A|^2 A = (\sigma^r + i\sigma^i)A - b |A|^2 A. \quad (11.12)$$

Cette écriture redonne l'équation (11.11) pour le module ainsi qu'une nouvelle équation pour l'évolution de la phase :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sigma^i. \quad (11.13)$$

Ici, $\sigma^i = \omega$ représente la pulsation de l'émission des tourbillons.

Dans le cas présent, l'équation (11.12) rend compte des différentes caractéristiques de l'apparition d'une émission de tourbillons derrière un cylindre :

- La solution stationnaire en amplitude a un module $|A_{eq}| = \sqrt{\sigma^r/b}$. Si l'on développe σ^r en puissances du nombre de Reynolds, on obtient : $\sigma^r = k'(Re - Re_c) + O(Re - Re_c)^2$, où k' est positif et est l'inverse d'un temps caractéristique du problème. L'amplitude stationnaire de l'oscillation vérifie donc (Éq. 11.11) :

$$|A_{eq}| = \sqrt{\frac{\sigma^r}{b}} \propto \sqrt{Re - Re_c}. \quad (11.14)$$

La variation du module $|A_{eq}|$ du paramètre d'ordre avec le paramètre de contrôle ε de l'instabilité doit donc être du même type que celle illustrée par la figure 11.2. La figure 11.4a montre des résultats de mesure de vitesse par anémométrie laser derrière un cylindre : on observe que $|A_{eq}|^2$ est bien proportionnel à $Re - Re_c$ au-dessus du seuil Re_c (la variation a une pente 1 dans les coordonnées logarithmiques utilisées). D'autre part, $|A_{eq}|^2$ est nul pour $Re < Re_c$.

Remarque. Ces résultats permettent de tracer pour l'émission de tourbillons un diagramme identique à celui de la figure 10.2 en remplaçant θ par $|A_{eq}|$ et Ω par Re . La deuxième branche représente la possibilité d'émettre initialement un tourbillon d'un côté ou de l'autre du cylindre (rupture initiale de la symétrie de l'écoulement).

- Le paramètre caractéristique $1/\sigma^r$ caractérisant la dynamique de l'instabilité vérifie :

$$\frac{|A|}{d|A|/dt} = \frac{1}{\sigma^r} \propto \frac{Re_c}{Re - Re_c}. \quad (11.15)$$

Au-dessus du seuil, $1/\sigma^r$ rend compte du taux de croissance de l'instabilité ; au-dessous, la valeur négative de $1/\sigma^r$ traduit l'amortissement d'une perturbation consistant en une émission transitoire de tourbillons. La figure 11.4b montre que le temps caractéristique $\tau = 1/|\sigma_r|$ est bien proportionnel à $|Re - Re_c|^{-1}$ en dessous du seuil.

Remarque. L'équation de Landau permet donc de décrire des effets précurseurs observés juste au dessous du seuil ; une faible perturbation de l'écoulement suffit dans ce domaine à déclencher une oscillation, qui s'amortit ensuite exponentiellement au cours du temps.

Les prédictions précédentes sur la variation de $1/\sigma^r$ sont en accord avec les mesures expérimentales sur l'écoulement derrière un obstacle. La figure 11.5 montre ainsi l'évolution temporelle de l'oscillation de la composante transverse de la vitesse induite par une petite perturbation en amont de l'obstacle pour diverses valeurs négatives du paramètre ε . Des tourbillons apparaissent dans le sillage pendant un temps limité, en aval du cylindre. De plus, la fréquence des oscillations ainsi déclenchées est très proche de la fréquence σ^i des oscillations naturelles qui apparaissent au seuil, puisque σ^i n'a pas de comportement singulier pour la valeur Re_c .

Expérimentalement, le temps caractéristique de la relaxation exponentielle de l'oscillation varie comme $|Re - Re_c|^{-1}$, ainsi que le prédit l'équation (11.15) et comme le montre la figure 11.4b.

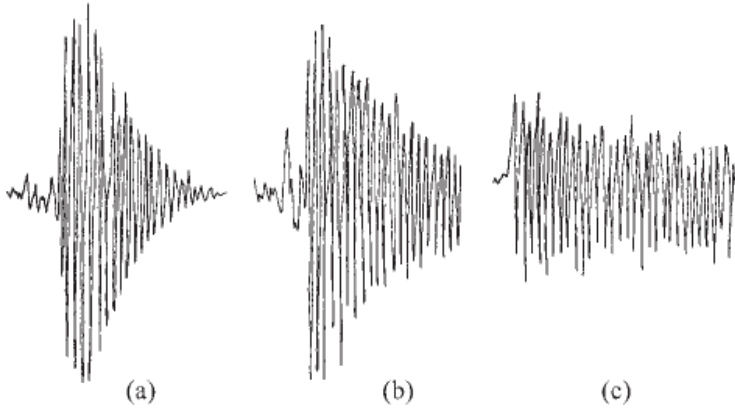


FIG. 11.5 – Variation de l'amplitude de l'oscillation de la vitesse en réponse à une impulsion initiale à différentes distances au-dessous du seuil Re_c . On remarque que la fréquence est peu sensible à la valeur de ε , mais que le temps de relaxation τ devient long près du seuil $Re_c = 47$. Les trois courbes correspondent à des valeurs de $|\varepsilon| = |Re - Re_c|/Re_c$ respectivement égales à 0,2 (a), 0,057 (b) et 0,027 (c) (docs. C. Mathis et M. Provansal).

La divergence de ce temps, lorsque le nombre de Reynolds devient égal à Re_c , est le *ralentissement critique* : on le retrouve, comme nous l'avons dit, dans les transitions de phase du second ordre. Le nombre de Reynolds critique dans cette expression a la même valeur que celui déterminé par la loi de croissance de l'amplitude. Plus précisément, la variation expérimentale du temps de relaxation τ peut être exprimée en fonction du temps de diffusion visqueuse d^2/ν (d est le diamètre de l'obstacle et ν la viscosité cinématique de liquide) par :

$$\tau = \frac{1}{|\sigma^r|} \simeq 5 \frac{d^2}{\nu |Re - Re_c|}. \quad (11.16)$$

11.2 Instabilité de Rayleigh-Bénard

Dans cette section, nous étudions une instabilité hydrodynamique, dite de *Rayleigh-Bénard*, induite par des variations de densité (et donc de forces en volume) résultant de variations de température au sein d'un fluide. Cette instabilité est celle d'un fluide contenu entre deux plaques horizontales et soumis à un gradient vertical de température. Une caractéristique essentielle de tels phénomènes de *convection thermique* est le couplage étroit entre les champs de température et de vitesse du fluide.

Note. Cette instabilité associe le nom du physicien français Henri Bénard qui fit les premières descriptions de la formation de structures convectives périodiques d'une nappe liquide chauffée par au-dessous, au-dessus d'un seuil de température, et de Lord Rayleigh qui l'interprétera ultérieurement en termes de l'effet de la dilatation thermique. Cependant, l'instabilité observée par Bénard sur une couche liquide, dont la surface supérieure est libre, était due principalement à des gradients de tension superficielle (ou effet Bénard-Marangoni étudié à la section 11.3.1).

Nous allons, tout d'abord, rechercher les conditions d'apparition de l'instabilité à partir des équations de mouvement et de transport et du champ de vitesse locaux. Nous montrerons ensuite que, comme l'apparition de tourbillons derrière un cylindre, cette instabilité peut aussi être décrite par le formalisme global de Landau.

Remarque. Nous avons étudié à la section 4.5.5 un écoulement de convection thermique induit, au contraire, par un gradient horizontal de température dont résulte une poussée d'Archimède. Il ne s'agissait pas, dans ce cas, d'une instabilité : il n'y avait, en effet, pas de seuil de température pour produire l'écoulement dont la vitesse augmentait linéairement avec le gradient.

11.2.1 Équations de transport thermique convectif

Le couplage entre la température et la vitesse du fluide apparaît dans les deux équations qui gouvernent ce type de problème : l'équation de transport thermique et l'équation de Navier-Stokes. Dans la première, les termes de transport par convection sont à l'origine de variations de température induites par l'écoulement. Dans la deuxième, ce sont les variations de masse volumique avec la température qui sont responsables de l'écoulement du fluide.

En présence d'un écoulement de vitesse $\mathbf{v}$ et en l'absence de sources thermiques en volume, l'équation de transport thermique déjà discutée au chapitre 10 (Éq. 10.90a) s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) T = \kappa \Delta T. \quad (11.17)$$

Rappelons que cette équation représente simplement l'application, à une particule de fluide en mouvement, de l'équation de Fourier de transport thermique

établie au chapitre 1 (Éq. 1.17). La dérivée dT/dt représente la variation de température d'une particule que l'on suit pendant son déplacement : c'est la dérivée lagrangienne que nous avons appliquée au cours de cet ouvrage aux diverses grandeurs qu'il est possible d'associer à une particule de fluide (vitesse, température, concentration d'un traceur...). La dérivée $\partial T/\partial t$ représente la variation de température en un point fixe donné. Le deuxième terme $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})T$ de l'expression de dT/dt décrit le transport thermique associé à l'écoulement du fluide.

Le champ de vitesse $\mathbf{v}$, qui apparaît dans l'équation de diffusion-convection (11.17), peut représenter un écoulement imposé : on parle alors de *convection forcée*. Nous nous intéressons ici au cas opposé de la *convection libre*, où les écoulements sont induits par des variations spatiales de température : c'est, par exemple, le cas de la circulation d'air chaud au-dessus d'un radiateur.

La seconde équation à considérer est l'équation (4.30) de Navier-Stokes ; après division par ρ , elle s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}. \quad (11.18)$$

L'origine essentielle du couplage entre la vitesse du fluide et les variations spatiales de la température est la variation de la masse volumique ρ du fluide avec la température T . Ces variations de ρ interviennent, en effet, dans le terme $-(1/\rho) \mathbf{grad} p$ de l'équation de Navier-Stokes.

11.2.2 Stabilité d'une couche fluide en présence d'un gradient vertical de température

Considérons une couche de fluide entre deux plaques horizontales planes fixes portées à des températures différentes. La masse volumique du fluide diminue lorsque la température augmente : aussi, si la température de la plaque inférieure est plus faible que celle de la plaque supérieure, la stratification de densité est stable (fluide dense au-dessous). Cet effet apparaît dans l'atmosphère de certaines villes, lorsque les nappes d'air chaud sont au-dessus de celles d'air plus frais. Cette configuration d'*inversion de température* ne permet pas l'élimination correcte de la pollution (Fig. 11.6 CC) et il se forme un brouillard dans la partie supérieure de l'atmosphère : ce dernier renforce ce processus en absorbant le rayonnement solaire et en empêchant le réchauffement des couches basses.

Dans le cas opposé d'un fluide chauffé par au-dessous, on se trouve dans une situation instable, car les particules de fluide de plus faible densité sont situées au-dessous de celles de plus grande densité. Cependant, contrairement au cas d'un gradient horizontal, un mouvement du fluide n'apparaît que lorsque la différence de température excède une certaine valeur, appelée *seuil de l'instabilité*. Ce phénomène est appelé *instabilité de Rayleigh-Bénard*.

Remarque. Nous supposons ici et dans toute la suite que la densité des fluides utilisés diminue d'une manière monotone avec la température. Ce n'est pas toujours le cas et, par exemple, l'eau liquide a un maximum de densité à 4 °C. Cette anomalie de densité explique que sous la surface de lacs ou de rivières gelés, on trouve d'abord une couche d'eau à 0 °C en équilibre de fusion avec la glace puis, au-dessous, une couche de liquide plus dense à 4 °C. La stratification dans cette couche est stable : la présence d'une couche liquide permet la subsistance d'une vie aquatique.

11.2.3 Description de l'instabilité de Rayleigh-Bénard

Décrivons tout d'abord les résultats expérimentaux obtenus (T_1 est la température de la plaque supérieure ($y = a$) et $T_2 > T_1$ celle de la plaque inférieure ($y = 0$)) (Fig. 11.8).

- Tant que la différence de température $T_2 - T_1 = \Delta T$ est inférieure à une valeur critique ΔT_c , les échanges thermiques sont purement diffusifs (comme dans le cas où l'on chauffe le fluide par le dessus).

- Au-dessus d'une valeur ΔT_c , on observe une mise en mouvement du fluide : un ensemble de rouleaux contrarotatifs parallèles apparaît simultanément dans l'ensemble de la cellule (Fig. 11.7). Leur diamètre est voisin de la distance entre plaques. La vitesse du fluide dans les rouleaux varie continûment et réversiblement lorsque l'on fait varier l'écart ($\Delta T - \Delta T_c$) au-dessus du seuil.

- Suffisamment au-dessus du seuil ΔT_c , on peut identifier d'autres seuils où se produisent des phénomènes instationnaires : on les détecte en analysant la variation du signal de thermocouples mesurant localement la température. On constate l'existence de fluctuations de température couplées à celles du champ de vitesse. Les différentes séquences d'instabilités qui conduisent à la turbulence ont été largement étudiées en relation avec leurs aspects mathématiques.

Nous allons maintenant proposer plusieurs déterminations approchées du seuil ΔT_c qui nous familiariseront avec les diverses façons d'aborder ce type de problème d'instabilité.

11.2.4 Mécanisme de l'instabilité de Rayleigh-Bénard et ordres de grandeur

Mécanisme qualitatif de l'instabilité

Le mécanisme peut être compris à partir du diagramme de la figure 11.8.

- Supposons qu'une perturbation initiale θ de température par rapport à la température d'équilibre $T(y)$ apparaisse dans un petit volume de fluide.

- Par suite de la poussée d'Archimède, un mouvement vertical est induit sur les particules de fluide correspondantes : si θ est positif, la densité des particules diminue et le mouvement est ascendant.



FIG. 11.7 – Système de rouleaux de convection d’une couche circulaire d’huile entre deux plaques maintenues à des températures différentes (vue de dessus). Les lignes blanches où la lumière est focalisée correspondent à celles des zones de séparation entre deux rouleaux où le fluide est ascendant. Les défauts et branchements du réseau de rouleaux sont dus aux conditions aux limites circulaires imposées, les rouleaux se raccordant préférentiellement à angle droit aux parois latérales (cliché V. Croquette, P. Legal et A. Pocheau).

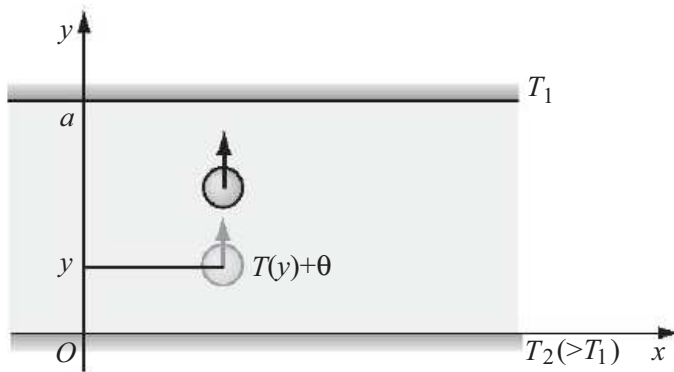


FIG. 11.8 – Schéma qualitatif du démarrage de l’instabilité de Rayleigh-Bénard. Une fluctuation locale de température κ d’une particule de fluide (en grisé) initie un mouvement convectif vertical. La particule, une fois déplacée (en traits pleins), se trouve soumise à une différence de température d’autant plus grande qu’elle échange moins son énergie thermique avec l’extérieur, ce qui renforce la fluctuation initiale.

- Si ces particules ne se refroidissent pas trop vite, leur contraste de densité avec le fluide environnant (de plus en plus froid) et, par suite, la poussée d’Archimède augmente au fur et à mesure qu’elles montent. Cet effet renforce celui de la perturbation initiale de température et amplifie la convection.

Cette boucle de réaction positive permet à l’instabilité convective de s’auto-entretenir ; il faut cependant que les mécanismes stabilisants, que sont la diffusivité thermique (qui étale la perturbation de température) et la viscosité cinématique (qui atténue la perturbation de vitesse), ne soient pas trop

importants. Les conditions de démarrage de l'instabilité sont donc étroitement contrôlées par les valeurs relatives des constantes de temps d'échange thermique et de quantité de mouvement qui interviennent dans le problème. Un paramètre très important est le *nombre de Prandtl* $Pr = \nu/\kappa$, défini à la section 2.3.2, qui caractérise les diffusivités relatives de la quantité de mouvement et de la température. L'analyse qualitative que nous présenterons dans le paragraphe suivant correspond au cas où le nombre de Prandtl est très supérieur à l'unité : cela est vérifié, par exemple, pour des huiles très visqueuses. Dans ce cas, le temps de diffusion visqueuse de la quantité de mouvement sur une distance donnée est beaucoup plus court que celui de diffusion thermique (ces temps varient respectivement en $1/\nu$ et $1/\kappa$). On dit alors que la vitesse du fluide est une variable *rapide* car elle s'ajuste vite aux changements de force verticale dus aux variations de densité ; par opposition, la température est une variable *lente*. Nous supposons donc que c'est la mise en équilibre thermique des particules déplacées de leur point d'équilibre qui contrôle cette force verticale et, par suite, l'amplification de l'instabilité. Dans le cas contraire ($Pr \ll 1$), par exemple pour le mercure, ce raisonnement n'est plus valable. Toutefois, on trouve expérimentalement et théoriquement que la valeur du seuil d'instabilité reste la même.

Critère physique d'instabilité - cas d'un nombre de Prandtl grand devant l'unité

La stabilité de la couche fluide est déterminée par la valeur du *nombre de Rayleigh* :

$$Ra = \frac{\alpha \Delta T g a^3}{\nu \kappa}, \quad (11.19a)$$

où ΔT est la différence de température entre les plaques et α caractérise la variation de la masse volumique du fluide avec la température selon :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)), \quad (11.19b)$$

T_0 est une température de référence et ρ_0 la masse volumique correspondante. Pour que l'instabilité convective se déclenche, il est nécessaire que Ra dépasse une valeur critique Ra_c : sa valeur expérimentale est 1 708 quand le fluide est entre deux plaques rigides horizontales. On remarque, en particulier, la variation très rapide du seuil avec la distance a entre les plaques : pour une épaisseur deux fois plus faible, la différence de température critique ΔT_c est huit fois plus élevée.

Ordre de grandeur. Pour une expérience réalisée avec une huile silicone avec $\nu \approx 10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $\kappa = 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $\alpha = 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ et $a = 10^{-2} \text{ m}$, on trouve une valeur $\Delta T_c \approx 1,7 \text{ K}$.

Démonstration. Analysons le mouvement d'une particule sphérique de rayon r_0 . Supposons que, par suite d'une fluctuation, on l'anime brusquement d'une vitesse $\mathbf{v}$ (comptée positivement si elle est dirigée vers le haut). Nous allons chercher

si cette fluctuation de vitesse s'atténue par la suite ou tend au contraire à s'amplifier. Du fait de son déplacement vertical, la particule arrive dans des zones de température différente de sa température initiale avec lesquelles elle ne se met pas immédiatement en équilibre thermique, surtout si Pr est élevé (en revanche, on peut supposer qu'elle atteint immédiatement un équilibre de vitesse). Estimons la différence de température δT qu'elle acquiert ainsi par rapport au fluide environnant : le temps caractéristique τ_Q de relaxation thermique vérifie :

$$\tau_Q = A r_0^2 / \kappa \quad (11.20)$$

où A est une constante géométrique. Pendant ce temps-là, la particule s'est déplacée de $\delta y = v \tau_Q$ et ses différences de température δT et de densité $\delta \rho$ par rapport au fluide environnant deviennent respectivement :

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial y} \delta y = A v \frac{r_0^2}{\kappa} \frac{\Delta T}{a} \quad (11.21)$$

et :

$$\delta \rho = -\rho_0 \alpha \delta T = -A \rho_0 \alpha v \frac{r_0^2}{\kappa} \frac{\Delta T}{a} \quad (11.22)$$

où α est définie par l'équation (11.19b). On a donc, sur la sphère, une force motrice (la poussée d'Archimède) :

$$F_m = -\frac{4}{3} \pi r_0^3 \delta \rho g = \frac{4}{3} \pi A \rho_0 \alpha g v \frac{r_0^5}{\kappa} \frac{\Delta T}{a}. \quad (11.23)$$

La vitesse v de la particule augmentera donc si la force motrice est supérieure à la force de freinage visqueux de Stokes $F_{visc} = -6\pi \eta r_0 v$ calculée au chapitre 9 (Éq. 9.53). Le critère d'instabilité devient donc :

$$F_m > F_{visc} \quad (11.24a)$$

soit :

$$\frac{4}{3} \pi A \rho_0 \alpha g v \frac{r_0^5}{\kappa} \frac{\Delta T}{a} > 6\pi \eta r_0 v. \quad (11.24b)$$

Plus la perturbation sera de grande étendue spatiale, plus elle sera instable. En prenant comme taille maximale $r_0 = a/2$ et en remplaçant η/ρ_0 par la viscosité cinématique ν , la condition d'instabilité devient :

$$Ra = \frac{\alpha \Delta T g a^3}{\nu \kappa} > \frac{72}{A} = Ra_c.$$

On retrouve donc bien la forme de la condition d'instabilité expérimentale ; la valeur numérique de Ra_c est différente, en particulier parce que la rigidité des parois n'est pas prise en compte dans le modèle simplifié. ■

Remarque.

- La valeur de la vitesse v de la particule n'intervient pas pour l'établissement du critère d'instabilité en raison de la linéarité des équations utilisées. Pour déterminer l'amplitude stationnaire de la convection une fois développée, il est nécessaire de faire intervenir des termes non linéaires supplémentaires.
- Si l'on avait pris un cylindre à la place de la sphère liquide pour respecter la symétrie des rouleaux, on aurait simplement supprimé un facteur a dans les expressions (11.22) et (11.23) ; la force sur un cylindre dépend, en effet, seulement logarithmiquement de son diamètre, comme nous l'avons vu à la section 9.5.2. Le résultat final (Éq. 11.24) serait donc inchangé, à un coefficient géométrique près.

11.2.5 Solution bidimensionnelle du problème de Rayleigh-Bénard

Calcul approché du seuil de stabilité

Expérimentalement, au-dessus du seuil d'instabilité, on observe des rouleaux parallèles contigus de section à peu près circulaire : chaque rouleau tourne en sens inverse du voisin. Aidons-nous de ce résultat et supposons d'autre part la couche de liquide infinie dans les deux directions horizontales x et z et le champ de vitesse invariant suivant z avec, de plus, $v_z = 0$; nous prendrons, comme approximation de la composante verticale v_y de la vitesse convective, la fonction périodique :

$$v_y(x, t) = v_{y0}(t) \cos kx. \quad (11.25)$$

Nous choisirons $k = \pi/a$ comme valeur du vecteur d'onde : cette valeur permet de rendre compte du fait que les rouleaux sont circulaires et d'un diamètre de l'ordre de a . Cette formulation correspond simplement à une *analyse en modes*, dans laquelle on recherche la solution à partir de ses différentes composantes de Fourier de vecteur d'onde k . L'amplitude $v_{y0}(t)$ joue le rôle d'un paramètre d'ordre pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard, tout comme l'angle θ dans l'exemple mécanique de la section 11.1.1. L'équation (11.25) ne représente qu'une approximation et ne vérifie pas, en particulier, les conditions aux limites sur les parois horizontales d'ordonnées $y = \pm a/2$: elle vérifie cependant la condition d'incompressibilité et permet d'obtenir une bonne approximation pour le nombre de Rayleigh critique. Les équations pour le transport vertical de la vitesse et de l'énergie thermique s'écrivent :

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (11.26a)$$

et :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (11.26b)$$

Remarque. Nous n'avons pas écrit la composante de l'équation (11.18) correspondant à la composante horizontale v_x ; elle serait nécessaire pour vérifier la condition d'incompressibilité, si l'on prend en compte la variation de v_y avec y , afin de reproduire de façon réaliste le champ de vitesse des rouleaux.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où l'on est près du seuil de l'instabilité, dans le cadre de l'*approximation de Boussinesq* qui consiste à négliger les variations des paramètres des fluides avec la température sauf pour l'effet de la poussée d'Archimède. On considère de plus que la variation de température par rapport au profil au-dessous du seuil θ est petite, ainsi que les composantes de vitesse v_x et v_y ce qui permet d'éliminer les termes du second ordre. Dans ce cas, les équations (11.26) peuvent être réécrites sous la forme :

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) + \alpha g \theta \quad (11.27a)$$

et :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + v_y \frac{\Delta T}{a}. \quad (11.27b)$$

Les deux expressions symétriques (11.27a-b) expriment un équilibre entre une variation temporelle et un terme diffusif freinant l'établissement des instabilités. Ce sont les termes de couplage $v_y(\Delta T/a)$ et $\alpha g \theta$ entre ces deux équations qui sont responsables du démarrage du mouvement de convection.

Démonstration. À l'ordre le plus bas en perturbation, la solution des deux équations couplées (11.26) donne $v_y = 0$ et une variation linéaire de température avec la coordonnée y . Ces solutions représentent l'état du système en l'absence de convection, au-dessous du nombre de Rayleigh critique. Dans ce régime, où le transfert thermique est purement diffusif, les champs de vitesse, de pression et de température vérifient :

$$v_y = 0, \quad (11.28a)$$

$$p_0 = cte - \rho_0 g y \quad (11.28b)$$

et :

$$T_0 = T_2 + \frac{(T_1 - T_2)y}{a} = T_2 - \frac{\Delta T}{a} y. \quad (11.28c)$$

La solution du développement en perturbation à l'ordre suivant correspond à l'apparition de l'état convectif : si l'on reste infiniment près du seuil, la vitesse v_y est un infiniment petit du premier ordre en terme de la distance au seuil. On écrira donc les champs de vitesse et de pression sous la forme :

$$T(x, y, t) = T_0(y) + \theta(x, t), \quad (11.29a)$$

$$p(x, y, t) = p_0(y) + \delta p(x, t) \quad (11.29b)$$

et :

$$\rho(x, y, t) = \rho_0(y) + \delta \rho(x, t). \quad (11.29c)$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (11.26a) p et ρ par les expressions (11.29b-c) et conservons uniquement les termes du premier ordre en v_y , $\delta \rho$ et δp . On obtient alors, en tenant compte des solutions (11.28) correspondant au régime diffusif :

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) + \frac{\delta \rho}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (\delta p)}{\partial y}. \quad (11.30)$$

En combinant les équations (11.19b), (11.28b) et (11.29), on obtient :

$$\frac{\delta \rho}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial y} = \alpha g \theta. \quad (11.31)$$

En utilisant cette valeur dans l'équation (11.30) et en supposant, de plus, que δp est seulement fonction de x et de t , elle se réduit à l'équation (11.27a). De même, en utilisant les relations (11.28c) et (11.29a) dans l'équation (11.26b), on obtient l'équation (11.27b). ■

Remarque. Dans les équations (11.27), on n'a retenu que des infiniment petits du premier ordre en v et θ . Il apparaît donc un terme de convection dans l'équation de transport thermique, mais pas dans celle de Navier-Stokes : il serait en effet du second ordre en v .

On recherche alors la condition de stabilité en se restreignant aux solutions des équations (11.27) pour lesquelles la variation de l'amplitude $v_y(x, t)$ a la forme (11.25) proposée au début de ce paragraphe avec une dépendance temporelle :

$$v_{y0}(t) = v_0 e^{\sigma t}. \quad (11.32)$$

Le paramètre réel σ est homogène à l'inverse d'un temps. La dépendance exponentielle en $e^{\sigma t}$ traduit le fait qu'une perturbation de vitesse infiniment petite tend à croître exponentiellement avec le temps ($\sigma > 0$) si ΔT est supérieur à ΔT_c et à s'amortir exponentiellement ($\sigma < 0$) dans le cas contraire. La valeur $\sigma = 0$ correspond au seuil d'instabilité où $\Delta T = \Delta T_c$. Nous avons déjà rencontré ce type de variation à la section 11.1.3, lors de l'étude du modèle de Landau pour un écoulement derrière un cylindre (où σ était complexe). On trouve alors que cette valeur seuil ΔT_c vérifie :

$$\frac{\Delta T_c}{a} = |\text{grad} T|_c = \frac{\nu \kappa k^4}{\alpha g} \quad (11.33a)$$

ou :

$$Ra_c = \frac{\alpha \Delta T_c g a^3}{\nu \kappa} = \pi^4 \quad (11.33b)$$

où le nombre de Rayleigh Ra est toujours défini par l'équation (11.19a) et où $k = \pi/a$.

Remarque. La valeur $\pi^4 \approx 97$ de l'équation (11.33b) est plus faible que la valeur expérimentale $Ra_c = 1708$ pour une couche de fluide maintenue entre deux plaques rigides. Cette différence de valeur n'est pas surprenante compte tenu des approximations que nous avons utilisées ; l'objectif était seulement d'obtenir la forme dimensionnelle correcte de Ra .

Au voisinage de Ra_c , le taux de croissance σ défini par l'équation (11.32) vérifie :

$$\sigma = \left(\frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \right) \left(\frac{\nu \kappa}{\nu + \kappa} \right) k^2. \quad (11.34)$$

Pour $Ra \rightarrow Ra_c$, la croissance des perturbations (vitesse, température) devient donc infiniment lente. Un phénomène semblable de *ralentissement critique* a été discuté en relation avec la figure 11.4b. Le passage continu de valeurs réelles négatives de σ à des valeurs positives, lorsque le nombre de Rayleigh passe par sa valeur critique, s'appelle *principe d'échange des stabilités*. Il caractérise la transition continue de l'état *thermodynamique* d'échange thermique par diffusion au-dessous du seuil, à l'état *d'ordre dynamique* convectif au-dessus.

Démonstration. À la variation du champ de vitesse donnée par les équations (11.25) et (11.32) est associée une variation analogue du champ de température avec :

$$T(x, y, t) = T_0(y) + \theta(x, t) = T_0(y) + \theta_0 \cos(kx) e^{\sigma t}. \quad (11.35)$$

Le fait que le même facteur $\cos(kx)$ se retrouve dans les deux expressions pour v_y et T vient du fait que les extrema de vitesse verticale et de température se trouvent en phase dans les colonnes ascendantes ou descendantes. En reportant ces lois de variation dans les équations de mouvement (11.27a-b) et en simplifiant par le facteur $\cos(kx) e^{\sigma t}$, on obtient alors :

$$\sigma v_0 = -\nu k^2 v_0 + \alpha g \theta_0 \quad (11.36)$$

et

$$\sigma \theta_0 = -\kappa k^2 \theta_0 + \frac{\Delta T}{a} v_0. \quad (11.37)$$

Le terme $\alpha g \theta_0$ reflète la modulation de la poussée d'Archimède du liquide due à la variation périodique de sa température dans un plan horizontal. La condition de compatibilité de ces deux équations homogènes en v_0 et θ_0 s'exprime par l'équation :

$$(\nu k^2 + \sigma) (\kappa k^2 + \sigma) - \alpha g \frac{\Delta T}{a} = 0. \quad (11.38)$$

On obtient alors l'équation (11.33a) en prenant $\sigma = 0$, et l'équation (11.33b) en supposant, de plus, que $k = \pi a$, comme on l'a indiqué au début de la présente section.

On utilise d'abord l'équation (11.38) pour calculer le taux de croissance σ de l'instabilité en fonction de l'écart $\Delta T - \Delta T_c$, supposé assez faible pour pouvoir négliger les termes en σ^2 . On en déduit ensuite l'équation (11.34) en utilisant l'expression (11.33a) de ΔT_c puisque $(Ra - Ra_c)/Ra_c = (\Delta T - \Delta T_c)/\Delta T_c$. ■

Remarque. Dans le cas le plus fréquent d'un liquide mauvais conducteur thermique, le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ est généralement très supérieur à l'unité. Le préfacteur du taux de croissance (ou de décroissance) est alors de l'ordre de κk^2 d'après l'équation (11.34) ; il est donc déterminé par la diffusion thermique. Lorsque $Ra = 0$, une perturbation de vecteur d'onde $k \approx 1/a$ proche de celle des rouleaux relaxe avec une constante de temps thermique $\tau_Q \approx a^2/\kappa$. Cela justifie l'hypothèse faite plus haut suivant laquelle, lorsque Pr est très supérieur à l'unité, c'est la diffusion thermique qui est responsable de l'amortissement des rouleaux ; la variable vitesse, qui correspond à un phénomène plus rapide, est asservie à l'évolution du champ de température. Au contraire, lorsque Pr est très inférieur à l'unité, c'est la diffusion des perturbations de vitesse qui contrôle l'atténuation du mouvement convectif.

Domaine de stabilité en fonction du vecteur d'onde

La solution complète du problème linéaire bidimensionnel, prenant en compte (contrairement au calcul précédent) les variations de vitesse dans la direction Oy et la composante v_x , conduit au *diagramme de stabilité* de la figure 11.9. La courbe sépare un domaine ($\mathcal{S}$), où le système est stable par

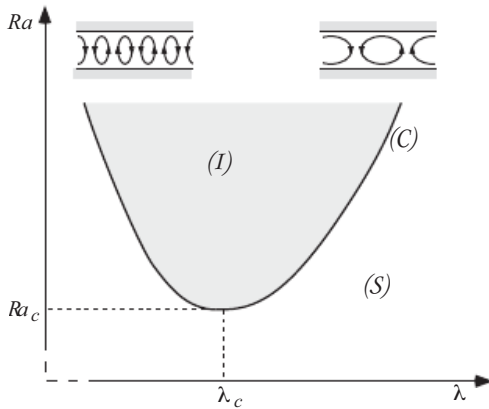


FIG. 11.9 – Diagramme de l’instabilité de Rayleigh-Bénard obtenu lorsque les paramètres de contrôle sont la longueur d’onde du système de rouleaux et le nombre de Rayleigh. La courbe (C), dite de stabilité marginale, correspondant à un taux de croissance $\sigma = 0$, sépare le domaine instable (I) du domaine (S) qui est stable devant des perturbations infinitésimales. Les configurations de rouleaux correspondant aux longueurs d’onde λ inférieures et supérieures à la valeur critique λ_c sont représentées schématiquement.

rapport à des perturbations linéaires du problème stationnaire, d’un deuxième domaine (I) ; dans ce dernier, le système est linéairement instable, c’est-à-dire instable vis-à-vis de perturbations d’amplitude infinitésimale. Le minimum de la courbe est obtenu pour une valeur $\lambda_c \approx 2a$ du vecteur d’onde dans le cas de conditions aux limites de vitesse nulle sur les plaques horizontales rigides : cette valeur est en accord avec l’hypothèse du calcul simplifié mené plus haut.

Remarque. Analysons qualitativement l’augmentation du nombre de Rayleigh critique, observée sur la figure 11.9 lorsque λ s’écarte de la valeur λ_c . Dans le cas de rouleaux très serrés, les effets de la viscosité dus aux contre-écoulements à l’intérieur d’un même tourbillon retardent l’apparition de la convection ; de plus, l’uniformisation de la température par convection thermique d’un bord de rouleau à l’autre est augmentée. Au contraire, dans le cas de rouleaux très larges, le transport convectif est peu efficace et il existe une dissipation importante par friction visqueuse au niveau des parois horizontales.

Variation de l’amplitude de l’instabilité avec la distance au seuil

L’analyse linéaire précédente nous renseigne sur la valeur du seuil et sur la forme des solutions au voisinage de Ra_c . En revanche, elle ne nous dit rien sur l’évolution de l’instabilité aux temps longs lorsque $Ra > Ra_c$ et, en particulier, sur l’amplitude des variations spatiales de la vitesse ; le terme exponentiel de l’expression (11.32) conduirait, en effet, à une divergence de celle-ci aux temps longs ! Dans ce problème, c’est la modification non linéaire de l’écoulement de base qui limite la croissance temporelle de l’amplitude à une valeur finie. On

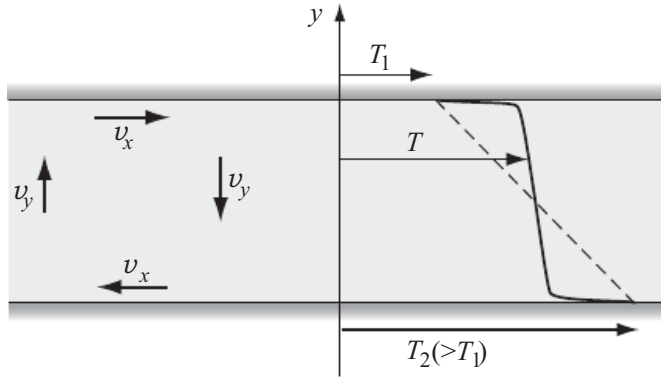


FIG. 11.10 – Profil de température entre deux plaques horizontales chauffées en présence d'un écoulement de convection schématisé par la composante verticale du vecteur vitesse, lorsque la vitesse de convection est suffisante pour qu'apparaissent des couches limites thermiques près des parois.

prédit alors théoriquement que l'amplitude limite des valeurs des composantes v_i ($i = x, y$) de la vitesse vérifient :

$$v_i^2 = \frac{1}{\gamma_i} \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T} \quad (11.39)$$

où γ_i est une constante proportionnelle à la constante b de l'équation (11.9b). Ce résultat est en accord avec des mesures de vitesse par anémométrie laser réalisées sur l'expérience de Rayleigh-Bénard. Ces dernières montrent en effet que la vitesse v_x augmente continûment au-dessus du seuil comme :

$$v_x \propto [\Delta T - \Delta T_c]^\beta \quad (11.40)$$

avec un exposant $\beta = 1/2$ (Fig. 11.11a).

Justification. L'origine physique de ces effets non linéaires est décrite schématiquement par la figure 11.10. Les échanges thermiques par convection réduisent les écarts de température dans la partie centrale de la couche de fluide : les variations importantes de température se font alors dans des couches limites thermiques près des parois où la vitesse v_y est plus faible et où le transport thermique se fait surtout par diffusion.

La diminution du gradient thermique $(\mathbf{grad} T)_0$ dans la partie centrale entraîne une diminution du nombre de Rayleigh construit à partir de ce gradient : l'augmentation de la vitesse est, par conséquent, réduite. De façon plus quantitative, on suppose que :

$$(\mathbf{grad} T)_0 \approx (1 - \gamma_y v_y^2) \mathbf{grad} T \quad (11.41)$$

où $\mathbf{grad} T$ est le gradient $\Delta T/a$ appliqué ; la présence du terme en v_y^2 traduit le fait que $-v_y$ et v_y induisent toutes deux la même diminution du gradient. En prenant comme ordre de grandeur de $(\mathbf{grad} T)_0$ la valeur seuil $\Delta T_c/a$, limite supérieure du gradient de température dans la partie centrale, on obtient la relation (11.39).

Un paramètre macroscopique sans dimension, fréquemment utilisé pour caractériser le développement de l'instabilité au-dessus du seuil, est le nombre de Nusselt Nu , déjà rencontré à la section 10.8.1, et défini par :

$$Nu = \frac{\text{flux thermique mesuré}}{\text{flux thermique diffusif en l'absence de convection}}. \quad (11.42)$$

On peut déterminer le terme au dénominateur en chauffant la cellule par au-dessus : dans ce cas, la stratification de densité est stable et les échanges thermiques se font uniquement par diffusion en l'absence de transferts radiatifs. D'après la définition (11.42), on a :

$$Nu = 1 \text{ pour } \Delta T < \Delta T_c. \quad (11.43a)$$

Par ailleurs, les mesures expérimentales du flux thermique d'une plaque à l'autre en présence de convection montrent une variation de Nu de la forme :

$$Nu - 1 \propto (\Delta T - \Delta T_c) \quad \text{pour } \Delta T \geq \Delta T_c. \quad (11.43b)$$

Explication physique. Le flux thermique vertical est le même à toutes les distances entre les plaques : dans la partie centrale, il est dominé par la convection et correspond à la moyenne du produit θv_y dans un plan (x, z) . Comme v_y et θ suivent tous les deux une variation en $(\Delta T - \Delta T_c)^{1/2}$ (Éq. 11.40), il en résulte bien une variation en $(\Delta T - \Delta T_c)$ pour Nu . Notons que, dans les régions où $v_y > 0$, la convection transporte du fluide chaud ($\theta > 0$) vers le haut ; en revanche, lorsque $v_y < 0$, l'écoulement transporte du fluide froid ($\theta < 0$) vers le bas : dans les deux cas, le produit θv_y est positif et les contributions s'ajoutent.

11.2.6 Modèle de Landau appliqué à la convection de Rayleigh Bénard

La variation en $(\Delta T - \Delta T_c)^{1/2}$ des composantes de la vitesse dans les équations (11.39) et (11.40) suggère de décrire le comportement global de l'instabilité de Rayleigh Bénard par le modèle de Landau introduit dans la section (11.1). Comme l'écoulement de convection généré par cette instabilité est stationnaire, l'équation (11.11) est susceptible de décrire cette dernière. On choisit par exemple comme paramètre de contrôle le nombre de Rayleigh Ra (ou la différence de température ΔT) et comme paramètre d'ordre $|A|$ le maximum $|v_x^{Max}|$ de la valeur absolue d'une des composantes de la vitesse dans la cellule.

On s'attend alors à un diagramme de variation de $|v_x|$ et $|v_y|$ en fonction de Ra (ou ΔT) du type de ceux des figures 11.2 et 11.4a. Effectivement, la figure 11.11 montre une variation expérimentale en $\sqrt{\Delta T - \Delta T_c}$ du maximum $|v_x^{Max}|$ de la valeur absolue de la composante de vitesse v_x pour $\Delta T > \Delta T_c$. Pour $\Delta T < \Delta T_c$, la vitesse $|v_x^{Max}|$ est nulle. La seconde branche des courbes de la figure 11.2 correspondrait à un système de rouleaux décalé d'une unité : cela revient à inverser le sens de rotation du rouleau situé à une position donnée puisqu'ils sont de sens alternés.

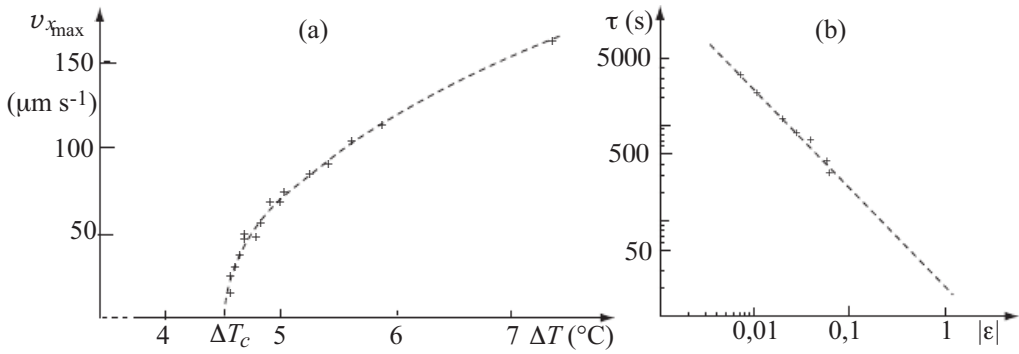


FIG. 11.11 – (a) Variation du maximum de la composante de vitesse horizontale dans un système de rouleaux en fonction de la différence de température ΔT . La ligne en tirets correspond à une variation en $\sqrt{\Delta T - \Delta T_c}$. (b) Variation du temps caractéristique de relaxation du système de rouleaux avec l'écart au seuil caractérisé par le rapport $\epsilon = (Ra - Ra_c)/Ra_c$. La droite en tirets correspond (en coordonnées logarithmiques) à une variation $\tau \propto |\epsilon|^{-1}$ (d'après J.E. Wesfreid, M. Dubois et P. Bergé).

Remarque. Dans le problème de Rayleigh-Bénard, on a une brisure de symétrie, analogue au cas de la bille dans l'anneau en rotation. Celle-ci correspond au choix de la phase φ de la fonction $\cos(kx + \varphi)$ qui décrit la structure du système des rouleaux : en effet, pour une position donnée des rouleaux, il existe deux sens de rotation possibles respectant l'inversion du sens de rotation d'un rouleau à l'autre (φ en $\varphi + \pi$). Ces deux solutions sont équivalentes aux deux positions symétriques d'équilibre de la bille au-dessus du seuil d'instabilité.

Une autre preuve de la description de Landau de cette instabilité est donnée par la relaxation de $|v_x^{Max}|$ après une variation brusque de $\Delta T (> \Delta T_c)$ vers une nouvelle valeur suivant la relation (11.14). Les mesures expérimentales du temps caractéristique τ de cette relaxation montrent qu'il varie, conformément à l'équation (11.15), comme l'inverse de l'écart au seuil (Fig. 11.11b).

Remarque. Des modèles détaillés de l'instabilité de Rayleigh-Bénard permettent de calculer le champ de vitesse et le champ de température complets pour une différence de température donnés. Il est alors possible, en principe, de déterminer à partir de ceux-là les coefficients du modèle de Landau.

11.2.7 Évolution vers la turbulence au-dessus du seuil de convection

Lorsque l'on s'éloigne suffisamment au-dessus du seuil de convection thermique, on atteint un régime turbulent où le champ de vitesse a une composante aléatoire temporellement et spatialement. Cela n'implique pas cependant que les structures macroscopiques en rouleaux disparaissent. Dans le cas de la

convection de Rayleigh-Bénard, ainsi que dans d'autres instabilités décrites plus loin, plusieurs scénarios peuvent faire passer de l'instabilité stationnaire initiale à la turbulence. Les « scénarios » observés dépendent de plusieurs paramètres expérimentaux (géométrie et taille de la boîte, nombre de Prandtl...).

Dans le cas d'une instabilité en « petites boîtes », c'est-à-dire contenant un petit nombre de rouleaux de convection, on pourra observer un premier scénario à deux fréquences. Pour les détecter, on peut, par exemple, faire une analyse spectrale des variations temporelles de la température mesurée sur une sonde locale placée dans la cellule. Dans ce cas, si l'on augmente encore la différence de température au-dessus du seuil linéaire ΔT_c , on verra apparaître une première fréquence instable f_1 au-dessus d'une seconde valeur seuil ΔT_{c1} : celle-ci correspondra par exemple à une oscillation latérale des rouleaux. Puis, apparaît une seconde fréquence f_2 incommensurable à la première pour $\Delta T_{c2} > \Delta T_{c1}$. Enfin, pour une valeur $\Delta T_{c3} > \Delta T_{c2}$, l'écoulement devient imprévisible sans apparition d'une troisième fréquence : on a transition vers une *turbulence faible* qui contraste avec une description classique, où la turbulence est supposée apparaître par combinaison d'une infinité de fréquences instables.

Un second scénario, dit par *division de fréquences*, obtenu dans des conditions expérimentales différentes, mais toujours en petites boîtes, consiste en l'apparition d'une première fréquence instable f_1 , suivie d'une seconde $f_2 = f_1/2$, puis de $f_3 = f_2/2$ et ainsi de suite. Les seuils correspondant à chacun de ces *doubléments de période* sont de plus en plus rapprochés et convergent vers une valeur Re_t où l'on observe une transition à la turbulence.

La situation est différente dans des « grandes boîtes ». On a alors apparition de bouffées turbulentes lorsque l'on est suffisamment au-dessus du seuil linéaire d'instabilité.

Remarque. Ce scénario de turbulence par « intermittence » se rapproche des mécanismes de transition sous-critique vers la turbulence que nous évoquerons à la section 11.4.3. On le rencontre aussi dans le cas de l'instabilité de rouleaux de *Taylor-Couette* (section 11.3.2).

11.3 Autres exemples d'instabilités fermées

Nous appelons ici instabilités fermées des instabilités qui se développent dans un espace de dimensions finies sans écoulement moyen, comme c'était le cas, par exemple, pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard et contrairement à celle de Bénard-Von Kármán.

11.3.1 Instabilité thermocapillaire de Bénard-Marangoni

L'instabilité, dite de *Bénard-Marangoni*, apparaît lorsque l'on chauffe la face inférieure d'une mince couche de liquide, dont la surface supérieure est libre : elle est due aux forces induites sur la surface libre par les gradients

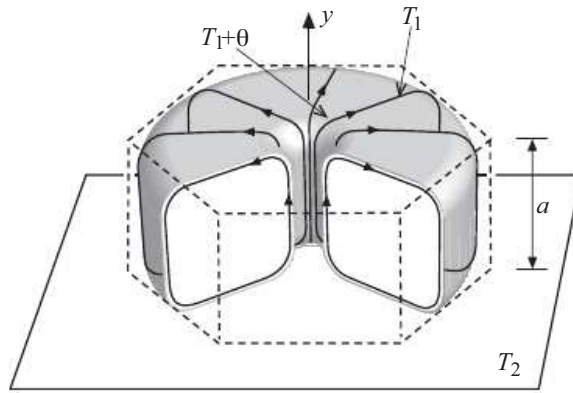


FIG. 11.12 – Schéma de l'écoulement dans les cellules de l'instabilité de Bénard-Marangoni (voir aussi la visualisation par au-dessus de la Fig. 3.17).

de tension superficielle étudiés à la section 8.2.4. Cet effet se superpose au mécanisme de Rayleigh-Bénard dû à un gradient de densité.

Remarque. Ce dernier est seul actif pour un volume de fluide délimité par deux parois solides horizontales.

Au-dessus d'une valeur critique de la différence de température, il apparaît des cellules hexagonales d'écoulement entre la base de la couche de liquide et la surface libre (Fig. 3.17). Le mouvement du fluide est ascendant au centre des hexagones et descendant sur les bords (Fig. 11.12). La taille des hexagones est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la couche de fluide.

Le mécanisme qualitatif de l'instabilité est le suivant : supposons que, initialement, la température s'élève légèrement d'une quantité θ en un point de la surface libre. Par suite de la diminution de la tension superficielle lorsque la température augmente, le fluide est expulsé radialement en surface de cette région plus chaude vers l'extérieur. Pour conserver le débit, on a une remontée de fluide plus chaud qui vient de la partie inférieure de la cellule : cet apport d'énergie thermique vient donc renforcer la perturbation initiale. Ainsi, l'effet moteur de l'instabilité est la différence de tension superficielle entre des parties de la surface du liquide à des températures différentes. Comme pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard, les processus stabilisants sont la diffusion thermique et la viscosité qui, respectivement, uniformisent la distribution de température et ralentissent le mouvement des particules de fluide ; elles sélectionnent également des tailles de cellules de l'ordre de l'épaisseur.

Seuil de l'instabilité de Bénard-Marangoni

Le paramètre sans dimension qui gouverne cette instabilité est le *nombre de Marangoni* Ma qui vérifie :

$$Ma = \frac{b \gamma \Delta T a}{\eta \kappa} \quad (11.44)$$

$b = -(1/\gamma)(\partial\gamma/\partial T)$ représente le taux de variation relative de la tension superficielle avec la température T défini par l'équation (1.54) et a est l'épaisseur de la couche de fluide (nous avons déjà étudié des écoulements induits par ces gradients de tension superficielle à la section 8.2.4).

Démonstration. On supposera ici que l'échelle de variation de la vitesse et de la température dans la direction horizontale est la même que dans la direction verticale (c'est-à-dire l'épaisseur a de la couche de fluide). Cela revient à dire que la section d'une cellule de convection par un plan vertical est très grossièrement un hexagone, comme sur la figure 11.12.

Le principe du calcul est, de nouveau, très similaire à celui que nous avons utilisé pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard : la seule différence vient du fait que la force motrice de l'effet Marangoni (Éq. 8.66) est exercée sur la surface libre du fluide. Nous allons toujours supposer que l'on anime un élément de fluide d'une vitesse de convection v_c et nous allons analyser si cette vitesse décroît ou non avec le temps. Dans les deux autres exemples, le critère d'instabilité était obtenu en comparant les forces sur des éléments de fluides d'une taille r_0 de l'ordre de $a/2$. Nous nous limiterons donc ici à des éléments de fluide de cette taille dont une face coïncide avec la surface libre du fluide. En évaluant alors, comme plus haut (section 11.2.4), la différence de température qui s'établit entre l'élément de volume et le fluide environnant, on retrouve l'équation (11.21) sous la forme :

$$\delta T \simeq A v_c \frac{a^2}{\kappa} \frac{\Delta T}{a}. \quad (11.45)$$

La force motrice F_m sur l'élément de volume est reliée à la valeur absolue de la dérivée $d\gamma/dT$ de la tension superficielle par rapport à la température par :

$$F_m \simeq \frac{a}{2} \left| \frac{d\gamma}{dT} \right| \delta T \approx v_c \frac{a^3}{\kappa} \left| \frac{d\gamma}{dT} \right| \frac{\Delta T}{a}. \quad (11.46)$$

Nous avons supposé que la face de l'élément de fluide qui coïncide avec l'interface est carrée et a deux côtés perpendiculaires à l'écoulement de convection u_c ; nous obtenons alors l'équation (11.46), en admettant que la différence de température entre ces deux côtés est de l'ordre de δT et que F_m est la différence entre les forces de tension superficielle sur ceux-là. L'ordre de grandeur de la force de freinage F_{visc} est, comme dans le cas de Rayleigh-Bénard :

$$F_{\text{visc}} \approx \eta v_c a.$$

La condition pour avoir croissance de l'instabilité s'écrit donc de nouveau :

$$F_m > F_{\text{visc}} \quad \text{soit :} \quad v_c \frac{a^3}{\kappa} \left| \frac{d\gamma}{dT} \right| \frac{\Delta T}{a} > \eta v_c a. \quad (11.47)$$

Le rapport F_m/F_{visc} est donc bien égal au nombre de Marangoni donné par l'équation (11.44) : c'est sa valeur qui détermine l'existence éventuelle de l'instabilité. ■

Le rapport du nombre de Rayleigh au nombre de Marangoni vérifie :

$$\frac{Ra}{Ma} = \frac{\alpha \rho g a^2}{|\delta\gamma/dT|} = \frac{|\delta\rho| g a^2}{|\delta\gamma|} \quad (11.48)$$

où $\delta\rho$ et $\delta\gamma$ sont les valeurs absolues des variations respectives de densité et de tension superficielle induites par une même différence de température δT . Ce rapport caractérise l'efficacité relative des effets de poussée d'Archimède et de tension superficielle induits par des variations de température sur une couche limite horizontale dont la surface supérieure est libre. Le rapport Ra/Ma équivaut donc, pour les variations de ces deux paramètres, au *nombre de Bond* introduit au chapitre 1 (Éq. 1.64). Pour une différence de température fixée, le rapport Ra/Ma varie en a^2 . Il en résulte que les effets de tension superficielle seront dominants pour les petites épaisseurs de la couche de fluide, et ceux de gravité pour les grandes épaisseurs.

Remarque. En impesanteur, l'effet de la poussée d'Archimède dû à la gravité disparaît et l'effet Marangoni subsiste seul. Les expériences de réalisation de monocristaux en microgravité se justifient par le fait que les mouvements de convection induits par la gravité et qui perturbent la croissance régulière des cristaux n'existent pas. On pourrait ainsi préparer des cristaux de plus grande taille, ou dont l'obtention est habituellement difficile (cristaux de protéines par exemple). L'effet Marangoni apporte cependant alors souvent des perturbations importantes.

Il existe, entre les instabilités de Rayleigh-Bénard et de Bénard-Marangoni, une différence plus profonde que celle entre les définitions de Ra et Ma : elle résulte de la symétrie différente des deux écoulements. Dans le cas de l'instabilité de Rayleigh-Bénard, il existe une symétrie entre les écoulements ascendants et descendants (section 11.2.6). Dans le problème de l'instabilité de Bénard-Marangoni, cette symétrie n'existe pas. L'instabilité fait, en effet, apparaître des hexagones (Fig. 11.12) où le liquide monte par le centre et se distribue sur les bords voisins pour redescendre ; contrairement au cas de l'instabilité de Rayleigh-Bénard, cette configuration n'est pas équivalente par une simple translation à celle où le liquide descend au centre et monte par les bords.

Comportement au-dessus du seuil

La dissymétrie que nous venons de mentionner se retrouve dans le diagramme d'instabilité de la figure 11.13a : ce dernier montre la variation en fonction de Ma de la composante verticale v_y de la vitesse au centre des hexagones. En augmentant Ma (et donc la différence de température ΔT) en partant de $Ma = 0$, le transfert thermique s'opère par *conduction thermique* sans écoulement jusqu'à un seuil critique Ma_{c1} . On a alors transition brusque vers le régime de *convection thermique* avec une valeur finie de la vitesse v_y qui augmente ensuite continûment avec Ma . En revanche, si l'on réduit ensuite progressivement Ma , on pourra descendre jusqu'à une valeur $Ma_{c2} < Ma_{c1}$ avant que les cellules de convection ne disparaissent. Aux valeurs intermédiaires entre Ma_{c2} et Ma_{c1} , on peut induire une transition du régime de conduction au régime de convection en appliquant à la couche fluide une perturbation : l'amplitude nécessaire pour provoquer la transition est d'autant plus faible que l'on est proche de Ma_{c1} .

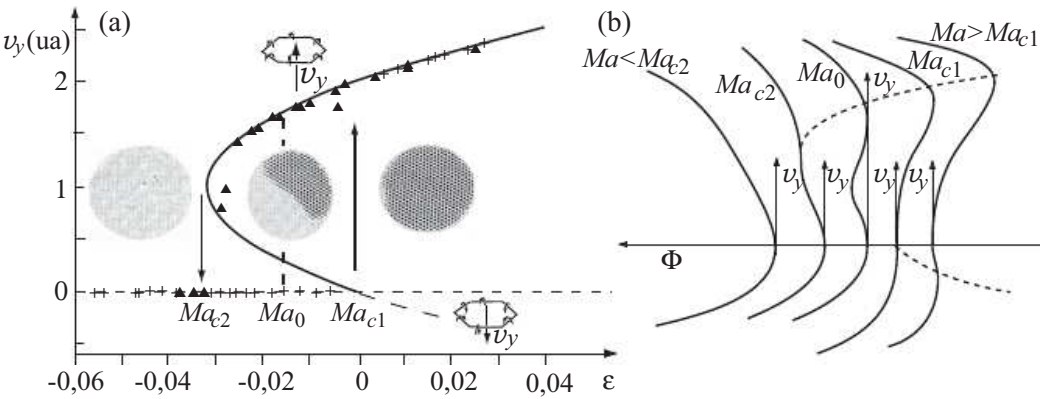


FIG. 11.13 – (a) Variation avec le nombre de Marangoni normalisé $\varepsilon = (Ma - Ma_{c1})/Ma_{c1}$ de la vitesse de convection pour l'instabilité de Bénard-Marangoni d'une couche liquide mince chauffée par au-dessous (d'après H. Swinney *et al.*). À la différence de l'instabilité mécanique modèle (Fig. 11.2a) ou de celle de Rayleigh-Bénard, le diagramme de stabilité n'est pas symétrique par rapport à l'axe $v_y = 0$. Les images en insert représentent les observations typiques dans les régions stables et instable (à gauche et à droite), et pour $Ma = Ma_0$ (au milieu). Les + correspondent à des données obtenues en augmentant Ma à partir d'une valeur faible et les ▲ à des valeurs obtenues en faisant décroître Ma à partir de valeurs $Ma > Ma_{c1}$. (b) Courbes fonctionnelles d'énergie $\Phi(v_y)$ correspondant à des valeurs de Ma associées à différents régimes. Les courbes ont été décalées horizontalement les unes par rapport aux autres et l'amplitude du minimum secondaire a été légèrement exagérée pour permettre une meilleure visibilité (les axes v_y correspondent à une valeur nulle de Φ). Les deux courbes en pointillés montrent la tendance de l'évolution des valeurs de v_y non nulles correspondant à des minimums de Φ .

Extension du modèle de Landau à l'instabilité de Bénard-Marangoni

Pour rendre compte de l'asymétrie du diagramme d'instabilité, on doit modifier le modèle de Landau en ajoutant dans l'expression (11.9b) de la fonctionnelle d'énergie des termes correspondant à des puissances impaires. C'est, en effet, v_y qui joue ici le rôle de A et, comme nous venons de le voir, les valeurs v_y et $-v_y$ ne sont pas équivalentes. On utilise donc la forme suivante :

$$\Phi(v_y) = 2k'(Ma_c - Ma)v_y^2 + cv_y^3 + 2bv_y^4. \quad (11.49)$$

La figure 11.13b montre les variations de $\Phi(v_y)$ résultant de cette équation : pour $Ma < Ma_{c2}$, les courbes n'ont qu'un minimum correspondant à $v_y = 0$: il n'apparaît pas de cellules de convection et l'on est dans le domaine de conduction thermique. Pour $Ma_{c2} < Ma < Ma_{c1}$, Φ a deux minimums, l'un pour $v_y = 0$ et l'autre pour une valeur finie de v_y , même au seuil Ma_{c2} où le minimum se réduit à un point d'inflexion. Suivant l'histoire antérieure du système et les perturbations qu'il a subies, on observera soit l'état stable, soit l'état convectif avec les cellules hexagonales. De plus, on peut induire

des transitions d'un état à l'autre (généralement vers l'état convectif) par des perturbations d'amplitude suffisante pour franchir le maximum d'énergie intermédiaire. Il existe d'autre part une valeur Ma_0 pour laquelle (vignette centrale sur la figure 11.13a) on peut avoir coexistence des deux états car les deux minimums de Φ ont la même valeur. Enfin, pour $Ma > Ma_{c1}$, on a maintenant un maximum d'énergie (équilibre instable) pour $v_y = 0$. On observe alors presque toujours des écoulements où le fluide monte au centre des cellules (vignette de droite) : les écoulements en sens inverse correspondent à un minimum d'énergie beaucoup moins marqué (branche inférieure en tirets sur la figure 11.13a) et sont difficilement observables.

Remarque. On peut établir un parallèle entre cette transition hystérétique et les transitions thermodynamiques du premier ordre, comme celle entre l'état liquide et gazeux. Ainsi, en chauffant un volume d'eau bien dégazée dans un récipient aux parois lisses, on pourra conserver l'eau à l'état liquide nettement au-dessus de la température normale d'ébullition : cette dernière pourra être déclenchée en introduisant quelques bulles, par exemple à l'aide d'une tige poreuse. Ce phénomène de *retard à l'ébullition* est équivalent à l'hystérésis de la figure 11.13a. De même, on peut avoir coexistence des deux phases liquide et vapeur à une température uniquement fonction de la pression extérieure (donnée dans ce cas par une « construction de Maxwell ») : cela correspond à la coexistence des états stables et instables observée pour $Ma = Ma_0$.

Une instabilité présentant les caractéristiques que nous venons de discuter pour l'instabilité de Bénard-Marangoni (hystérésis, possibilité de déclencher l'instabilité par des perturbations, possibilité de coexistence des deux états...) est qualifiée de *sous-critique*. Les instabilités, comme celle de Rayleigh-Bénard ou de l'émission d'allées de tourbillons (section 2.4.2) sont qualifiées de *super-critiques*.

11.3.2 Instabilité de Taylor-Couette

L'écoulement de Couette entre deux cylindres concentriques a été étudié au chapitre 4 (section 4.5.6). La forme du champ de vitesse stationnaire obtenu aux faibles vitesses de rotation correspond à un écoulement purement ortho-radial, de vitesse donnée par la relation (4.110). Si le cylindre intérieur est maintenu fixe et le cylindre extérieur mis en rotation, l'écoulement est stable jusqu'à une vitesse suffisamment élevée où il devient turbulent, sans qu'apparaissent des structures caractéristiques dans l'écoulement : c'est ce problème que Maurice Couette avait étudié dans sa thèse en 1901. En revanche, si l'on fait tourner le cylindre intérieur en laissant le cylindre extérieur fixe, une circulation fluide en rouleaux toroïdaux apparaît au-dessus d'une valeur critique Ω_c de la vitesse angulaire de rotation Ω ; le plan des tores est horizontal et le diamètre de leur section est égal à la distance a entre les cylindres (Fig. 11.14). Cette structure a été décrite pour la première fois par G.I. Taylor en 1923 : les rouleaux peuvent être visualisés facilement si le liquide contient des particules

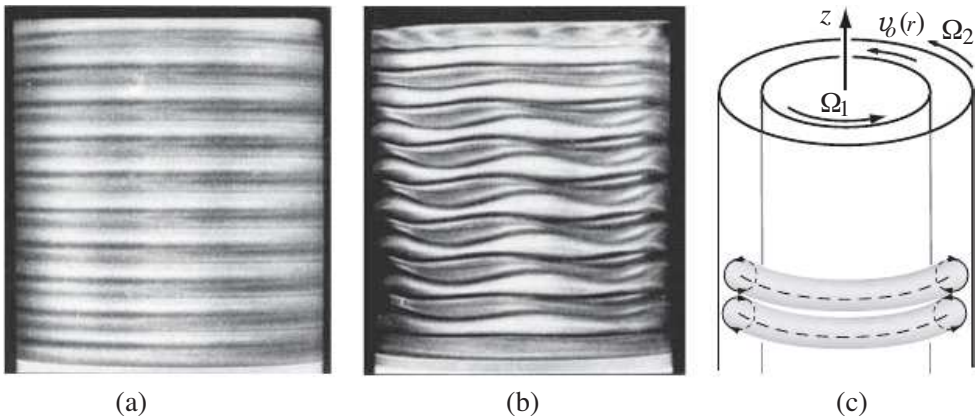


FIG. 11.14 – Photos d’un système de rouleaux de Taylor-Couette visualisés par des particules réfléchissantes en suspension dans le fluide. (a) Juste au-dessus du seuil Ta_c ; (b) plus au-dessus du seuil, on observe des rouleaux ondulés (docs. D. Andereck et H. Swinney); (c) schéma de principe des rouleaux apparaissant dans l’instabilité de Taylor-Couette pour l’écoulement entre deux cylindres de vitesses de rotation Ω_1 et Ω_2 différentes.

plates et qui réfléchissent la lumière. Ils peuvent être étudiés quantitativement en utilisant les sondes de gradient de vitesse localisées sur les parois étudiées à la section 10.8.2, ou encore par les techniques de vélocimétrie Doppler ou de PIV décrites en section 3.5. Le champ de vitesse résultant est la somme de l’écoulement non perturbé orthoradial et d’un mouvement advectif toroïdal.

Ce problème d’instabilité de Taylor-Couette peut être mis en étroite correspondance avec celui de Rayleigh-Bénard. Le gradient radial de force centrifuge, dû à l’existence de fluide de plus grand moment cinétique près de l’axe, remplace, dans ce problème, l’effet de la poussée d’Archimède dû à la stratification instable de densité. Enfin, la viscosité, qui a un effet stabilisant (car elle permet à un élément de fluide écarté de sa position d’équilibre de se mettre en équilibre de vitesse avec le fluide environnant), remplace la diffusion thermique.

Pour trouver le nombre sans dimension pour cette instabilité, équivalent au nombre de Rayleigh pour l’instabilité de Rayleigh-Bénard, on peut reprendre le raisonnement d’équilibre de forces utilisé pour cette dernière. Nous montrons ci-dessous que l’on trouve le nombre caractéristique :

$$Ta = \frac{\Omega^2 a^3 R}{\nu^2} \quad (11.50)$$

appelé *nombre de Taylor* (a est l’intervalle entre les cylindres et $R \gg a$ est leur rayon moyen ; Ω est la vitesse angulaire de rotation du cylindre intérieur). Le tableau 11.1 établit le parallèle entre les paramètres et les forces caractéristiques de ces deux instabilités et de celle de Bénard-Marangoni étudiée plus haut (les constantes géométriques ne sont pas indiquées dans ce tableau).

TAB. 11.1 – Tableau comparatif des paramètres caractéristiques des instabilités de Rayleigh-Bénard, Taylor-Couette et Bénard-Marangoni.

	Instabilité de R-B	Instabilité de T-C	Instabilité de B-M
Force de freinage visqueuse	$F_{visc} = \eta v_c a$	$F_{visc} = \eta v_c a$	$F_{visc} = \eta v_c a$
Force motrice	$F_{poussée\ d'Archimède}$	$F_{force\ centrifuge}$	$F_{tension\ superficielle}$
	$\rho_0 \alpha g \frac{a^5}{\kappa} \frac{\Delta T}{a} v_c$	$\rho_0 a^2 \frac{\Omega^2 R}{a} \frac{a^5}{\nu} v_c$	$\frac{a^3}{\kappa} \frac{d\gamma}{dT} \frac{\Delta T}{a} v_c$
Temps de relaxation de la perturbation avec le fluide environnant	$\frac{a^2}{\kappa}$	$\frac{a^2}{\nu}$	$\frac{a^2}{\kappa}$
Paramètre caractéristique de l'instabilité	$Ra = \frac{\alpha \Delta T g a^3}{\nu \kappa}$	$Ta = \frac{\Omega^2 R a^3}{\nu^2}$	$Ma = -\frac{(d\gamma/dT) \Delta T a}{\eta \kappa}$
Valeurs critiques d'apparition des instabilités	$Ra_c = 1\,708$ $k_c = \frac{3,11}{a}$	$Ta_c = 1\,712$ $k_c = \frac{3,11}{a}$	$Ma_c = 80$

Démonstration. Supposons, comme pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard, que l'on communique à une sphère fluide, de petit rayon r_0 et densité ρ , une vitesse de *convection* v_c radiale et donc *perpendiculaire* à l'écoulement moyen orthoradial. La sphère perdra la quantité de mouvement $p = m v_c$ ($m = (4\pi/3) \rho r_0^3$ est la masse de la sphère fluide) par ralentissement visqueux dans un temps caractéristique τ_ν . Comme la force de freinage visqueux F_{visc} exercée sur la sphère est égale à $6\pi \eta r_0 v_c$, on trouve :

$$\frac{4}{3} \pi \rho r_0^3 \frac{dv_c}{dt} = -6\pi \eta r_0 v_c \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau_\nu} = \frac{1}{v_c} \frac{dv_c}{dt} = A \frac{\nu}{r_0^2}$$

où A est un coefficient numérique de nature géométrique. L'expression du temps de diffusion visqueuse τ_ν est, par ailleurs, équivalente à celle du temps de diffusion thermique de l'équation (11.20). Au bout du temps τ_ν , la particule s'est déplacée transversalement d'une distance $\delta r \approx v_c \tau_\nu$. L'ordre de grandeur de la force motrice F_m correspondra à la variation de la force centrifuge $m \Omega^2(r) r$ sur la distance δr . La vitesse angulaire $\Omega(r)$ de rotation locale passe de Ω sur le cylindre intérieur ($r = R$) à 0 sur le cylindre extérieur ($r = R + a$). On prendra donc comme ordre de grandeur de F_m :

$$F_m = \frac{4}{3} \pi \rho r_0^3 \frac{\partial}{\partial r} (\Omega^2(r) r) \delta r \approx B r_0^3 \rho \frac{\Omega^2 R}{a} v_c \tau_\nu = \frac{B}{A} \frac{\rho}{\nu} v_c \Omega^2 \frac{r_0^5 R}{a}$$

où B est une constante géométrique. La condition d'instabilité équivalente aux équations (11.24) est donc :

$$F_m > F_{visc} \quad \text{soit} \quad \frac{B}{A} \frac{\rho}{\nu} v_c \Omega^2 \frac{r_0^5 R}{a} > 6\pi \rho \nu r_0 v_c.$$

Comme dans le cas de l'instabilité de Rayleigh-Bénard, ce sont les perturbations de plus grande taille qui vérifient le plus facilement la condition avec une limite supérieure $r_0 \approx a/2$. En ne tenant pas compte des coefficients géométriques, on trouve bien que le rapport F_m/F_{visc} est égal au nombre de Taylor donné par la formule (11.50). ■

Remarque. La viscosité cinématique ν intervient au carré dans le nombre de Taylor. Elle apparaît, une première fois, dans l'évaluation du temps τ_ν de mise en équilibre de vitesse d'une perturbation par frottement visqueux avec le fluide environnant (dans l'instabilité de Rayleigh-Bénard, on faisait intervenir un temps de mise en équilibre thermique). Elle intervient une deuxième fois dans le calcul de la force de frottement visqueux qui s'oppose à la force motrice. Le dénominateur en ν^2 dans le nombre de Taylor remplace donc celui en $\nu\kappa$ dans le nombre de Rayleigh.

Le vecteur d'onde critique k_c est celui qui correspond aux modes d'instabilité apparaissant au nombre de Taylor le plus faible ; comme pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard, il est de l'ordre de π/a , ce qui correspond pour les deux instabilités à un diamètre de rouleaux de l'ordre de la distance entre les parois solides. La courbe de stabilité dans le plan (Ta, λ) est également très similaire à celle obtenue dans le plan (Ra, λ) pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard (Fig. 11.9).

11.3.3 Autres instabilités centrifuges

L'instabilité de Taylor-Couette fait partie d'une classe plus large d'instabilités induites par des effets de force centrifuge dans des fluides en rotation ou pour des écoulements courbes.

Ainsi, l'*instabilité de Görtler* apparaît dans une couche limite se développant le long d'une paroi concave courbe (écoulement parallèle aux plans de courbure) : elle se développe donc dans un profil de vitesse de Blasius (section 10.4.2) au lieu d'un profil de Couette pour l'instabilité de Taylor-Couette. Au-delà d'une vitesse seuil, il apparaît des rouleaux de convection d'axe parallèle à l'écoulement moyen.

L'*instabilité de Dean* est observée, au contraire, dans des écoulements développés de type Poiseuille dans des canaux courbes tels que celui de section rectangulaire représenté sur la figure 11.15. Quelle que soit la vitesse d'écoulement, il apparaît tout d'abord aux deux extrémités de la section deux cellules de recirculation : ces dernières reflètent l'*écoulement secondaire de Dean* que nous avons décrit à la section 7.7.1 et dont un autre exemple est représenté sur la figure 7.42. L'*instabilité de Dean* proprement dite correspond à l'apparition de cellules de plus petite taille au départ et localisées près de la paroi concave du canal entre les deux cellules d'écoulements secondaires (Fig. 11.15a). Ces dernières cellules n'apparaissent, au contraire, qu'au-dessus d'une vitesse seuil de l'écoulement.

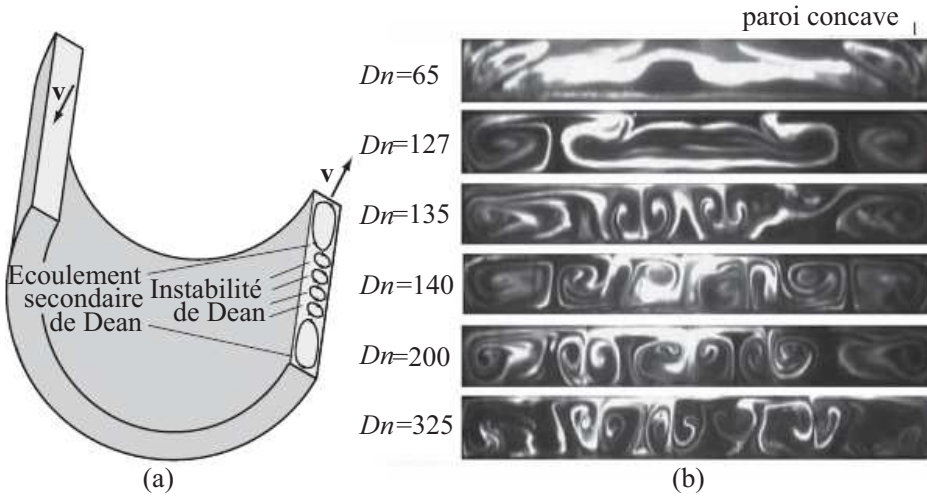


FIG. 11.15 – (a) Schéma de l'écoulement secondaire et de l'instabilité de Dean dans une section rectangulaire allongée d'une conduite courbe. (b) Visualisation, par technique LIF, dans une section de l'écoulement d'un colorant fluorescent injecté en amont pour différentes valeurs du nombre de Dean (l'angle entre les sections d'entrée et de mesure vaut 180°) (doc. H. Fellouah, C. Castelain, A. Ould El Moctar et H. Peerhossaini).

Remarque. L'instabilité de Dean apparaît au-dessus d'une valeur critique Dn_c du nombre de Dean Dn qui correspond au rapport entre les forces centrifuges et les forces visqueuses. Le nombre Dn est défini par :

$$Dn = (U_m D_h / \nu) \sqrt{D_h / R_c},$$

où U_m est la vitesse moyenne dans une section, R_c le rayon de courbure du canal et D_h une longueur caractérisant son ouverture hydraulique. La figure 11.15b montre le développement de l'instabilité au fur et à mesure que Dn augmente.

Dans un canal de section carrée, l'instabilité de Dean est marquée par l'apparition, près de la paroi concave de la conduite et du plan de symétrie de l'écoulement, de deux petites cellules supplémentaires de sens opposé venant s'ajouter à l'écoulement secondaire schématisé sur la figure 7.42.

11.4 Instabilités d'écoulements ouverts

Dans cette section, nous allons d'abord traiter en détail le problème de l'instabilité d'un écoulement de cisaillement (*instabilité de Kelvin-Helmholtz*) pour laquelle la valeur du seuil est indépendante des effets de viscosité. Cette étude va nous permettre de revoir tout un ensemble de notions liées au fluide parfait, à la vorticité et aux ondes. Puis, après avoir discuté l'influence de la forme des profils de vitesse, nous évoquerons le cas des écoulements de Poiseuille et de Couette qui montrera la richesse et la complexité des mécanismes de transition vers la turbulence.

Remarque. Les instabilités fermées (Rayleigh-Bénard, Bénard-Marangoni, Taylor-Couette) que nous avons étudiées sont parfois qualifiées d'*absolues* : en effet, elles peuvent se développer au-dessus d'un seuil d'instabilité sans se propager. Dans les écoulements ouverts tels que les jets, on pourra rencontrer d'autres espèces d'instabilités qualifiées de *convectives* (à ne pas confondre avec les instabilités de *convection thermique* discutées plus haut) : les perturbations apportées à l'écoulement se développent (ou s'atténuent si on est au-dessous du seuil) dans une zone de taille finie au fur et à mesure qu'elles sont entraînées (convectées) par le mouvement moyen du fluide.

11.4.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

Le vent soufflant parallèlement à la surface libre de l'eau induit la formation de vagues, qui peuvent s'amplifier jusqu'au déferlement correspondant à un vent de force 7 sur l'échelle de Beaufort (c'est-à-dire environ 60 km.h^{-1}). Ce phénomène est une manifestation de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Cette dernière peut aussi être observée dans l'expérience de la figure 11.16a CC : on incline une cellule parallélépipédique, initialement horizontale, contenant deux liquides non miscibles superposés. En remettant la cellule à l'horizontale, on induit un écoulement de cisaillement des fluides au niveau de l'interface. On observe que cette dernière se ride en même temps qu'elle retourne à l'horizontale. De tels effets peuvent apparaître aussi à grande échelle dans les atmosphères stratifiées (Fig. 11.16b CC).

Remarque. Ces structures de vortex parallèles produites à l'interface de deux jets de vitesses différentes persistent même à des nombres de Reynolds élevés où la turbulence est très présente. De telles *couches de mélange* constituent un exemple des *structures cohérentes* turbulentes qui seront discutées à la section 12.7.2.

Dans les discussions qui suivent, on néglige l'influence de la viscosité : cela est justifié si l'épaisseur de la couche limite visqueuse reste faible devant la perturbation qui s'amplifie. Ce sera le cas pour un écoulement à suffisamment grande vitesse pour que le nombre de Reynolds associé à l'écoulement soit grand devant l'unité.

Explication physique de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

Le cisaillement produit un gradient de vitesse que l'on suppose localisé au voisinage de l'interface entre les deux fluides (à gauche de la Fig. 11.17). Une déformation de l'interface provoque un resserrement des lignes de courant sur sa face convexe et donc une augmentation de la vitesse et du terme $\rho v^2/2$ dans l'équation de Bernoulli (11.58). De l'autre côté de l'interface (face concave), on a, en revanche, une diminution de la vitesse et de $\rho v^2/2$ car les lignes de courant s'écartent. Ce contraste entre les valeurs des termes en $\rho v^2/2$ des deux côtés provoque une amplification de la déformation de l'interface.

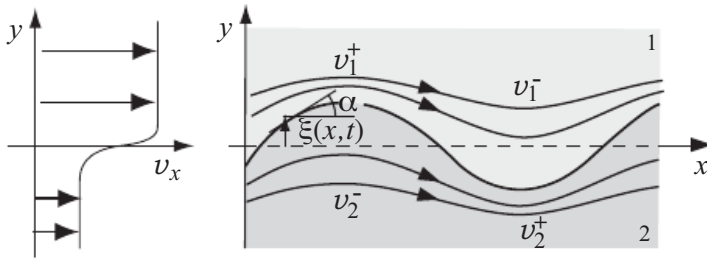


FIG. 11.17 – Déformation de l'interface entre deux fluides superposés se déplaçant parallèlement à des vitesses différentes dans la direction Ox .

Justification. Si cet interface était maintenu immobile, on aurait, d'après l'équation (11.58), apparition d'une différence de pression de Bernoulli orientée dans une direction amplifiant la déformation. Ici, l'interface est libre et, en l'absence de tension superficielle, la pression est la même de part et d'autre : la variation des termes $\rho v^2/2$ sera équilibrée dans l'équation de Bernoulli (11.58) par un terme en $\partial\Phi/\partial t$ de l'équation correspondant à une accélération du fluide. On amplifiera ainsi ceux des modes de déformation de l'interface pour lesquels le déplacement est dans le même sens que l'accélération.

Modélisation de l'instabilité en régime linéaire

Nous modélisons ces processus par l'écoulement de deux fluides superposés (1) et (2), se déplaçant parallèlement à des vitesses différentes U_1 et U_2 le long de la direction x (Fig. 11.18). Cet écoulement est la superposition d'une translation globale de vitesse $(U_1 + U_2)/2$ et d'un écoulement symétrique par rapport à un plan horizontal $y = 0$ et de vitesse $\pm U/2$ ($U = U_1 - U_2$). Comme nous l'avons vu à la section 7.4.2, cela revient à supposer la présence d'une couche de vorticité de épaisseur nulle en $y = 0$.

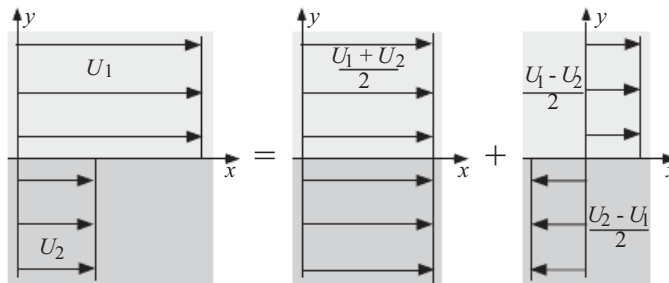


FIG. 11.18 –  coulement de deux fluides en contact se déplaçant parallèlement à des vitesses différentes et représentation du champ de vitesse de cet écoulement comme la superposition d'une translation globale et d'un écoulement relatif de vitesse moyenne nulle.

Nous supposons aussi (c'est un résultat général pour des écoulements à deux dimensions) que la première instabilité qui se développe est une perturbation bidimensionnelle : cette dernière est caractérisée par la hauteur $\xi(x, t)$ de l'interface au-dessus du plan de base $y = 0$ (Fig. 11.17). En nous plaçant dans le référentiel en mouvement à la vitesse de translation globale, écrivons les champs de vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ dans chaque fluide sous la forme :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{grad} \left[\frac{Ux}{2} + \Phi_1(x, y, t) \right], \quad (11.51a)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{grad} \left[-\frac{Ux}{2} + \Phi_2(x, y, t) \right]. \quad (11.51b)$$

Le premier terme de chaque expression entre crochets est le potentiel des vitesses de l'écoulement non perturbé ; le second est le potentiel de la perturbation de vitesse résultant de la déformation $\xi(x, t)$. Le calcul est fait dans une approximation linéaire valable si l'amplitude $\xi(x, t)$ des perturbations est petite devant leur longueur d'onde : cela implique que l'angle α de la tangente à l'interface avec l'axe Ox (Fig. 11.17) soit faible avec :

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} \ll 1. \quad (11.52)$$

On suppose également que les perturbations de vitesse correspondantes sont faibles devant les vitesses $\pm U/2$ de l'écoulement de base. Nous allons maintenant prendre, pour les variables couplées ξ , Φ_1 et Φ_2 caractérisant cette perturbation, des solutions de la forme :

$$\frac{\xi}{A} = \frac{\Phi_1}{B_1 e^{-ky}} = \frac{\Phi_2}{B_2 e^{ky}} = e^{ikx + \sigma t}. \quad (11.53)$$

Nous rechercherons ensuite les relations entre ces variables résultant des conditions aux limites et des équations de mouvement.

Justification. La présence des termes $B_1 e^{-ky}$ et $B_2 e^{ky}$ est imposée par la structure même de l'équation de Laplace, de la même manière que dans l'étude de l'équation des ondes de surface que nous avons effectuée à la section 6.4.1. À la variation sinusoïdale le long d'une direction x est associée une variation exponentielle le long de l'axe perpendiculaire, telle que la portée de cette variation soit égale à la longueur d'onde. Les signes « - » et « + » assurent que la solution physique correspond à une atténuation de l'onde dans les deux demi-espaces supérieur et inférieur respectivement. Le terme $e^{\sigma t}$ indique que l'on cherche des modes d'amplitude variant exponentiellement avec le temps comme dans le problème de Rayleigh-Bénard. On ne peut exclure l'existence d'une partie imaginaire de σ : de fait, pour des ondes de surface d'amplitude stationnaire, seule existe cette dernière composante.

Une première relation entre Φ_1 , Φ_2 et l'amplitude $\xi(x, t)$ est fournie par la condition aux limites en $y = 0$ sur la composante de la vitesse des fluides

normale à l'interface :

$$v_{1y} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{U}{2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (11.54a)$$

et :

$$v_{2y} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{U}{2} \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (11.54b)$$

En reportant les expressions (11.53) et en simplifiant par $e^{ikx+\sigma t}$, on obtient alors :

$$kB_1 + \left(\sigma + ik \frac{U}{2} \right) A = 0, \quad (11.55a)$$

$$kB_2 - \left(\sigma - ik \frac{U}{2} \right) A = 0. \quad (11.55b)$$

Démonstration. Les composantes normales à l'interface $[v_{1\perp}]$, $[v_{2\perp}]$ doivent être continues sur ce dernier et égales à la composante $\partial \xi / \partial t \cos \alpha$ de sa vitesse (les composantes *tangentielles* peuvent cependant être différentes puisque l'on a supposé les fluides parfaits). En calculant ces composantes normales pour les deux fluides en projetant la vitesse de chacun des deux fluides sur la normale à l'interface et en prenant $\cos \alpha = 1$, on obtient :

$$v_{iy} - v_{ix} \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (i = 1, 2) \quad (11.56a)$$

d'où :

$$v_{iy} \cong \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_{ix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (i = 1, 2). \quad (11.56b)$$

■

Remarque.

- Le second membre de l'expression (11.56b) est la dérivée lagrangienne de la position $\xi(x, t)$ de l'interface ; elle est obtenue en suivant une particule de fluide située près de l'interface.

- L'approximation $\cos \alpha \cong 1$ introduit une erreur du second ordre en α alors que les autres termes des équations (11.54) sont du premier ordre en α .

En prenant $v_{1x} = U/2$ dans (11.56), on obtient (11.54) en utilisant l'expression (11.51) des champs de vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ au premier ordre d'approximation.

Cas où la tension interfaciale et la différence de densité sont négligées

Négligeons dans un premier temps l'effet de la capillarité et de la différence de densité entre les deux liquides. Dans ce cas, les pressions de part et d'autre des interfaces sont égales avec :

$$p_1(x, y, t) = p_2(x, y, t) \quad \text{pour} \quad y = \xi. \quad (11.57)$$

Par ailleurs, la relation de Bernoulli (5.36) nous permet d'écrire, pour chacun des deux fluides (supposés de densités égales $\rho_1 = \rho_2 = \rho$) :

$$p_i + \rho \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v_i^2 = \text{cte} \quad (i = 1, 2). \quad (11.58)$$

On déduit alors que :

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{y=0} + \frac{U}{2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right)_{y=0} - \frac{U}{2} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)_{y=0}. \quad (11.59)$$

Justification. Soustrayons les deux équations (11.58) et prenons $y = \xi$; le terme $\rho g y$ s'annule, ainsi que le terme p_i , à cause de l'équation (11.57). Exprimons les termes en v_i^2 de l'équation ainsi obtenue par leur expression à l'aide des relations (11.51). On obtient alors l'équation (11.59) en écrivant l'égalité des termes de cette équation qui sont du premier ordre par rapport aux perturbations Φ_i (et donc varient en $e^{ikx+\sigma t}$). On a remplacé la condition en $y = \xi$ par celle en $y = 0$, ce qui est justifié car l'influence des variations sur la distance infinitésimale ξ serait du deuxième ordre. Le fait d'avoir soustrait les équations (11.58) a permis d'éliminer les composantes éventuelles de p et ξ proportionnelles à $e^{ikx+\sigma t}$. L'équation (11.59) exprime l'équilibre dynamique du problème (elle joue le rôle d'une équation de mouvement), alors que les équations (11.54) expriment des conditions cinématiques.

On démontre alors que le taux de croissance σ est relié au vecteur d'onde k par :

$$\sigma = \pm k \frac{U}{2}. \quad (11.60)$$

Cette relation entre le taux de croissance et le vecteur d'onde k , qui correspond à la relation de dispersion d'une onde, montre qu'il existe toujours un mode instable. L'équation (11.60) implique aussi que, toujours en l'absence de tension superficielle et de forces de gravité, les modes de courte longueur d'onde seront les plus amplifiés.

Démonstration. En reportant les équations (11.53) dans l'équation (11.59), on obtient, après avoir simplifié par $e^{ikx+\sigma t}$ et toujours en prenant $y = 0$:

$$\left(\sigma + ik \frac{U}{2} \right) B_1 - \left(\sigma - ik \frac{U}{2} \right) B_2 = 0. \quad (11.61)$$

Les relations (11.55a-b) et (11.61) forment un système de trois équations linéaires homogènes avec les coefficients inconnus A , B_1 et B_2 . On obtient la condition de compatibilité entre ces équations, en écrivant que le déterminant de la matrice des coefficients du système est nul, soit :

$$k \left(\sigma + ik \frac{U}{2} \right) \left(\sigma + ik \frac{U}{2} \right) + k \left(\sigma - ik \frac{U}{2} \right) \left(\sigma - ik \frac{U}{2} \right) = 0 \quad (11.62)$$

dont on déduit :

$$\sigma^2 = \left(k \frac{U}{2} \right)^2. \quad (11.63)$$

On obtient alors l'équation (11.60). On note que la valeur du taux de croissance s'obtient simplement par une combinaison dimensionnellement convenable du vecteur d'onde k et de la vitesse U . ■

Effets de la tension interfaciale et de la différence de densité

La capillarité limite la croissance des perturbations de petite longueur d'onde et la gravité celle des perturbations de grande longueur d'onde (si le fluide le plus dense est au-dessous de l'autre). Modifions maintenant les calculs précédents pour prendre en compte ces effets.

- On remplace la condition aux limites (11.57) sur la pression par :

$$(p_1)_{y=\xi} = (p_2)_{y=\xi} + \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = (p_2)_{y=\xi} - \gamma k^2 \xi. \quad (11.64)$$

- Dans la relation de Bernoulli, on introduit le terme hydrostatique $\rho_i g \xi$ ($i = 1, 2$) avec $\rho_1 \neq \rho_2$.

Le calcul de la condition de compatibilité des trois équations se poursuit ensuite comme dans le cas précédent et conduit cette fois à la condition d'instabilité :

$$\left(\frac{U \sqrt{\rho_1 \rho_2}}{(\rho_1 + \rho_2)} \right)^2 > c_0^2 = \frac{g}{k} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} + \frac{\gamma k}{\rho_2 + \rho_1} \quad (11.65)$$

où c_0 représente la vitesse des ondes de surface en l'absence d'écoulement ($U = 0$). On voit clairement les effets stabilisants de la différence de densité ($\rho_1 - \rho_2$) (premier terme), et de la tension superficielle γ (second terme). Le minimum c_{0min} de c_0 et le vecteur d'onde critique k_c correspondant vérifient :

$$c_{0min}^2 = \sqrt{\frac{4\gamma g (\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_1 + \rho_2)^2}} \quad (11.66a)$$

et :

$$k_c = \sqrt{\frac{g (\rho_2 - \rho_1)}{\gamma}}. \quad (11.66b)$$

On reconnaît que k_c est l'inverse de la longueur capillaire introduite à la section 1.4.4.

L'ensemble des valeurs seuils de $U \sqrt{\rho_1 \rho_2} / (\rho_1 + \rho_2)$, qui correspondent aux différents vecteurs d'onde, est représenté par la courbe de la figure 11.19. Cette courbe est la limite de stabilité linéaire du problème : elle est analogue à celle de la figure 11.9 relative à l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Le minimum de la courbe (et donc de la vitesse U nécessaire pour observer l'instabilité) correspond au *vecteur d'onde critique* k_c pour lequel les effets de la gravité et de la capillarité sont du même ordre de grandeur. La zone intérieure correspond au domaine où les perturbations de vecteur d'onde donné sont amplifiées. À l'extérieur de cette courbe, l'amplitude des ondes de gravité et de capillarité

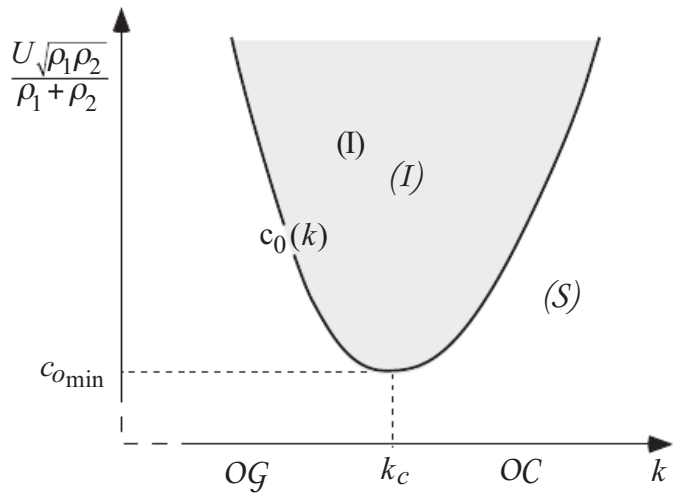


FIG. 11.19 – Domaine de stabilité pour l’instabilité de Kelvin-Helmholtz en fonction du vecteur d’onde k . La courbe continue représente la célérité $c_0(k)$ des ondes de surface donnée par le membre de droite de l’équation (11.65). $(\mathcal{I})$ représente le domaine de l’instabilité, $\mathcal{OG}$ et $\mathcal{OC}$ sont les domaines où la propagation d’ondes forcées est contrôlée respectivement par la gravité et la capillarité.

excitées par une perturbation imposée décroît exponentiellement sous l’effet de la viscosité quand l’excitation cesse.

Mesure expérimentale. On peut déterminer cette courbe à l’aide d’un canal rempli d’eau avec un écoulement d’air de vitesse variable parallèle à la surface libre. On « force », à l’aide d’un batteur placé à une extrémité du canal, une oscillation locale de la surface de fréquence ajustable : on fait ainsi varier dans le même temps le vecteur d’onde. Pour chaque fréquence de forçage, on mesure la vitesse minimale à partir de laquelle apparaît l’instabilité : c’est celle pour laquelle l’amplitude des ondes augmente lorsque l’on s’éloigne du point d’excitation. Ces mesures permettent de construire l’équivalent de la courbe de stabilité de la figure 11.19 (le vecteur d’onde k est alors remplacé sur l’axe horizontal par la fréquence).

Instabilité de Kelvin-Helmholtz en régime non linéaire

L’étude linéaire précédente ne s’applique pas aux effets de grande amplitude où la description en terme de croissance exponentielle d’un seul mode est insuffisante. Pour comprendre le mécanisme d’évolution ultérieure de l’instabilité, nous utilisons une représentation discrète de la discontinuité de vitesse par un ensemble de lignes tourbillons parallèles (nous avons déjà utilisé cette approche à la section 7.4.2). De telles représentations sont largement utilisées en pratique dans des calculs numériques : celui de l’évolution non linéaire du problème de Kelvin-Helmholtz fut d’ailleurs fait dès les années 1930 ! Analysons par exemple le comportement de quatre lignes de tourbillons parallèles A , B , C et D : ces lignes font partie d’une nappe de tourbillons (d’axes perpen-

diculaires au plan de figure), dont le contour présente une bosse en B . Pour analyser l'évolution du profil de la bosse, regardons l'effet, sur le tourbillon B , des deux tourbillons A et C placés symétriquement (Fig. 11.20a).

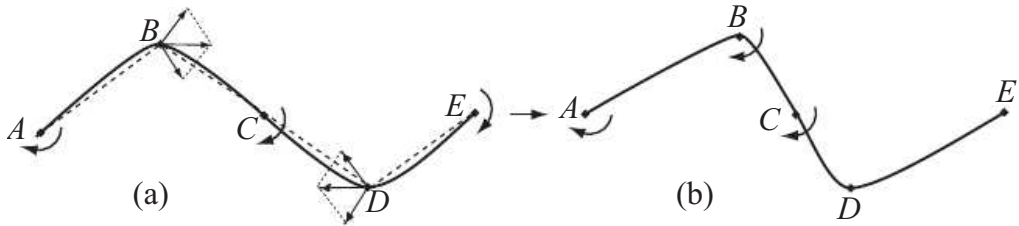


FIG. 11.20 – Évolution d'un ensemble de quatre filaments de tourbillons de même sens, perpendiculaires au plan de figure et faisant partie d'une nappe de vorticité : (a) forme initiale de la nappe de tourbillons après apparition d'une bosse sur celle-là ; (b)  volution de la forme de la nappe sous l'effet de l'interaction entre les champs de vitesse.

Par suite de la déformation du profil, le champ induit par ces tourbillons a une composante horizontale qui tend à rapprocher le tourbillon en B de celui en C ; de même, le tourbillon en D se rapproche de C . Ainsi, la vorticité se trouve renforcée autour de C ; en revanche, autour de A , elle se trouve affaiblie. Sous l'effet de l'écoulement supplémentaire d  à cette vorticité, l'interface se raidit et prend la forme montrée sur la figure 11.20b (on parle d'*onde de type N* par référence à la forme asymétrique de la lettre). Finalement, on a déferlement comme dans le cas des vagues.

11.4.2 Rôle de la forme du profil de vitesse des écoulements ouverts

Dans le cas de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz que nous venons d'étudier, l'écoulement de cisaillement de base présente un point d'inflexion : nous avons vu qu'ils sont toujours instables en l'absence d'effets de gravité, de capillarité et de viscosité. Nous allons montrer que, au contraire, les écoulements dont le profil des vitesses ne présente pas de point d'inflexion sont stables si l'on néglige l'influence de la viscosité : c'est, par exemple, le cas des écoulements de Poiseuille ou à l'intérieur d'une couche limite.

Cependant, pour des fluides visqueux, même les profils d'écoulement sans points d'inflexion peuvent être instables. Cela peut sembler paradoxal car la viscosité était jusqu'à présent toujours apparue comme un effet stabilisant : dans ce cas, au contraire, les transferts de quantité de mouvement dus   la viscosité sont le moteur de l'instabilité aux grandes valeurs du nombre de Reynolds.

Justification. Considérons un écoulement bidimensionnel de vitesse v_x parallèle à l'axe Ox ; sans préciser complètement le profil $v_x(y)$, nous supposons que sa courbure d^2v_x/dy^2 a toujours le même signe (négatif dans le cas de la Fig. 11.21a) quel que soit y . La vorticité $\omega_z = -dv_x/dy$ a alors une variation monotone avec la coordonnée y (Fig. 11.21b).

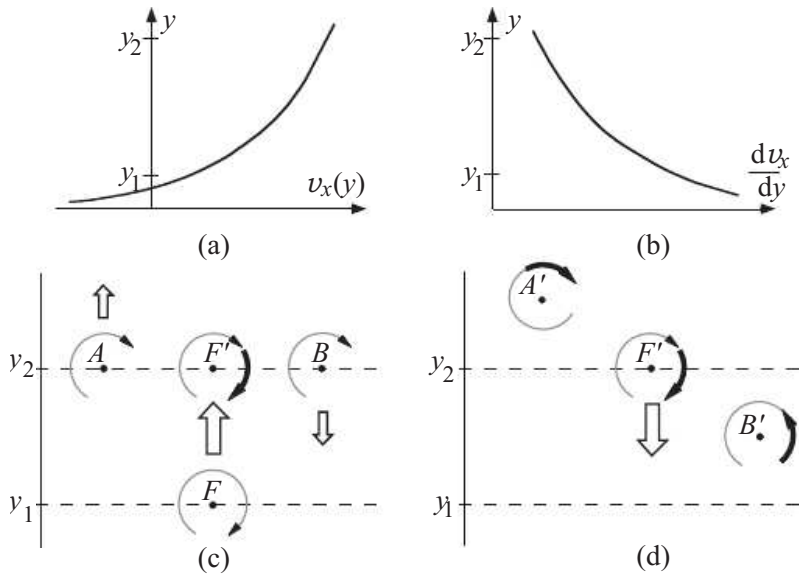


FIG. 11.21 – Évolution d'une perturbation d'un écoulement parallèle d'un fluide parfait dans le cas où la variation de la vitesse $v_x(y)$ du fluide avec la distance y , normale au déplacement, ne présente pas de point d'inflexion : (a) profil de vitesse $v_x(y)$; (b) variation de la dérivée dv_x/dy du profil de vitesse avec la distance y ; (c) perturbation de l'écoulement due au déplacement d'un élément de fluide de F en F' ; (d) champ de vitesse induit par les éléments de fluide A et B déplacés dans des nouvelles positions A' et B' . Sur les schémas (c) et (d), les flèches en traits fins représentent la vorticité locale et les flèches en traits gras la vorticité effective correspondant au déséquilibre de l'élément de fluide déplacé par rapport au champ de vorticité environnant.

Déplaçons une particule de fluide d'une petite longueur $y_2 - y_1$ du point F au point F' (Fig. 11.21c). Si l'on néglige la viscosité, la vorticité n'est que convectée et ne diffuse pas, comme nous l'avons vu à la section 7.3.1. On supposera donc que la particule de fluide conserve sa vorticité initiale quand elle arrive au point F' : par rapport au champ de vorticité d'équilibre, elle apparaît comme un petit tourbillon supplémentaire de vorticité effective (flèche en gras sur la figure) proportionnelle à la différence entre les valeurs de ω_z aux points F et F' (flèches en traits fins). Ce tourbillon réagit à son tour sur les éléments de fluide A et B voisins de F' : A et B se déplacent en sens opposé vers deux points A' et B' en conservant leur vorticité de départ (Fig. 11.21d). Il en résulte pour chacun un déséquilibre avec le fluide environnant, équivalent à l'apparition de deux nouveaux tourbillons de sens

contraire en A' et B' (leur vorticité effective est de nouveau montrée par une flèche en noir sur la figure). Le sens de la vitesse induite en F' est telle qu'elle ramène vers F la particule de fluide considérée initialement.

Un profil d'écoulement sans point d'inflexion est donc stable devant une perturbation infinitésimale dans la limite d'un fluide parfait, où seuls interviennent les effets de convection de la vorticité. Le raisonnement est évidemment remis en cause quand on fait intervenir la diffusion visqueuse de la vorticité.

11.4.3 Instabilités sous-critiques des écoulements de Poiseuille et de Couette

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz présente des caractéristiques supercritiques, au moins pour des couches fluides suffisamment profondes, et se développe alors sans présenter d'effet d'hystérésis. Nous allons voir qu'il en est autrement pour des écoulements ouverts tels que ceux de Poiseuille et de Couette. Comme celle de Bénard-Marangoni (section 11.3.1), les instabilités de ces écoulements peuvent être sous-critiques et des perturbations d'amplitude suffisante peuvent induire une transition brutale vers un régime instable à partir d'un état de repos au-dessous d'un seuil linéaire. Dans de tels écoulements, les instabilités peuvent se manifester par l'apparition de structures qui se propagent avec l'écoulement (on parle alors de régime *convectif* des instabilités) ou qui envahissent une zone donnée et y persistent (il s'agit alors d'un régime *absolu*).

Écoulement de Poiseuille dans un tube circulaire. Dans son étude de la transition à la turbulence dans un tube cylindrique évoquée à la section 2.4.1, O. Reynolds a mis en premier en évidence ces divers effets ; mais ce problème reste mal compris. La nature *sous-critique* des instabilités de ces écoulements est d'autant plus flagrante qu'il a été montré que le nombre de Reynolds critique correspondant à leur apparition serait infini si les fluctuations de l'écoulement étaient infiniment faibles. Une perturbation d'amplitude finie est nécessaire pour déclencher des instabilités qui provoquent l'apparition de turbulence. Des mesures sur un dispositif expérimental similaire à celui de Reynolds ont montré que dans la gamme : $1\,500 < Re < 1\,750$, on peut induire des perturbations localisées de l'écoulement d'une longueur d'une vingtaine de diamètres : ces *bouffées turbulentes* coexistent avec l'écoulement de Poiseuille et se résorbent avec la distance d'autant plus vite que l'on est loin de la valeur 1750. Entre $Re = 1\,750$ et $Re = 2\,200$ (typiquement), on a des *bouchons turbulents* (déjà observés par Reynolds) de longueur constante qui se propagent à une vitesse de l'ordre de la vitesse moyenne. Si l'on augmente encore le nombre de Reynolds, ces bouchons turbulents finissent par occuper l'ensemble de l'écoulement. Le nombre de Reynolds critique de transition spontanée à la turbulence peut varier de quelques milliers à quelques 10^5 suivant les conditions externes (vibrations, conditions d'entrée, rugosité de

parois) de l'expérience. Les études actuelles utilisant les possibilités de la PIV et l'introduction de perturbations contrôlées permettent d'analyser finement ces structures instables.

Écoulement de Poiseuille entre deux plans. En revanche, pour un écoulement de Poiseuille entre deux plans parallèles, on a un seuil bien défini ($Re_c = 5900$) pour l'apparition d'une instabilité *linéaire* (même en l'absence de toute perturbation). Mais, comme pour l'écoulement de Poiseuille en tube, on peut amplifier des perturbations d'amplitude finie pour des nombres de Reynolds beaucoup plus faibles (de l'ordre du millier). De fait, expérimentalement, la transition à une turbulence développée dans tout le volume se fait de manière similaire au cas du tube circulaire.

Écoulement de Couette plan. L'écoulement de Couette plan présente également des caractéristiques sous-critiques. Il existe ainsi un seuil non linéaire $Re_{NL} \approx 1500$ représentant la vitesse minimum pour que des perturbations de très grande amplitude puissent être amplifiées ($Re = \Delta U h / \nu$ où h est la distance entre les plans et ΔU leur vitesse relative). En s'approchant de ce seuil par valeurs supérieures, on constate une augmentation continue de l'amplitude de la fluctuation nécessaire pour créer une structure turbulente permanente. Une étendue spatiale minimale des perturbations est également nécessaire. Aux nombres de Reynolds plus élevés, on peut rendre tout le volume d'écoulement turbulent. Des expériences mettant ces propriétés en évidence ont été réalisées entre deux bandes planes parallèles se déplaçant en sens inverse à la même vitesse absolue : la vitesse dans le plan médian est nulle, ce qui facilite les observations des perturbations qui ne se déplacent alors pas.

Remarque. Ces résultats présentent des analogies avec les transitions de phase du premier ordre (comme le passage de l'état liquide à l'état gazeux au-dessous d'un point critique). Le passage d'un état à un autre dépend alors, en plus de l'amplitude des perturbations, d'un rayon critique de nucléation de la phase instable (turbulente) qui croît à partir de l'état stable.

This page intentionally left blank

Chapitre 12

Turbulence

CET OUVRAGE se termine par le plus redoutable volet de la mécanique des fluides : la turbulence dont nous avons déjà rencontré les manifestations tout au long de cet ouvrage. Au chapitre 2, nous avons vu que l'écoulement derrière un obstacle cylindrique devient turbulent à des nombres de Reynolds de quelques centaines. Au chapitre 7, nous avons étudié la physique des vortex, éléments constitutifs de la turbulence. Le décollement des couches limites (chapitre 10) fait apparaître des sillages turbulents derrière les corps placés dans un écoulement. Enfin, l'étude des instabilités hydrodynamiques au chapitre 11 représente un prélude à celle de la turbulence.

Après un bref rappel historique (section 12.1), nous établirons (section 12.2) les équations de base de la turbulence en décomposant le champ de vitesse local et instantané en une composante moyenne et des fluctuations ; nous ferons de même pour les autres variables (vorticité, pression, énergie). Les fluctuations sont corrélées et ont donc une efficacité résultante non nulle : ce mécanisme de transport turbulent joue un rôle clé, aussi bien pour les transferts d'énergie et de quantité de mouvement que pour ceux d'énergie thermique ou de solutés. Nous présenterons ensuite (section 12.3) quelques relations empiriques entre le transport de quantité de mouvement par les fluctuations turbulentes et le gradient de l'écoulement moyen. Puis nous discuterons (section 12.4) leur application à des écoulements libres tels que les jets, les sillages ou les couches de mélange.

À la section 12.5, nous aborderons les écoulements turbulents limités par des parois solides. Le transport de quantité de mouvement n'utilise la viscosité qu'au voisinage immédiat de la paroi (sous-couche visqueuse) ; ensuite, il s'effectue par l'intermédiaire de tourbillons de taille de plus en plus grande au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la paroi (couche inertielle).

La théorie de Kolmogorov (section 12.6) s'applique, au contraire, à la turbulence homogène et utilise la variation des quantités fluctuantes (vitesse,

vorticité...) en fonction des échelles de taille des tourbillons auxquels elles correspondent : elle décrit, dans les écoulements tridimensionnels, le transfert d'énergie de l'écoulement moyen et des composantes turbulentes de grande taille vers celles correspondant à des petites échelles spatiales pour lesquelles l'effet de la viscosité commence à se faire sentir. On établit ainsi des lois d'échelle caractérisant le transport et l'on voit réapparaître les effets d'amplification de la vorticité par étirement des tourbillons vus au chapitre 7.

Enfin, dans la section 12.7, nous évoquerons le cas des écoulements bidimensionnels pour lesquels le mécanisme d'étirement de la vorticité est absent, ainsi que celui des grandes structures cohérentes turbulentes.

12.1 Une longue histoire

La turbulence constitue un chapitre essentiel de l'étude des écoulements de fluides. Elle a fait l'objet de descriptions souvent précises et imagées depuis l'Antiquité. Lorsque Héraclite écrit : « on ne se baigne jamais deux fois dans le même fleuve », il fait référence au caractère toujours changeant – instationnaire et imprévisible – des écoulements turbulents. Dans le *De natura rerum*, Lucrèce s'attache à la description de la surface de la mer alternativement calme et très agitée. Il introduit, à la suite d'Épicure, la notion de *clinamen* (en français *déviatio*n) qui traduit la modification de la trajectoire des *atomes* qui, amplifiée, conduit à la formation des corps de manière imprévisible, de même qu'à l'obtention du mouvement turbulent d'un fluide. Au chapitre précédent, nous avons déjà évoqué cette *sensibilité aux conditions initiales* dans l'étude des instabilités hydrodynamiques qui conduisent à des comportements imprévisibles.

Par ailleurs, les écoulements turbulents font apparaître des formes géométriques bien reconnaissables, où l'on distingue souvent des tourbillons et des structures de filaments tels que les a dessinés, en particulier, Léonard de Vinci, et qui sont attachés à la notion moderne de *structures cohérentes*. Les tourbillons de Bénard-von Kármán étudiés dans la section 2.4.2, ainsi que les structures de couche de mélange à l'interface de deux fluides se déplaçant à des vitesses différentes (section 11.4.1), sont des exemples de telles structures. Le même Léonard donnera une première description des transferts au sein d'un écoulement turbulent dont nous empruntons la transcription à l'excellent livre d'Uriel Frisch sur ce sujet :

« Où la turbulence de l'eau se crée ;
où la turbulence de l'eau se maintient longtemps ;
où la turbulence retourne au repos. »

Nous verrons dans la section 12.6 que cela peut être mis en correspondance avec la *cascade d'énergie* – dite de Kolmogorov – qui va de l'échelle des plus grands tourbillons vers celle des plus petits, et dont nous avons pu nous faire

une idée à l'occasion de l'étude du vortex de Rankine à la section 7.3.2. Enfin, nous avons vu à la section 2.4.1 comment Reynolds a étudié à partir de 1880 la transition entre les écoulements laminaires et turbulents.

Nous pourrions poursuivre cette présentation historique ... pour dire, en conclusion, que le problème de la prédiction des écoulements turbulents, qui a fait l'objet de nombreuses études dès la fin du XIX^e siècle, reste, aujourd'hui encore, incomplètement compris.

12.2 Les équations de base

12.2.1 Description statistique des écoulements turbulents

Les écoulements turbulents présentent des fluctuations aléatoires de la vitesse. Pour cette raison, leur étude se rapproche de celle des gaz de particules en mécanique statistique. Plutôt que de chercher à décrire la vitesse en tout point $\mathbf{x}$ et à tout instant t , on doit s'intéresser à la probabilité d'obtenir une vitesse donnée en un ensemble de points bien choisis. En pratique, la détermination complète de telles distributions de probabilité est impossible et il faut se contenter de déterminer les moments de cette distribution, comme la moyenne ou l'écart-type, ainsi que les fonctions de corrélation entre les fluctuations de la vitesse en des points et des temps voisins.

Les variables décrivant le fluide en écoulement turbulent (vitesse, pression, température, composition ...) seront décomposées en des valeurs moyennes et des fluctuations de valeur moyenne nulle liées à la turbulence. Appliquons cette décomposition – dite *décomposition de Reynolds* – à la composante v_i de la vitesse sous la forme :

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i$$

avec

$$\overline{v'_i} = 0. \quad (12.1)$$

Nous nous intéresserons à l'écriture des lois qui régissent les variations de la valeur moyenne $\bar{v}_i$ et celles des corrélations entre les composantes v'_i des fluctuations. En toute rigueur, pour déterminer ces valeurs moyennes, il faut produire un grand nombre N de réalisations du même écoulement pour des conditions initiales et des géométries identiques, et effectuer une *moyenne d'ensemble* sur des valeurs obtenues sur toutes ces réalisations :

$$\bar{v}_i(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N v_i^{\alpha}(\mathbf{x}, t) \quad (12.2)$$

où l'indice α varie de 1 à N et caractérise la réalisation considérée. Cette procédure est la seule possible lorsque l'écoulement dépend du temps et que l'on s'intéresse à l'évolution temporelle de $\bar{v}_i(\mathbf{x}, t)$ (comme, par exemple, pour

la relaxation de la turbulence induite par un déplacement d'une grille à travers un volume de fluide. Elle n'est applicable cependant en pratique qu'à des écoulements faciles à reproduire et pour lesquels le temps d'évolution (par exemple la relaxation des fluctuations de vitesse turbulentes vers zéro) n'est pas trop long.

De telles moyennes d'ensemble ne sont pas indispensables si l'on a affaire à un écoulement statistiquement stationnaire. Dans de tels écoulements, les valeurs de la vitesse et de la pression fluctuent au cours du temps, mais leurs propriétés statistiques (leur distribution de probabilité, leur valeur moyenne ...) ne varient pas au cours du temps. On suppose alors que la turbulence vérifie une hypothèse d'*ergodicité* : si l'on attend un temps assez long, l'écoulement passe par tous ses états possibles, et le temps passé dans chacun d'eux est proportionnel à sa probabilité. On en déduit la définition suivante de la composante $\bar{v}_i$ de la vitesse moyenne de l'écoulement en un point $\mathbf{x}$ donné :

$$\bar{v}_i(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_i(\mathbf{x}, t) dt. \quad (12.3)$$

On n'obtiendra une valeur significative de la moyenne que si le temps de moyennage T est grand devant la durée caractéristique τ des fluctuations de vitesse les plus lentes associées aux mouvements turbulents.

Si l'écoulement n'est pas rigoureusement stationnaire mais évolue lentement, par exemple par suite d'une variation des paramètres extérieurs, on peut définir quand même une moyenne $\bar{v}_i(\mathbf{x}, t_0)$ pour un temps t_0 donné en adaptant la définition (12.3). Il faut imposer pour cela que le temps de moyennage T soit faible devant le temps T_1 d'évolution à grande échelle de l'écoulement global. En combinant les deux conditions sur T , cela requiert que la durée τ des fluctuations turbulentes les plus lentes soit beaucoup plus faible que le temps T_1 : l'écoulement doit donc être presque stationnaire et l'on peut admettre alors que l'hypothèse d'ergodicité est valable.

Outre les moyennes temporelles des composantes de la vitesse et des autres grandeurs fluctuantes (pression, température ...), on utilisera aussi des moments d'ordre supérieur de ces variables (ou des moyennes de produits de ces variables) qui indiquent comment sont reliées entre elles leurs variations en des points et des temps différents. L'étude de telles *corrélations spatio-temporelles* à partir de mesures instantanées de vitesse en deux points a constitué l'un des grands volets des études expérimentales de la turbulence, en liaison avec le développement de modèles statistiques. Les outils expérimentaux ont été, en particulier, les anémomètres à fil chaud et les anémomètres lasers Doppler (section 3.5.3). Ces études ne fournissent pas cependant certaines informations importantes sur la géométrie de la turbulence auxquelles les techniques récentes, comme la fluorescence induite par laser (section 3.5.2) ou la vélocimétrie par images de particules (section 3.5.4), donnent maintenant accès.

12.2.2 Dérivation des valeurs moyennes

Dans le cas où l'on utilise une moyenne d'ensemble, on trouve, en prenant une dérivée spatiale ou temporelle de l'équation (12.2) et en échangeant l'ordre des opérations de sommation et de dérivation :

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}} \quad (12.4)$$

et :

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} = \overline{\frac{\partial v_i}{\partial t}}. \quad (12.5)$$

Dans le cas où l'on utilise une moyenne temporelle, on retrouve le même résultat pour les dérivées spatiales en procédant de même avec l'équation (12.3). Pour la dérivée temporelle, l'équation (12.5) ne sera valable que si la condition (discutée plus haut) de valeur très faible du temps caractéristique τ des fluctuations devant celui d'évolution de l'écoulement est vérifiée.

Démonstration. La dérivée temporelle de la vitesse moyenne vérifie, en décomposant v_i en $\bar{v}_i + v'_i$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \overline{\left(\frac{v_i(t_0 + \delta t) - v_i(t_0)}{\delta t} \right)} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{v}_i(t_0 + \delta t) - \bar{v}_i(t_0)}{\delta t} + \frac{\overline{v'_i(t_0 + \delta t) - v'_i(t_0)}}{\delta t} \right). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Les deux moyennes des fluctuations du membre de droite s'annuleront, en effet, si le temps de moyennage T est $\gg \tau$. D'autre part, on peut considérer que le terme de gauche est égal à $\partial \bar{v}_i / \partial t$ si T est suffisamment faible devant le temps d'évolution global T_1 . En prenant $\delta t = T$, on obtient alors une valeur significative de cette dérivée. ■

12.2.3 Équations du mouvement des écoulements turbulents

Équation de Reynolds

L'équation de Navier-Stokes continue de s'appliquer à la vitesse instantanée v_i tant que l'échelle des plus petits mouvements turbulents des particules de fluide est grande devant le libre parcours moyen des molécules individuelles (nous considérerons dans la suite que cette hypothèse est valable). Nous supposerons également, comme dans le reste de cet ouvrage, que le fluide est incompressible.

L'équation du mouvement, appelée *équation de Reynolds* – vérifiée par la valeur moyenne $\bar{v}_i$ de la vitesse – est la suivante :

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} + f_i. \quad (12.7)$$

Note. Dans l'équation (12.7), on calcule la somme sur l'indice j qui apparaît deux fois dans chaque terme.

Cette équation de Reynolds ne diffère que par le terme $\overline{v'_j (\partial v'_i / \partial x_j)}$ de celle que l'on obtiendrait en remplaçant, dans l'équation de N-S, p et v_i par leurs moyennes $\bar{p}$ et $\bar{v}_i$.

Démonstration. Reportons la décomposition (12.1) dans l'équation de Navier-Stokes divisée par la masse volumique ρ . On obtient, en utilisant comme précédemment la convention d'Einstein de sommation implicite sur l'indice j lorsqu'il est répété dans un terme :

$$\frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial t} + (\bar{v}_j + v'_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i + v'_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} + p') + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{v}_i + v'_i) + f_i. \quad (12.8)$$

Moyennons maintenant l'équation (12.8) dans le temps. Tous les termes ne faisant intervenir qu'une fois les fluctuations p' ou v'_i disparaissent lors du moyennage. Seuls le produit croisé $\overline{v'_j (\partial v'_i / \partial x_j)}$ et les termes ne contenant que les moyennes de v_i et de p sont non nuls, ce qui conduit à l'équation (12.7). ■

Dans tout cet ouvrage, nous nous limiterons à la turbulence incompressible. La condition d'incompressibilité, $\text{div } \mathbf{v} = 0$, s'appliquera à la fois pour le champ moyen et pour le champ fluctuant. À partir de ces deux conditions, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j) = 0 \quad (12.9)$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (v'_j) = 0. \quad (12.10)$$

Noter que l'équation (12.10) est valable à tout instant et pas seulement en moyenne.

Tout comme l'équation de Navier-Stokes usuelle, l'équation (12.7) peut être transformée en une équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\sigma}_{ij} - \rho \bar{v}_i \bar{v}_j - \rho \overline{v'_j v'_i} \right) + \rho f_i \quad (12.11a)$$

où :

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \rho \nu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right). \quad (12.11b)$$

Démonstration. On multiplie (12.7) par ρ et l'on utilise l'équation (12.10) pour récrire le produit croisé :

$$\overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{(v'_j v'_i)}}{\partial x_j} - v'_i \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{(v'_j v'_i)}}{\partial x_j}.$$

On effectue ensuite la même opération sur le terme $\bar{v}_j \partial \bar{v}_i / \partial x_j$. ■

Le terme :

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{v'_i v'_j} \quad (12.11c)$$

de l'équation (12.11a) est le *tenseur de Reynolds*. La moyenne $\overline{\Pi_{ij}}$ du flux de quantité de mouvement $\Pi_{ij} = \rho v v_j + p \delta_{ij} - \sigma'_{ij}$ introduit à la section 5.2.2 (Éq. 5.11) vérifie :

$$\overline{\Pi_{ij}} = -\overline{\sigma_{ij}} + \rho \bar{v}_i \bar{v}_j + \rho \overline{v'_i v'_j} = -\overline{\sigma'_{ij}} + \rho \bar{v}_i \bar{v}_j + \rho \overline{v'_i v'_j} + \bar{p} \delta_{ij}. \quad (12.12)$$

De nouveau, les équations (12.11a) et (12.12), vérifiées par les moyennes $\bar{v}_i$ et $\bar{p}$, sont presque identiques aux expressions obtenues en remplaçant, dans les équations correspondantes (5.6) et (5.11), v_i et p par leurs moyennes. Le seul terme supplémentaire, mais fondamental en ce qui concerne le transport turbulent, est le tenseur de Reynolds.

Signification du tenseur de Reynolds

Le terme $\tau_{ij} = -\rho \overline{v'_i v'_j}$, caractérisant la corrélation entre des composantes instantanées de la vitesse fluctuante, rend compte du transport de quantité de mouvement par les fluctuations turbulentes. Il est appelé aussi *tenseur des contraintes turbulentes*. Ce tenseur est symétrique. Il a donc trois composantes diagonales τ_{ii} , et trois composantes non diagonales $\tau_{i \neq j}$ qui jouent un rôle particulièrement important : dans le cas d'un écoulement turbulent dans une conduite cylindrique ou entre deux plans, elles assurent le transport vers les parois de la composante de la quantité de mouvement parallèle à l'écoulement moyen (section 12.5.2). Elles prennent ainsi le relais des composantes non diagonales du tenseur des contraintes de viscosité que nous avons discutées au chapitre 4.

Transport turbulent d'énergie thermique ou de matière

Jusqu'à présent, nous avons cherché à établir des équations vérifiées par la vitesse moyenne d'un écoulement turbulent et qui régissent, par conséquent, le transport de quantité de mouvement. On peut traiter de même le problème du transfert thermique dans un écoulement turbulent. Le transport thermique par les fluctuations turbulentes de vitesse présente des analogies avec le modèle de la théorie cinétique des gaz discuté au chapitre 1 (section 1.3.2). Dans ce dernier cas, ce transfert est associé au déplacement adiabatique des particules sous l'effet de l'agitation thermique à l'intérieur d'un gradient de température. La vitesse associée à cette dernière est remplacée ici par les composantes de vitesse turbulentes.

Dans le cas général, l'équation du transport thermique dans un fluide en écoulement en l'absence de source de chaleur est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}, \quad (12.13)$$

où v_j est la vitesse locale du fluide et $\kappa = k/(\rho C_p)$ sa *diffusivité thermique* (C_p est sa capacité thermique massique, ρ sa masse volumique et k sa conductivité thermique). Comme pour la vitesse, on a souvent, dans un écoulement turbulent, des fluctuations de la température T , qu'on peut décomposer sous la forme $T = \bar{T} + T'$. Les dérivées spatiale et temporelle de $\bar{T}$ sont prises, comme pour la vitesse, égales aux valeurs moyennes des dérivées. En combinant la décomposition de T avec celle de la vitesse $v_i = \bar{v}_i + v'_i$ et, en moyennant l'équation de transport thermique, on obtient l'équation équivalente à l'équation de Reynolds :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{v}_j \bar{T} + \overline{v'_j T'} \right) + \kappa \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2}. \quad (12.14)$$

La moyenne $\overline{v'_j T'}$ joue un rôle équivalent au tenseur de Reynolds et assure un transfert thermique global à partir de celui des fluctuations de température par celles de la vitesse. De l'équation (12.14), on déduit, comme précédemment, l'expression du flux thermique $\mathbf{Q}_T$ à l'intérieur de l'écoulement turbulent :

$$Q_{Tj} = -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \rho C_p \bar{v}_j \bar{T} + \rho C_p \overline{v'_j T'}. \quad (12.15)$$

Intéressons-nous maintenant, au lieu du transfert thermique, au transport d'un composé soluble (ion, colorant, traceur radioactif, polluant chimique ...) de concentration C exprimée en masse de soluté par unité de volume de solvant. On obtient, de la même façon, l'expression suivante pour le flux massique $\mathbf{Q}_m$ de soluté par unité de surface et de temps en l'absence de terme de source (réaction chimique par exemple) :

$$Q_{mj} = -D_m \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} + \bar{v}_j \bar{C} + \overline{v'_j C'}. \quad (12.16)$$

Le coefficient D_m est la diffusivité associée à la quantité considérée, qui est bien plus efficace que la diffusion moléculaire. C'est bien ce que nous utilisons, sans y penser, lorsque nous homogénéisons les composants de notre café au lait du matin !

Exemple. Comparons, pour une solution ionique, les ordres de grandeur des composantes de flux associées aux différents mécanismes. La valeur de D_m typique pour un ion simple est $D_m = 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Supposons que, pour une valeur moyenne $\bar{C}$ de la concentration, on établisse un gradient de concentration moyenne correspondant à une variation de l'ordre de $10^{-1} \bar{C}$ sur une taille de récipient de 0,1 m. Produisons maintenant dans ce récipient, avec une grande cuillère par exemple, un écoulement turbulent de mélange créant des fluctuations turbulentes de vitesse de l'ordre de $10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et des fluctuations de concentration également de l'ordre de $10^{-1} \bar{C}$. Les ordres de grandeur des termes de transport de masse par les fluctuations turbulentes et par la diffusion moléculaire (si le fluide restait au repos) sont respectivement :

$\overline{v_j' C'} \approx 10^{-3} \overline{C} \text{ m.s}^{-1}$ et $D_m \partial \overline{C} / \partial x_j \approx 10^{-7} \overline{C} \text{ m.s}^{-1}$. La diffusion turbulente est bien plus efficace que la diffusion moléculaire.

Le rapport Pe_t entre les termes de diffusion turbulente et moléculaire peut être considéré, qu'il s'agisse du transfert thermique ou de masse, comme un *nombre de Péclet turbulent*; en utilisant la même définition qu'à la section 2.3.2, son ordre de grandeur est $Pe_t \approx 10^4$ dans l'exemple précédent.

12.2.4 Bilans d'énergie dans un écoulement turbulent

L'énergie cinétique d'un écoulement turbulent est la somme des énergies de l'écoulement moyen et des fluctuations turbulentes (en effet lorsque l'on moyenne $(\bar{v}_i + v_i')^2$, les termes croisés en $\bar{v}_i v_i'$ du développement du carré donnent une moyenne nulle, de telle sorte que $\overline{v_i^2} = \bar{v}_i^2 + \overline{v_i'^2}$). Nous allons donc écrire séparément les équations de bilan pour ces deux composantes afin de connaître la variation de l'énergie cinétique totale.

Variations d'énergie cinétique de l'écoulement moyen en l'absence de gravité

Pour calculer ce bilan, on multiplie l'équation de Navier-Stokes par $\bar{v}_i$, puis on somme sur les différentes composantes et l'on moyenne (on suppose la force en volume f_i nulle). En décomposant chaque composante de la vitesse suivant l'équation (12.1), en divisant par ρ pour avoir l'énergie par unité de masse et en éliminant les termes où les fluctuations n'interviennent que dans un seul facteur et dont la moyenne est donc nulle, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{v}_i^2}{2} \right) + \bar{v}_i \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\bar{v}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \overline{\bar{v}_i v_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} + \nu \bar{v}_i \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2}. \quad (12.17)$$

En utilisant les équations d'incompressibilité (12.9) et (12.10), on peut récrire l'équation (12.17) sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{v}_i^2}{2} \right) + \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{v}_i^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\bar{v}_i \overline{v_i' v_j'} - \frac{\bar{p} \bar{v}_j}{\rho} + \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) \\ &\quad - \nu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \overline{v_i' v_j'} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (12.18)$$

Dans le premier membre :

- le terme $\partial(\bar{v}_i^2/2)/\partial t$ correspond à la variation temporelle de l'énergie moyenne : il est non nul si l'écoulement moyen est instationnaire ;
- le terme $\bar{v}_j (\partial(\bar{v}_i^2/2)/\partial x_j)$ correspond à la convection par l'écoulement moyen du gradient spatial de l'énergie cinétique moyenne. En regroupant ce terme avec le premier, on obtient une sorte de dérivée lagrangienne, mais construite à partir de la vitesse moyenne et non de la vitesse totale.

Le second membre regroupe les contributions suivantes de différents mécanismes :

- les trois premiers termes (regroupés dans une même parenthèse) représentent la divergence de termes de flux de diverses origines (fluctuations turbulentes, pression, viscosité). Leur intégrale sur un volume de contrôle correspond au travail des contraintes correspondantes ;
- le terme $-\nu(\partial\bar{v}_i/\partial x_j)^2$ exprime, en se référant à la section 5.3.1, la perte d'énergie de l'écoulement moyen par dissipation visqueuse (il suffit de remplacer v_i par $\bar{v}_i$ dans l'Éq. (5.26) pour retrouver ce terme) ;
- le dernier terme $\overline{v'_i v'_j} \partial\bar{v}_i/\partial x_j$ de l'équation représente le transfert d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations turbulentes : il fait intervenir à la fois le gradient de vitesse de l'écoulement moyen et le tenseur de Reynolds $\tau_{ij} = -\rho\overline{v'_i v'_j}$ du transport de quantité de mouvement par les fluctuations turbulentes.

Variations d'énergie cinétique des fluctuations turbulentes en l'absence de gravité

On procède exactement comme pour obtenir les équations (12.17) et (12.18), mais on multiplie l'équation de Navier-Stokes par v'_i au lieu de $\bar{v}_i$ avant de sommer sur les indices i et j et de moyenner. En procédant comme précédemment pour regrouper les différents membres des équations ainsi obtenues, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{v_i'^2}}{2} \right) + \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{v_i'^2}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{\overline{v_i'^2 v'_j}}{2} - \frac{\overline{p' v'_j}}{\rho} + \nu \overline{v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} \right) \\ - \nu \overline{\left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2} - \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Cette équation est similaire dans sa forme à l'équation (12.18), en remplaçant des valeurs moyennes par des composantes fluctuantes. Dans le premier membre :

- le terme $\partial(\overline{v_i'^2}/2)/\partial t$ caractérise l'instationnarité de l'énergie des fluctuations turbulentes ;
- le terme $\bar{v}_j \left(\partial(\overline{v_i'^2}/2)/\partial x_j \right)$ reflète, comme dans l'équation (12.18), une convection par l'écoulement moyen mais, ici, du gradient de l'énergie des fluctuations turbulentes. On peut aussi le regrouper avec le premier terme pour obtenir une forme particulière de dérivée lagrangienne (basée sur la convection par l'écoulement moyen).

Dans le second membre :

- les trois premiers termes, tous sous forme de divergence, représentent également, après intégration sur un élément de volume, des travaux des contraintes turbulentes, de pression et visqueuses. Ces contraintes sont fluctuantes mais donnent des contributions non nulles, car on les multiplie par des composantes fluctuantes de la vitesse ;
- le terme $-\nu \overline{(\partial v'_i / \partial x_j)^2}$ exprime, en se référant à la section 5.3.1, la perte d'énergie des fluctuations turbulentes par dissipation visqueuse : on l'obtient en remplaçant v_i par v'_i dans l'équation (5.26) ;
- le terme $-\overline{v'_i v'_j} (\partial \bar{v}_i / \partial x_j)$ est le même que dans l'équation (12.18), mais il est de signe opposé : cela confirme son rôle dans l'échange d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations.

Remarque. Nous verrons plus loin que les gradients de vitesse associés aux tourbillons (et en particulier à ceux de petite taille) sont beaucoup plus élevés que ceux du champ de vitesse d'écoulement moyen, sauf très près des parois (section 12.6.1). Le terme $-\nu \overline{(\partial v'_i / \partial x_j)^2}$ de dissipation visqueuse des fluctuations turbulentes de l'équation (12.19) est donc très supérieur au terme correspondant $-\nu (\partial \bar{v}_i / \partial x_j)^2$ pour l'écoulement moyen. En ce qui concerne l'ordre de grandeur relatif des deux derniers termes de l'équation (12.18), on passe de l'un à l'autre en remplaçant dans $-\nu (\partial \bar{v}_i / \partial x_j)^2$ le facteur $-\nu (\partial \bar{v}_i / \partial x_j)$ (contraintes visqueuses associées à l'écoulement moyen) par $\overline{v'_i v'_j}$ (contraintes turbulentes). Là encore, celles-ci seront généralement dominantes sauf, comme nous le verrons, très près des parois.

12.2.5 Transport de la vorticité dans un écoulement turbulent

Bilan de la vorticité des fluctuations turbulentes

On peut, comme pour les champs de vitesse et de pression, décomposer la vorticité $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ sous la forme $\boldsymbol{\omega} = \bar{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}'$. Les termes fluctuants ω'_i correspondent à des combinaisons de gradients des composantes des fluctuations de la vitesse : en valeur absolue ils sont en général beaucoup plus élevés que les termes $\bar{\omega}_i$ (voir section 12.6.1).

Nous nous intéresserons donc uniquement à l'équation de conservation des composantes ω'_i ou plutôt, puisqu'elles sont en moyenne nulles, de la quantité $\omega'^2_i / 2$ (on somme sur i) appelée *enstrophie*. On établit l'équation de conservation de l'enstrophie $\omega'^2 / 2 = \sum_i \omega'^2_i / 2$ des fluctuations turbulentes à partir de l'équation (7.42) de transport de la vorticité, en procédant comme pour l'énergie et la quantité de mouvement. En ne conservant que les termes dominants, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{\omega'^2}}{2} \right) + \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{\omega'^2}}{2} \right) = \overline{\omega'_i \omega'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} - \nu \overline{\left(\frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j} \right)^2}. \quad (12.20a)$$

Démonstration. Multiplions l'équation (7.42) par ω'_i et moyennons en utilisant la même décomposition que précédemment pour v_i et en négligeant la vorticité moyenne $\bar{\omega}_i$ devant ω'_i . Les différents termes deviennent :

$$\bullet \quad \overline{\omega'_j v_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}} = \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{\omega'^2_j}}{2} \right) + \overline{v'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\omega'^2_i}{2} \right)} + \overline{\omega'_j v'_j \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_j}}$$

$$\text{o   :} \quad \overline{v'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\omega'^2_i}{2} \right)} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v'_j \frac{\omega'^2_i}{2}} \right),$$

$$\bullet \quad \overline{-\omega'_i \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} = -\overline{\omega'_i \omega'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \overline{\omega'_i \omega'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}$$

$$\bullet \quad \overline{\nu \omega'_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2}} = \nu \overline{\omega'_i \frac{\partial^2 \omega'_i}{\partial x_j^2}} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\omega'_i \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j}} \right) - \nu \overline{\left(\frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j} \right)^2} = \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \overline{\omega'^2_i}}{\partial x_j^2} - \nu \overline{\left(\frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j} \right)^2}.$$

Les termes tels que $\overline{\omega'_i \omega'_j (\partial \bar{v}_i / \partial x_j)}$ qui incluent la dérivée de grandeurs déjà moyennées sont alors considérés comme négligeables par rapport aux termes du type $\overline{\omega'_i \omega'_j (\partial v'_i / \partial x_j)}$. En tenant compte de ces remarques, on trouve les deux termes dominants du membre de droite de l'équation (12.20a). Pour un écoulement turbulent quasi-stationnaire et homogène le membre de gauche de cette équation s'annule, et elle devient :

$$\overline{\omega'_i \omega'_j (\partial v'_i / \partial x_j)} = \nu \overline{(\partial \omega'_i / \partial x_j)^2}. \quad (12.20b) \quad \blacksquare$$

L'équation (12.20) joue pour la vorticité (et, à travers elle, pour le moment cinétique) le rôle du bilan d'énergie (12.19) pour l'énergie cinétique. Le terme $-\nu \overline{(\partial \omega'_i / \partial x_j)^2}$ représente la dissipation de vorticité par diffusion visqueuse. Le second terme $\overline{\omega'_i \omega'_j (\partial v'_i / \partial x_j)}$ découle du terme $\omega_j (\partial v_i / \partial x_j)$ de l'équation (7.42) : celui-ci correspond à la variation de vorticité turbulente due à l'étirement des tubes de vorticité par les fluctuations de vitesse. Pour compenser la diffusion visqueuse, ce terme doit être positif : il y a donc en moyenne plus d'étirement que de contraction des tubes de vorticité. Ainsi, ceux de plus grande taille s'étirent continuellement en tubes de section plus petite : ce processus continue jusqu'à ce que les pertes dues à la viscosité équilibrent l'augmentation de vorticité.

Remarque. Un équilibre similaire entre étirement de la vorticité et diffusion visqueuse a été discuté dans la section 7.3.2 à propos des tourbillons de vidange.

Un tel modèle ne s'applique qu'aux écoulements à trois dimensions : pour un écoulement purement bidimensionnel, la vorticité est toujours perpendiculaire au plan de l'écoulement, et le terme d'étirement est identiquement nul. Nous verrons à la section 12.7.3 comment ce résultat modifie considérablement la turbulence dans des écoulements bidimensionnels.

L'efficacité de ce processus d'étirement est bien démontrée expérimentalement pour des écoulements turbulents entre des disques parallèles tournant en sens inverse autour d'un même axe : l'apparition sporadique de filaments de tourbillons avec un cœur très localisé a ainsi été observée. Toutefois, ces tourbillons se déstabilisent et disparaissent peu après leur apparition. L'existence de tels filaments est observée également dans des simulations numériques.

Divergence de la vorticité à temps fini en l'absence de viscosité

En l'absence de viscosité, l'amplification de la vorticité par étirement pourrait conduire à une divergence de cette dernière en un temps fini. Reprenons l'équation (12.20a) en négligeant l'effet de la viscosité. Dimensionnellement, le terme de droite est d'ordre ω^3 . D'une manière symbolique, la vorticité vérifie donc l'équation :

$$\frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} = A \omega^3$$

où A est une constante de l'ordre de l'unité. Cette équation possède une solution de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\omega} = At$$

où ω_0 est la vorticité au temps initial $t = 0$, soit :

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - A \omega_0 t} = \frac{\omega_0 t_0}{t_0 - t} \quad (12.21a)$$

avec :

$$t_0 = \frac{1}{A \omega_0}. \quad (12.21b)$$

Dans ce modèle, la vorticité ω diverge au bout du temps t_0 , ou *temps de catastrophe*, qui est de l'ordre de grandeur du temps de retournement des mouvements tourbillonnaires initiaux. La question de savoir si l'effet de la viscosité peut empêcher une telle divergence de se produire en un temps fini reste actuellement ouverte.

12.3 Expressions empiriques du tenseur de Reynolds et applications aux écoulements libres

12.3.1 Fermeture de l'équation de Reynolds

L'ensemble des équations (12.7) et (12.9) fait intervenir plus d'inconnues que d'équations : aux quatre inconnues $\bar{v}_i$ et $\bar{p}$ s'ajoutent les six composantes différentes de τ_{ij} (les fonctions de corrélation). On peut établir des équations vérifiées par τ_{ij} en multipliant les équations (12.7) par v'_j , puis en en prenant la moyenne. Mais les équations résultantes contiennent alors des moments d'ordre supérieur mettant en jeu trois composantes fluctuantes. On peut itérer encore le processus, ce qui ferait apparaître, dans le même temps, des moments d'ordre 4 ! On n'arrivera jamais ainsi à obtenir un système *fermé* contenant autant d'équations que d'inconnues. Ce problème, dû à la présence du terme non linéaire (**v. grad**) $\mathbf{v}$ dans les équations de mouvement, est essentiel dans l'étude de la turbulence.

On en est réduit à trouver des solutions approchées en recherchant des expressions possibles de τ_{ij} en fonction des composantes moyennes de la vitesse de l'écoulement qui permettent d'assurer la *fermeture* des équations et de résoudre les équations de mouvement moyennées. Leur défaut majeur est de ne pas reposer sur des bases théoriques rigoureuses : ces modèles ne font pas, en effet, intervenir de grandeurs universelles ayant une signification physique claire, mais introduisent des paramètres ajustables à déterminer pour chaque écoulement. Néanmoins, ces expressions, qui voulaient être au départ des modèles théoriques de la turbulence, restent très utilisées pour la caractérisation pratique des écoulements turbulents !

Il faut noter que, dans de telles approches, on veut relier des quantités statistiques (essentiellement des moments d'ordre 1 et 2) obtenues par des opérations de moyenne, plutôt que d'établir des équations reliant des valeurs instantanées et valables à tout instant et en tout point de l'espace. On cherchera en particulier des relations entre des moments du second ordre (comme le tenseur de Reynolds) et des moments du premier ordre, comme le gradient de la vitesse moyenne.

12.3.2 Viscosité turbulente

Dans cette approche, on rend compte de l'augmentation de la friction et du transport de quantité de mouvement dans un écoulement turbulent en introduisant une viscosité ν_t qui s'ajoute à la viscosité classique des fluides. Ce concept fut introduit par Boussinesq vers 1890 dans son *Traité sur les eaux courantes*. Pour cela, on écrit, par analogie avec le tenseur de viscosité, le tenseur $\tau_{ij} = -\rho \overline{v'_i v'_j}$ des contraintes turbulente sous la forme :

$$\tau_{ij} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right). \quad (12.22)$$

Ce concept n'a pas cependant de base physique solide : ν_t est indépendante des propriétés du fluide, mais dépend en revanche de l'écoulement et également du point de mesure dans un même écoulement. En fait, définir une viscosité turbulente revient à ramener le problème de la modélisation de la variation de τ_{ij} en fonction des caractéristiques de l'écoulement à celui de la modélisation de ν_t .

Plusieurs modèles ont été développés pour estimer la viscosité turbulente. Nous allons discuter un modèle qui utilise la notion de longueur de mélange. Une autre approche est le modèle k- ε , très utilisé en simulation numérique, où l'on estime ν_t à partir de l'énergie des fluctuations turbulentes et de l'énergie dissipée.

12.3.3 Longueur de mélange

Cette approche a été proposée par Prandtl en 1903 : elle s'inspire de la théorie cinétique des gaz, et permet d'estimer la viscosité turbulente ν_t . Pour

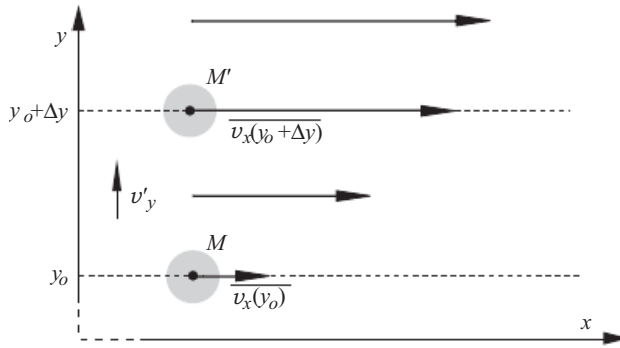


FIG. 12.1 – Vue schématique du transport de quantité de mouvement dans un écoulement turbulent. On suppose que l'on a un écoulement moyen parallèle à l'axe Ox avec une vitesse dépendant uniquement de la coordonnée y .

cela, on introduit une longueur qui joue le même rôle que le libre parcours moyen des molécules et l'on fait jouer aux composantes fluctuantes de la vitesse le même rôle que la vitesse d'agitation thermique (voir section 1.3).

On suppose (Fig. 12.1) que le gradient de vitesse moyenne $\partial \bar{v}_x / \partial y$ est positif ; on suppose également que les particules de fluide, initialement dans le plan $y = y_0$ et transitant vers le plan $y = y_0 + \Delta y$ sous l'effet d'une fluctuation de vitesse $v'_y > 0$, conservent leur composante de vitesse initiale suivant Ox qui est de l'ordre de $\bar{v}_x(y_0)$. L'arrivée de cette particule dans le plan $y = y_0 + \Delta y$ où la vitesse moyenne $\bar{v}_x(y_0 + \Delta y)$ est plus élevée apparaîtra donc comme une fluctuation de vitesse négative d'ordre de grandeur :

$$v'_x \approx \bar{v}_x(y_0) - \bar{v}_x(y_0 + \Delta y) = -\Delta y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}.$$

Le déplacement de la particule donne donc une contribution instantanée au transport de quantité de mouvement $\rho v'_x v'_y \approx -\rho \Delta y v'_y (\partial \bar{v}_x / \partial y) < 0$; le même raisonnement peut être appliqué à une particule venant du haut (par exemple allant du plan $y_0 + \Delta y$ au plan y_0) en remplaçant Δy par $-\Delta y$. Dans ce cas, on a $v'_y < 0$, et la contribution instantanée à $\rho v'_x v'_y$ sera de nouveau négative. On a donc une corrélation entre les signes de v'_x et v'_y qui vient du fait que l'on détermine les fluctuations v'_x à partir de v'_y et des variations spatiales de la vitesse moyenne : on a en moyenne $\rho \overline{v'_x v'_y} < 0$ dans un écoulement unidimensionnel avec un gradient de vitesse $\partial \bar{v}_x / \partial y > 0$.

En faisant une moyenne sur les différents trajets et vitesses possibles de l'élément matériel, on obtient pour la composante correspondante du tenseur de Reynolds :

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{v'_x v'_y} = \rho \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \overline{\Delta y v'_y}, \quad (12.23a)$$

soit :

$$\nu_t = \overline{\Delta y v'_y}. \quad (12.23b)$$

Dans le cadre du modèle de longueur de mélange, on écrit ν_t sous la forme :

$$\nu_t = u^* \ell \quad (12.24a)$$

où ℓ est la *longueur de mélange* : au vu de l'expression (12.23b) et de la discussion qui la précède, on peut interpréter ℓ comme la distance moyenne sur laquelle la vitesse d'un élément fluide reste corrélée à sa valeur initiale et assure donc un transport de quantité de mouvement efficace. De son côté, la *vitesse caractéristique* u^* est du même ordre de grandeur que l'amplitude $\sqrt{\overline{v_y'^2}}$ des fluctuations de vitesse transverses.

Valeurs des longueurs de mélange

Les valeurs de ℓ et u^* utilisées en pratique varient d'un type d'écoulement à l'autre. Ainsi, nous verrons dans la prochaine section 12.4 que, pour des écoulements libres comme les jets ou les sillages turbulents, la longueur de mélange peut être considérée comme constante dans la direction transverse à l'écoulement moyen et qu'elle est de l'ordre de la largeur locale de ce dernier. Pour ces mêmes écoulements, on relie généralement la vitesse u^* au profil transverse $\bar{v}_x(y)$ de la vitesse moyenne par :

$$u^* = \ell \left| \partial \bar{v}_x(y) / \partial y \right|. \quad (12.24b)$$

Pour un écoulement près d'une paroi (comme dans une conduite ou pour une couche limite turbulente près d'une paroi plane), la valeur locale de ℓ est prise généralement proportionnelle à la distance à la paroi, en particulier quand c'est la seule échelle de longueur caractéristique disponible. La vitesse u^* est, elle, reliée directement à la contrainte à la paroi. Nous verrons dans la section 12.5 que l'on peut alors prédire la variation logarithmique de la vitesse moyenne avec la distance à la paroi effectivement observée expérimentalement. Cependant, cet accord reflète essentiellement des contraintes dimensionnelles : en effet, à une distance y donnée de la paroi, on fait seulement intervenir y comme longueur caractéristique.

Pour des écoulements quasi parallèles, une définition un peu plus générale due à von Kármán détermine ℓ à partir de la courbure des profils de vitesse par $\ell = -k \left| \partial \bar{v}_x / \partial y \right| / \left| \partial^2 \bar{v}_x / \partial y^2 \right|$.

On est loin cependant de pouvoir faire des hypothèses aussi simples pour tous les écoulements, surtout quand interviennent des échelles de longueur et de temps caractéristiques multiples. Cela représente l'un des problèmes majeurs de ces modèles.

Validité de l'analogie entre modèle de longueur de mélange et théorie cinétique des gaz

Comme nous l'avons dit, l'approche de longueur de mélange présente des analogies avec celle utilisée dans les sections 1.3.2 et 2.2.1 pour calculer la

viscosité (ou la diffusivité) à partir de la théorie cinétique des gaz. Ainsi, la vitesse u^* joue, pour le transport de quantité de mouvement, le même rôle que la vitesse d'agitation thermique en théorie cinétique. La différence essentielle est que, dans le cas du calcul microscopique de la viscosité, on a une *séparation d'échelles* entre les petites échelles des mouvements désordonnés dus à l'agitation thermique et la distance sur laquelle on moyenne pour calculer la viscosité. Une telle séparation n'existe plus dans les mouvements turbulents, pour lesquels les plus grandes échelles turbulentes sont de la taille des mouvements moyens. Cette non-séparabilité en échelle des mouvements turbulents est un obstacle majeur aux tentatives de rapprochement entre la théorie cinétique des gaz et l'étude de la turbulence.

12.3.4 Autres approches pratiques de la turbulence

De nombreuses autres méthodes de modélisation de la turbulence ont été proposées, en particulier dans la perspective de simulations numériques.

L'augmentation de la puissance des ordinateurs permet maintenant de simuler numériquement les écoulements turbulents en intégrant l'équation de Navier-Stokes. Ces *simulations numériques directes* requièrent cependant souvent des temps de calcul importants sur des machines puissantes : elles sont limitées encore pour quelques années à des géométries simples et à des nombres de Reynolds modérés.

Pour la plupart des applications pratiques, il faut recourir à d'autres démarches. Une importante difficulté de ce type de simulations vient de la grande différence entre la taille des mouvements à grande échelle et celle des plus petits tourbillons ; cette dernière est d'autant plus faible que Re est plus élevé (section 12.6.1) : pour pouvoir les reproduire dans la simulation en même temps que l'écoulement global, le nombre de points à inclure dans le maillage de simulation (et la durée du calcul) augmentera donc très vite avec Re .

Cependant, l'écoulement moyen n'échange d'énergie et de quantité de mouvement qu'avec les plus grands tourbillons et sa géométrie n'influence que ces derniers. Cela a conduit à développer des méthodes de *simulation des grandes échelles* dans lesquelles seuls les mouvements de grande et moyenne amplitude sont simulés directement. Les échanges de quantité de mouvement et d'énergie au niveau des petites échelles de la turbulence sont, eux, décrits par des modèles similaires à la viscosité turbulente.

12.4 Écoulements turbulents libres : jets, sillages

Les modèles de viscosité turbulente donnent souvent de bons résultats pour les écoulements turbulents dits *libres* tels que des jets, les couches de mélange ou les sillages derrière un corps. Nous traiterons ici en parallèle les cas du jet

et du sillage dont la figure 12.2 CC montre un exemple de visualisation par la technique de *fluorescence induite par laser (LIF)* décrite à la section 3.5.2.

12.4.1 Propriétés de base des jets et sillages turbulents bidimensionnels

Équations de mouvement.

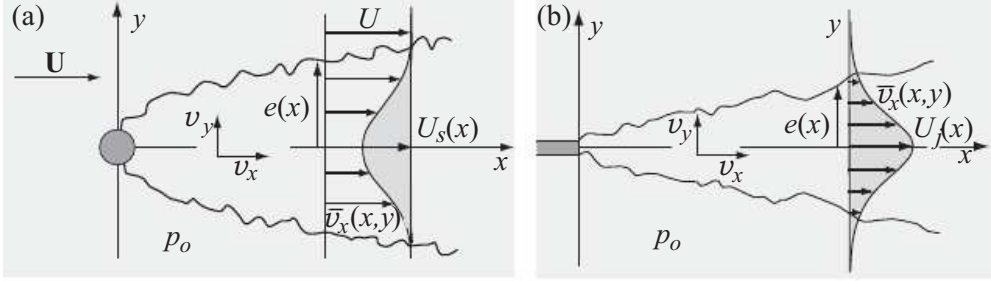


FIG. 12.3 – (a) Vue schématique du profil de vitesse (a) dans un sillage derrière un cylindre de dimension infinie suivant Oz . (b) Profil de vitesse dans un jet émis à partir d'une fente de dimension infinie suivant Oz .

Discutons tout d'abord les cas d'un sillage turbulent bidimensionnel derrière un obstacle cylindrique dans un écoulement uniforme non turbulent de vitesse U (Fig. 12.3a) et d'un jet émis dans un fluide au repos à partir d'une fente très allongée dans la direction z (Fig. 12.3b). Dans les deux cas, on se place à une distance x en aval assez grande pour être insensible à la géométrie exacte de l'obstacle ou de la fente. On considère aussi que la perturbation apportée à l'écoulement extérieur de vitesse U (avec $U = 0$ pour le jet) est limitée à une zone de dimension caractéristique transverse $e(x)$ finie : cette demi-largeur du sillage (ou du jet) est supposée faible devant x . Enfin, ces écoulements ne sont pas influencés par les parois, ce qui permet de négliger les termes visqueux $\eta \partial^2 \bar{v}_i / \partial x_j^2$ de l'équation de mouvement dans tout le volume de fluide.

Dans le sillage, le *déficit de vitesse* $U - \bar{v}_x$ est supposé très petit devant U . D'autre part, il résulte de l'équation de conservation (12.9) et de la condition $e(x) \ll x$ que la composante transverse $\bar{v}_y(x, y)$ de la vitesse moyenne est $\ll U - \bar{v}_x$ (ou $\ll \bar{v}_x$ pour le jet). Dans les deux cas, la vitesse est constante en dehors de la zone perturbée ($y \gg e(x)$), ainsi que la pression qui a une valeur p_0 .

On suppose l'écoulement statistiquement stationnaire au sens donné dans la section 12.2.1 et invariant suivant Oz . En supposant les forces en volume nulles et en négligeant les termes visqueux, les équations de transport de la quantité de mouvement (12.11) peuvent être écrites sous la forme :

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v'_x v'_y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{v'^2_x} \right) \quad (12.25a)$$

et :

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v'_x v'_y}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'^2_y}). \quad (12.25b)$$

L'équation (12.25a) peut être réduite, pour le sillage, à :

$$U \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'_x v'_y}) \quad (12.26a)$$

et, pour le jet, à :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}_x \bar{v}_y) = -\frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'_x v'_y}). \quad (12.26b)$$

Ces équations sont très similaires à celles obtenues pour un sillage (10.72) ou un jet laminaire : la contrainte visqueuse $\eta \partial v_x / \partial y$ est simplement remplacée par la composante correspondante $-\rho \overline{v'_x v'_y}$ du tenseur de Reynolds (la dérivée par rapport à z est nulle puisqu'on a des écoulements en moyenne bidimensionnels).

Note. Ces équations expriment l'équilibre entre les variations du flux longitudinal de quantité de mouvement de l'écoulement moyen et le transfert transverse de quantité de mouvement dû aux fluctuations et à l'écoulement transverse moyen.

Justification. Plusieurs inégalités permettent de négliger une partie des termes des équations (12.25).

– L'équation de conservation (12.9) peut être réécrite sous la forme $\partial(U - \bar{v}_x)/\partial x = \partial \bar{v}_y / \partial y$ pour le sillage : on obtient alors l'ordre de grandeur de la vitesse transverse moyenne $\bar{v}_y \approx (U - \bar{v}_x)e(x)/x \ll Ue(x)/x$. Pour le jet, l'équation (12.9) conduit à : $\bar{v}_y \approx \bar{v}_x e(x)/x \ll \bar{v}_x$.

– Le faible déficit de vitesse ($\bar{v}_x - U \ll U$) entraîne que, pour le sillage, $\bar{v}_x (\partial \bar{v}_x / \partial x) \cong U (\partial \bar{v}_x / \partial x)$: comme pour un sillage laminaire, ce terme sera dominant (à cause du facteur U) par rapport à l'autre terme $\bar{v}_y (\partial \bar{v}_x / \partial y)$ que l'on néglige donc dans l'équation (12.26a). En revanche, pour le jet, on doit conserver les deux termes du premier membre de l'équation (12.25b) : on montre que leur somme est égale au premier membre de l'équation (12.26b) en développant ce dernier et en utilisant l'équation de conservation (12.9).

– Comme dans les écoulements laminaires quasi parallèles, les termes qui font intervenir des grandeurs moyennées dans l'équation (12.25b) (ceux du premier membre) sont négligeables.

– Contrairement aux composantes moyennes de la vitesse, les différentes composantes du tenseur de Reynolds sont du même ordre ; en revanche leurs dérivées par rapport à x sont négligeables devant les dérivées $\partial(\overline{v'_x v'_y})/\partial y$ et $\partial(\overline{v'^2_y})/\partial y$ par rapport à y car $e(x) \ll x$. En particulier, compte tenu des hypothèses précédentes, l'équation (12.25b) devient :

$$-1/\rho (\partial \bar{p} / \partial y) - \partial(\overline{v'^2_y})/\partial y = 0 \quad (12.27a)$$

d'où, en intégrant entre l'intérieur et l'extérieur du sillage ou du jet :

$$\bar{p}(x, y) = p_0 - \rho \overline{v'^2_y}(x, y). \quad (12.27b)$$

Remarque. On rencontre dans d'autres écoulements turbulents de telles variations de pression transverses à l'écoulement moyen : même si elles n'influencent pas ce dernier, cela contribue à différencier ces écoulements des écoulements laminaires parallèles ou quasi parallèles pour lesquels ces gradients transverses sont considérés comme nuls.

On déduit de l'équation (12.27b) la valeur $(1/\rho)\partial p/\partial x = -\partial \overline{v_y'^2}/\partial x$ du gradient de pression suivant Ox : ce terme est négligeable car d'un ordre de grandeur inférieur au terme $\partial (\overline{v_x'v_y'})/\partial y$ de l'équation (12.25a). On retrouve alors bien les équations (12.26a-b).

Conservation de la quantité de mouvement et du débit

Intégrons maintenant les équations (12.26a) et (12.26b) par rapport à y sur une distance transverse infinie (en pratique, assez grande pour contenir l'ensemble de la zone perturbée).

– Pour le **sillage turbulent**, on obtient tout d'abord, après avoir divisé (12.26a) par U :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial \bar{v}_x(x, y)}{\partial x} dy = \frac{1}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v_x'v_y'}) dy = 0.$$

(en effet, $\overline{v_x'v_y'}$ est nul en dehors du sillage). On peut récrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x} = 0 \quad (12.28a)$$

avec :

$$Q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (U - \bar{v}_x(y)) dy. \quad (12.28b)$$

Le débit $Q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (U - \bar{v}_x(y)) dy$ associé au défaut de vitesse $U - \bar{v}_x$ dans le sillage est donc constant le long de ce dernier ($Q(x)$ représente aussi, au signe près, le débit dans le référentiel se déplaçant à la vitesse $\mathbf{U}$ et il est défini par unité de longueur suivant Oz).

En écrivant la conservation de la quantité de mouvement entre l'amont et l'aval du corps, on démontre, comme au chapitre 10 pour le sillage laminaire (Éq. 10.80), la relation suivante entre la force de traînée F_t par unité de longueur de cylindre et la valeur constante Q du débit $Q(x)$:

$$F_t = \rho U Q. \quad (12.29)$$

Remarque. En fait, la conservation de $Q(x)$ n'est qu'approximative et résulte de la conservation de la quantité de mouvement. En procédant comme pour établir l'équation (10.85) du sillage laminaire, on trouve que la quantité, effectivement constante avec x , est $\rho \int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}_x (U - \bar{v}_x) dy$. Cette condition se réduit à $\rho U Q(x) = \text{cte.}$ seulement si $U - \bar{v}_x \ll \bar{v}_x$ comme nous l'avons, d'ailleurs, supposé.

- Pour le **jet turbulent**, l'intégrale de l'équation (12.26b) peut être écrite :

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}_x^2) dy = -\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}_x \bar{v}_y) dy - \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'_x v'_y}) dy = 0.$$

Les deux intégrales du second membre sont nulles car les vitesses moyennes et les fluctuations s'annulent en dehors du jet. On obtient donc :

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = 0 \quad (12.30a)$$

où :

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \bar{v}_x^2(x, y) dy. \quad (12.30b)$$

Le flux de quantité de mouvement sur la largeur du jet a donc une valeur ϕ indépendante de la distance x : cela impose une augmentation du débit $Q(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{v}_x(x, y) dy$ avec x car la vitesse moyenne $\bar{v}_x$ diminue. Le jet « aspire » de plus en plus de fluide extérieur à mesure qu'il progresse.

Estimation de la variation des largeurs du sillage et du jet turbulents bidimensionnels avec la distance

Prenons comme vitesses caractéristiques respectives $U_s(x)$ et $U_j(x)$ dans le sillage et dans le jet, les composantes de vitesse $U - \bar{v}_x(x, 0)$ et $\bar{v}_x(x, 0)$ sur l'axe $y = 0$. L'estimation des intégrales (12.28b) et (12.30b) à l'aide de ces valeurs caractéristiques conduit alors à :

$$U_s(x) e(x) \approx \text{cte.} \quad (12.31a)$$

et :

$$U_j^2(x) e(x) \approx \text{cte.} \quad (12.31b)$$

Estimons maintenant les termes des équations de mouvement (12.26a-b) en supposant que la composante $\overline{v'_x v'_y}$ varie comme U_s^2 ou U_j^2 . On suppose aussi que les distances caractéristiques de variation des moyennes des composantes de la vitesse et du tenseur de Reynolds concernées suivant x et y sont respectivement x et $e(x)$. En écrivant l'égalité des estimations ainsi obtenues, on obtient respectivement :

$$\frac{U U_s(x)}{x} \approx \frac{U_s^2(x)}{e(x)} \quad (12.32a)$$

et :

$$\frac{U_j^2(x)}{x} \approx \frac{U_j^2(x)}{e(x)}. \quad (12.32b)$$

En combinant les équations (12.31) et (12.32), on obtient pour le **sillage** :

$$e(x) \propto \sqrt{x} \quad (12.33a)$$

et :

$$U_s(x) \propto \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (12.33b)$$

et pour *le jet* :

$$e(x) \propto x \quad (12.34a)$$

et :

$$U_j(x) \propto \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (12.34b)$$

Par ailleurs, on déduit des équations (12.33) et (12.34) que le nombre de Reynolds $Re_s = U_s(x) e(x) / \nu$ du sillage est indépendant de la distance x alors que celui du jet ($Re_j = U_j(x) e(x) / \nu$) augmente avec cette dernière. On remarque aussi que les variations de $e(x)$ et $U_s(x)$ sont les mêmes pour les sillages laminaire et turbulent alors qu'elles sont différentes dans le cas du jet (pour un jet laminaire on a $e(x) \propto x^{2/3}$ et $U_j(x) \propto x^{-1/3}$).

12.4.2 Champs de vitesse autosimilaires dans les jets et sillages bidimensionnel

Équations de mouvement des jets et sillages autosimilaires

Pour déterminer quantitativement les profils de vitesse $\bar{v}_x(x, y)$, nous allons récrire tout d'abord les équations de mouvement en partant d'une hypothèse d'autosimilarité du même type que celle utilisée pour les couches limites et sillages laminaires.

Supposons pour cela que le déficit de vitesse $U - \bar{v}_x$ pour le sillage et la vitesse $\bar{v}_x$ pour le jet, normalisés par U_s ou U_j , dépendent uniquement de la distance transverse normalisée $\xi = y/e(x)$ et non pas séparément de y et x avec, respectivement :

$$U - \bar{v}_x(x, y) = U_s(x) f(\xi) \quad (12.35a)$$

et :

$$\bar{v}_x(x, y) = U_j(x) f(\xi). \quad (12.35b)$$

U_s et U_j sont définies comme précédemment en $\xi = 0$, ce qui implique : $f(0) = 1$.

Nous supposons également que des conditions du même type sont vérifiées par la composante transverse $\overline{v'_x v'_y}$ du tenseur de Reynolds (normalisée par les mêmes vitesses caractéristiques) :

$$\overline{v'_x v'_y}(x, y) = U_s^2(x) g(\xi) \quad (12.36a)$$

$$\overline{v'_x v'_y}(x, y) = U_j^2(x) g(\xi) \quad (12.36b)$$

Remarque. Si l'hypothèse d'autosimilarité est valable, les relations (12.31) sont rigoureusement exactes car le débit Q_s dans le sillage et le flux ϕ_j de quantité de mouvement dans le jet vérifient :

$$Q_s = \int_{-\infty}^{+\infty} (U - \bar{v}_x(x, y)) dy = U_s(x) e(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi = \text{cte.}$$

et :

$$\phi_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \bar{v}_x^2(x, y) dy = U_j^2(x) e(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \rho f^2(\xi) d\xi = \text{cte.}$$

– Pour le **sillage turbulent**, on démontre que l'équation de mouvement (12.26a) devient :

$$U \frac{de(x)}{dx} [f + \xi f'] = U_s(x) g' = \frac{K}{e(x)} g' \quad (12.37)$$

où f' et g' sont des dérivées par rapport à la variable ξ et $K = Q_s / (\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi) = \text{cte.}$

L'équation (12.37) ne peut rester vérifiée lorsque l'on fait varier x et ξ indépendamment que si $e(x)de(x)/dx = \text{cte.}$ On retrouve bien alors les relations (12.33).

Expérimentalement, l'autosimilitude est bien vérifiée à quelques centaines de diamètres en aval d'un cylindre ; la largeur du sillage et le défaut de vitesse varient bien aussi respectivement en $\sqrt{x}$ et en $1/\sqrt{x}$.

Remarque. La constante de proportionnalité entre $e(x)$ et $\sqrt{x}$ peut être choisie arbitrairement. Si elle est modifiée, la valeur de ξ correspondant à une valeur de y donnée sera aussi changée de sorte que l'équation (12.37) restera vérifiée.

Pour le **jet turbulent**, on démontre que l'équation de mouvement (12.26b) devient :

$$\frac{\alpha}{2} \left[f' \int_0^\xi f(u) du + f^2 \right] = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\int_0^\xi f(u) du \right]^2 = g' \quad (12.38a)$$

où :

$$\alpha = \frac{de(x)}{dx} = \text{cte.} \quad (12.38b)$$

Cette dernière relation est équivalente à l'équation (12.34a) et confirme donc que $U_j(x) \propto 1/\sqrt{x}$ d'après la condition (12.31b). Expérimentalement, la condition d'autosimilarité est vérifiée dès que la distance x dépasse une dizaine de fois le diamètre initial du jet.

Remarque. On peut calculer la composante de vitesse transverse $\bar{v}_y(x, \xi)$ à partir de l'équation d'incompressibilité (12.9) et de la définition (12.35b) pour obtenir :

$$\bar{v}_y = \frac{1}{2} \frac{de(x)}{dx} U_j(x) \left[2\xi f(\xi) - \int_0^\xi f(u) du \right] \quad (12.39)$$

Cette composante a donc, elle aussi, une forme autosimilaire.

Application des modèles de viscosité turbulente et de longueur de mélange

La détermination explicite du profil d'écoulement transverse requiert le choix d'une relation de fermeture entre $\overline{v'_x v'_y}(x, y)$ et le profil de vitesse moyenne $\bar{v}_x(x, y)$. Nous utilisons pour cela les notions de viscosité turbulente et de longueur de mélange définies par les relations (12.22) et (12.24a-b).

En identifiant, à l'aide des expressions (12.35) et (12.36), les termes $\overline{v'_x v'_y}(x, y)$ et $-\nu_t \partial \bar{v}_x / \partial y$, on obtient respectivement : $\nu_t \propto U_s(x) e(x)$ et $\nu_t \propto U_j(x) e(x)$ pour le sillage et le jet. On a donc une viscosité turbulente ν_t constante avec x dans le cas du sillage alors qu'elle augmente en $\sqrt{x}$ pour le jet. La longueur de mélange $\ell(x)$ est, dans les deux cas, proportionnelle à la largeur $e(x)$. Cela suggère que la taille des tourbillons assurant le transport de quantité de mouvement est proportionnelle à la largeur locale du sillage ou du jet.

Justification. Écrivons, dans le cas du sillage, l'égalité des deux termes : $-\nu_t \partial \bar{v}_x / \partial y = \nu_t (U_s(x)/e(x)) f'(\xi)$ et $\overline{v'_x v'_y}(x, y) = U_s^2(x) g(\xi)$. On obtient $\nu_t = U_s(x) e(x) g(\xi) / f'(\xi)$ qui a bien la dépendance en x indiquée. La longueur de mélange ℓ obtenue en combinant les relations (12.24a-b) est reliée à ν_t par $\nu_t = \ell^2 |\partial \bar{v}_x / \partial y|$ d'où : $\ell^2 = e^2(x) g(\xi) / f'^2(\xi)$. On a donc bien $\ell(x) \propto e(x)$. On a le même résultat pour le jet en procédant de même.

Profil de vitesse moyenne dans un sillage bidimensionnel

Supposons maintenant que la viscosité turbulente ν_t soit constante avec ξ en plus d'être indépendante de x , comme nous l'avons vu plus haut. L'équation (12.27) est alors identique à celle utilisée pour le sillage laminaire en remplaçant ν par ν_t . On obtient donc une expression du défaut de vitesse identique à l'expression (10.79) obtenue dans ce dernier cas :

$$U - \bar{v}_x = Q \sqrt{\frac{U}{4\pi\nu_t x}} e^{-\frac{Uy^2}{4\nu_t x}}. \quad (12.40)$$

Expérimentalement, suffisamment loin en aval d'un cylindre placé dans un écoulement (Fig. 12.4a), on a un accord acceptable avec les prédictions de cette équation, en particulier dans la partie centrale de l'écoulement.

La différence par rapport au sillage laminaire est la forte valeur de la viscosité turbulente ν_t . Cette dernière est généralement très supérieure à ν quand le nombre de Reynolds est élevé. On trouve expérimentalement que $\nu_t \cong 0,017 U d$ où d est le diamètre du cylindre.

Remarque. L'équation (12.40) et l'expression de ν_t précédente impliquent que : $e(x) \propto \sqrt{\nu_t x / U} \propto \sqrt{x d}$. On a choisi pour cette raison $\xi = y / \sqrt{x d}$ comme coordonnée verticale dans la figure 12.4a.

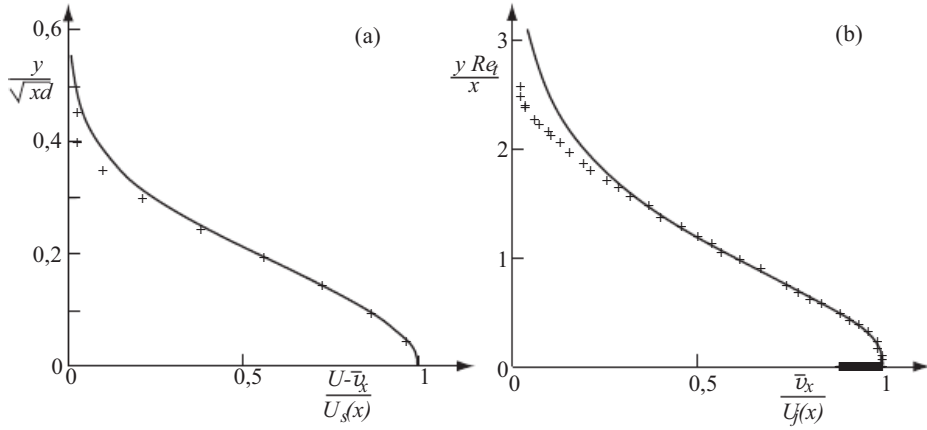


FIG. 12.4 – (a) Comparaison des mesures expérimentales (+) et prédictions théoriques de l'équation (12.40) (ligne continue) de la variation du défaut de vitesse moyenne normalisé $(U - \bar{v}_x)/U_s(x)$ avec la distance transverse normalisée $\xi = y/\sqrt{x}d$ dans un sillage turbulent derrière un cylindre (d'après Townsend, 1956). (b) Comparaison des mesures expérimentales (+) et prédictions théoriques de l'équation (12.41) (ligne continue) du profil de vitesse normalisé $\bar{v}_x/U_j$ dans un jet plan turbulent en fonction de la distance transverse normalisée yRe_t/x (Expériences de Heskestad (1965) d'après Pope (2000)).

Profil de vitesse moyenne dans un jet bidimensionnel

En supposant, comme pour le sillage, que la viscosité turbulente est indépendante de y sur la largeur du jet, la composante $\bar{v}_x(y)$ de la vitesse moyenne vérifie :

$$\bar{v}_x(y) = \frac{U_j(x)}{ch^2\left(\frac{yRe_t}{x\sqrt{2}}\right)}, \quad (12.41)$$

$Re_t = U_j(x)e(x)/\nu_t(x)$ est le nombre de Reynolds turbulent défini à partir de la viscosité turbulente ν_t , de la vitesse $U_j(x)$ en $y = 0$ et de la largeur $e(x)$. Comme on a vu plus haut que $\nu_t \propto U_j(x)e(x)$, Re_t est une constante indépendante de x .

Expérimentalement, l'équation (12.41) est bien vérifiée dans la partie centrale du jet mais avec des déviations significatives lorsque $\bar{v}_x/U_j$ devient inférieur à 0,25 (Fig. 12.4b). On trouve également, toujours expérimentalement, que Re_t ainsi que le rapport $\alpha = e(x)/x$ sont indépendants du débit du jet.

Démonstration. En introduisant le coefficient de viscosité turbulente et en utilisant les équations (12.35b) et (12.36b), on trouve que la fonction $g(\xi)$ vérifie $g(\xi) = \bar{v}_x \bar{v}_y / U_j^2 = -(\nu_t \partial \bar{v}_x / \partial y) / U_j^2 = -(1/Re_t)f'(\xi)$. En remplaçant g par cette expression dans l'équation (12.38a), on obtient l'équation différentielle vérifiée par $f(\xi)$ dont la solution est :

$$f(\xi) = 1 / ch^2\left(\xi\sqrt{\alpha Re_t/2}\right).$$

Comme pour le sillage, nous n'avons pas imposé jusqu'ici de définition quantitative précise pour $e(x)$ ou α : on choisit ici la valeur $\alpha = e(x)/x = 1/R_0$ qui donne un bon ordre de grandeur de la largeur du jet car $f(1)$ (correspondant à $y = e(x)$) est alors de l'ordre de 0,6. On en déduit immédiatement l'équation (12.41). ■

12.4.3 Jets et sillages turbulents tridimensionnels axisymétriques

Dans les cas tridimensionnels d'un sillage ou d'un jet axisymétriques, la conservation du débit reste vérifiée dans le premier cas et celle de la quantité de mouvement dans le second. Le calcul de Q et ϕ (Éqs. 12.28b et 12.30b) fait appel cependant maintenant à une intégration dans les directions y et z , et pas seulement suivant y . Les équations (12.31a-b) sont donc remplacées par :

$$U_s(x) e^2(x) \approx \text{cte.} \quad (12.42a)$$

et :

$$U_j^2(x) e^2(x) \approx \text{cte.} \quad (12.42b)$$

En combinant ces équations avec les relations (12.36 a et b) qui restent variables, on obtient alors pour le *sillage axisymétrique* :

$$e(x) \propto x^{1/3} \quad (12.43a)$$

et :

$$U_s(x) \propto x^{-2/3} \quad (12.43b)$$

et pour le *jet* :

$$e(x) \propto x \quad (12.43c)$$

et :

$$U_j(x) \propto \frac{1}{x}. \quad (12.43d)$$

En conclusion, les modèles de viscosité turbulente et de longueur de mélange donnent une description approchée acceptable des profils de vitesse avec la distance dans des écoulements turbulents quasi parallèles loin des parois solides, comme les jets ou les sillages (il en est également ainsi dans les couches de mélange turbulentes). En particulier, à chaque distance x , les longueurs de mélange sont proportionnelles à la dimension transverse des écoulements.

Nous allons étudier maintenant des écoulements en présence de parois où, près de celles-ci, les effets de la viscosité doivent être pris en compte.

12.5 Écoulements près d'une paroi solide

12.5.1 Propriétés qualitatives des écoulements turbulents en présence d'une paroi

Ce problème, d'une grande importance pratique, se rencontre dans de nombreux exemples d'écoulements en conduite et au voisinage d'obstacles.

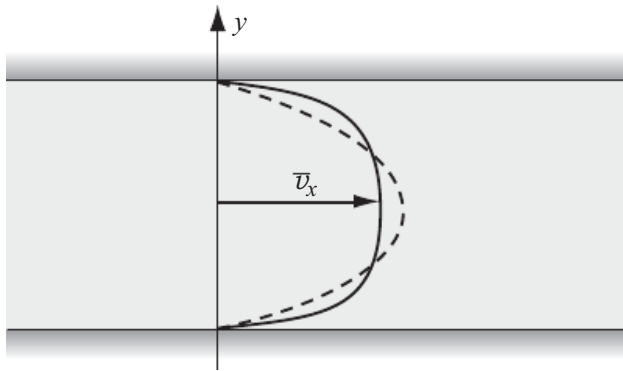


FIG. 12.5 – Profil de vitesse moyenne d’écoulement en régime laminaire (tirets) et turbulent (traits pleins) dans une conduite. L’échelle horizontale de vitesse a été divisée dans chaque cas par la vitesse moyenne pour faciliter la comparaison.

Il intervient, couplé au transfert de masse, dans les écoulements industriels du génie chimique et, couplé aux transferts de chaleur, en thermique. En aérodynamique, il apparaît dans l’évaluation des pertes de charge et des forces de frottement associées aux écoulements turbulents.

Intéressons-nous pour commencer à un écoulement établi dans une conduite cylindrique ou entre deux plans parallèles. Ses propriétés diffèrent considérablement de celles d’un écoulement laminaire. Ainsi, le profil de la vitesse moyenne $\bar{v}_x$ à l’intérieur de la conduite est beaucoup plus aplati dans la partie centrale que le profil parabolique qui caractérise les écoulements visqueux laminaires (le gradient de vitesse à la paroi est, en revanche, plus élevé). D’autre part, la chute de pression entre les extrémités de la conduite ne varie plus linéairement avec le débit comme pour un écoulement laminaire mais, approximativement, comme le carré de celui-ci.

Comme pour les écoulements turbulents libres décrits dans la section 12.4, le transport de quantité de mouvement est essentiellement convectif et associé aux fluctuations de vitesse par l’intermédiaire du tenseur de Reynolds des contraintes turbulentes. Cela est vérifié dans tout l’écoulement, à l’exception d’une fine *sous-couche visqueuse* près de la paroi : celle-ci résulte de l’annulation de la vitesse, et donc des fluctuations, à la paroi, ce qui explique son absence dans les écoulements libres. L’épaisseur de cette sous-couche (*i.e.* la distance de transition au transport convectif) est une seconde échelle de longueur caractéristique s’ajoutant à la taille transverse globale de l’écoulement.

Enfin, le profil de la vitesse $\bar{v}_x$ ne dépend pas de la géométrie de l’écoulement aux distances faibles devant la taille globale, où l’on distingue, outre la sous-couche visqueuse, une *sous-couche inertielle* où le transport convectif est dominant. On rencontre ces deux sous-couches aussi bien dans une conduite que dans une couche limite turbulente.

12.5.2 Écoulements turbulents stationnaires parallèles à une paroi plane

Équations de mouvement

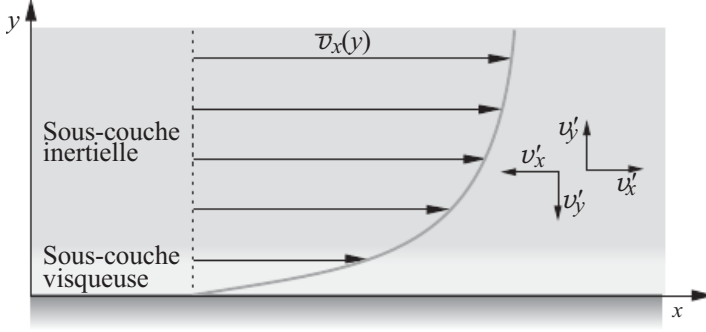


FIG. 12.6 – Schéma d'un champ de vitesse turbulent pour un écoulement parallèle à une plaque plane.

Considérons un écoulement turbulent où la vitesse moyenne est parallèle à une direction Ox le long d'un plan $y = 0$; supposons, de plus, que l'écoulement est établi et que les propriétés statistiques des fluctuations turbulentes sont indépendantes de la distance le long de l'écoulement. La composante $\bar{v}_y$ de la vitesse moyenne est donc nulle ; la composante longitudinale $\bar{v}_x$ et les moments des composantes des fluctuations de vitesse (comme $\overline{v_y'^2}$ et $\overline{v'_x v'_y}$) sont seulement fonction de y . Les composantes des équations (12.11) de transport de la quantité de mouvement en régime stationnaire s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \overline{v'_x v'_y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \quad (12.44a)$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v_y'^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0. \quad (12.44b)$$

Nous vérifions bien que, lorsque les fluctuations turbulentes sont nulles (écoulements laminaires), on retrouve les équations de Navier-Stokes pour les écoulements parallèles.

D'après l'équation (12.44b), on a $\bar{p} = p_0 - \rho \overline{v_y'^2}$, où la pression p_0 à la paroi est fonction seulement de x (on rappelle que $\overline{v_y'^2}$, comme toutes les composantes de la vitesse et de ses fluctuations, s'annule sur la paroi). Comme $\overline{v_y'^2}$ est indépendant de x , on en déduit l'égalité des dérivées $\partial \bar{p} / \partial x = \partial p_0 / \partial x$. Ces gradients sont indépendants de x puisque les termes de l'équation (12.44a) ne dépendent que de y .

En intégrant l'équation (12.44a) par rapport à y , on obtient :

$$\rho \nu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \rho \overline{v'_x v'_y} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} y + \tau_0. \quad (12.45)$$

• Aux très faibles distances de la paroi où les fluctuations de vitesse et le terme de gradient de pression sont négligeables, l'équation (12.45) se réduit à :

$$\tau_0 = \rho \nu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}. \quad (12.46)$$

τ_0 représente donc la contrainte sur la paroi, qui se réduit à la contrainte visqueuse à cause de la condition de vitesse nulle. La contrainte τ_0 dépend de la vitesse moyenne de l'écoulement, mais aussi du nombre de Reynolds et de la rugosité de la paroi. Compte tenu de la condition de vitesse moyenne nulle en $y = 0$, on a alors par intégration :

$$\bar{v}_x = \frac{\tau_0 y}{\rho \nu}. \quad (12.47)$$

• Quand on s'éloigne plus de la paroi, le transport convectif de quantité de mouvement par les fluctuations turbulentes prend le relais du transport par viscosité (on évaluera plus loin la distance de transition) et l'équation (12.45) devient :

$$-\rho \overline{v'_x v'_y} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} y + \tau_0. \quad (12.48a)$$

Dans la sous-couche inertielle introduite plus haut où, à la fois, l'équation (12.48a) est vérifiée et y est faible devant la taille transverse globale h de l'écoulement, le terme en $\partial \bar{p} / \partial x$ est, de plus, négligeable et :

$$\tau_0 = -\rho \overline{v'_x v'_y}. \quad (12.48b)$$

Au vu de cette égalité, on définit une vitesse caractéristique u^* , dite *vitesse de frottement* par :

$$\tau_0 = \rho u^{*2}. \quad (12.49)$$

qui représente une vitesse caractéristique des fluctuations turbulentes.

• Enfin, une troisième zone, dite d'écoulement *externe*, correspond aux valeurs de y supérieures allant jusqu'à la taille globale transverse : il faut, alors, utiliser l'équation (12.48a) complète.

Remarque. Discutons la condition pour que le terme en $(\partial \bar{p} / \partial x)$ soit négligeable dans le cas particulier d'un écoulement entre deux parois planes parallèles de distance $2h$: comme le plan milieu $y = h/2$ est le plan de symétrie de l'écoulement, $\overline{\rho v'_x v'_y}$ s'annule dans ce dernier car la quantité de mouvement n'a pas de raison d'être transportée vers une paroi plutôt que vers l'autre. On a alors $\tau_0 = -h (\partial \bar{p} / \partial x)$, ce qui exprime l'équilibre entre les forces dues au gradient de pression et la contrainte sur les deux parois. Le terme en $(\partial \bar{p} / \partial x)$ de l'équation (12.48a) est donc négligeable si y est petit devant h . On admet qu'il le sera également pour d'autres géométries.

Évaluation du profil de vitesse par le modèle de longueur de mélange

Nous allons déterminer maintenant le profil de vitesse dans les sous-couches inertielle et visqueuse, et la distance à laquelle on a transition entre les mécanismes de transport visqueux et convectif. Dans une première approche, nous utiliserons la notion de longueur de mélange déjà appliquée au cas des jets et sillages turbulents dans la section 12.4.

– Dans la sous-couche visqueuse, on a un profil de vitesse linéaire donné par l'équation (12.47).

– Dans la sous-couche inertielle, on obtient, en combinant les équations (12.49) et (12.24b) :

$$\tau_0 = \rho u^{*2} = \rho u^* \ell \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}. \quad (12.50a)$$

Dans le cas présent d'un écoulement uniforme parallèle à une paroi plane, on fait l'hypothèse que la longueur de mélange ℓ est proportionnelle à la distance y à la paroi avec $\ell = \kappa y$. Cela sous-entend que, dans la gamme d'échelles de longueur pour laquelle l'équation $\tau_0 = -\rho \overline{v'_x v'_y}$ est valable, la structure de l'écoulement et le transport de quantité de mouvement à une distance donnée de la paroi ne sont influencés ni par les tourbillons de taille beaucoup plus grande que cette distance, ni par la couche très proche de la paroi où la viscosité domine. La distance y à la paroi représente alors la seule échelle de longueur significative. Cela signifie aussi que le transport de quantité de mouvement se fait sur une distance de l'ordre de y . L'équation (12.50a) devient alors :

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = \frac{u^*}{\kappa y} \quad (12.50b)$$

soit :

$$\bar{v}_x = \frac{u^*}{\kappa} \text{Log } y + \text{cte}. \quad (12.51)$$

On trouve expérimentalement que la valeur de $1/\kappa$ est voisine de 2,5 pour une large gamme d'écoulements turbulents en présence d'une paroi : ce paramètre κ est appelé *constante de von Kármán* et ne doit pas être confondu avec la diffusivité thermique que nous désignons par la même lettre grecque.

Ordre de grandeur de l'épaisseur de la sous-couche visqueuse

D'après l'équation (12.50b), le gradient de vitesse devrait diverger lorsque y tend vers 0, ce qui fait augmenter le terme de viscosité $\rho \nu (\partial \bar{v}_x / \partial y) \cong \rho \nu u^* / (\kappa y)$ de l'équation (12.45). Ce dernier devient de l'ordre de grandeur de la contrainte totale $\tau_0 = \rho u^{*2}$ à une distance $y \approx \nu / (\kappa u^*)$. Aux distances plus faibles, la contrainte visqueuse est dominante et reste égale à ρu^{*2} . La longueur ν / u^* représente donc l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la *sous-couche visqueuse* ; au-delà, on passe dans la *sous-couche inertielle*.

Caractéristiques communes des écoulements turbulents près d'une paroi

– Dès que l'on s'éloigne un peu de la paroi, le transport de quantité de mouvement est assurée par les fluctuations de vitesse turbulentes (sous-couche inertielle). Ce mécanisme est beaucoup plus efficace que la viscosité et les flux de quantité de mouvement sont plus importants que dans un écoulement laminaire.

– À proximité immédiate de la paroi sur laquelle on a $v'_x = v'_y = 0$, le transport de quantité de mouvement est assuré uniquement par diffusion visqueuse (sous-couche visqueuse) : le flux de quantité de mouvement vaut alors $\rho \nu (\partial \bar{v}_x / \partial y)(0)$, mais sa valeur doit être la même que celle, élevée, dans la sous-couche inertielle. Le gradient de vitesse $(\partial \bar{v}_x / \partial y)(0)$ est donc, lui aussi, plus élevé que si l'ensemble de l'écoulement était laminaire.

– Dans nos raisonnements sur les sous-couches visqueuse et inertielle, nous n'avons pas fait intervenir la géométrie globale de l'écoulement. De fait, les expériences montreront que, dans de nombreux cas, elle n'influence pas l'écoulement dans ces deux zones mais seulement l'écoulement externe à plus grande échelle.

– La pression n'est pas constante sur une perpendiculaire à une paroi, contrairement au cas laminaire (mais le gradient de pression suivant l'écoulement est, lui, constant).

12.5.3 Écoulement turbulent entre deux plaques parallèles

Nous allons maintenant analyser plus quantitativement le cas des écoulements dans des canaux à parois parallèles. Nous utiliserons une approche plus dimensionnelle tirant parti des spécificités de l'écoulement sans faire appel au modèle de longueur de mélange.

Équations de mouvement en coordonnées réduites

Le cas d'un écoulement entre deux plaques introduit une simplification due à la symétrie de l'écoulement par rapport au plan $y = h$ parallèle aux plaques et à mi-distance de ces dernières ; dans la suite, on ne discutera que la partie du profil de vitesse correspondant à $0 \leq y \leq h$, le reste ($h \leq y \leq 2h$) s'en déduisant par symétrie. Pour cette même raison de symétrie, la dérivée $\partial v_x / \partial y$ et le flux convectif $\rho \overline{v_x v_y}$ doivent tous deux être nuls pour $y = h$. L'équation (12.45) devient alors :

$$\tau_0 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} h = 0, \quad (12.52a)$$

ou :

$$\rho u^{*2} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} h. \quad (12.52b)$$

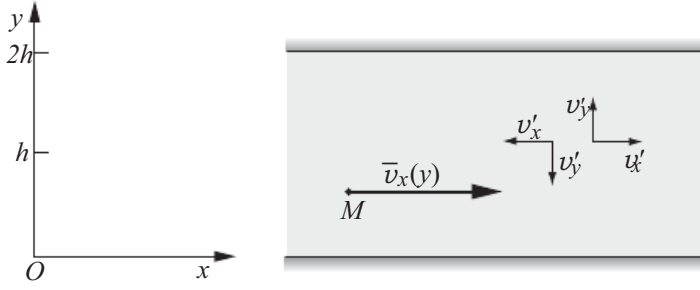


FIG. 12.7 – Configuration d'écoulement turbulent entre deux plans parallèles, distants d'une longueur $2h$.

En divisant les deux membres de l'équation (12.45) par ρ et en utilisant la relation (12.52b), on obtient :

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \overline{v'_x v'_y} = u^{*2} \frac{h - y}{h}. \quad (12.53)$$

Il existe dans ce problème deux échelles de longueur caractéristiques : la distance $2h$ entre les plaques et l'épaisseur ν/u^* de la sous-couche visqueuse. En remplaçant la contrainte τ_0 par son expression en fonction de la vitesse de frottement u^* , l'équation (12.47) devient :

$$\frac{\bar{v}_x}{u^*} = \frac{u^* y}{\nu}. \quad (12.54)$$

Pour calculer le profil de vitesse dans la sous-couche inertielle, introduisons deux variables réduites différentes associées aux deux échelles caractéristiques h et ν/u^* :

$$Y = \frac{y}{h} \quad (12.55a)$$

et :

$$y^+ = y \frac{u^*}{\nu} \quad (12.55b)$$

dont le rapport est donné par un nombre de Reynolds :

$$\frac{y^+}{Y} = \frac{u^* h}{\nu} = Re^*. \quad (12.55c)$$

On utilise l'une ou l'autre variable, suivant que l'on s'intéresse à la structure de l'écoulement au cœur de ce dernier, ou près des parois. Dans le second cas, le profil de vitesse n'est pas sensible à la structure globale de l'écoulement, mais la viscosité peut jouer un rôle et la variable y^+ est mieux adaptée. Loin des parois, en revanche, la viscosité n'intervient plus pour déterminer le profil de vitesse et l'on utilise la variable Y . En écoulement laminaire, il n'y avait pas lieu de faire la distinction entre les deux variables réduites car la viscosité joue un rôle dominant dans tout l'écoulement.

Pour la vitesse moyenne $\bar{v}_x$, on utilise, de la même manière, deux variables réduites différentes. Lorsque l'on étudie l'écoulement près des parois, on utilise le rapport $\bar{v}_x/u^*$ (cette normalisation apparaît déjà dans l'équation (12.54)). Lorsque l'on s'intéresse au champ de vitesse au cœur de l'écoulement, on prend plutôt le déficit de vitesse normalisé $(\bar{v}_x - U_0)/u^*$ (la vitesse de référence naturelle à utiliser est alors la vitesse U_0 dans le plan de symétrie $y = h$). Par analogie avec la solution des équations de Navier-Stokes sans dimension, nous supposons que les deux variables de vitesse réduite moyennées peuvent s'écrire en fonction de Y et y^+ sous la forme :

$$\bar{v}_x(Y) - U_0 = u^* f_1(Y)$$

pour :

$$\left(y \gg \frac{\nu}{u^*}, Re^* \gg 1\right). \quad (12.56)$$

De même, près de la paroi :

$$\bar{v}_x(y^+) = u^* f(y^+)$$

pour :

$$(y \ll h, Re^* \gg 1). \quad (12.57)$$

De plus, on a $f(0) = f_1(1) = 0$. Les deux fonctions f et f_1 sont, en principe, universelles si l'on a laissé à l'écoulement turbulent suffisamment de temps pour se développer et perdre la « mémoire » de sa configuration initiale. En particulier, on doit être suffisamment loin de l'extrémité amont de la conduite ou de la paroi pour que les effets d'entrée sur l'écoulement aient disparu.

Sous-couche inertielle – loi de variation logarithmique de la vitesse

Dans cette approche, la sous-couche inertielle est le domaine éventuel de valeurs de y telles que les deux expressions (12.56) et (12.57) soient simultanément valables ; cela impose la double inégalité :

$$\frac{\nu}{u^*} \ll y \ll h \text{ donc, nécessairement : } Re^* = \frac{u^* h}{\nu} \gg 1. \quad (12.58)$$

Typiquement, un tel domaine avec $30\nu/u^* < y < 0,1h$ n'existe que si $Re^* > 10^3$. Dans cette zone, le transport de quantité de mouvement par convection joue un rôle essentiel. Les expressions (12.56) et (12.57) doivent, bien entendu, donner dans ce domaine la même valeur de la vitesse moyenne pour une valeur de y donnée et nous allons donc les identifier (cela représente une approche de type *raccordement asymptotique*, très générale en mécanique des fluides). En dérivant les deux expressions par rapport à y , on doit tout d'abord obtenir la même fonction ; en multipliant ensuite le résultat par y , on a alors :

$$Y \frac{\partial f_1(Y)}{\partial Y} = y^+ \frac{\partial f(y^+)}{\partial y^+}. \quad (12.59)$$

Les fonctions f et f_1 doivent être universelles et dépendre uniquement respectivement de y^+ et de Y . Or, il est possible de faire varier séparément ces deux variables en modifiant par exemple Re^* pour garder l'une d'entre elles constante (et, par suite, le terme correspondant de l'équation (12.59)) : les deux membres de l'équation doivent donc être égaux à une même constante notée $1/\kappa$, d'où :

$$f_1(Y) = \frac{1}{\kappa} \text{Log } Y + C$$

ou :

$$\bar{v}_x(y) - U_0 = u^* \left(\frac{1}{\kappa} \text{Log } \frac{y}{h} + C \right) \quad (12.60a)$$

et :

$$f(y^+) = \frac{1}{\kappa} \text{Log } y^+ + C'$$

ou :

$$\bar{v}_x(y) = u^* \left(\frac{1}{\kappa} \text{Log } \frac{yu^*}{\nu} + C' \right). \quad (12.60b)$$

Le paramètre κ est la constante de Kármán déjà définie par l'équation (12.50b). Puisque les deux expressions (12.60a) et (12.60b) doivent être identiques dans la zone intermédiaire de raccordement, on a :

$$\frac{U_0}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \text{Log } Re^* + C' - C. \quad (12.61)$$

Cette relation permet de déterminer la vitesse maximale une fois connus le gradient de pression et la largeur du canal.

Profils de vitesse d'écoulements turbulents établis en conduite

La figure 12.8 montre la variation de la vitesse moyenne normalisée en fonction de la distance réduite y^+ à la paroi pour un écoulement dans un tube circulaire de diamètre D (symboles (o)). Les mesures correspondantes dans une couche limite turbulente sont également tracées (symboles (Δ)) et seront discutées à la section 12.5.5.

L'utilisation d'une échelle horizontale logarithmique pour la variable y^+ montre bien une variation suivant une droite (donc logarithmique avec y^+), dès lors que $y^+ \geq 25$ et jusqu'à une distance y de l'ordre de $0,1D$; $\bar{v}_x(y)/u^*$ vérifie alors bien l'équation (12.60b) avec $C' \approx 5,0$ et $1/\kappa = 2,5$ (droite en pointillés) de sorte que :

$$\frac{\bar{v}_x}{u^*} = 2,5 \text{Log } \frac{yu^*}{\nu} + 5. \quad (12.62)$$

On voit également sur la figure que, aux courtes distances $y^+ \leq 5$ à l'intérieur de la sous-couche visqueuse, on a un bon accord entre les points de données et la variation théorique $\bar{v}_x/u^* = y^+$ (Éq. 12.54) avec, au-delà, une zone de

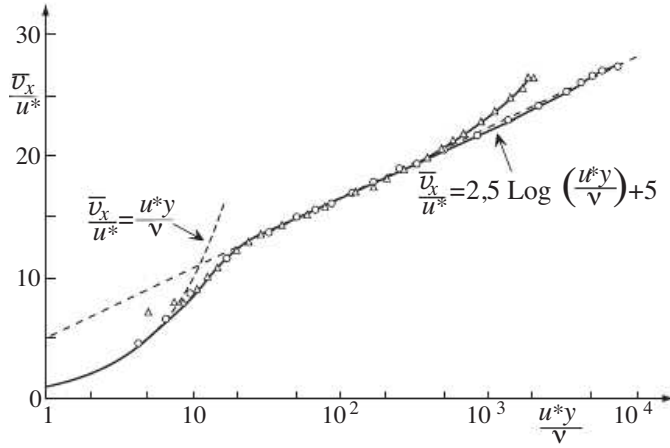


FIG. 12.8 – Profil de variation de la vitesse réduite moyenne $\bar{v}_x/u^*$ en fonction de la distance réduite à la paroi $y^+ = u^*y/\nu$ pour des écoulements turbulents dans un tube circulaire de diamètre 200 mm (o) et dans une couche limite créée par un écoulement uniforme près d'une paroi plane (Δ) (d'après Patel, 1965).

transition vers la loi logarithmique (la loi linéaire apparaît sous forme d'une ligne courbe sur la figure 12.8 à cause de l'utilisation d'une échelle horizontale logarithmique).

Remarque. On trouve graphiquement que le croisement des deux lois limites (12.54) et (12.60b) correspond à $y^+ = u^*y/\nu = 11$; on doit avoir alors :

$$\bar{v}_x/u^* = 11 = 2,5 \log 11 + C'.$$

On vérifie bien que : $C' = 11 - 2,5 \log 11 \approx 5$.

Pour $y^+ = 5$, les deux termes de transport de quantité de mouvement vérifient :

$$-\frac{\overline{v'_x v'_y}}{u^{*2}} \approx 0,1 \frac{\partial (\bar{v}_x/u^*)}{\partial y^+}. \quad (12.63)$$

Ainsi, dans la sous-couche visqueuse, les fluctuations de vitesse ne sont pas négligeables, mais le transport de quantité de mouvement par viscosité est dominant par rapport au transport convectif. Pour $y^+ = 11$, correspondant à l'intersection des deux courbes représentant les lois (12.54) et (12.60b), les deux termes sont équivalents.

Remarque. Plus Re^* est élevé, plus la sous-couche inertielle, où la loi logarithmique est applicable, couvre une large gamme de distances à la paroi. En effet, sa limite supérieure reste toujours une fraction de h du même ordre, alors que sa limite inférieure diminue (elle varie comme ν/u^*).

Relation vitesse moyenne - vitesse maximale pour des écoulements turbulents

Pour décrire la partie centrale de l'écoulement, il faut ajouter un terme additionnel $W(y/h)$ au membre de droite de l'équation (12.60a) :

$$\bar{v}_x(y) - U_0 = u^* \left(\frac{1}{\kappa} \text{Log } \frac{y}{h} + C + W \left(\frac{y}{h} \right) \right). \quad (12.64)$$

Pour un écoulement entre plans parallèles, on trouve expérimentalement que l'on peut choisir $W(Y) \propto \sin \alpha Y$ avec $C + W(1) = 0$ et $W(0) = 0$. Dès que $y/h < 0,1$, la loi logarithmique redevient valable cependant. On prend en pratique souvent simplement en première approximation $C = 0$ et $W = 0$ dans la formule (12.64).

Sous ces dernières hypothèses et en utilisant dans les équations (12.61) et (12.60a), la valeur $C' = 5$ trouvée plus haut et la valeur $C = 0$, on obtient :

$$\frac{\bar{v}_x(y) - U_0}{u^*} = 2,5 \text{ Log } \frac{y}{h} \quad (12.65)$$

et :

$$\frac{U_0}{u^*} = 2,5 \text{ Log } Re^* + 5. \quad (12.66)$$

En combinant ces deux équations, on obtient alors :

$$\frac{\bar{v}_x(y)}{u^*} = 2,5 \left[\text{Log } \frac{y}{h} + \text{Log } Re^* \right] + 5. \quad (12.67)$$

En intégrant cette expression sur la moitié de l'intervalle entre les deux plans, on obtient la vitesse moyenne U_m avec :

$$\frac{U_m}{u^*} = \frac{1}{h} \int_0^h \bar{v}_x dy = 2,5 \text{ Log } Re^* + 2,5. \quad (12.68a)$$

Pour un tube circulaire de diamètre D , on obtient une expression très voisine en prenant $Re^* = u^* D / \nu$:

$$\frac{U_m}{u^*} = 2,5 \text{ Log } Re^* - 0,5. \quad (12.68b)$$

En prenant $Re^* = 10^3$ dans les relations (12.66) et (12.68a), on trouve pour l'écoulement entre plaques $U_m/U_0 = 0,88$. Cette valeur est nettement supérieure au rapport $2/3$ pour un écoulement laminaire entre plans (Éq. 4.69) : ceci reflète le fait que le profil turbulent est beaucoup plus aplati que le profil parabolique laminaire. Le rapport U_m/U_0 augmente avec Re^* et, d'après les équations (12.66) et (12.68), il tend vers 1 lorsque $2,5 \text{ Log } Re^* \gg 1$: cela signifie que le profil de vitesse se rapproche d'un écoulement bouchon (sauf très près des parois).

12.5.4 Pertes de charge et coefficient de frottement pour des écoulements entre plans parallèles et dans des tubes

Écoulements entre plans ou dans des tubes à parois lisses

L'équation (12.68a) permet de déterminer la relation entre la vitesse moyenne et le gradient de pression $\Delta p/L$ parallèlement à l'écoulement entre deux plaques. En effet, la force $(2\Delta p h/L)$ sur un élément de fluide, de longueur unité suivant x et z et occupant l'intervalle $2h$ entre les plaques, doit équilibrer la contrainte de paroi totale $\tau_0 = 2\rho u^{*2}$ sur les deux plaques.

D'où :

$$u^* = \sqrt{\frac{\Delta p h}{\rho L}} \quad (12.69a)$$

et :

$$Re^* = \sqrt{\frac{\Delta p h^3}{\rho \nu^2 L}}. \quad (12.69b)$$

Le débit Q entre plaques par unité de profondeur suivant Oz vaut $Q = 2U_m h$. L'équation (12.68a) peut donc se transformer en la relation débit-gradient de pression :

$$Q = 2U_m h = 2\sqrt{\frac{\Delta p h^3}{\rho L}} \left(2,5 \operatorname{Log} \sqrt{\frac{\Delta p h^3}{\rho \nu^2 L}} + 2,5 \right). \quad (12.70)$$

Cette relation montre que le débit Q entre les plaques est approximativement proportionnel à la racine carrée du gradient de pression $\Delta p/L$ en raison de la lente variation du terme logarithmique. La vitesse d'écoulement augmente donc beaucoup plus lentement avec la perte de charge que pour un écoulement laminaire pour lequel $Q \propto \Delta p/L$.

Dans le cas d'un tube de diamètre D à parois lisses, on obtiendrait de même : $\tau_0 = (D/4)(\Delta p/L) = \rho u^{*2}$, d'où :

$$u^* = \sqrt{\frac{\Delta p D}{4\rho L}}, \quad (12.71a)$$

$$Re^* = \sqrt{\frac{\Delta p D^3}{4\rho \nu^2 L}} \quad (12.71b)$$

et :

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{\Delta p D}{4\rho L}} \left(2,5 \operatorname{Log} \sqrt{\frac{\Delta p D^3}{4\rho \nu^2 L}} - 0,5 \right) \quad (12.72)$$

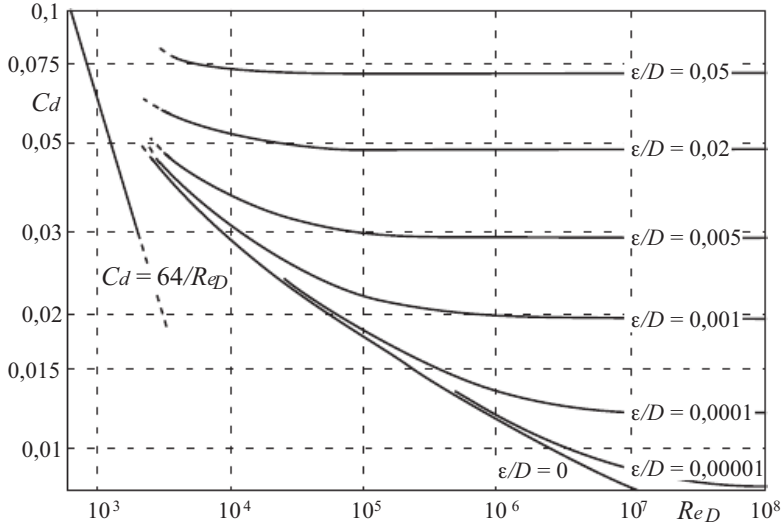


FIG. 12.9 – Variation du coefficient de frottement C_d en fonction du nombre de Reynolds $Re_D = U_m D / \nu$ pour différents tubes de sections circulaires à parois lisses et à parois rugueuses. La rugosité est caractérisée sur chaque courbe par le rapport entre la hauteur caractéristique ε des aspérités de surface et le diamètre D du tube. La variation linéaire à gauche correspond à un écoulement laminaire. La courbe la plus basse du groupe de droite correspond à un tube à parois lisses. Les pointillés marquent la zone de transition laminaire-turbulent (d'après L.F. Moody, 1944).

Introduisons maintenant, toujours dans le cas d'un tube, un coefficient de frottement :

$$C_d = \frac{\Delta p}{(L/D)(\rho U_m^2/2)} = \frac{8 u^{*2}}{U_m^2}. \quad (12.73)$$

En utilisant l'équation (12.68b), cette expression devient :

$$\sqrt{\frac{8}{C_d}} = 2,5 \log \left(\frac{u^* D}{\nu} \right) - 0,5 = 2,5 \log \left(Re_D \sqrt{C_d} \right) - 3,1 \quad (12.74)$$

où $Re_D = U_m D / \nu$. Cette variation correspond à la plus basse des courbes de la figure 12.9 ($\varepsilon/D = 0$) où l'on remarque que C_d varie seulement d'un facteur 3 lorsque le nombre de Reynolds Re_D varie d'un facteur 100.

Note. En utilisant un logarithme décimal, comme c'est l'usage pour les applications pratiques, on tire de l'équation (12.74) la relation :

$$C_d = \left(2,03 \log_{10} \left(\sqrt{C_d} Re_D \right) - 1,09 \right)^{-2}. \quad (12.75)$$

Cette relation est très proche de l'équation appliquée par les ingénieurs aux tubes commerciaux à section circulaire et paroi lisse

$$C_d = \left(2 \log_{10} \left(\sqrt{C_d} Re_D / 2,51 \right) \right)^{-2} = \left(2 \log_{10} \left(\sqrt{C_d} Re_D \right) - 0,8 \right)^{-2}. \quad (12.76)$$

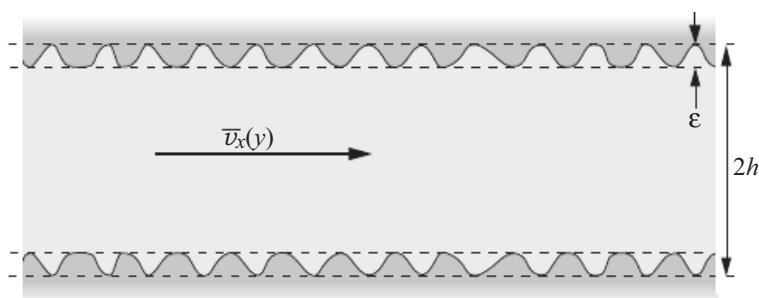


FIG. 12.10 – Schéma d'un écoulement entre deux plans à surface rugueuse séparés d'une distance $2h$ avec une épaisseur ε des aspérités sur les parois.

Écoulements dans des conduits à parois rugueuses

Dans ce cas d'un grand intérêt pratique, la hauteur moyenne ε des aspérités (Fig. 12.10) introduit un nouveau paramètre dans le problème. Si l'on a $\varepsilon \ll \nu/u^*$, la présence des aspérités ne modifie pas la structure de la sous-couche visqueuse et les résultats précédents restent valables : on peut conserver l'hypothèse de *paroi lisse*.

Si $\varepsilon \gg \nu/u^*$, c'est l'échelle de longueur ε , et non plus l'épaisseur ν/u^* de la sous-couche visqueuse, qui détermine la structure du champ de vitesse à faible distance des parois : on est alors dans le cas de *parois rugueuses*. On doit donc remplacer la variable réduite y^+ par la variable $y_\varepsilon = y/\varepsilon$; mais l'on ne peut espérer de prédictions simples que pour des distances $y \gg \varepsilon$, telles que la géométrie détaillée locale des aspérités n'intervienne plus. Si $\nu/u^* \ll \varepsilon \ll y \ll h$, on remplace alors l'équation (12.60b) par :

$$\bar{v}_x = \frac{u^*}{\kappa} \operatorname{Log} \frac{y}{\varepsilon}. \quad (12.77)$$

On a admis, pour simplifier, que $\bar{v}_x = 0$ pour $y = \varepsilon$, et il n'y a donc pas de constante additive. On en déduit alors, en supposant également que l'équation reste valable jusqu'à $y = h$ et en intégrant $\bar{v}_x$ entre ε et h :

$$U_m \approx \frac{u^*}{\kappa} \left(\operatorname{Log} \frac{h}{\varepsilon} - 1 \right). \quad (12.78)$$

En procédant comme pour les équations (12.72) à (12.76), on trouve que le débit entre les plaques est alors exactement proportionnel à $\sqrt{\Delta p/L}$ et que le coefficient de frottement C_d est constant (sans terme de variation logarithmique avec Re_D).

Remarque. Effectivement, on trouve expérimentalement, pour des tubes à parois rugueuses, la valeur suivante (indépendante de la vitesse) de la limite de C_d aux

nombre de Reynolds élevés :

$$C_d = \left(2 \log_{10} \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)^{-2} = \left(2 \log_{10} \frac{D}{\varepsilon} + 1,14 \right)^{-2}. \quad (12.79)$$

La figure 12.9 présente la variation de C_d avec le nombre de Reynolds Re_D pour différentes valeurs du rapport ε/D (toujours pour des tubes circulaires). Le passage en régime turbulent provoque une augmentation de C_d . Ensuite, lorsque Re_D continue d'augmenter, on a d'abord un régime où l'épaisseur ν/u^* de la sous-couche visqueuse est grande par rapport à ε : on suit alors la loi universelle (12.74) obtenue pour des tubes lisses. Aux valeurs plus élevées de Re_D , C_d a une valeur constante déterminée par la rugosité. La faible variation de C_d avec Re_D justifie l'utilisation de ce coefficient pour caractériser le frottement aux parois dans les écoulements industriels turbulents de fluides peu visqueux.

Remarque. Si l'on conserve, en régime d'écoulement laminaire dans un tube, la définition de C_d issue de l'équation (12.73), on obtient, en utilisant l'équation de Poiseuille (4.78) :

$$C_d = \frac{64}{Re_D}. \quad (12.80)$$

Cette variation apparaît dans la partie gauche de figure 12.9. On retrouve une variation de C_d en $1/Re_D$ du même type pour les écoulements visqueux pour lesquels la vitesse du fluide est proportionnelle aux gradients de pression appliqués (les définitions de C_d et la valeur numérique des coefficients varient suivant la géométrie de l'écoulement). Cette variation est beaucoup plus rapide que celle observée pour les écoulements turbulents et même pour les couches limites laminares (en $1/Re^{1/2}$ pour ces dernières.)

12.5.5 Couches limites turbulentes

Dans la section 12.5.3, nous avons présenté des écoulements entre deux plans et dans un tube, et nous avons supposé qu'ils avaient atteint un profil de vitesse stationnaire établi sur toute la section de l'écoulement et invariant le long de ce dernier. Nous allons analyser maintenant le cas d'une couche limite turbulente qui se développe le long d'un plan lisse semi-infini placé dans un écoulement uniforme $\mathbf{U}$ parallèle à l'axe Ox (Fig. 12.11). On suppose que les distances caractéristiques d'évolution de la vitesse de l'écoulement suivant Ox sont grandes devant celles suivant Oy . Comme pour la couche laminaire étudiée au chapitre 10, l'écoulement en dehors de la couche limite est considéré comme potentiel et de vitesse uniforme $\mathbf{U}$. Dans le cas turbulent, la limite entre la zone turbulente et l'écoulement extérieur de vitesse constante fluctue au cours du temps bien que, instantanément, cette limite soit nette dans les visualisations expérimentales (Fig. 12.11). Pour déterminer une épaisseur de couche limite $\delta(x)$, on moyenne les profils de vitesse instantanés à différents instants.

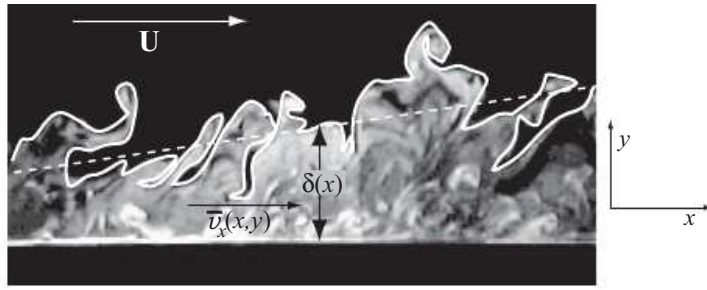


FIG. 12.11 – Écoulement dans une couche limite turbulente. Image en niveaux de gris : vue de fluorescence induite par un plan laser lumineux perpendiculaire à la paroi (le colorant fluorescent est émis à partir de la paroi).

Variation de l'épaisseur δ avec la distance le long de la paroi

Les éléments de fluide sont entraînés parallèlement à la paroi à une vitesse de l'ordre de U . On supposera que les fluctuations de vitesse transverses v'_y tendent à éloigner de la plaque la limite de la turbulence : la croissance transverse est ainsi convective et non diffusive, comme c'était le cas pour la couche limite laminaire. Or, on sait que, dans la sous-couche inertielle, on a $\rho u^{*2} = -\rho \overline{v'_x v'_y}$. Les expériences montrent que l'on a souvent également $|\overline{v'_x v'_y}| \approx \overline{v'^2_y}$. On peut donc considérer que les fluctuations de vitesse transverses v'_y sont de l'ordre de u^* et, en suivant le même type de raisonnement qualitatif que dans la section 10.2, on obtient :

$$\frac{d\delta(x)}{dx} \approx \frac{u^*}{U} \quad (12.81a)$$

soit :

$$\delta(x) \approx \frac{u^* x}{U} \quad (12.81b)$$

si on prend l'origine $x = 0$ sur l'arête de la plaque. On verra en effet, un peu plus loin, que u^* varie peu avec la distance x suivant l'écoulement moyen. L'épaisseur moyenne croît donc proportionnellement à la distance x et non à $\sqrt{x}$ comme pour une couche limite laminaire.

Sous-couches laminaire et visqueuse pour une paroi lisse

Les symboles (Δ) sur la figure 12.8 correspondent à la variation expérimentale de la vitesse $\bar{v}_x / u^*$ en fonction de $\text{Log}(yu^* / \nu)$ dans une couche limite turbulente créée par un écoulement uniforme près d'une paroi plane (u^* est, comme précédemment, relié à la contrainte de paroi par l'équation (12.49)). Les variations expérimentales sont pratiquement identiques à celles observées pour l'écoulement dans un tube circulaire. On a, comme dans ce dernier cas, une sous-couche visqueuse et une sous-couche inertielle correspondant à des variations respectivement linéaire et logarithmique de la vitesse moyenne avec

la distance à la paroi. Les deux profils normalisés sont presque identiques tant que la distance à la paroi est inférieure à $0,1 D$ pour le tube ou faible devant l'épaisseur de la couche limite. Ainsi :

– dans la *sous-couche visqueuse* ($y \ll \nu/u^*$), on a :

$$\bar{v}_x(y) \approx \frac{u^{*2}y}{\nu} \quad (12.82)$$

et

$$\tau(x) = \rho u^{*2}; \quad (12.83)$$

– dans la *sous-couche inertielle* ($\nu/u^* \ll y \ll \delta(x)$), le profil de vitesse y vérifie une équation identique à (12.60b) :

$$\bar{v}_x(y) = u^* \left(\frac{1}{\kappa} \text{Log} \frac{yu^*}{\nu} + C' \right) \quad (12.84)$$

avec les mêmes coefficients $1/\kappa = 2,5$ et $C' \cong 5$. On a également une équation équivalente à (12.60a) pour la variable $Y = y/\delta(x)$.

Profil de vitesse au bord d'une couche limite turbulente pour une paroi lisse

Aux nombres de Reynolds élevés, on s'écarte de la loi de profil logarithmique dès que $y > 0,15 \delta(x)$ environ. Dans cette zone de transition, l'écoulement est alternativement potentiel et turbulent en raison de la très grande amplitude des mouvements du contour de la couche limite visible sur la figure 12.11 : l'équation (12.84) n'est alors plus valable. Le terme correctif W à introduire ne doit dépendre, comme dans le cas des deux plans, que de la variable $y/\delta(x)$. Pour $y \gg \nu/u^*$, l'équation (12.84) peut donc être généralisée sous la forme :

$$\frac{\bar{v}_x(y)}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \text{Log} \frac{yu^*}{\nu} + C' + W \left(\frac{y}{\delta(x)} \right). \quad (12.85)$$

La fonction $W(y/\delta(x))$ s'annule dans la couche inertielle ($y \ll \delta$), et sa variation près de la limite de la couche est similaire à celle observée dans le cœur des écoulements entre plaques. En écrivant, à l'aide de l'équation (12.85), la condition $\bar{v}_x(\delta) = U$ pour $y = \delta(x)$, on obtient :

$$\frac{U}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \text{Log} Re_\delta^* + C'', \quad (12.86)$$

où $C'' = C' + W(1)$ et $Re_\delta^* = u^*\delta(x)/\nu$.

Coefficient de frottement sur une paroi lisse

En définissant le coefficient de frottement C_d par $C_d = \rho u^{*2} / \rho U^2$, l'équation (12.86) devient :

$$C_d = \frac{1}{((1/\kappa) \operatorname{Log} Re_\delta^* + C'')^2}. \quad (12.87)$$

C_d varie donc lentement (logarithmiquement) avec Re_δ^* (et donc avec $\delta(x)$) pour une paroi plane lisse : ce résultat contraste avec la variation en $1/Re^{1/2}$ pour les écoulements laminaires (Éq. 10.42).

Les résultats précédents justifient *a posteriori* l'hypothèse d'une valeur constante de u^* faite plus haut pour évaluer la variation de $\delta(x)$ avec x . Quantitativement, en utilisant l'expression (12.86) dans (12.81b), on obtient :

$$\delta(x) \approx \frac{x}{(1/\kappa) \operatorname{Log} Re_\delta^* + C'''}; \quad (12.88)$$

la variation de $\delta(x)$ avec x est donc approximativement linéaire avec x ou, plus précisément, en $x^{0,9}$ en raison de la variation en $\operatorname{Log} x$ du terme au dénominateur de l'équation (12.88). De plus, le rapport $\delta(x)/x$ ne dépend que très peu de la vitesse extérieure U . Rappelons qu'il ne s'agit que d'une épaisseur moyenne car la frontière avec l'écoulement extérieur est extrêmement fluctuante et tortueuse.

Couche limite turbulente près d'une surface rugueuse

Comme pour un écoulement développé, l'influence des rugosités devient dominante quand leur hauteur ε devient plus grande que l'épaisseur de la sous-couche visqueuse. Dans ce cas, le profil de vitesse, ainsi que la force de frottement et le coefficient C_d , dépendent des deux échelles de longueur δ et ε . Comme dans l'équation (12.79) correspondant à l'écoulement établi dans une conduite, la forme des expressions de C_d et de $\delta(x)$ se déduit des équations (12.87) et (12.88) en remplaçant $\operatorname{Log} Re_\delta^*$ par $\operatorname{Log}(\delta/\varepsilon)$.

Comparaison des couches limites laminares et turbulentes

Pour conclure cette présentation des caractéristiques des couches limites turbulentes, résumons leurs principales différences avec les couches limites laminares :

- Dans une couche laminaire, la vitesse varie linéairement avec la distance à la paroi près de cette dernière, puis rejoint exponentiellement sa valeur asymptotique (Fig. 12.12). Pour la couche turbulente, en coordonnées normalisées, la pente initiale $\partial \bar{v}_x / \partial y$ du profil dans la sous-couche laminaire est plus élevée que dans le cas laminaire ; ensuite, on rejoint la vitesse de l'écoulement extérieur plus lentement que dans le cas laminaire en raison de la variation logarithmique dans la sous-couche inertielle.

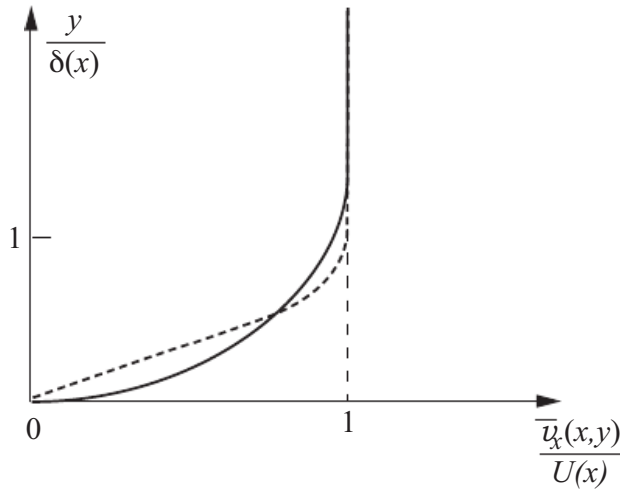


FIG. 12.12 – Comparaison entre les profils de vitesse normalisés d'écoulements en régime laminaire (tirets) et turbulent (traits pleins) dans des couches limites à proximité d'une plaque plane lisse.

- L'épaisseur de la couche limite augmente approximativement comme la distance x à l'arête dans la couche turbulente (en x au lieu de $\sqrt{x}$ pour la couche laminaire).
- Le flux convectif de quantité de mouvement dû aux fluctuations turbulentes dans la sous-couche inertielle est plus élevé que le flux visqueux diffusif que l'on aurait en écoulement laminaire. Il en résulte un coefficient de frottement C_d plus élevé. Comme pour un écoulement développé, cela explique également la valeur élevée de la pente $\partial \bar{v}_x / \partial y$ à la paroi car, dans la sous-couche visqueuse, le transport visqueux de quantité de mouvement doit prendre le relais du transport convectif avec le même flux que ce dernier.
- Le coefficient C_d sur une paroi plane varie plus lentement avec le nombre de Reynolds pour la couche turbulente (en $\text{Log}(1/Re)$) que pour la couche laminaire (en $1/\sqrt{Re}$). C_d est donc le plus souvent plus élevé dans le cas turbulent (C_d augmente de plus avec la rugosité de la paroi aux nombres de Reynolds élevés).

12.5.6 Décollement des couches limites turbulentes

Une autre caractéristique des couches limites turbulentes, très importante pour les applications pratiques, est le fait que le gradient $\partial U / \partial x < 0$, nécessaire pour produire le décollement est beaucoup plus élevé que pour une couche laminaire (section 10.5.4). Cela reflète l'efficacité beaucoup plus grande du transfert convectif de quantité de mouvement par les tourbillons dans la

couche turbulente par rapport au transfert purement diffusif dans la couche laminaire. L'apport de quantité de mouvement vers les zones de faible vitesse près de la paroi est ainsi plus important et retarde l'inversion du sens de l'écoulement.

On peut stabiliser ainsi les couches limites en provoquant leur transition vers la turbulence en amont du point normal de décollement (par exemple, par une aspérité sur la surface). Le décollement de la couche limite se produit alors beaucoup plus loin que si elle était restée laminaire. La largeur du sillage turbulent arrière est réduite considérablement (Fig. 12.13b) par rapport à une couche limite laminaire (Fig. 12.13a).

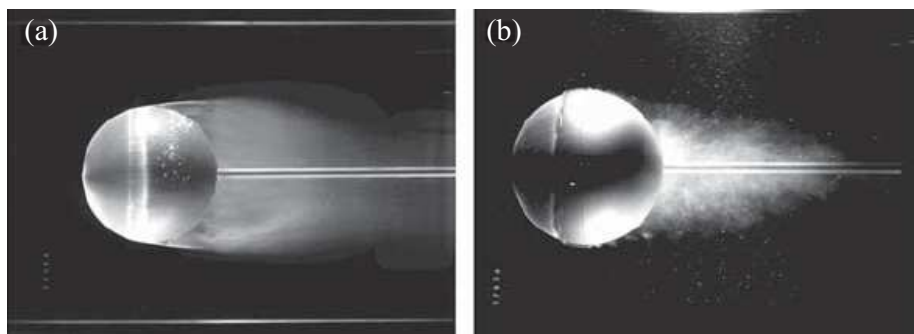


FIG. 12.13 – Différence entre la position du point de décollement d'une couche limite laminaire (a) et turbulente (b). Dans ce dernier cas, un fil autour de la sphère en amont du point de décollement induit la transition vers une couche limite turbulente et en retarde donc le décollement (docs. H. Werlé, ONERA).

Cette diminution de taille du sillage baisse fortement la dissipation d'énergie dans ce dernier. La traînée globale pourra donc nettement diminuer, ce qui est utile dans certaines applications pratiques.

Remarque. L'influence de cette réduction de taille du sillage sera généralement très supérieure à celle de l'augmentation du frottement dans la partie non décollée de la couche limite quand cette dernière devient turbulente : l'amplitude de dernier effet est visualisée dans la figure 12.9 par la différence entre les valeurs de C_d pour les écoulements laminaires et turbulents autour de la transition entre ceux-ci dans un tube circulaire ($Re_D \approx 3000$).

L'un des manifestations les plus spectaculaires de tels effets est le phénomène de *crise de traînée* : on l'observe, vers un nombre de Reynolds de quelques centaines de milliers, sur les sphères et les cylindres circulaires, même lisses. Il résulte d'une transition spontanée de la couche limite vers la turbulence : ce phénomène s'accompagne d'une réduction brusque de la traînée (Fig. 12.14) liée à celle de la taille du sillage. Pour des surfaces alvéolées, comme celle d'une balle de golf, ou rugueuses, comme celle d'une balle de tennis, la transition est anticipée. Cela permet de réduire la traînée, à condition de dépasser la vitesse de transition, ce que réalisent les bons joueurs.

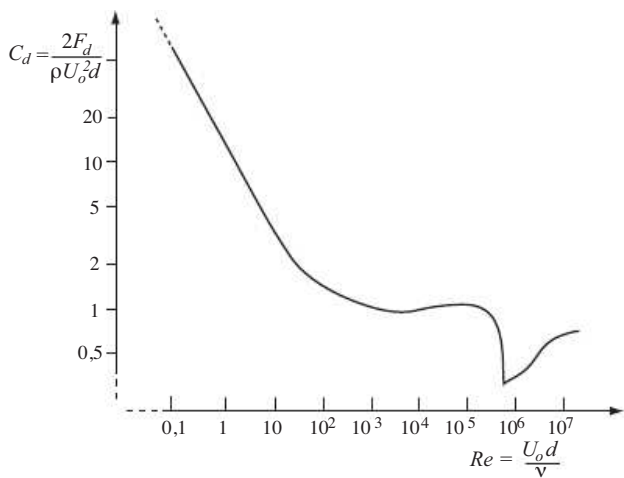


FIG. 12.14 – Crise de traînée sur un cylindre circulaire : à un nombre de Reynolds de l’ordre de 3×10^5 , la traînée, qui s’exerce sur un cylindre circulaire, chute brutalement d’un facteur de l’ordre de 2. Cela est dû à la diminution brusque de la largeur du sillage.

Un effet relié au précédent est le *réattachement des couches limites* qui se produit parfois lorsqu’une couche limite devient turbulente juste en aval d’un point de décollement. Dans ce cas, le transfert transverse de quantité de mouvement par les fluctuations turbulentes peut être suffisant pour réaccélérer le fluide proche de la paroi et supprimer l’écoulement de recirculation. On peut observer le réattachement de la couche limite sur la paroi (Fig. 12.15) en regardant la déformation d’une bâche de camion près de ses bords verticaux avant.



FIG. 12.15 – Décollement puis recollement dû à la transition vers la turbulence d’une couche limite autour d’un profil à nez presque plat (doc. ONERA).

12.6 Turbulence homogène – théorie de Kolmogorov

La multiplicité des échelles de tailles caractéristiques des mouvements tourbillonnaires est l'une des caractéristiques essentielles de la turbulence. Nous avons établi, dans la section 12.2, des bilans globaux d'échanges d'énergie et de vorticité entre l'écoulement moyen et l'ensemble de ces fluctuations turbulentes de vitesse. Le but de la théorie développée par Kolmogorov en 1941 est de préciser ces bilans et, en particulier, d'étudier la distribution et l'échange d'énergie ou de vorticité entre les tourbillons de différentes tailles.

12.6.1 *Cascade d'énergie* dans un écoulement turbulent homogène

Description qualitative

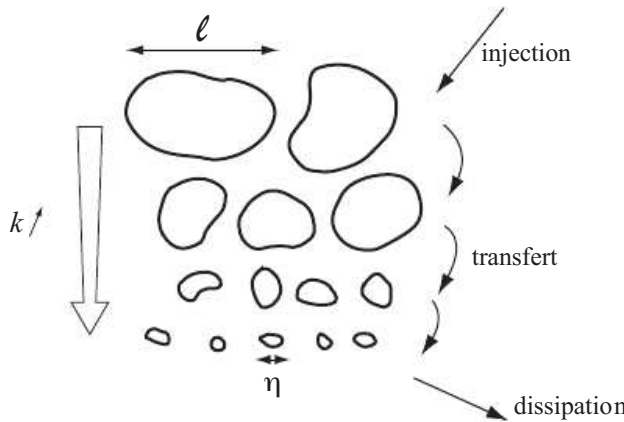


FIG. 12.16 – Principe de la cascade de Kolmogorov de transfert d'énergie des plus grands vers les petits tourbillons. Soulignons que l'échelle verticale est définie ici dans l'espace des tailles de tourbillons et non dans l'espace réel : les tourbillons sont répartis de manière aléatoire, sans ségrégation suivant leur taille.

Dans le modèle de *cascade d'énergie* introduit par Kolmogorov, on consi d re que l'énergie injectée dans l'écoulement moyen à grande échelle est transmise par ce dernier aux plus grands tourbillons de taille caractéristique ℓ (Fig. 12.16) ; ceux-ci la transmettent aux tourbillons de taille immédiatement inférieure situés dans la même région de l'espace, et, ainsi de suite, jusqu'aux plus petits tourbillons au niveau desquels l'énergie est dissipée par viscosité.

Le transfert d'énergie entre tourbillons de différentes tailles dans la théorie de Kolmogorov présente des analogies avec le transfert de quantité de mouvement dans un écoulement turbulent près d'une paroi. Le mouvement moyen d'un écoulement turbulent homogène correspond au profil de vitesse globale

ou à la vitesse à grande distance des parois. Les tourbillons de plus petite taille, pour lesquels la dissipation visqueuse est importante correspondent à la sous-couche visqueuse très près des parois. Entre ces deux échelles existe une gamme intermédiaire d'échelles de longueur de transfert de quantité de mouvement ou d'énergie dominée par les effets inertiels et dont les caractéristiques sont indépendantes de la viscosité aussi bien que de la taille globale de l'écoulement.

Afin de justifier cette description, reprenons l'équation (12.19) de transport de l'énergie des fluctuations, en supposant maintenant l'écoulement moyen stationnaire. On suppose également que l'écoulement évolue assez lentement avec la distance pour que la divergence des termes de flux d'énergie soit faible. Le bilan d'énergie des fluctuations turbulentes devient donc, en négligeant ces termes et ceux du premier membre :

$$-\nu \overline{\left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j}\right)^2} = \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}. \quad (12.89)$$

Cette équation traduit, pour ces fluctuations, l'équilibre entre l'énergie dissipée par la viscosité et celle reçue de l'écoulement moyen. Supposons plus précisément, ce que l'on vérifiera *a posteriori* (Éqs. 12.92), que les vitesses associées aux tourbillons augmentent avec leur taille mais que, en revanche, les gradients de vitesse sont plus forts pour les petits tourbillons. Dans ce cas, dans le bilan d'énergie (12.89), les grands tourbillons contribuent bien de façon dominante au terme $-\overline{v'_i v'_j} (\partial \bar{v}_i / \partial x_j)$ et les plus petits au terme $\nu (\partial v'_i / \partial x_j)^2$.

L'image du vortex de Rankine présentée à la section 7.1.2 permet de comprendre l'origine de l'échange d'énergie : ce dernier résulte de l'étirement des tubes de vorticité qui intervient dans l'équation de bilan de vorticité (12.20a)   travers le terme $\overline{\omega'_i \omega'_j} (\partial v'_i / \partial x_j)$. Dans un écoulement stationnaire homogène, pour lequel $d\omega'^2/dt = 0$, ce terme doit être en moyenne positif pour que l'équation (12.20b) soit vérifiée. Comme nous l'avons vu à la section 7.3.1, si l'on étire un tube de vorticité de longueur L et de rayon R , la circulation de la vitesse autour du tube de vorticité ( gale à l'intégrale $\pi \omega' R^2$ de la vorticité à travers une section) et le volume $V = \pi R^2 L$ de ce dernier restent constants au cours de sa déformation. L'énergie cinétique de rotation du tube, qui est de l'ordre de $\rho V R^2 \omega'^2$, est, en revanche, proportionnelle à $1/R^2$ et, par suite, à L : le tourbillon gagne donc de l'énergie lors de l'étirement.

L'hypothèse complémentaire clé du modèle de Kolmogorov mentionnée plus haut est que les tourbillons d'une taille donnée ne reçoivent d'énergie que de ceux de taille immédiatement supérieure, et ne la restituent qu'à ceux de taille juste inférieure. Appelons $\xi (\leq \ell)$ l'une des tailles caractéristiques de tourbillons présentes et appelons v'_ξ et $(\partial v' / \partial x)_\xi$ l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse et de gradient de vitesse associées aux tourbillons de taille ξ . Raisonnons maintenant dans l'espace des tailles ξ des tourbillons et supposons que les composantes v'_ξ croissent quand ξ augmente, tandis

que les dérivées $(\partial v'/\partial x)_\xi$ décroissent : comme on admet dans la suite que $(\partial v'/\partial x)_\xi \approx v'_\xi/\xi$, cela revient à supposer que, si v'_ξ suit une loi de puissance de ξ , l'exposant est inférieur à 1. L'étirement des tubes de vorticité correspondant à une composante de taille ξ du champ de vitesse turbulent est seulement dû aux gradients de vitesse $(\partial v'/\partial x)_{\xi'}$ créé par les composantes de taille $\xi' > \xi$ (les composantes de taille plus faible que ξ donnent un effet nul une fois moyenné sur l'ensemble du tourbillon). Les composantes qui donnent les plus fortes valeurs de $(\partial v'/\partial x)_{\xi'}$, et qui sont donc les plus efficaces, correspondent aux tailles immédiatement supérieures à ξ .

Note. Précisons ce qu'il faut entendre par « taille immédiatement supérieure ou inférieure ». Des raisonnements comme celui que nous venons de présenter classent implicitement les tourbillons sur une échelle logarithmique : cette dernière est seule adaptée pour décrire les variations de tailles de tourbillons de plusieurs ordres de grandeur présents dans une turbulence fortement développée. On divise alors l'échelle des valeurs utiles de $\text{Log } \xi$ en intervalles égaux correspondant, par exemple, à une variation d'un facteur 2 lors du passage d'une échelle de taille à sa voisine. Les tourbillons se repartissent alors entre les différents intervalles : on dira, par exemple, que les tourbillons de taille de l'ordre de ξ reçoivent de l'énergie des tourbillons de taille 2ξ pour la redonner à ceux de vecteur d'onde typique $\xi/2$ (le nombre 2 est pris arbitrairement).

Lois d'échelle et grandeurs caractéristiques découlant du modèle de cascade d'énergie

Appelons ε la quantité d'énergie par unité de masse   chang  e pendant un intervalle de temps donné par l'écoulement moyen avec les plus grands tourbillons (ε est mesurée en $\text{m}^2.\text{s}^{-3}$). Dans le processus de cascade que nous venons de décrire, ε est aussi égale à l'énergie   chang  e par des tourbillons de taille ξ quelconque, avec ceux de taille voisine tant que la taille ξ est assez grande pour que la viscosité n'intervienne pas.

Plaq  ons-nous au niveau des grandes échelles de la turbulence. Soient ℓ la taille des plus grands tourbillons et v'_ℓ la vitesse caractéristique associée ; le temps t_ℓ mis par une particule matérielle pour parcourir l'ensemble du tourbillon a pour ordre de grandeur $t_\ell \sim \ell/v'_\ell$. Supposons par ailleurs que t_ℓ représente également l'ordre de grandeur du temps mis par le tourbillon pour transférer son énergie de départ. On a alors :

$$\frac{dv'_\ell{}^2}{dt} \approx -A \frac{v'_\ell{}^2}{(\ell/v'_\ell)} \quad (12.90a)$$

soit :

$$\varepsilon \approx A \frac{v'_\ell{}^3}{\ell} \quad (12.90b)$$

A est une constante sans dimension de l'ordre de l'unité. On peut vérifier expérimentalement la relation (12.90b) en mesurant la perte d'énergie de la

turbulence, créée par le passage d'un écoulement de vitesse U à travers une grille, en fonction de la distance à cette dernière. Les expériences confirment approximativement les hypothèses de départ, même lorsque la taille des plus grands tourbillons varie. Ces vérifications expérimentales suggèrent que les expressions (12.90a-b) restent valables pour les tourbillons de taille $\xi < \ell$ plus faible (mais assez grande pour que les effets de la viscosité restent négligeables). On a alors :

$$\frac{dv'_\xi{}^2}{dt} \approx -A \frac{v'_\xi{}^2}{(\xi/v'_\xi)} \quad (12.91a)$$

soit :

$$\varepsilon \approx A \frac{v'^3_\xi}{\xi}. \quad (12.91b)$$

On parle de *sous-domaine inertiel* pour désigner la gamme de tailles de tourbillons pour laquelle cette relation est vérifiée : elle se justifie par le fait que le temps $t_\xi \approx \xi/v'_\xi$ est le seul temps caractéristique relatif à un tourbillon de taille donnée, intermédiaire entre celle des plus grands tourbillons et celle des très petits tourbillons sensibles à la viscosité. Cela revient à supposer que la dynamique des tourbillons de taille intermédiaire est indépendante à la fois de la structure globale de l'écoulement (très grands tourbillons) et de la viscosité qui n'intervient qu'aux très petites échelles : cette hypothèse découle du modèle de cascade où chaque classe de taille de tourbillons n'interagit qu'avec les tourbillons de taille immédiatement inférieure ou supérieure.

Puisque le taux de transfert d'énergie ε est le même pour tous les tourbillons et qu'il est donc indépendant de ξ , l'équation (12.91b) implique :

$$v'_\xi \propto \xi^{1/3} \quad (12.92a)$$

et :

$$(\partial v'/\partial x)_\xi \propto \xi^{-2/3}. \quad (12.92b)$$

Cela confirme l'hypothèse de décroissance de v'_ξ et de croissance du gradient quand l'échelle spatiale ξ des tourbillons diminue.

Comme la quantité totale d'énergie transférée doit être égale à l'énergie dissipée, ε représente aussi le taux d'énergie dissipée par unité de masse. Notons η la taille caractéristique des plus petits tourbillons (il s'agit d'une notation consacrée, à ne pas confondre avec la viscosité dynamique notée également η dans cet ouvrage). Plus précisément, η représente la taille des tourbillons pour lesquels l'énergie dissipée par viscosité $\nu (\partial v'_i/\partial x_j)^2$ devient de l'ordre de ε . En remplaçant cette dernière expression par la valeur approchée $\nu(v'_\eta/\eta)^2$, la longueur η et la vitesse correspondante v'_η doivent vérifier la double condition, en prenant $A = 1$ dans les équations (12.91) :

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{v'_\eta}{\eta} \right)^2 = \frac{v'^3_\eta}{\eta}. \quad (12.93)$$

En résolvant cette équation, on obtient :

$$\eta = \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4} \quad (12.94)$$

et :

$$v'_\eta = (\nu \varepsilon)^{1/4}, \quad (12.95)$$

et η et v'_η sont appelées respectivement *longueur de Kolmogorov* et *vitesse de Kolmogorov*. Comme les tourbillons de taille inférieure perdent leur énergie extrêmement vite par dissipation visqueuse, on peut considérer que η représente la limite inférieure typique de la taille des tourbillons. Une autre manière d'exprimer le même résultat consiste à calculer le nombre de Reynolds $Re_\eta = v'_\eta \eta / \nu$ en prenant la vitesse et la longueur de Kolmogorov comme échelles caractéristiques. On trouve $Re_\eta = 1$, ce qui confirme bien que η est l'échelle de longueur pour laquelle les effets convectifs et les effets visqueux deviennent du même ordre de grandeur.

Le *sous-domaine inertiel* de taille de tourbillons ξ , dans lequel les lois d'échelle telles que (12.92a-b) sont valables, s'étend (en ordre de grandeur) de η à ℓ . En effet, d'après le principe même de la cascade d'énergie, cette dernière ne s'applique plus aux échelles de taille inférieures à η pour lesquelles la dissipation visqueuse devient importante, et nous avons vu plus haut que la limite supérieure est ℓ . Nous présenterons à la section 12.6.3 des résultats expérimentaux sur ce domaine de validité.

Dans cette même gamme de validité de l'équation (12.91b), l'énergie cinétique E_ξ par unité de masse de fluide correspondant aux tourbillons de taille ξ vaut :

$$E_\xi \propto v'^2_\xi \propto (\varepsilon \xi)^{2/3}. \quad (12.96)$$

L'énergie est donc associée principalement aux tourbillons de plus grande taille.

En revanche, on trouve que l'*enstrophie* ω'^2_ξ (carré de la vorticité définie à la section 12.2.5) associée aux tourbillons de taille ξ varie suivant la loi $\omega'^2_\xi \propto v'^2_\xi / \xi^2 \propto \varepsilon^{2/3} \xi^{-2/3}$. L'enstrophie est donc concentrée dans les plus petits tourbillons car elle augmente quand leur taille diminue.

Cascade de Kolmogorov et corrélations entre fluctuations de vitesse

Une équation liée à la précédente caractérise la corrélation entre les fluctuations de vitesse mesurées en deux points séparés d'un intervalle $\mathbf{r}$ dans un écoulement turbulent homogène et isotrope. On trouve :

$$\langle (v_\parallel(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - v_\parallel(\mathbf{x}))^2 \rangle_{\mathbf{x}} = C \varepsilon^{2/3} r^{2/3} \quad (12.97)$$

où $v_\parallel$ est la composante de la vitesse suivant la direction de $\mathbf{r}$ et $r = |\mathbf{r}|$. La fonction de corrélation du premier membre est indépendante du volume de moyennage à cause de l'homogénéité de l'écoulement et ne dépend pas non plus de l'orientation de $\mathbf{r}$ à cause de l'isotropie. Cette équation n'est valable,

bien entendu, que dans la même gamme d'échelles de distance r pour laquelle la relation (12.96) est elle-même valable.

Remarque. En plus des lois d'échelle que nous venons de discuter, Kolmogorov a établi une relation générale exacte, fondée sur la conservation de l'énergie, valable en turbulence homogène et isotrope et faisant intervenir un moment du troisième ordre de la composante $v_{\parallel}$ de la vitesse parallèle à l'incrément $\mathbf{r}_{\parallel}$:

$$\langle (v_{\parallel}(\mathbf{x} + \mathbf{r}_{\parallel}) - v_{\parallel}(\mathbf{x}))^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon r_{\parallel}. \quad (12.98)$$

Cette équation est connue sous le nom de loi des quatre cinquièmes de Kolmogorov et elle est valable pour des distances r petites devant la taille des plus grands tourbillons; elle est utilisée en particulier pour déterminer le paramètre ε (ce dernier joue, en effet, un rôle clé, comme nous venons de le voir, dans tout le modèle de cascade de Kolmogorov).

12.6.2 Expression spectrale des lois de Kolmogorov

Jusqu'à présent, nous avons considéré l'écoulement turbulent comme une superposition de tourbillons de tailles différentes. Nous allons décrire maintenant une autre démarche classique utilisant la transformée de Fourier pour effectuer une décomposition spectrale en composantes sinusoïdales de nombres d'onde différents.

Décomposition spectrale des variations spatiales de la vitesse

On obtient la décomposition spectrale du champ de vitesse en prenant la *transformée de Fourier* à trois dimensions des composantes v'_j . Cela revient à représenter l'ensemble des fluctuations de vitesse comme une superposition d'ondes sinusoïdales. On définit ainsi :

$$v'_{\mathbf{k},j} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint v'_j(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}, \quad (12.99a)$$

et, par transformation de Fourier inverse :

$$v'_j(\mathbf{r}) = \iiint v'_{\mathbf{k},j} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}. \quad (12.99b)$$

Calculons maintenant l'énergie cinétique de l'écoulement en fonction des composantes $v'_{\mathbf{k},j}$ à partir de l'équation (12.99b). L'énergie par unité de masse vérifie (en sommant sur l'indice j et sur le volume $\mathcal{V}$ correspondant à l'unité de masse du fluide) :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\overline{v_j'^2}}{2} d^3\mathbf{r} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\overline{|v'_{\mathbf{k},j}|^2}}{2} d^3\mathbf{k} \quad (12.100)$$

$(|v'_{\mathbf{k},j}|^2)/2$ représente donc l'énergie par unité de masse associée aux composantes de *vecteur d'onde* voisin de $\mathbf{k}$, situées dans un volume $d^3\mathbf{k}$ de l'espace spectral. Dans un écoulement turbulent homogène et isotrope, cette énergie ne dépend que du module $|\mathbf{k}|$ et non de l'orientation de $\mathbf{k}$. On définit alors une densité spectrale d'énergie $E(k)$: $E(k) dk$ est l'énergie associée aux composantes dont le *module du vecteur d'onde* est compris entre k et $k + dk$. Comme le volume correspondant dans l'espace spectral est $4\pi k^2 dk$, on obtient alors (en sommant également sur j) :

$$E(k) = 2\pi \rho k^2 \overline{|v'_{\mathbf{k},j}|^2}. \quad (12.101)$$

Remarque. On peut calculer, d'une manière mathématiquement similaire, la dissipation d'énergie par viscosité donnée par l'équation (5.26). Toujours pour une turbulence homogène et isotrope, cette dissipation vérifie, toujours dans le volume $\mathcal{V}$ de l'unité de masse de fluide :

$$\iiint_{\mathcal{V}} 2\nu e_{ij}^2 dV = 2\nu \int k^2 E(k) dk. \quad (12.102)$$

Comme précédemment, seul le module k du vecteur d'onde intervient. Le facteur k^2 résulte du calcul des transformées de Fourier des dérivées spatiales de la vitesse intervenant dans e_{ij}^2 , qui fait apparaître les différentes composantes de $\mathbf{k}$ comme coefficients multiplicatifs.

Un problème important avec la décomposition de Fourier est que les fonctions sinusoïdales ont une étendue spatiale infinie, alors que les structures turbulentes ont une taille finie. On doit donc considérer plutôt les tourbillons de différentes tailles comme des paquets d'onde, correspondant à un intervalle Δk de valeurs de k centrées autour de zéro ; plus précisément, la taille ξ du tourbillon est de l'ordre de $2\pi/\Delta k$. Tout comme dans le principe d'incertitude de Heisenberg, on ne peut pas localiser parfaitement les fluctuations turbulentes à la fois dans l'espace réel et dans celui des vecteurs d'onde : plus Δk est grand, plus leur étendue spatiale sera faible.

D'autres techniques plus élaborées, telles que la *transformée en ondelettes*, ont donc aussi été mises en œuvre. Les ondelettes, au contraire des sinusoïdes, ne sont non nulles que dans un domaine de taille finie qui correspond à la taille caractéristique des fluctuations turbulentes qu'elles représentent.

Décomposition spectrale à partir de variations temporelles

Les techniques de PIV décrites à la section 3.5.4 déterminent le champ de vitesse instantané dans un plan de mesure et semblent ainsi permettre les décompositions en composantes de Fourier que nous venons de discuter (au moins pour deux des composantes de la vitesse). Cependant, les cartes de vitesse expérimentales ne comptent guère plus qu'une centaine de points dans chaque direction : la gamme d'échelles de longueur couvertes par ces cartes

sera donc réduite puisqu'elle s'étend uniquement de l'intervalle entre points à la taille de la carte. À grand nombre de Reynolds, on ne pourra donc pas couvrir toute la gamme d'échelles de longueur nécessaire pour bien décrire l'écoulement; celle-la devrait, en effet, aller de sa taille totale jusqu'à des échelles inférieures à la longueur de Kolmogorov η . On ne pourra donc pas vérifier précisément des lois d'échelle comme les équations (12.92).

D'autres techniques permettent cependant de déterminer $E(k)$ dans de tels cas. On utilise souvent simplement une sonde fixe mesurant une ou plusieurs composantes de la vitesse et l'on enregistre sa réponse en fonction du temps. Pour que cette mesure donne des informations sur la variation spatiale de la vitesse en un instant donné, il faut que les tourbillons traversent la sonde en un temps inférieur à leur temps caractéristique d'évolution : cela suppose une vitesse moyenne de l'écoulement élevée (en particulier devant celle des fluctuations de vitesse). Cette hypothèse est celle de *turbulence gelée* de Taylor.

L'application de la transformée de Fourier aux variations temporelles fournit des composantes spectrales $v'_{\omega,j}$ fonctions de la pulsation ω . Dans le cadre de l'hypothèse de turbulence gelée, on considère que $v'_{\omega,j}$ coïncide avec la composante spectrale spatiale $v'_{k_1,j}$ où k_1 est la composante de vecteur d'onde parallèle à la vitesse $\bar{\mathbf{v}}$ de l'écoulement moyen et reliée à son module par $k_1 = \bar{v}/\omega$. En utilisant des sondes ayant une bonne réponse en fréquence telles que les sondes à fil chaud (section 3.5.3), on mesure des variations temporelles très rapides et l'on peut analyser des tourbillons sur une très large gamme d'échelles de tailles caractéristiques.

Remarque. Il n'est pas possible de cette manière de mesurer les composantes $v'_{k_1,j}$ pour toutes les composantes du vecteur d'onde $\mathbf{k}$, mais seulement pour la composante k_1 parallèle à l'écoulement moyen $\mathbf{U}$. De plus, on ne mesure pas, en général, les trois composantes de la vitesse, mais plutôt une ou deux en pratique. On ne pourra donc pas, dans la plupart des cas, déterminer la somme $(|v'_{\mathbf{k},j}|^2)/2$ pour toutes les composantes de $\mathbf{k}$ et tous les indices j mais seulement des grandeurs comme :

$$E_1(k_1) = \frac{\overline{|v'_{k_1,1}|^2}}{2}. \quad (12.103)$$

Il est possible cependant de montrer, que, sous réserve que l'isotropie des fluctuations turbulentes soit vérifiée, $E_1(k_1)$ et $E(k)$ sont reliés par l'expression :

$$E(k) = 2k_1^3 \frac{d}{dk_1} \left(\frac{1}{k_1} \frac{dE_1}{dk_1} \right). \quad (12.104)$$

On peut alors déterminer $E(k)$ en fonction de $E_1(k_1)$. En particulier si, comme nous le verrons plus loin, $E(k)$ varie avec k suivant une loi de puissance, $E_1(k_1)$ suit également une loi de puissance avec le même exposant et approximativement dans la même gamme de valeurs de vecteurs d'onde que $E(k)$.

Quelques expériences ont été réalisées aussi en déplaçant rapidement un détecteur à l'intérieur de l'écoulement et en mesurant la variation, en fonction du temps, de la vitesse du fluide environnant (pratiquement, on attache, par

exemple, la sonde à un avion ou à un bateau). Le passage des variations temporelles aux variations spatiales s'opère en remplaçant la composante de vecteur d'onde k_1 parallèle au mouvement par ω/U (où U est la vitesse de la sonde et ω la pulsation). Si la distribution des fluctuations turbulentes est isotrope, on déduit alors $E(k)$ des fluctuations temporelles des composantes de vitesse parallèles et normales au déplacement de la sonde par l'équation (12.104). Comme une sonde fixe, il faut que le temps mis par la sonde pour traverser une structure turbulente soit inférieur au temps d'évolution de cette dernière (de nouveau, cela reflète l'hypothèse de *turbulence gelée*).

Lois de similitude de Kolmogorov dans l'espace des vecteurs d'onde

Nous allons écrire maintenant des lois de similitude exprimant, dans l'espace des vecteurs d'onde $\mathbf{k}$, le processus de *cascade d'énergie* discuté à la section 12.6.1 dans l'espace réel. Comme nous l'avons vu plus haut, on peut considérer les tourbillons comme des paquets d'ondes pour lesquels la distribution des valeurs du vecteur d'onde k est centrée sur zéro et a une largeur $\Delta k \approx 2\pi/\xi$. Les vecteurs d'onde intervenant dans la description de tourbillons de taille ξ sont donc de l'ordre de $1/\xi$ et sont d'autant plus grands que les tourbillons sont petits. Nous allons établir maintenant, à l'aide d'arguments dimensionnels, deux lois de similitude proposées par Kolmogorov. La première sera valable pour des tourbillons assez petits (et donc des vecteurs d'onde assez grands) pour que l'effet de la structure globale de l'écoulement moyen ne soit pas sensible ; le domaine de validité de cette loi inclura les plus petits tourbillons pour lesquels la viscosité n'est pas négligeable. La seconde loi de Kolmogorov, plus précise, ne s'applique que dans le *sous-domaine inertiel* où ni la viscosité, ni l'écoulement moyen ne jouent de rôle.

Première loi de similitude de Kolmogorov

Supposons tout d'abord qu'on s'intéresse aux tourbillons de taille $\xi \approx 1/k \ll \ell$. Dans ce cas, la densité d'énergie $E(k)$ par unité de masse dont la dimension est $L^3 T^{-2}$ doit dépendre seulement des variables k , ν et ε , de dimensions respectives : L^{-1} , $L^2 T^{-1}$ et $L^2 T^{-3}$, et pas de ℓ . La *longueur de Kolmogorov* $\eta = \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$ est alors la seule échelle de longueur caractéristique du problème (rappelons que c'est la taille des tourbillons pour lesquels la dissipation d'énergie par viscosité est de l'ordre de grandeur du taux de transfert d'énergie ε par l'écoulement moyen).

La *première loi de similitude de Kolmogorov* suppose alors que, toujours si $k\ell \gg 1$, le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ intervient uniquement par l'intermédiaire d'une fonction f de la combinaison sans dimension $k\eta$. On doit mettre devant f un préfacteur du type $\varepsilon^\alpha \nu^\beta$ et on doit avoir $\alpha = 1/4$ et $\beta = 5/4$ pour que le produit ait la dimension de $E(k)$. On obtient alors

$$E(k) = \nu^{5/4} \varepsilon^{1/4} f(k\eta). \quad (12.105)$$

En raison de la dissipation visqueuse qui fait perdre leur énergie aux tourbillons de taille inférieure à η , on peut prévoir (et l'on vérifie expérimentalement) que la fonction $E(k)$ décroîtra plus rapidement pour $k \gg 1/\eta$ qu'aux valeurs plus faibles du vecteur d'onde.

Deuxième loi de similitude de Kolmogorov : sous-domaine inertiel

Analysons maintenant le cas des tourbillons de taille $\xi \gg \eta$. Au contraire du cas précédent, la viscosité n'intervient pas dans la dissipation de leur énergie. La densité d'énergie $E(k)$ doit être alors seulement fonction de k , ℓ et ε . En procédant comme précédemment, on trouve :

$$E(k) = \varepsilon^{2/3} \ell^{5/3} g(k\ell)$$

pour

$$k \ll 1/\eta. \quad (12.106)$$

Il faut cependant que k soit un peu supérieur à $1/\ell$ afin que les échelles considérées ne soient pas trop influencées par la structure à grande échelle de l'écoulement.

Si ℓ est très largement supérieur à η , il existe un domaine de valeurs de k pour lesquelles les conditions $k\ell \gg 1$ de la première loi de Kolmogorov et $k\eta \ll 1$ de l'équation (12.106) sont simultanément vérifiées. C'est le *sous-domaine inertiel*.

Dans ce domaine, $E(k)$ doit être indépendant de ℓ dans l'équation (12.106), ce qui impose d'avoir $g(k\ell) \propto (k\ell)^{-5/3}$. D'autre part, $E(k)$ doit être également indépendant de ν dans l'équation (12.105); en remplaçant η par son expression (12.94), on trouve que cela implique que $f(k\eta) \propto (k\eta)^{-5/3}$. Les deux conditions conduisent à la même expression de $E(k)$:

$$E(k) = K_0 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (12.107)$$

On trouve effectivement expérimentalement que K_0 , appelée *constante de Kolmogorov*, est de l'ordre de 1,45, et qu'elle est indépendante de ℓ et de la viscosité ν . L'équation (12.107) confirme que, comme nous l'avons vu plus haut, l'énergie est surtout concentrée dans les grands tourbillons et décroît avec la taille de ces derniers.

La relation (12.107) est extrêmement importante : elle représente la fameuse *loi de Kolmogorov en $k^{-5/3}$* que l'on verra très bien vérifiée expérimentalement sur la figure 12.17. Comme nous l'avons dit plus haut, cette équation n'est valable que dans la gamme de vecteurs d'onde qui correspond au sous-domaine inertiel, c'est-à-dire à des tourbillons assez grands pour que la viscosité soit négligeable, mais petits par rapport aux échelles de taille de l'écoulement moyen où s'opère l'injection d'énergie. Cette condition se traduit par la relation $\ell \ll k \ll \eta$: cela implique $\ell \gg \eta$ (en pratique $\ell > 10^3 \eta$, ou

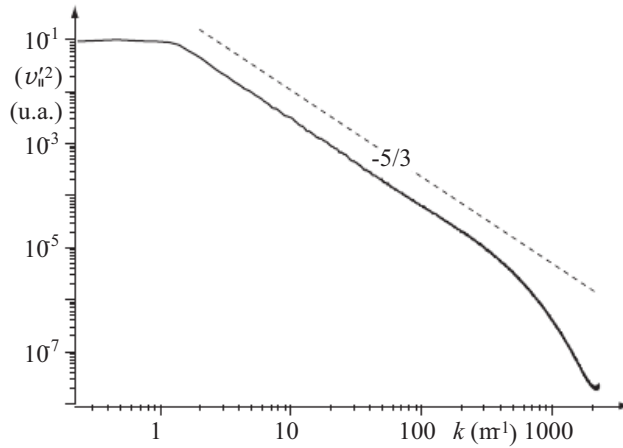


FIG. 12.17 – Spectre spatial, en unités arbitraires, des fluctuations turbulentes de la composante longitudinale $v'_||$ de vitesse, mesurées dans la soufflerie ONERA S1 de Modane-Avrieux en fonction du vecteur d'onde k . La droite pointillée correspond à une variation en $k^{-5/3}$. Paramètres expérimentaux : vitesse moyenne $\bar{v}_|| = 20,6 \text{ m.s}^{-1}$, $\sqrt{v'^2_{||}} = 1,66 \text{ m.s}^{-1}$, diamètre de la section expérimentale $D = 24 \text{ m}$, longueur de Kolmogorov $\eta = 0,31 \text{ mm}$ ($k_\eta = 1/\eta = 3,2 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$). Le spectre a été calculé en fonction du vecteur d'onde k à partir des fluctuations temporelles de la vitesse en tenant compte des variations de la vitesse locale d'écoulement $\bar{v}_|| + v'_||$ (d'après Y. Gagne et Y. Malécot).

$10^4\eta$). En utilisant l'équation (12.94), cette inégalité devient :

$$\left(\frac{v'_\ell \ell}{\nu} \right)^{3/4} = Re_\ell^{3/4} \gg 1 \tag{12.108}$$

où Re_ℓ est le nombre de Reynolds associé aux échelles de vitesse et de taille des grands tourbillons. Celles-la sont, en général inférieures d'ailleurs notablement aux échelles de longueur et de taille globales de l'écoulement (par exemple, pour une turbulence induite par une grille). Le nombre Re_ℓ sera donc généralement inférieur au nombre de Reynolds global de l'écoulement supérieur : cela rend d'autant plus difficile de satisfaire expérimentalement la condition (12.108).

Remarque. La relation (12.107) est équivalente à celle que nous avons établie pour l'énergie E_ξ des tourbillons de taille de l'ordre de ξ . En considérant que la taille ξ des tourbillons correspondant à des fluctuations turbulentes de vecteurs d'onde de module k est de l'ordre de $1/k$, l'équation (12.96) devient $E_{\xi=1/k} \propto \varepsilon^{2/3} k^{-2/3}$. Dans la mesure où on raisonne sur la taille des tourbillons en termes d'échelle logarithmique (par exemple échange d'énergie entre des tourbillons et d'autres de taille double ou moitié), on peut considérer que $E_{\xi=1/k}$ représente dans l'espace des vecteurs d'onde l'intégrale de $E(k)$ sur un intervalle $\Delta k \approx k$. On obtient alors, à partir

de (12.107), l'estimation $E_{\xi=1/k} \propto (\varepsilon^{2/3} k^{-5/3})k$ qui coïncide bien avec celle déduite de l'équation (12.96).

12.6.3 Vérification expérimentale de la théorie de Kolmogorov

Vérification de la loi en $k^{-5/3}$

Elle peut être effectuée tout d'abord sur des écoulements naturels. Dans l'atmosphère, on atteint aisément un nombre de Reynolds $Re \approx 10^7$, avec $\ell = 100$ m, $v'_\ell = 1$ m.s⁻¹, $\nu \approx 10^5$ m².s⁻¹. Des mesures effectuées sur des tours météorologiques, ou à partir d'une sonde traînée par un avion dans l'atmosphère, permettent de vérifier la dépendance en $k^{-5/3}$ de $E(k)$ sur près de trois ordres de grandeur de k (tourbillons de taille variant entre quelques centimètres et cent mètres) et de vérifier l'isotropie de la turbulence établie. La loi est vérifiée également sur des écoulements océaniques (chenaux parcourus par des marées), où les nombres de Reynolds globaux atteignent 3×10^8 . Enfin, des expériences réalisées dans la grande soufflerie de Modane ont permis de mettre en évidence, d'une manière très contrôlée, des lois de ce type sur une gamme importante de vecteurs d'onde, là encore, un peu moins de trois ordres de grandeur (Fig. 12.17). On voit apparaître très nettement un effet de coupure aux vecteurs d'onde élevés, mais aussi pour les plus grands tourbillons à faible vecteur d'onde.

Vérification de la première loi de Kolmogorov

Elle peut être effectuée en laboratoire, à l'aide d'anémomètres à fil chaud qui donnent une mesure très localisée. Expérimentalement, on vérifie que, si $k\ell \gg 1$, le rapport $(E(k)/(\varepsilon^{1/4}\nu^{5/4}))$ est une fonction universelle de $k\eta$. En laboratoire, il est rare de pouvoir observer le *sous-domaine inertiel* ; cela est possible, en revanche, dans l'atmosphère, l'océan ou les grandes souffleries (Fig. 12.17). Le paramètre ε peut être déterminé indirectement car il est égal à l'énergie totale dissipée par les plus petits tourbillons. On vérifie que, pour des nombres de Reynolds et des méthodes de production d'écoulements très diverses, les mesures suivent correctement une loi universelle pour $k\ell \gg 1$.

12.7 Autres aspects de la turbulence

Jusqu'à présent, nous nous sommes limités à caractériser la turbulence par l'existence d'écoulements imprévisibles, avec de fortes non-linéarités et un transport convectif important (ce dernier est à l'origine de la grande efficacité du mélange turbulent). Nous sommes, cependant, loin d'avoir exploré toutes les manifestations possibles de turbulence, qui sortent souvent du cadre de cette description. Nous présentons brièvement ici quelques-unes de ces situations, en utilisant ce que nous avons pu apprendre au long de cet ouvrage

et en renvoyant le lecteur à des ouvrages plus spécialisés pour une analyse détaillée.

12.7.1 Intermittence de la turbulence

La théorie de Kolmogorov donne une bonne vision globale de la turbulence isotrope et reste une référence incontournable pour une première approche de la turbulence homogène. Néanmoins, les grands tourbillons ne sont jamais en équilibre statistique dans les expériences réelles. Comme ce sont eux qui déterminent l'amplitude des échanges d'énergie, cela implique qu'il y aura des variations temporelles de la valeur de ε : les mesures expérimentales montrent en effet, des variations considérables de la dissipation d'énergie ε avec le temps et d'un point à un autre. Physiquement, ces fluctuations peuvent être reliées au défilement de structures turbulentes que l'on observe facilement à la surface d'une rivière. Les *bouffées turbulentes* sont reliées étroitement au concept d'*intermittence*. L'importance des fluctuations de ε oblige à en tenir compte dans l'expression des moments d'ordre supérieur de la vitesse où la théorie de Kolmogorov est en défaut ; il faut alors tenir compte non seulement de la valeur moyenne, mais aussi des moments plus élevés de la distribution de ε .

12.7.2 Structures cohérentes turbulentes

Nous avons vu à plusieurs occasions que la turbulence n'était pas incompatible avec l'existence de grandes structures remarquablement stables : les *structures cohérentes*. La tache rouge dans l'atmosphère de Jupiter en est un remarquable exemple à un nombre de Reynolds très élevé.

Le nombre de Reynolds de cette structure peut être estimé en supposant la vitesse de l'ordre de 100 m.s^{-1} , la viscosité cinématique de l'hydrogène de l'ordre de $10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ et en prenant la hauteur de l'atmosphère égale à 100 km : on obtient alors $Re \approx 10^{12}$.

Au chapitre 2, nous avons montré l'apparition de tourbillons de sens de circulation alterné, l'allée de Bénard-von Kármán, derrière un obstacle cylindrique dans un écoulement (Figs. 2.9) : ces allées de tourbillons sont observables également à des très hauts nombres de Reynolds (Fig. 2.10 CC).

On rencontre des structures similaires à la frontière entre deux écoulements plans parallèles de vitesses différentes. Nous avons étudié, à la section 11.4.1, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz d'écoulements parallèles de vitesses différentes. Cette instabilité fait apparaître une rangée périodique de tourbillons d'axes perpendiculaires à l'écoulement (Figs. 11.16 CC) et qui ont tous le même sens de circulation, contrairement à l'allée de tourbillons de Bénard-von Kármán. Si, au lieu d'avoir un écoulement entre parois, les écoulements parallèles sont non confinés, la taille des tourbillons augmente à peu près linéairement avec la distance au point de rencontre des jets. On parle également d'instabilités de *couche de mélange*, puisque de telles structures assurent un brassage entre les deux fluides.

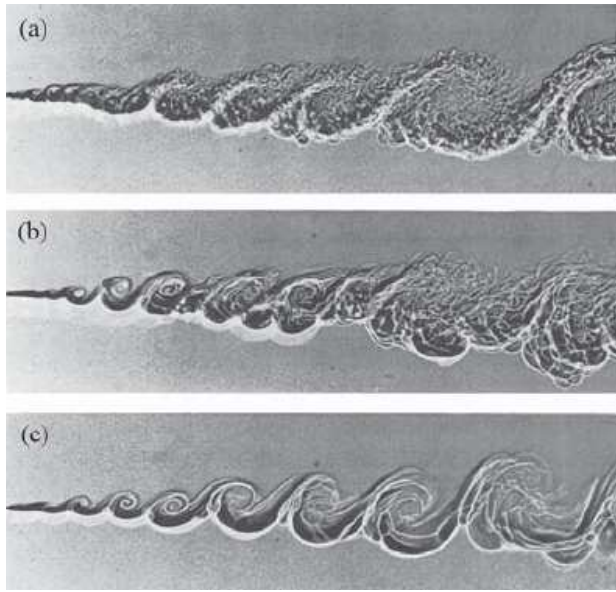


FIG. 12.18 – Structures tourbillonnaires cohérentes dans une couche de mélange entre deux gaz de densités différentes (hélium en écoulement plus rapide au-dessus, azote plus lent en dessous) à des nombres de Reynolds différents. (a) Re_a ; (b) $Re_b = Re_a/2$; (c) $Re_c = Re_a/4$ (d’après G.L. Brown et A. Roshko, 1974).

Le physicien américain A. Roskho montra expérimentalement que ces grandes structures tourbillonnaires à deux dimensions subsistaient presque à l’identique à tous les nombres de Reynolds, aussi élevés soient-ils. On observe ces grandes structures sur les trois images de la figure 12.18 à différents nombres de Reynolds. En revanche, les structures plus fines, qui correspondent aux tourbillons de plus petite taille, sont plus visibles pour la valeur de Re la plus élevée (Fig. 12.18a).

Malgré la présence de tourbillons plus petits, ce sont les grandes structures qui contrôlent (par exemple) le mélange : celui-ci a des caractéristiques très différentes dans les zones d’enroulement des structures (ressemblant à un gâteau roulé) et dans celles d’étirement qui sont présentes de façon concomitante. Cela est particulièrement important si l’on s’intéresse à deux fluides réagissant entre eux comme, par exemple, dans un brûleur à gaz (section 10.9).

Si elle laisse les grandes structures cohérentes inchangées, l’augmentation du nombre de Reynolds s’accompagne de l’apparition de petites structures tridimensionnelles à l’intérieur des grandes : les rouleaux bidimensionnels sont distordus, puis étirés dans le sens de l’écoulement avant de donner naissance à des tourbillons plus petits. Ce dernier résultat est bien, lui, conforme à la théorie de Kolmogorov qui prédit la décroissance de l’échelle des structures dissipatives avec l’augmentation du nombre de Reynolds. On peut donc observer un régime intermédiaire inertiel, à des échelles de taille inférieures à celles des grandes structures.

12.7.3 Dynamique des tourbillons en turbulence bidimensionnelle

Une autre caractéristique spectaculaire des couches de mélange non confinées, telles que celles de la figure 12.18, est l'évolution des tourbillons au cours de leur déplacement. Leur vitesse est intermédiaire entre celles des deux écoulements, soit $1/2(U_1 + U_2)$, comme nous l'avons vu aux sections 7.4.2 et 11.4.1. Les tourbillons tendent à se regrouper par paires de même sens de circulation en s'éloignant de leur point de création ; ils finissent par se chevaucher, puis par fusionner pour donner naissance à un troisième, plus gros que les deux premiers.

Comme ce résultat concerne les grandes structures qui sont essentiellement bidimensionnelles, il peut être considéré comme une caractéristique de la turbulence à deux dimensions. De fait, on retrouve le processus d'accrétion de tourbillons que nous venons juste de décrire dans des simulations numériques de turbulence 2D, comme celles de la figure 12.19 CC : les structures observées (visualisées par la distribution de la vorticité) grossissent par coalescence de tourbillons de même sens de circulation, comme dans le cas de la couche de mélange que nous venons d'évoquer. Dans le même temps, ces structures s'atténuent par l'effet de la viscosité car on n'a pas de nouvel apport d'énergie après la création des tourbillons. On observe aussi des résultats similaires dans des écoulements bidimensionnels modèles, comme ceux des films de savon.

Globalement, les écoulements turbulents bidimensionnels diffèrent fortement de ceux à trois dimensions. Pour ces derniers, le mécanisme essentiel d'évolution de la turbulence est l'étirement de la vorticité par les gradients de vitesse parallèles à son axe (section 7.3.2). Ce mécanisme est naturellement absent dans les écoulements à deux dimensions, puisque les gradients de vitesse sont alors perpendiculaires à l'axe de la vorticité. On parle de *cascade inverse* pour décrire le transfert de la turbulence vers des grandes structures ; celle-là s'oppose à la cascade de Kolmogorov *directe*, que nous avons étudiée plus haut pour les écoulements tridimensionnels.

Un exemple particulièrement important de turbulence presque bidimensionnelle est celui de la turbulence océanique, ou atmosphérique, à grande échelle. En effet, nous avons vu à la section 7.6.2 que la force de Coriolis découple les mouvements perpendiculaires à l'axe de rotation de ceux qui sont parallèles à ce dernier. De plus, l'amplitude des mouvements verticaux perpendiculaires à la surface est limitée par la stratification thermique et l'épaisseur de l'atmosphère. Ces effets influenceront très fortement le mélange turbulent à grande échelle dans l'atmosphère et les océans.

Expérimentalement, on observe bien des phénomènes de coalescence de tourbillons dans la turbulence créée dans des écoulements en rotation, comme on peut le voir sur la figure 12.20 CC. Dans ce cas (et comme dans l'atmosphère terrestre), la vorticité cyclonique (de même sens que celle de la rotation imposée) est privilégiée : ces expériences de laboratoire aideront à comprendre ces résultats importants pour la météorologie.

This page intentionally left blank

Références bibliographiques

Nous donnerons tout d'abord une liste d'ouvrages généraux en français et en anglais et des sources de documents photographiques et multimédia. Ensuite nous indiquerons, chapitre par chapitre, des ouvrages plus spécialisés et des articles scientifiques reliés à des parties spécifiques du texte.

Ouvrages généraux en français

S. Candel (2001). *Mécanique des fluides*, Dunod, Paris, collection Sciences sup.

P. Chassaing (1997). *Mécanique des fluides, éléments d'un premier parcours*, 2^e édition, Cépaduès, Toulouse.

Ces deux ouvrages abordent des problèmes d'écoulements compressibles ainsi que, pour le second, des calculs de profils de vitesse dans les couches limites et d'échanges thermiques, non traités dans le présent ouvrage.

M. Fermigier (1999). *Hydrodynamique physique. Problèmes résolus avec rappels de cours*, collection Sciences sup, Dunod, Paris.

Livre de problèmes corrigés très largement commentés. Il constitue un excellent complément du présent ouvrage. Il a été réalisé dans le même esprit que celui-ci par un membre de l'équipe enseignante de l'ESPCI.

R.P. Feynman, R. Leighton et M. Sands (1999). *Le Cours de physique de Feynman, Électromagnétisme 2*, collection « les cours de référence », Dunod, Paris.

Les deux chapitres « L'écoulement de l'eau sèche » et « L'écoulement de l'eau mouillée » constituent une initiation particulièrement simple et profonde à la mécanique des fluides.

L. Landau et E.M. Lifchitz (1998). *Physique théorique : Mécanique des Fluides*, Ellipses.

Les chapitres I, II, IV constituent une introduction théorique classique très dense de l'hydrodynamique avec un point de vue thermodynamique.

J. Martin et D. Salin (1997). *La Mécanique des Fluides*, Nathan Université, coll. Sciences 128.

Ouvrage d'initiation en format de poche donnant les éléments de base nécessaires à la compréhension de la mécanique des fluides.

Ouvrages généraux en langue anglaise

G.K. Batchelor (2000). *Introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press.

Ouvrage de référence historique sur le sujet. On n'y trouvera cependant pas le traitement des instabilités ni celui de la turbulence.

P.K. Kundu, I.M. Cohen et D.R. Dowling (2011). *Fluid Mechanics*, 5^e édition révisée, Academic Press.

Cet excellent livre très complet et de présentation moderne donne en particulier une place importante aux écoulements naturels et à la turbulence.

D.J. Tritton (1988). *Physical fluid Dynamics*, seconde édition, Oxford University Press.

Contient des descriptions physiques très claires des propriétés des écoulements.

Ouvrages sur l'histoire de la mécanique des fluides

M. Blay (2007). *La science du mouvement des eaux, de Torricelli à Lagrange*, Belin Sup histoire des sciences.

L'histoire de la mécanique des fluides parfaits.

O. Darrigol (2008). *Worlds of Flow: A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press.

Traité d'histoire de la mécanique des fluides où les découvertes scientifiques sont largement décrites

Documents photographiques et multimédia

MMFM - Multimedia Fluid Mechanics (2000), Cambridge University Press, 2000.

Ce CDROM réalisé par une équipe d'universitaires animée par G.M. Homsy donne une présentation interactive de la mécanique des fluides à l'aide de documents photos et vidéo et de simulations sur ordinateur. L'esprit de ce document multimédia est très proche de celui du présent ouvrage.

National Committee for Fluid Mechanics Films (NCFMF)

*Ce comité animé par A.H. Shapiro a produit dans les années 60 une série de films remarquables qui recouvrent presque tous les sujets traités dans le présent ouvrage. Ces films (en anglais) sont actuellement distribués sous forme de DVD par Encyclopedia Britannica mais peuvent être aussi actuellement (2012) visionnés librement sur le site du Massachusetts Institute of Technology (<http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>). On peut également télécharger sur le site une série de notes sur ces films. Ces notes représentent en elles-mêmes une introduction vivante à la mécanique des fluides et sont regroupées dans l'ouvrage « *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics* » (IEFM), MIT Press, 1973. Nous mentionnons pour chaque chapitre le titre du ou des films correspondants ainsi que la page correspondante de l'ouvrage IEFM.*

- E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit (2005).** *Ce que disent les fluides ; la science des écoulements en images*, 2^e édition, collection Bibliothèque scientifique, Belin.

Ouvrage dont les photos et leurs commentaires constituent une introduction qualitative de la mécanique des fluides

- M. Samimy, K.S. Breuer, L.G. Leal et P.H. Steen (2004).** *A Gallery of Fluid Motion*, Cambridge University Press.

Cet ouvrage regroupe des photos d'expériences de mécanique des fluides primées à l'issue des conférences annuelles de la division « Dynamique des fluides » de l'American Physical Society.

- M. Van Dyke (1982).** *An Album of Fluid Motion* (A.F.M.), 10th edition, Parabolic Press, Stanford.

Cet album de photos d'écoulements commentées est un complément très utile de la lecture de ce livre. Les phénomènes présentés sont généralement décrits dans le présent livre qui utilise d'ailleurs une petite partie de ces documents.

On trouve sur la toile un grand nombre de sites présentant des images et vidéos de mécanique des fluides : mentionnons en particulier le site www.efluids.com.

Références par chapitre**CHAPITRE 1**

- F. Reif (2000).** *Physique statistique*, chapitre 8, A. Colin.

- E. Guyon, A. Pedregosa et B. Salviat (2010).** *Matière et matériaux : De quoi est fait le monde ?* Belin, Bibliothèque Scientifique.

W.A. Adamson et A.P. Gast (1997). *Physical chemistry of surfaces*, John Wiley.

R.B. Bird, W.E. Stewart et E.N. Lightfoot (2006). *Transport phenomena*, John Wiley, revised 2nd edition.

P.A. Egelstaff (1994). *An Introduction to the Liquid state*, Oxford Press, 2nd edition.

Livre de référence sur la structure et la dynamique des liquides.

Film NCFMF: *Surface tension in fluid mechanics*, L. Trefethen (IEFM, p. 26).

Articles spécialisés

Piotr Pieranski (1984). *An experimental model of a classical manybody system*, Am. J. Phys. **52**, 68-73.

CHAPITRE 2

Articles spécialisés

J. Koplik, J. Banavar et J.-F. Willemsen (1988). *Molecular dynamics of Poiseuille flow and moving contact lines*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1282-5.

C. Mathis, M. Provansal et L. Boyer (1984). *The Bénard-von Karman instability: an experimental study near the threshold*, J. Phys. Lett. **45**, L483-91.

J. Miedzik, K. Gumowski, S. Goujon-Durand, P. Jenffer et J.E. Wesfreid (2008). *Wake behind a sphere in early transitional regimes*, Physical Review **E 77**, 055308 (2008)

O. Reynolds (1883). *An experimental investigation on the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and the law of resistance in a parallel channel*, Phil. Trans. Roy. Soc. **174**, 935-82.

N. Rott (1990). *Note on the history of the Reynolds number*, Annual Review of fluid mechanics **22**, 1-12.

CHAPITRE 3

W. Merzkirch (1987). *Flow visualization*, Academic Press, 2nd edition.

Films NCFMF : *Deformation of continuous media*, J . L. Lumley (IEFM, p. 11).

Flow visualisation, S.J. Kline (IEFM, p. 34).

Articles spécialisés

- R.J. Adrian** (1991). *Particle imaging techniques for experimental fluid mechanics*, Ann. Rev. Fluid - Mech. 23.
- I.K. Bartol, K.S. Kruger, W.J. Stewart et J.T. Thomson** (2009). *Hydrodynamics of pulsed jetting in juvenile and adult brief squid Lolliguncula brevis: evidence of multiple jet 'modes' and their implications for propulsive efficiency*, J. Exp. Biol. **212**, 1889-1903.
- E. Guyon** (2011). *L'image en mécanique des fluides* dans « A propos de la science : autour de la matière (tome 1) » de N. El Hagggar et R. Bkouche, éditions L'Harmattan.
- L. Petit et P. Gondret** (1992). *Redressement d'un écoulement alternatif*, J. Phys. II France, **2**, 2115-2144.
- C. Pirat, A. Naso, E.J. van der Wouden, J.G.E. Gardeniers, D. Lohse et A. van den Berg** (2008). *Quantification of electrical field-induced flow reversal in a microchannel*, Lab Chip **8**, 945-949.
- J. Westerweel, C. Fukushima, J.M. Pedersen et J.C.R. Hunt** (2005). *Mechanics of the turbulent/non-turbulent interface of a jet*, Phys. Rev. Lett. **95**, 174501.

CHAPITRE 4

- P. Coussot** (2012). *Rhéophysique ; la matière dans tous ses états*, EDP Sciences.
- P. Coussot et J.-L. Grossiord** (2002). *Comprendre la rhéologie*, EDP Sciences.
- P. Oswald** (2005). *Rhéophysique ou comment coule la matière*, coll. Echelles, Belin.
- H.A. Barnes, J.F. Hutton et K. Walters** (1989). *An introduction to rheology*, Elsevier.
- Film NCFMF**: *Rheological behavior of fluids*, H. Markovitz, (IEFM, P 18).

Articles spécialisés

- C. Allain, M. Cloitre et P. Perrot** (1997). *Experimental investigation and scaling law analysis of die swell in semi-dilute polymer solutions*, Journal of non-Newtonian fluid mechanics, **73**, 51-66.
- J.-F. Berret, G. Porte et J.-P. Decruppe** (1997). *Inhomogeneous shear flow of wormlike micelles: a master dynamic phase diagram*, Phys. Rev. E **55**, 1668-1676.

E. Charlaix, A.P. Kushnick et J.-P. Stokes (1988). *Experimental study of the dynamic permeability of porous media*, Phys. Rev. Lett. **61**, 1595-1598.

C. Cottin-Bizonne, B. Cross, A. Steinberger et E. Charlaix (2005). *Boundary slip on smooth hydrophobic surfaces: Intrinsic effects and possible artifacts*, Phys. Rev. Lett. **94**, (2005).

M. Reiner (1964). *The Deborah Number*, Physics Today, Janvier, p. 62.

CHAPITRE 5

S. Middleman (1995). *Modeling axisymmetric flows: dynamics of films, jets and drops*, Academic Press.

Contient de nombreuses descriptions de situations d'écoulements simples tels que le ressaut décrit dans le chapitre.

Film NCFMF: *Pressure fields and fluid acceleration*, A.H. Shapiro (IEFM, p. 39).

CHAPITRE 6

J.-D. Darrozes et C. François (1982). *Mécanique des fluides incompressibles*, Springer Verlag.

I.L. Rhyming (2004). *Dynamique des fluides*, chapitre 5, 2^e édition, Presses polytechniques et universitaires romandes.

Excellent ouvrage en français, en particulier sur les fluides parfaits et les écoulements compressibles (ces derniers ne sont pas traités dans le présent ouvrage).

M.J. Lighthill (2001). *Waves in fluids*, 2nd edition, Cambridge University Press.

Film NCFMF: *Waves in fluids*, A.E. Bryson (IEFM, p. 105).

Articles spécialisés

R.M. Davies et G.I. Taylor (1950). *The Mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through Liquids in Tubes*, Proc. R. Soc. Lond. A **200**, 375-390.

CHAPITRE 7

B. Cushman-Roisin (1994). *Introduction to geophysical fluid dynamics*, Prentice Hall.

Ouvrage très clair et complet sur les écoulements en rotation.

R.J. Donnelly (1991). *Quantized Vortices in Helium II*, Cambridge University Press.

H.P. Greenspan (1990). *The Theory of Rotating Fluids*, nouvelle édition révisée, Breukelen Press.

J.R. Holton (2004). *An Introduction to Dynamic Meteorology*, 4^e édition, Academic Press.

P.G. Saffman (1995). *Vortex dynamics*, Cambridge monographs on mechanics, Cambridge University Press.

Film NCFMF: Vorticity, A.H. Shapiro (IEFM, p. 63).

Articles spécialisés

P.-P. Cortet, C. Lamriben et F. Moisy (2010). *Viscous spreading of an inertial wave beam in a rotating fluid*, Phys. Fluids **22**, 086603.

R. Godoy-Diana, J.-L. Aider et J.E. Wesfreid (2008). *Transitions in the wake of a flapping foil*, Phys.Rev. **E 77**, 016308.

E. Guyon, H. Kojima, W. Veith et I. Rudnick (1972). *Persistent current states in rotating superfluid helium*, J. Low Temp. Phys. **9**, 187-193.

G.A. Williams et R.E. Packard (1980). *A technique for photographing vortex positions in rotating superfluid helium*, J. Low Temp. Physics. **39**, 553-577.

CHAPITRE 8

P.G. de Gennes, F. Brochard et Y. Quéré (2005). *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Belin.

Ce traité, de niveau licence et au delà est une présentation très générale et simple de la physique du mouillage et de l'hydrodynamique des écoulements avec des interfaces. Le CD ROM qui l'accompagne contient un grand nombre de petites expériences simples accompagnant le traité.

Articles spécialisés

- A.M. Cazabat et M. Cohen Stuart** (1986). *Dynamics of wetting: Effects of surface roughness*, J. Phys. Chem. **90**, 5845-9.
- M. Fermigier et P. Jenffer** (1991). *An experimental investigation of the dynamic contact angle in liquid-liquid systems*, J. Colloid Interface Sci. **146**, 226-241.
- S. Mora, M. Abkarian, H. Tabuteau et Y. Pomeau** (2011). *Surface instability of soft solids under strain*, Soft Matter **7**, 10612-10619.
- F.T. Trouton** (1906). *On the Coefficient of Viscous Traction and Its Relation to that of Viscosity*, Proc. Roy. Soc. London. A **77**, 426-440.

CHAPITRE 9

- P. Tabeling** (2003). *Introduction à la microfluidique*, collection échelles, Berlin.
- J. Bear** (1989). *Dynamics of Fluids in porous media*, Dover Publications.
- F.A. Dullien** (1992). *Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure*, 2^e éd., Academic Press, San Diego.
- E. Guazzelli et J.F. Morris** (2012). *A physical introduction to suspension dynamics*, Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge University Press.
- J. Happel et H. Brenner** (1983). *Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media*, Springer, 2^e édition.
Ce livre classique et très complet contient la solution de nombreux problèmes d'écoulements de fluides visqueux.
- Film NCFMF**: Low Reynolds number flows, G. 1. Taylor (IEFM, p. 47).

Articles spécialisés

- M. Coutanceau** (1968). *Mouvement uniforme d'une sphère dans l'axe d'un cylindre contenant un liquide visqueux*, Journal de mécanique théorique et appliquée **7**, 49-67.
- A.J. Katz et A.H. Thompson** (1986). *Quantitative prediction of permeability in porous rocks*, Phys. Rev. B **34**, 8179-8181.
- E.M. Purcell** (1977). *Life at low Reynolds number*, Am. J. Phys. **45**, 3-11.

CHAPITRE 10

R. Borghi et M. Champion (2000). *Modélisation et théorie des flammes*, Eds. Technip.

L. Boyer (2006). *Feux et flammes*, Belin, bibliothèque scientifique.

V.G. Levich (1962). *Physicochemical hydrodynamics*, Ed. Prentice-Hall, New-York.

Outre le problème de l'électrode tournante, ce grand livre classique discute de nombreux écoulements où interviennent des phénomènes physicochimiques et interfaciaux.

J. Monder, G. Dippel et H. Gossage (1998). *The Great International Paper Airplane Book*, Galahad books.

H. Schlichtling (2000). *Boundary Layer Theory*, Springer, 8^e édition.

Film NCFMF: Fundamentals of Boundary layers, F.H. Abernathy (IEFM, p. 75).

Articles spécialisés

A. Ambari, C. Deslouis et B. Tribollet (1986). *Frequency response of the mass transfer rate in a modulated flow at electrochemical probes*, Int. J. Heat and Mass Transfer **29**, 35-45.

G. Comte Bellot (1976). *Hot wire anemometry*, Ann. Rev. Fluid Mech. **8**, 209-231.

P. Freymuth, W. Bank et M. Palmer (1984). *Movie sequences of flow patterns visualised by means of smoke in 2-dimensional starting flow around an airfoil*, Physics of Fluids **27**, 1045.

M. Minguez, R. Pasquetti et E. Serre (2008). *High-order Large-Eddy Simulation of flow over the « Ahmed body » car model*. Phy. Fluids **20**, 095101, 1-17.

J. Quinard, G. Searby, B. Denet et J. Graña-Otero (2011) *Self-turbulent flame speed*, Flow, Turbulence and Combustion, DOI 10.1007 /s10494-011-9350-3.

CHAPITRE 11

F. Charru (2007). *Instabilités hydrodynamiques*, collection Savoirs Actuels, EDP Sciences.

P. Manneville (2004). *Instabilités, chaos et turbulence*. Eds. de l'École Polytechnique.

P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal (1984). *L'ordre dans le chaos*, Collection l'enseignement des sciences, Hermann.

Film NCFMF: *Flow Instabilities*, E.L. Mollo-Christensen (IEFM, p. 113).

Articles spécialisés

E. Guyon et P. Pieranski (1974). *Convective instabilities in nematic liquid crystals*, Physica **73**, 184.

M.F. Schatz, S.J. VanHook, W.D. McCormick, J.B. Swift et H.L. Swinney (1995). *Onset of surface-tension-driven Bénard convection*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1938-41.

H. Fellouah, C. Castelain, A. Ould El Moutar et H. Peerhossaini (2006). *A criterion for detection of the onset of Dean instability in Newtonian fluids*, Eur. J. Mech. B/Fluids **25**, 505-531.

S.A. Thorpe (1971). *Experiments on the instability of stratified shear flows: miscible fluids*, J. Fluid Mech. **46**, 299-319.

CHAPITRE 12

G. Comte Bellot et C. Bailly (2003). *Turbulence*, CNRS Éditions, collection sciences et techniques de l'ingénieur.

Traitement de la turbulence complétant et étendant celui du présent ouvrage.

M. Lesieur (2000). *La Turbulence*, Presses universitaires de Grenoble.

Très bon livre de diffusion scientifique.

P.A. Davidson (2004). *Turbulence, an introduction for scientists and engineers*, Oxford University Press.

Très bon ouvrage d'introduction générale sur la physique de la turbulence.

U. Frisch (1996). *Turbulence, the legacy of Kolmogorov*, Cambridge University Press.

Apporte des compléments sur des problèmes d'intermittence et de statistique de la turbulence qui ne sont pas présentés ici.

H. Tennekes et J.-L. Lumley (1972). *A first course in turbulence*, MIT Press.

Ouvrage classique et clair sur la turbulence.

Film NCFMF : *Turbulence*, R.W. Stewart (IEFM, p. 82).

Articles spécialisés

- H.J. Catrakis et P.E. Dimotakis** (1996). *Mixing in turbulent jets: scalar measures and isosurface geometry*, J. Fluid Mech. **317**, 369-406.
- H. Kahalerras, Y. Malécot et Y. Gagne** (1998). *Intermittency and Reynolds number*, Phys. Fluids **10**, 910-921.
- F. Moisy, C. Morize, M. Rabaud et J. Sommeria** (2011). *Decay laws, anisotropy and cyclone-anticyclone asymmetry in decaying rotating turbulence*, J. Fluid Mech. **666**, 5-35.

This page intentionally left blank

Index

A

Accélération d'une particule de fluide, 87, 89
Aérodynamique automobile, 519
Aérodynamique, 516
Agitation thermique, 2, 20, 28, 69
Aharonov-Bohm (effet), 370
Aile, 516, 523
Aire spécifique, 471
Allée simple de tourbillons, 316
Amphiphile (molécules), 32
Analogie électrique, 264
Angle de contact, 42
Angle de contact dynamique, 395
Anneau tourbillon, 393, 436
Autosimilarité (profils de vitesse), 68, 498, 508

B

Barotrope (fluide), 303
Bénard-Marangoni (instabilité de), 115, 407, 587
Bénard-von Karman (allée de), 82, 317, 326
Bernoulli (équation de), 198, 201, 287
Bilan d'énergie cinétique, 198
Bilan de masse, 17, 102
Bilan de quantité de mouvement, 192
Bingham (fluide de), 145, 184
Biot et Savart (loi de), 292
Blasius (écoulement de), 305, 502
Blasius (équation de), 501
Boltzmann (loi de), 28
Bond (nombre de), 36, 590
Bord d'attaque (de fuite), 278, 329
Borda (ajutage de), 213
Boussinesq (approximation de), 579

Boycott (effet), 467
Brillouin (diffusion), 55
Brillouin forcée (diffusion), 56
Brisure de symétrie, 566, 586
Brownienne (diffusion), 20, 463
Burke-Schumann (modèle de), 553, 555

C

Capillaire (longueur), 38, 256
Capillaire (nombre), 397, 484
Casson (fluide de), 145
Cavitation, 203, 287
Chaos lagrangien, 426
Circulation de la vitesse, 229, 286
Cisaillement (taux de), 94
Cisaillement pur (écoulement de), 109, 111
Cisaillement simple (écoulement de), 64, 99, 109, 131, 196
Coanda (effet), 209
Coefficient de frottement, 167, 434, 646, 651
Combustion, 8, 551
Compacité, 2, 470
Conditions aux limites, 14, 136, 138, 227
Conductivité thermique, 10
Contrainte de cisaillement, 64
Contraintes tangentielles, 126
Contraintes (tenseur des), 126, 131
Contraintes normales, 126, 155
Contraintes normales (différences des), 156
Contraintes turbulentes (tenseur des), 615
Contraintes visqueuses (tenseur des), 128

Contrôle actif (passif), 523
 Convectif (transport), 76
 Convection thermique, 532, 574
 Convective (dérivée), 103, 192
 Coordonnées cylindriques, 188
 Coordonnées sphériques, 189
 Coquille Saint-Jacques
 (théorème de la), 441
 Coriolis (forces de), 300, 334
 Corps d'A Ahmed, 520
 Couche de mélange, 597, 667
 Couches limites, 78, 204, 491, 492, 532
 Couches limites de concentration, 538
 Couches limites (décollement des),
 329, 493, 508, 514
 Couches limites d'épaisseur constante,
 512, 543
 Couches limites laminaires, 493
 Couches limites laminaires (stabilité),
 507
 Couches limites massiques, 532
 Couches limites (réattachement des),
 654
 Couches limites thermiques, 532
 Couches limites turbulentes, 507, 648
 Couette cylindrique (écoulement de),
 175, 592
 Couette plan (écoulement de), 64, 99,
 161, 179, 379, 383, 607
 Couette (viscosimètre de), 141, 178
 Courants permanents, 368
 Courbure moyenne, 33
 Cyclone, 285
 Cylindre allongé (écoulement
 rampant), 457
 Cylindre circulaire (écoulement
 potentiel), 237
 Cylindre circulaire infini (écoulement
 rampant), 461
 Cylindre (écoulement derrière un), 80,
 317, 567

D

Damköhler (nombre de), 552
 Darcy (loi de), 473
 De Broglie (formule de), 46
 Dean (Écoulement secondaire de), 360
 Dean (instabilité de), 595

Dean (nombre de), 596
 Deborah (nombre de), 8, 147
 Décollement d'un écoulement, 429
 Décollement des couches limites
 turbulentes, 652
 Décrochage (aile), 329, 516, 517
 Déferlement (vague), 258
 Déficit de vitesse (sillage), 524, 626
 Déflagration, 556
 Déflagration (vitesse de), 560
 Déformation (grande), 92, 100
 Déformation angulaire (vitesse de), 94
 Déformation d'une particule de fluide,
 90
 Déformation (petite), 92
 Détonation, 556
 Déviateur, 96
 Densité (gradient horizontal de), 173
 Dièdre (écoulement autour d'un), 269
 Diffusion (processus de), 19, 74
 Diffusion anormale (processus de), 22
 Diffusion élastique, 49
 Diffusion inélastique, 51
 Diffusion moléculaire, 17, 23
 Diffusivité thermique, 12, 532
 Dilatation volumique, 96, 574
 Dipôle (écoulement en), 235, 269
 Dispersion (ondes), 262
 Dissipation minimale (écoulements
 rampants), 431, 456
 Dissipation visqueuse d'énergie, 200,
 201, 396, 492
 Distance d'arrêt, 420
 Doublements de période, 587
 Drainage, 485, 487
 Dynamique moléculaire (simulations),
 73
 Dynamo (effet), 302

E

Échange des stabilités (principe d'),
 581
 Écoulement élongationnel, 110, 157,
 311
 Écoulement axisymétrique, 111
 Écoulement bouchon, 145, 185, 495
 Écoulement courbe, 208
 Écoulement extérieur, 648

Écoulement externe, 637
 Écoulement uniforme, 231
 Écoulements axisymétriques, 107
 Écoulements d'un film fluide, 383
 Écoulements laminaires, 75, 375
 Écoulements oscillants, 167, 171
 Écoulements parallèles, 75
 Écoulements potentiels, 105, 106, 203, 226
 Écoulements quasi parallèles, 373
 Écoulements réactifs, 192
 Écoulements rampants, 75, 78, 418
 Écoulements rampants (réversibilité), 424
 Écoulements rotationnels, 105
 Écoulements secondaires, 63, 360, 595
 Écoulements turbulents, 124, 611
 Écoulements turbulents en présence d'une paroi, 634
 Écoulements unidirectionnels, 159
 Einstein (relation d'), 28
 Ekman (couche d'), 356, 366
 Ekman (nombre d'), 337
 Élastohydrodynamique, 381
 Électrodes à disque tournant, 543
 Énergie interfaciale, 34
 Enstrophie, 619, 659
 Épaisseur de déplacement (couches limites), 505
 Épaisseur de quantité de mouvement (couches limites), 506
 Épaisseurs (couches limites), 505
 Équation de bilan, 101, 191, 210
 Équation de mouvement, 132
 Équation de mouvement dans un repère tournant, 333
 Équipotentielle, 231
 Ergodicité, 612
 Étalement de gouttes, 34, 399
 Eulérienne (description), 86, 192
 Euler (équation d'), 135, 299

F

Facteur de structure, 50
 Falkner-Skan (équation de), 509
 Fick (équation de), 17
 Filaments de tourbillons, 285, 291, 314

Fil chaud (anémomètre à), 120, 537, 662
 Film visqueux (chute de), 393
 Films liquides à surface libre, 392
 Flammes, 550
 Flamme (front de), 556
 Flammes de diffusion, 551, 553
 Flammes prémélangées, 551, 556
 Fluage, 146
 Fluctuations de vitesse (mesure de), 120
 Fluctuations turbulentes (bilan d'énergie cinétique), 618
 Fluide à seuil, 145
 Fluide en loi de puissance, 182
 Fluide newtonien, 130
 Fluide non newtonien, 140
 Fluide parfait, 135, 225
 Fluorescence induite par laser, 117, 626
 Fonction de courant, 106, 107, 280
 Fonction de courant de Stokes, 111, 231
 Forbes (bandes de), 419
 Force centrifuge, 335, 360, 595
 Forces en volume non conservatives, 299
 Forces magnétohydrodynamiques, 300
 Forces sur un obstacle (écoulement potentiel), 246
 Forcheimer (approximation de), 475
 Fourier (équation de), 13, 573
 Frottement turbulent (vitesse de), 637
 Froude (nombre de), 217, 221, 555

G

Géostrophiques (écoulements), 339
 Görtler (instabilité de), 595
 Gouttes, 32, 36
 Gouttes (mouvement dans un fluide), 453
 Gradients de vitesse (tenseur des), 92

H

Hélium superfluide, 135, 284, 367
 Hele-Shaw (cellule de), 239, 477
 Helmholtz (équation de), 306

Helmholtz (analogie de), 290
 Herschel-Bulkley, 145, 147
 Hill (vortex de), 309
 Hydrophile, 32
 Hydrophobe, 32
 Hydrostatique (pression), 126, 135

I

Imbibition, 485, 490
 Incompressibilité, 103, 106
 Instabilité absolue, 597
 Stationnarité, 377
 Intermittence (turbulence), 587, 667
 Inversion de température, 574
 Isobare (Isostère), 303

J

Jet liquide (chute de), 408
 Jets (gonflement de), 155
 Jets laminaires, 531
 Jets turbulents, 626
 Jurin (loi de), 40

K

Kelvin (onde de), 347
 Kelvin (théorème de), 295, 329
 Kelvin-Helmholtz (instabilité de), 596, 597, 667
 Kelvin-Voigt (solide de), 154
 Knudsen (régime de), 27, 86
 Kolmogorov (loi de), 660, 663
 Kolmogorov (cascade d'énergie), 313, 655
 Kolmogorov (constante de), 664
 Kolmogorov (longueur et vitesse de), 659
 Kolmogorov (turbulence homogène), 655
 Kozeny-Carman (relation de), 480
 Kutta (condition de), 277, 328

L

Lagrangienne (dérivée), 132, 192
 Lagrangienne (description), 87
 Landau (développement de), 566

Landau (modèle de), 564, 591
 Landau-Darrieus (instabilité de), 561
 Laplace (force de), 300
 Laplace (loi de), 32, 138, 413
 Larmes de vin, 407
 Laser (nappe), 115
 Lewis (nombre de), 77, 559
 Libre parcours moyen, 20, 86
 Lignes d'émission, 90
 Lignes de courant, 89, 231
 Lignes de vortacité, 284
 Liquide (état), 4
 Locomotion et tourbillons, 326
 Logarithmique (profil de vitesse), 641, 649
 Lois d'échelle, 657
 Longueur d'entrée, 80, 495
 Longueur de glissement, 137
 Longueur de mélange, 622
 Lubrification, 160
 Lubrification (approximation de), 373
 Lubrification (équation de), 378
 Lubrification (écoulement entre deux cylindres), 387
 Lubrification (force de), 381

M

Mach (nombre de), 104, 220
 Magnus (force de), 241, 250, 324, 516
 Manteau terrestre, 419
 Marangoni (effets), 392, 403, 589
 Marangoni (nombre de), 588
 Marche au hasard, 19, 73
 Mascaret, 217
 Masse ajoutée, 252, 255
 Matière molle, 159
 Maxwell (équation de), 290
 Maxwell (analogie de), 294, 370
 Maxwell (liquide de), 153
 Méandre, 360
 Mélange (à faible nombre de Reynolds), 420
 Mélange lagrangien, 421
 Mélange turbulent, 616, 666
 Micelles géantes, 154
 Microfluidique, 123, 419
 Milieux poreux, 469

Modèle à deux fluides
 (hélium superfluide), 367
 Module de conservation (de perte), 152
 Module de rigidité complexe, 152
 Module d'Young, 415
 Mouillage 35, 395, 398
 Mouillage (hydrodynamique du), 392
 Multiplement connexe, 229

N

Navier-Stokes (équation de), 134, 188,
 189, 190, 299, 418
 Newtonien (palier), 143
 Nusselt (nombre de), 536, 585

O

Ondelettes, 661
 Ondes capillaires, 257
 Ondes dans les fluides en rotation, 345
 Ondes de choc, 221
 Ondes de cisaillement, 169
 Ondes de gravité, 217, 257
 Ondes de surface, 256, 258
 Ondes en eau peu profonde, 258, 347
 Ondes en eau profonde, 256
 Ondes inertielles, 345
 Ondes planétaires, 350
 Ondes sismiques, 170
 Ondes solitaires, 261
 Oseen (équation d'), 458, 460
 Ostwald (équation d'), 146

P

Paramètre de contrôle, 564, 569
 Paramètre d'étalement, 35, 397
 Paramètre d'ordre, 564
 Particule de fluide, 85, 133
 Péclet (nombre de), 76, 420, 463
 Péclet thermique (nombre de), 77
 Péclet turbulent (nombre de), 617
 Percolation, 489
 Perméabilité, 474, 479
 Perméabilité relative, 485
 Perturbation singulière, 495
 Pitot (tube de), 121, 205
 Plan β , 351

Plan oscillant, 186
 Plasticité, 7
 Plastique (fluide) 145
 Point d'arrêt, 269
 Point de décollement, 514
 Point de stagnation, 105, 513
 Poiseuille (écoulement de), 80, 162,
 197, 375, 379, 383, 606
 Poiseuille (loi de), 166
 Poiseuille cylindrique (écoulement de),
 164, 473
 Poiseuille plan (écoulement de), 73,
 162, 307
 Polarographie, 124, 538
 Porosimétrie au mercure, 483
 Porosité, 470
 Portance, 240, 277, 328, 330
 Potentiel complexe, 267
 Potentiel des vitesses, 106, 226, 280
 Potentiel vecteur des vitesses, 106
 Prandtl (nombre de), 77, 532, 577
 Prandtl (théorie de la couche limite
 de), 622
 Pression de stagnation, 202
 Pression dynamique, 62, 202
 Propulsion, 250, 260, 326, 330, 441
 Pseudoplastique (fluide), 143
 Puits (écoulement généré par un), 233

Q

Quantité de mouvement (flux de), 194
 Quantité de mouvement
 (transport convectif), 62, 74
 Quantité de mouvement
 (transport diffusif), 62
 Quatrième son, 368

R

Raccordement asymptotique, 641
 Ralentissement critique, 572, 581
 Rankine (solide de), 243
 Rankine (vortex de), 285, 656
 Rayleigh-Bénard (instabilité de), 573
 Rayleigh (diffusion), 52
 Rayleigh forcée (diffusion), 53, 124
 Rayleigh (nombre de), 577

Rayleigh-Plateau (instabilité de), 158, 412
 Rayleigh-Taylor (instabilité de), 43
 Rayon hydrodynamique, 457
 Recirculation (zone de), 521
 Ressaut hydraulique, 216
 Reynolds (équation des écoulements turbulents), 613
 Reynolds (équation des films fluides), 383
 Reynolds (décomposition de), 611
 Reynolds (expérience de), 80
 Reynolds (grand nombre de) 492
 Reynolds magnétique (nombre de), 302
 Reynolds (nombre de), 74, 160, 376, 418
 Reynolds (petit nombre de), 104, 417
 Reynolds (tenseur de), 615
 Rhéodurcissement, 158
 Rhéoépaississant (fluide), 144, 182
 Rhéofluidifiant (fluide) 143, 182, 145
 Rhéologie, 140
 Rhéomètre, 141
 Rhéomètre cône-plan, 142
 Rhéomètre de Couette cylindrique, 141
 Rhéopexie, 149
 Richardson-Zaki (relation de), 469
 Rollin (film de), 368
 Rossby (nombre de), 336
 Rossby (ondes de), 350
 Rotation (fluides en), 332

S

Sédimentation, 113, 467
 Séparation d'échelles, 625
 Schlieren (méthode du), 116
 Schmidt (nombre de), 77, 539
 Section contractée, 213
 Sillage laminaire, 524
 Sillage turbulent, 493, 626
 Simulation numérique des grandes échelles, 625
 Simulations numériques directes, 625
 Solide de Rankine (solide de), 243
 Source ponctuelle (écoulement d'une), 233

Sous-couche inertielle, 639, 650
 Sous-couche visqueuse, 635, 639, 650
 Sous-critique (instabilité), 592, 606
 Sous-domaine inertiel, 658, 664
 Sphère (écoulement potentiel autour d'une), 241
 Sphère (écoulement derrière une), 83, 653
 Sphère en rotation (écoulement autour d'une), 451
 Sphère en translation (écoulement rampant autour d'une), 443
 Spin-up, 363
 Stabilité (diagramme de), 582
 Stabilité (seuil de), 579
 Stationnaire (écoulement), 90
 Stationnarité (critère de), 421
 Stokes (équation de), 160, 422
 Stokes (force de), 578
 Stokes (formule de), 447, 454
 Stokes (paradoxe de), 461
 Stokeslet, 455
 Strouhal (nombre de), 82, 172, 320
 Structures cohérentes turbulentes, 597, 667
 Supercritique (instabilité), 592
 Surfactant, 32
 Suspensions de particules, 463

T

Tanner (loi de), 394, 397
 Taux d'élongation, 93
 Taux de déformation (tenseur du), 91
 Taylor (bulle de), 263
 Taylor (colonne de), 342
 Taylor-Couette (Instabilité de), 178, 592
 Taylor (dispersion de), 546
 Taylor (nombre de), 593
 Taylor-Proudman (théorème de), 341
 Tension interfaciale, 31
 Tension superficielle, 29, 138, 392, 588
 Théorie cinétique des gaz, 68, 615
 Thermocapillaire (effet), 403
 Thixotropie, 147
 Tomographie optique, 114
 Tortuosité, 472

Tourbillon, 232, 284, 567
 Tourbillons de bout d'aile, 330
 Tourbillon de démarrage, 329
 Tourbillon de vidange, 288
 Tourbillons (émission de), 569
 Tourbillons (nappes de), 315
 Tourbillon (vecteur), 97
 Traînée, 240, 328
 Traînée (coefficient de), 449, 504
 Traînée (crise de), 653
 Traînée (force de), 519, 528
 Traçage, 113
 Train à grande vitesse, 522
 Trajectoire (particule de fluide), 88, 89
 Transferts thermiques, 532
 Transformation conforme, 271
 Transformation de Joukovski, 273
 Turbulence faible, 587
 Turbulence gelée, 662
 Turbulent (transport), 615

U

Upwelling, 366

V

Van der Waals (forces de), 30, 148
 Vaschy-Buckingham (méthode de), 78
 Vélomètres à ultrasons, 120
 Vélométrie laser, 58, 119, 571
 Vélométrie par images de particules, 121
 Venturi (tube de), 206
 Viscoélasticité, 149
 Viscosimètre, 140
 Viscosité, 64, 131

Viscosité (seconde), 131
 Viscosité élongationnelle, 157
 Viscosité cinématique, 29, 66
 Viscosité de Trouton, 157
 Viscosité de volume, 131
 Viscosité des gaz, 68
 Viscosité des liquides, 70
 Viscosité dynamique, 65
 Viscosité effective, 143
 Viscosité turbulente, 622, 632
 Visualisations, 113
 Vitesse limite de chute, 448
 Volet de bord d'attaque (de fuite), 518
 Volume élémentaire représentatif, 22, 472
 Volume de contrôle, 195
 Von Kármán (constante de), 638
 Vortex (voir aussi tourbillon), 284, 371
 Vorticité, 97, 124, 284
 Vorticité absolue, 336
 Vorticité des fluctuations turbulentes, 619
 Vorticité (équation dans un repère tournant), 335
 Vorticité (équation de transport), 306
 Vorticité planétaire, 332, 336
 Vorticité potentielle, 337
 Vorticité (tube de), 284

W

Weissenberg (effet), 156
 Weissenberg (nombre de), 148

Y

Young-Dupré (loi de), 36, 392

Cahier couleurs

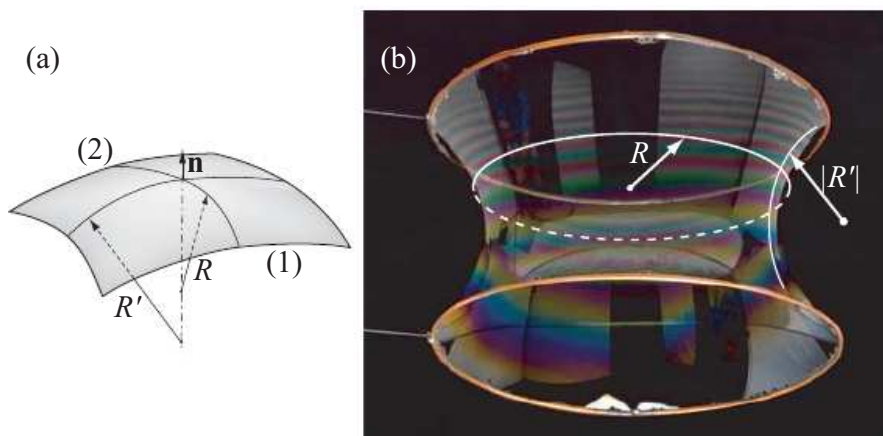


FIG. 1.16 – (a) Géométrie de la surface de séparation entre deux fluides (1) et (2) permettant de définir les rayons de courbure principaux R et R' . (b) La surface du film de liquide tendu entre deux anneaux circulaires est ouverte, et la pression de part et d'autre du film est donc la même. La courbure moyenne locale $C = [(1/R) + (1/R')]$ est alors nulle en chaque point. La surface ainsi engendrée – la caténoïde – réalise l'aire minimale du film, compte tenu des conditions imposées par les anneaux (photo de S. Schwartzberg, © Exploratorium).



FIG. 1.30 – Diffusion Rayleigh d'un faisceau incident de lumière blanche (arrivant par la gauche) dans un récipient contenant de l'eau avec un peu de lait. La lumière diffusée à angle droit de la direction d'incidence est bleutée, alors que la lumière transmise sur l'écran est rougeâtre (doc. B. Valeur).



FIG. 2.10 – Vue par satellite des nuages dans l’allée de tourbillons émise derrière l’île volcanique de Rishiri-to au nord de la mer du Japon (doc. NASA).

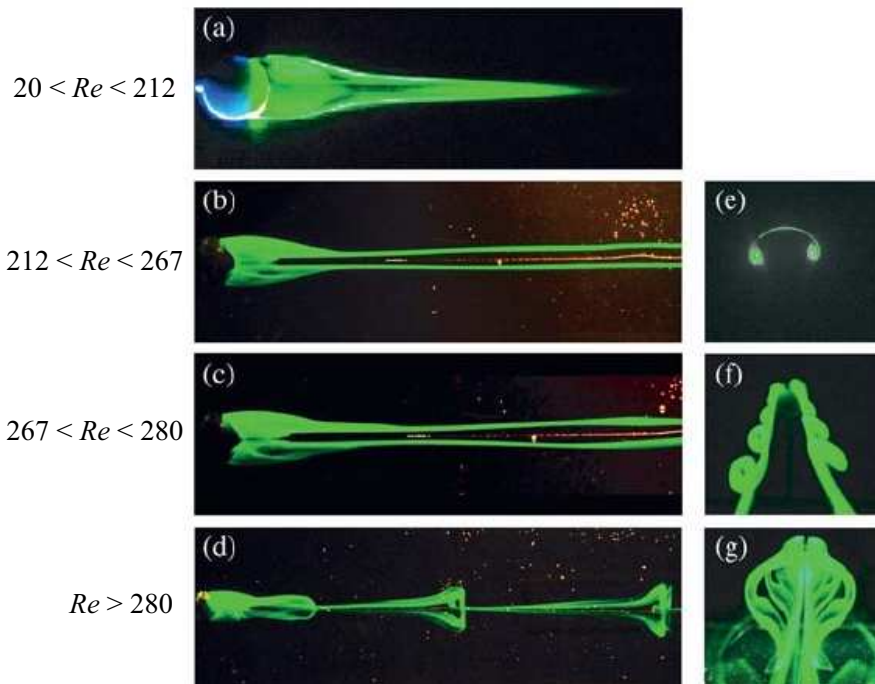


FIG. 2.11 – Vues de dessus (a, b, c, d) et vue arrière (e, f, g) de l’écoulement derrière une sphère (à gauche) visualisé par injection de colorant fluorescent. Pour des nombres de Reynolds Re de l’écoulement, construits à partir de la vitesse en amont de la sphère et de son diamètre, croissants, on observe successivement (a) un tourbillon toroïdal attaché juste derrière la sphère ($20 < Re < 212$), (b, e) deux tourbillons d’axes longitudinaux stationnaires ($212 < Re < 267$) ou (c, f) oscillants ($267 < Re < 280$), puis (d, g) des structures en « épingles à cheveux » ($Re > 280$) (docs. S. Goujon Durand et al.).

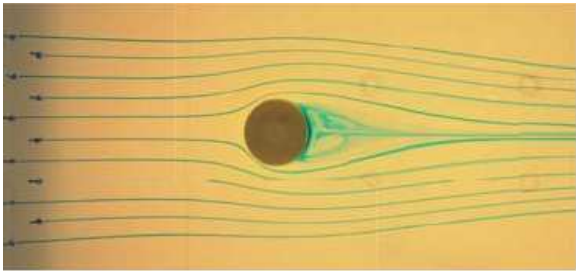


FIG. 3.14 – Visualisation, par lignes d'émission d'un colorant, de l'écoulement autour d'un obstacle cylindrique d'axe perpendiculaire au plan de la figure. L'écoulement est de gauche à droite et le colorant est injecté en 11 points (à gauche de la figure). Noter la zone de recirculation juste en aval (doc. L. Auffray et P. Jenffer).

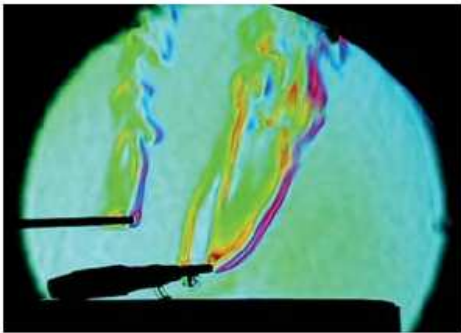


FIG. 3.19 – Visualisation par technique Schlieren des variations d'indice de l'air résultant des variations de température près d'un chalumeau à butane (en bas de l'image) et d'une tige de verre chaude (doc. I. Smith).

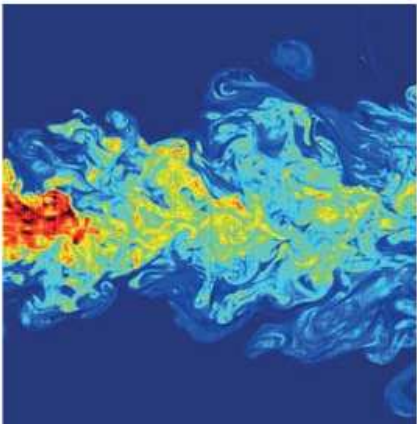


FIG. 3.21 – Vue d'un jet liquide turbulent injecté (par la gauche) à l'intérieur du même fluide immobile. Un colorant fluorescent a été ajouté au liquide du jet qui est illuminé par un plan lumineux coïncidant avec celui de la figure et passant par l'axe du jet. Les couleurs indiquent la concentration locale de colorant (croissante du bleu vers le rouge) dans le plan de l'image (doc. C. Fukushima et J. Westerweel).

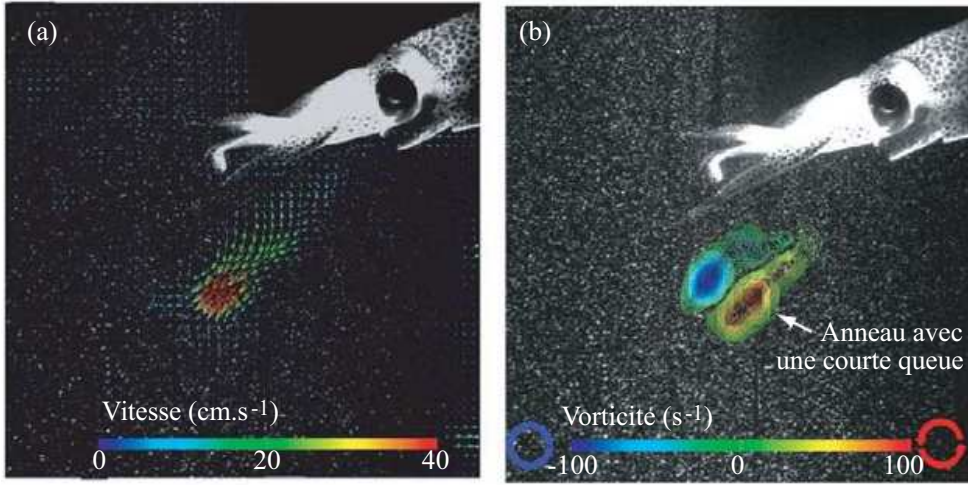


FIG. 3.25 – Mesure par technique de PIV des champs de vitesse (a) et de vorticité (b) d'un anneau de tourbillon créé par la propulsion d'un calmar (*Lolliguncula brevis*) par émission de jets pulsés (docs. I.K. Bartol, P.S. Krueger, W.J. Stewart et J.T. Thompson).

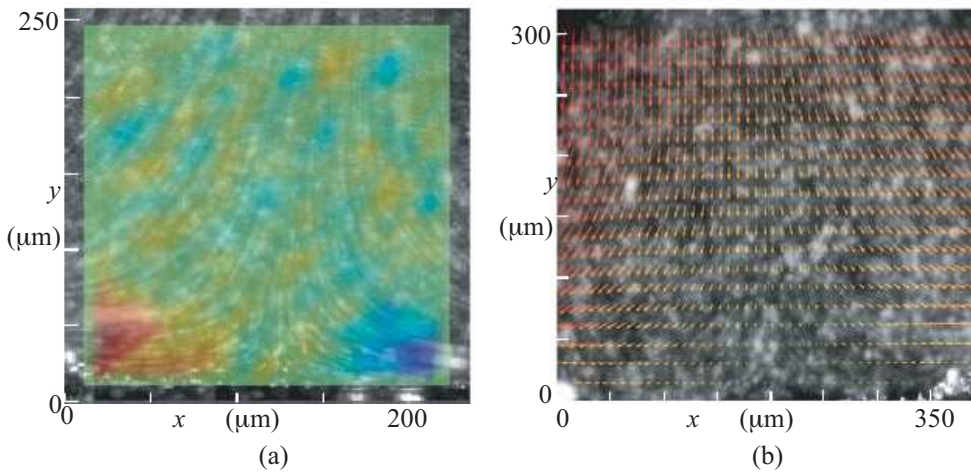


FIG. 3.26 – Écoulement vers un plan (en bas de l'image) avec un point de stagnation de vitesse nulle au centre du plan ; (a) image de fond : visualisation avec un temps de pose long des lignes de courant par des particules entraînées par l'écoulement ; les couleurs correspondent au champ de vorticité calculé à partir du champ de vitesse de l'image (b) ; (b) champ de vitesse déterminé par microvélométrie en utilisant les mêmes particules (docs. C. Pirat, G. Bolognesi et C. Cottin-Bizonne).

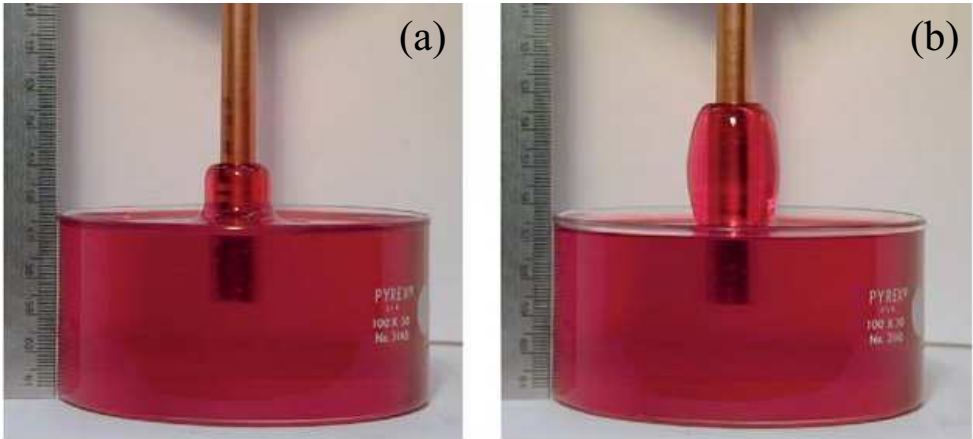


FIG. 4.16 – Montée à deux instants successifs d’un fluide viscoélastique (solution de polystyrène dans un solvant organique) le long d’un axe tournant : ce phénomène représente l’effet Weissenberg (doc. R. Welsh, J. Bico & G. McKinley).



FIG. 4.17 – L’enroulement sur une bobine tournante du même fluide viscoélastique que sur la figure 4.16 met en évidence l’effet de sa viscosité élongationnelle élevée (doc. R. Welsh, J. Bico & G. McKinley).

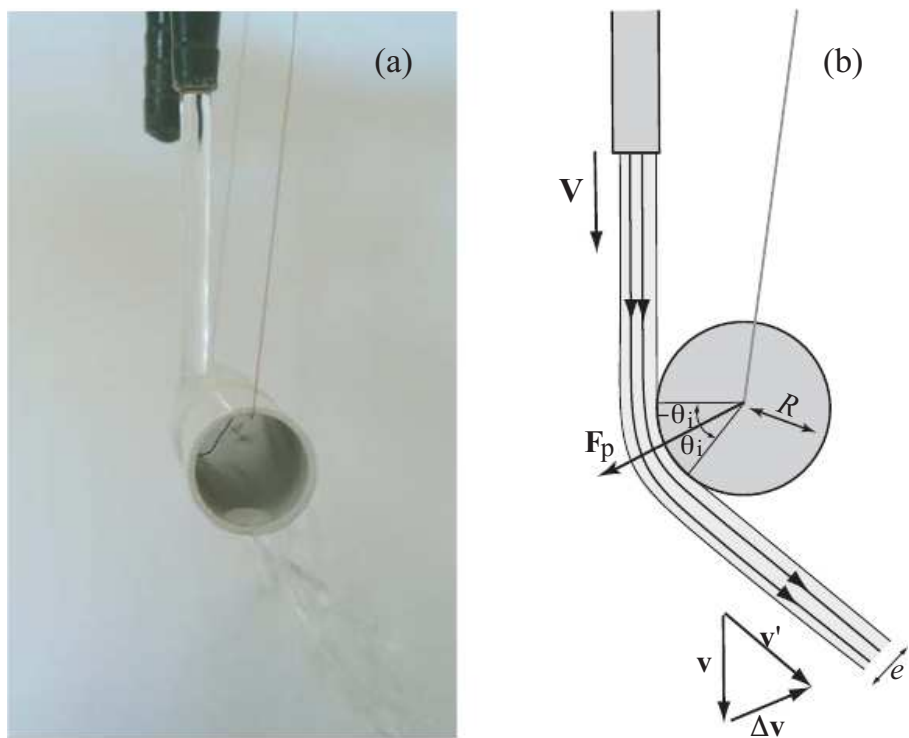


FIG. 5.6 – Déviation d’un jet de fluide sur une surface courbe. (a) Déflexion du jet par le cylindre; (b) schéma montrant l’équilibre des forces en présence (courtoisie Eds. Belin).



FIG. 5.11 – Mascaret remontant (vers la droite) la rivière Petitcodiac près de son estuaire dans la baie de Fundy dans le sud-est du Nouveau-Brunswick au Canada (doc. C.L. Gresley).

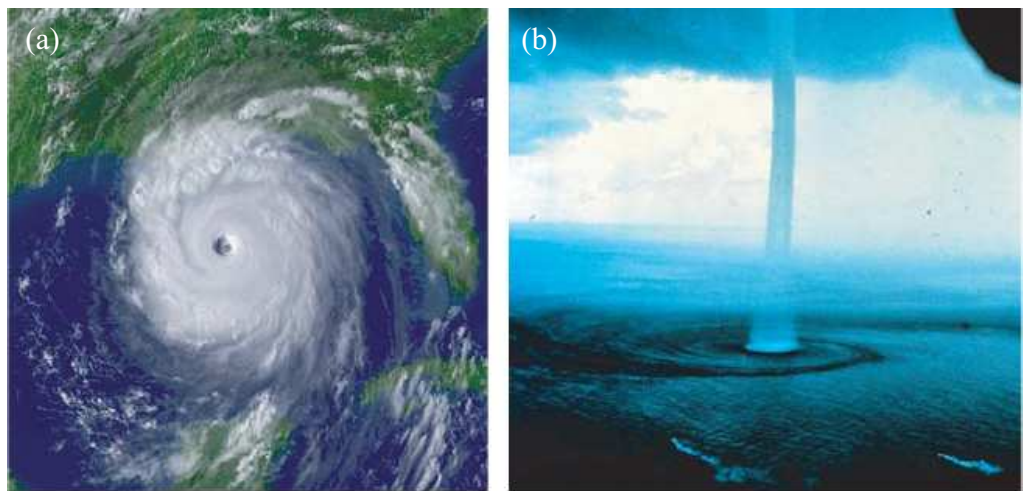


FIG. 7.1 – (a) Vue satellite au-dessus du golfe du Mexique de l’ouragan Katrina qui dévasta la Nouvelle-Orléans en août 2005 (doc. NOAA). (b) Trombe atmosphérique au-dessus de la mer au large des îles du sud de la Floride. Noter l’écoulement secondaire en spirale à la surface de l’eau (doc. V. Golden, NOAA).

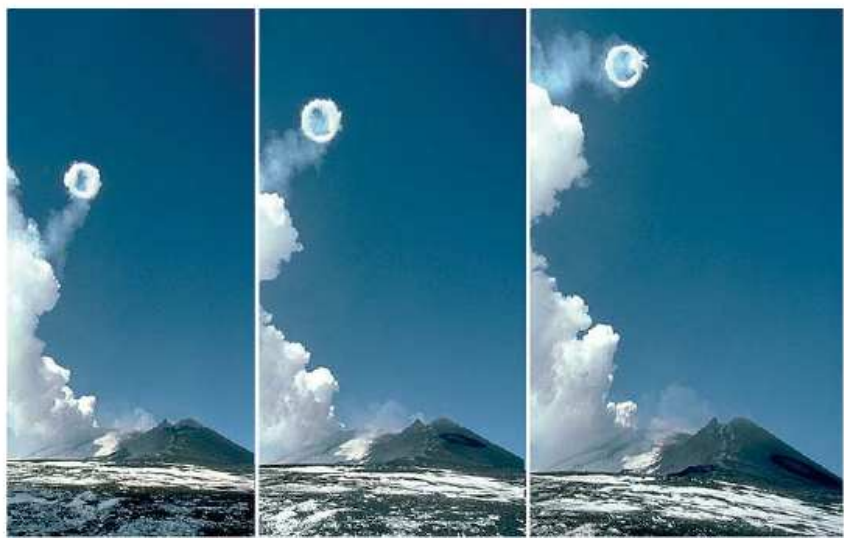


FIG. 7.17 – Observation d’un tourbillon en anneau au-dessus de l’Etna à partir de la « Torre del Filosofo ». On remarque le déplacement de l’ombre de l’anneau sur le cratère sud-est (en bas à droite) au fur et à mesure de sa montée (doc. J. Alean).

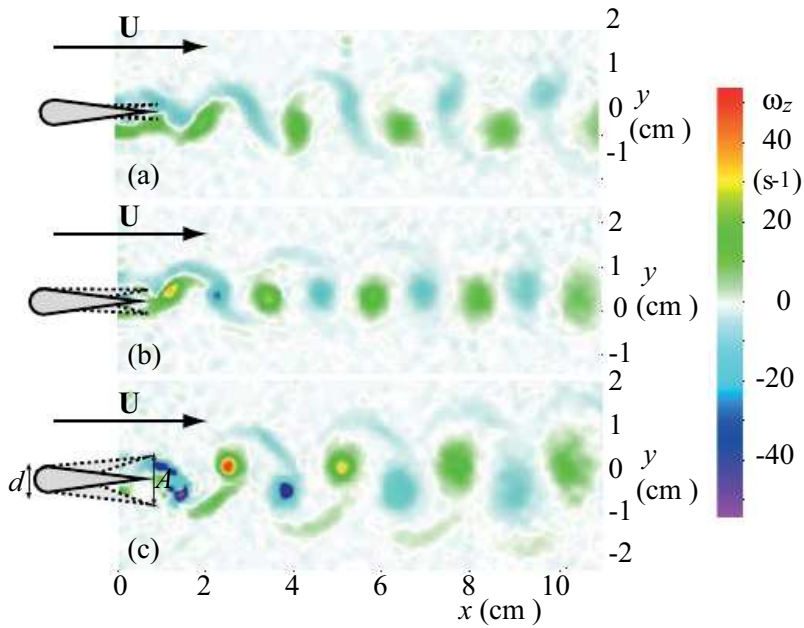


FIG. 7.24 – Champ de vorticité derrière une aile oscillante d'épaisseur $d = 0,5$ cm dans un écoulement de nombre de Reynolds constant $Re = Ud/\nu = 255$, pour plusieurs amplitudes d'oscillation A de valeurs normalisées $A_d = A/d = 0,36$ (a), $0,71$ (b), $1,07$ (c) (avec, respectivement, $Sr_A = fA/U = 0,08$; $0,16$; $0,24$). L'échelle de couleurs correspond à la vorticité locale (en s^{-1}) (doc. R. Godoy-Diana, J.L. Aider et J.E. Wesfreid).

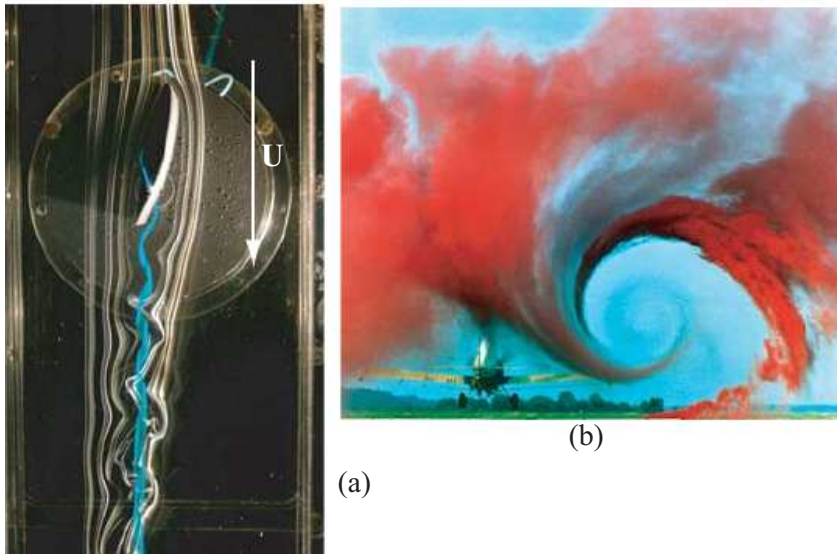


FIG. 7.28 – (a) Visualisation par injection de colorant de l'écoulement autour d'une aile dans un tunnel hydrodynamique vertical (doc. O. Cadot et T. Pichon). (b) Visualisation, par injection de fumée près du sol, du vortex de bout d'aile d'un avion de pulvérisation de produits agricoles (doc. NASA).

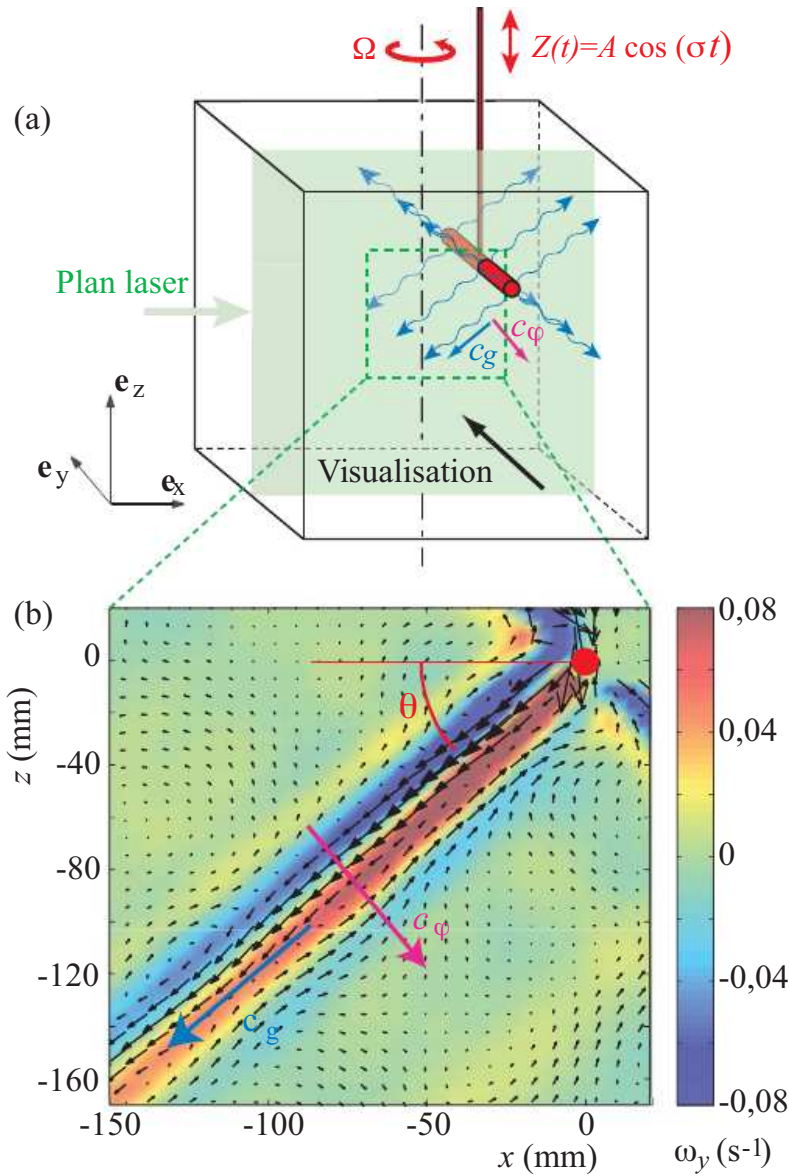


FIG. 7.35 – (a) Excitation d’ondes inertielles par un cylindre horizontal (en rouge) oscillant verticalement dans un fluide tournant autour d’un axe vertical. (b) Vue de la moitié inférieure de l’un des faisceaux émis par l’oscillation du cylindre. La visualisation du champ de vitesse est réalisée par la technique de vélocimétrie par images de particules dans un plan perpendiculaire à l’axe du cylindre en son milieu. Les couleurs correspondent au gradient de vitesse dans la direction de la vitesse de phase $\mathbf{c}_\varphi$ (docs. P.P. Cortet, C. Lamriben et F. Moisy).

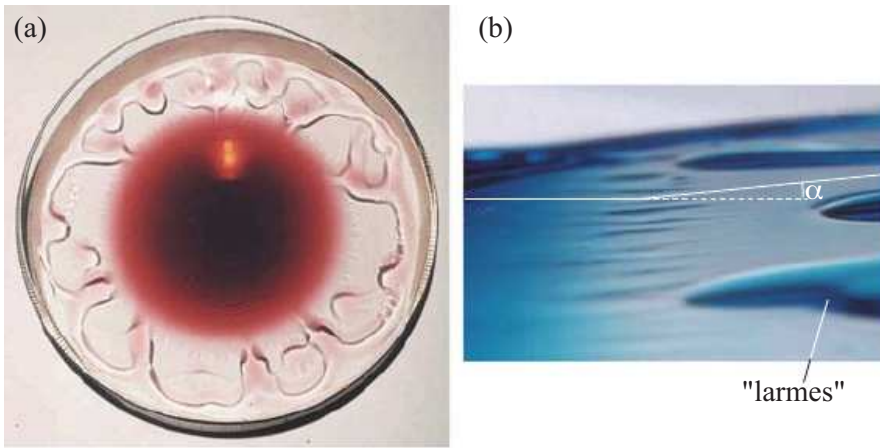


FIG. 8.17 – (a) Vue de dessus de l’ascension d’un liquide le long des parois d’un verre par effet Marangoni et de la retombée du liquide appauvri en alcool sous forme de « larmes de vin ». (b) Vue de côté en gros plan d’une expérience modèle reproduisant le phénomène. On tire une lame inclinée d’un angle α par rapport à l’horizontale hors d’un mélange eau alcool : on entraîne ainsi sur la lame un film fluide qui retombe en « larmes » comme sur le verre. Les stries juste au-dessus du bain de mélange correspondent à une autre instabilité de l’écoulement (docs. J. Bush et P. Hosoi).



FIG. 8.19 – Déstabilisation par le mécanisme de Rayleigh-Plateau d’un jet liquide cylindrique tombant, suivie de la formation de gouttes (doc. J. Aristoff et J. Bush).



FIG. 9.1 – Vue de bandes de Forbes sur le glacier de la Mer de Glace. La forme de ces bandes ainsi que l’augmentation vers l’aval de l’amplitude de leur déformation reflètent le profil transverse de la vitesse d’écoulement du glacier (de la gauche vers la droite sur l’image) qui est plus faible vers les bords. L’intervalle entre les bandes correspond à la distance parcourue pendant un an : elles se forment en aval des séracs (zones fracturées en haut du glacier) et reflètent la pénétration différente de solides et poussières dans la glace suivant la couverture neigeuse (doc. J.F. Hagenmuller/lumieresdaltitude.com).

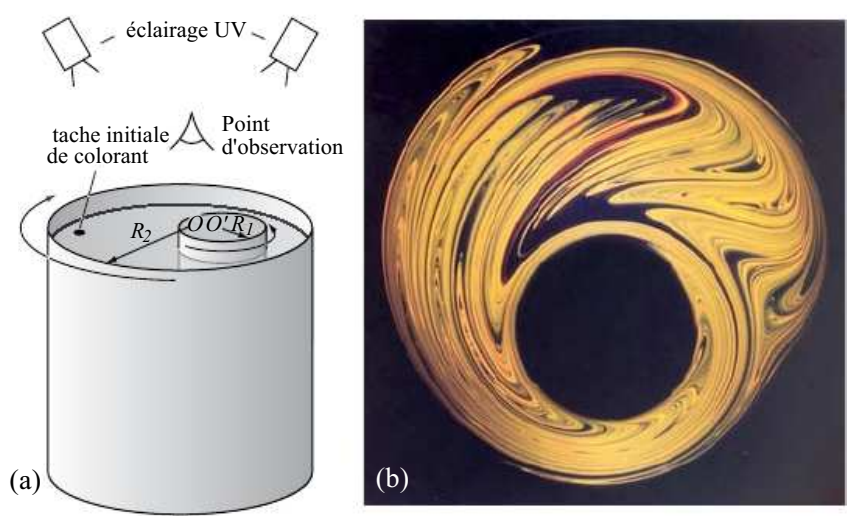


FIG. 9.3 – Expérience montrant la dispersion chaotique d’une tache de colorant initialement localisée entre deux cylindres d’axes différents (distance $OO' = 0,3 R_2$) tournant en alternance dans des sens et avec des angles différents; (a) schéma de l’expérience; (b) distribution du colorant après 10 séquences de rotations alternées d’angles $\theta = 270^\circ$ (cylindre extérieur) et -3θ (cylindre intérieur) (doc. J.M. Ottino).

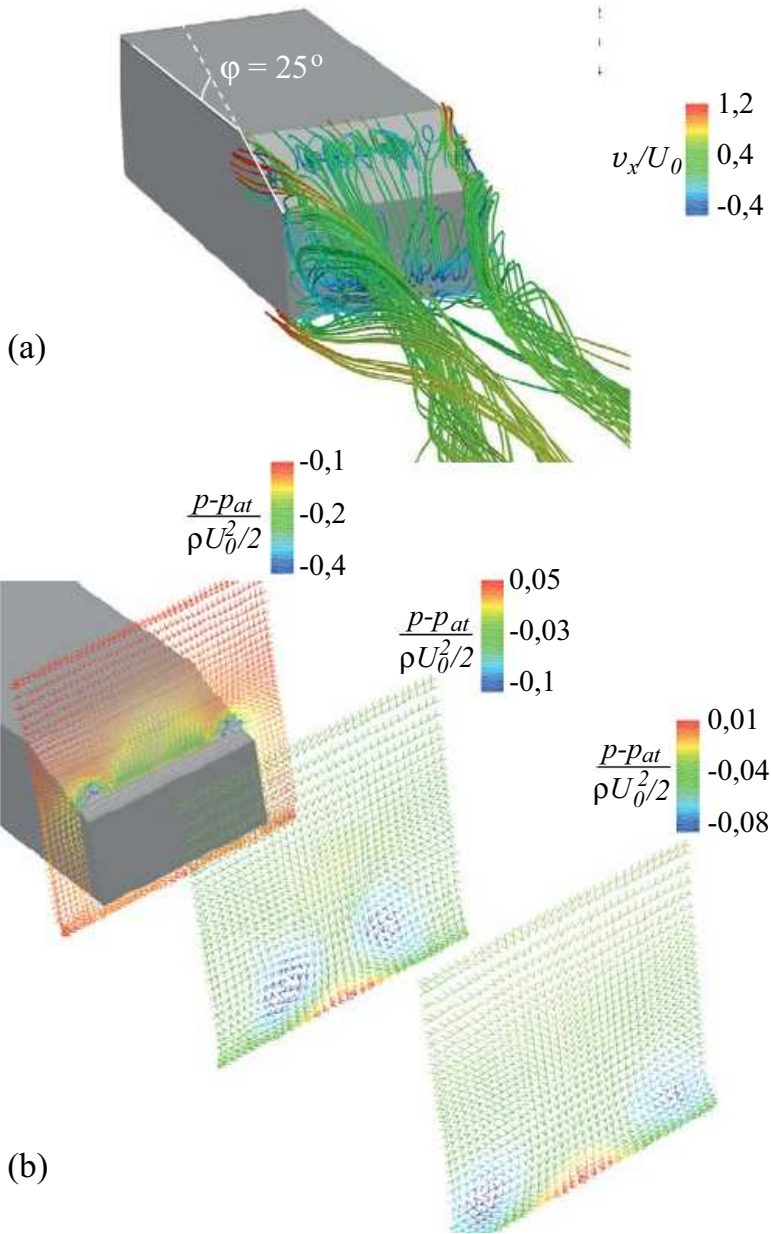


FIG. 10.15 – Simulation des grandes échelles (voir section 12.3.4) de l'écoulement à l'arrière d'un corps d'A Ahmed d'angle $\varphi = 25^\circ$ dans un écoulement de vitesse moyenne en amont du corps $U_0 = 40 \text{ m.s}^{-1}$ (l'écoulement va de la gauche vers la droite). La simulation met en évidence la présence de deux tourbillons longitudinaux. (a) Lignes de courant : la couleur correspond à la composante normalisée v_x/U_0 de la vitesse dans la direction de l'écoulement moyen ; (b) écart de pression $(p - p_{at})/(\rho U_0^2/2)$ par rapport à la pression atmosphérique normalisée (couleurs) et champ de vitesse (vecteurs). Les tourbillons apparaissent comme des zones de faible pression (en bleu sur la figure (b)). Ils représentent une contribution importante aux forces de trainée (docs. M. Minguez, R. Pasquetti et E. Serre).

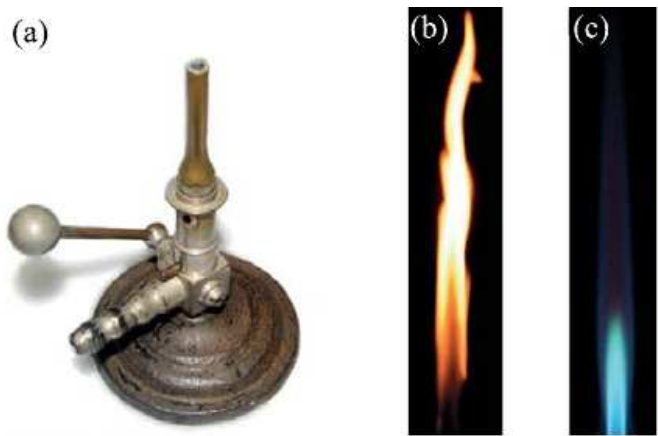


FIG. 10.24 – (a) Bec Bunsen (Power house museum, Sidney) ; (b) flamme de diffusion (virole fermée) ; (c) flamme prémélangée (virole ouverte) (doc A. Fijalkowski).

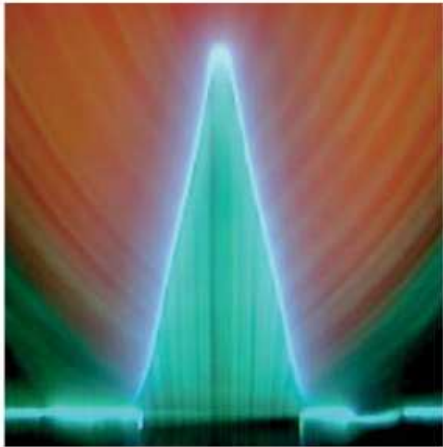


FIG. 10.27 – Vue d’une flamme prémélangée. La zone blanche marque la frontière entre les gaz frais (bleu-vert) et brûlés (rouge). Les gaz frais ont étéensemencés de petits grains réfractaires d’oxyde de césium, afin de visualiser les lignes de courant : celles-ci sont défléchies à la traversée du front (doc. J. Quinard et G. Searby).



FIG. 10.30 – Instabilité de Darrieus-Landau d’un front de flamme prémélangée méthane-air, se propageant librement du haut vers le bas dans un tube de 14 cm de diamètre (doc. J. Quinard, G. Searby, B. Denel et J. Graña-Otero).



FIG. 11.6 – Couche d'inversion de température et accumulation de brouillard au-dessus du centre de la ville de Los Angeles (cliché M. Luethi).

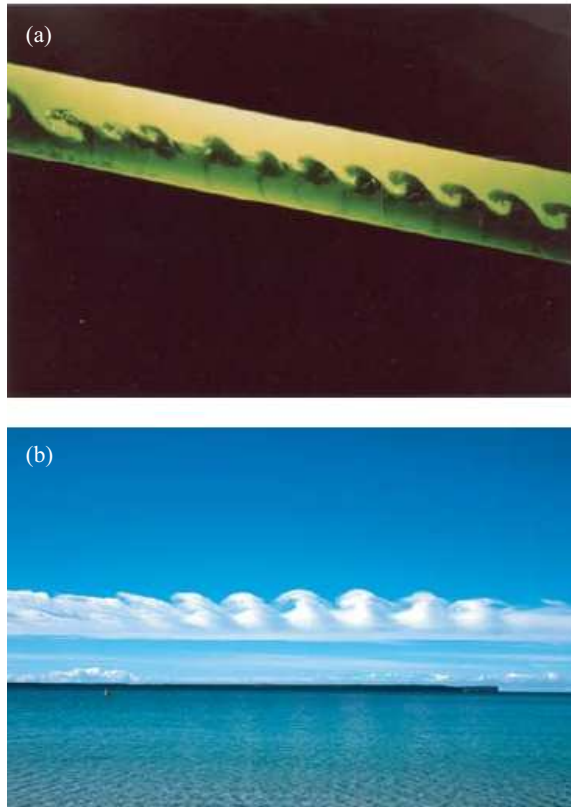


FIG. 11.16 – (a) Visualisation expérimentale de l'instabilité de la surface de séparation de deux liquides non miscibles; la cellule a été inclinée à droite vers le bas en partant d'une position de repos horizontale (doc. O. Pouliquen); (b) Instabilité de Kelvin-Helmoltz d'une couche de nuages au-dessus de la baie de Jervis, Nouvelle Galles du Sud, Australie (doc. G. Goloy).

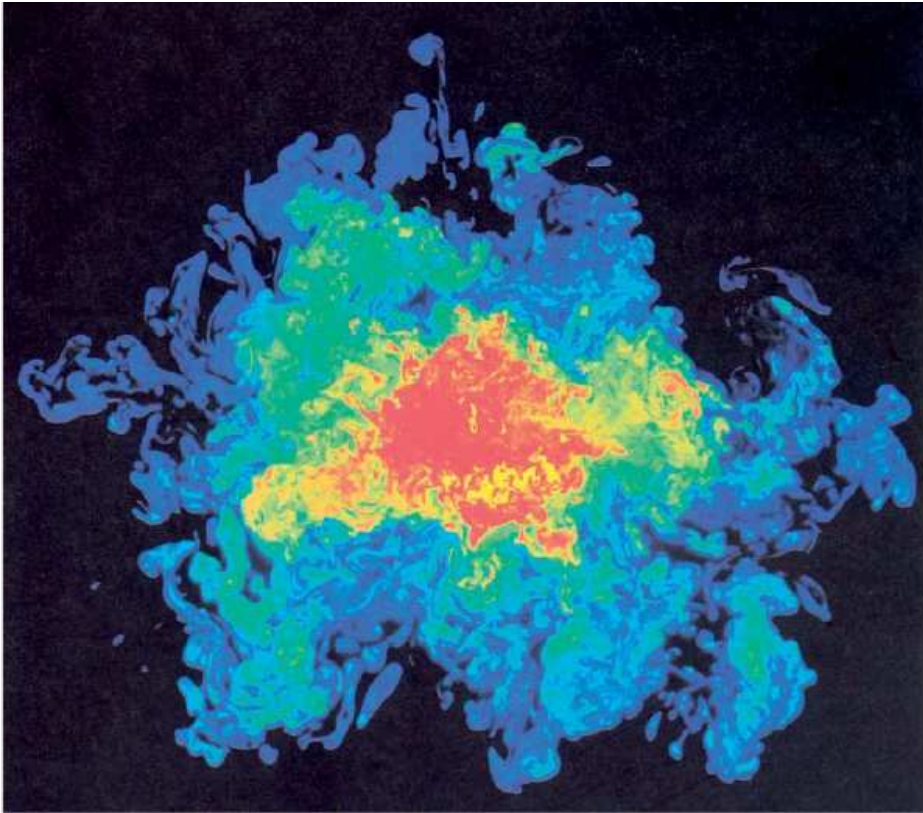


FIG. 12.2 – (a) Vue en coupe d'un jet turbulent éclairé par un plan lumineux perpendiculaire à son axe et injecté dans un volume du même fluide. Le jet contient un colorant fluorescent tandis que le fluide extérieur est pur. Les couleurs indiquent la concentration en colorant, croissante du bleu vers le rouge (doc. H.E. Catrakis et P.E. Dimotakis).

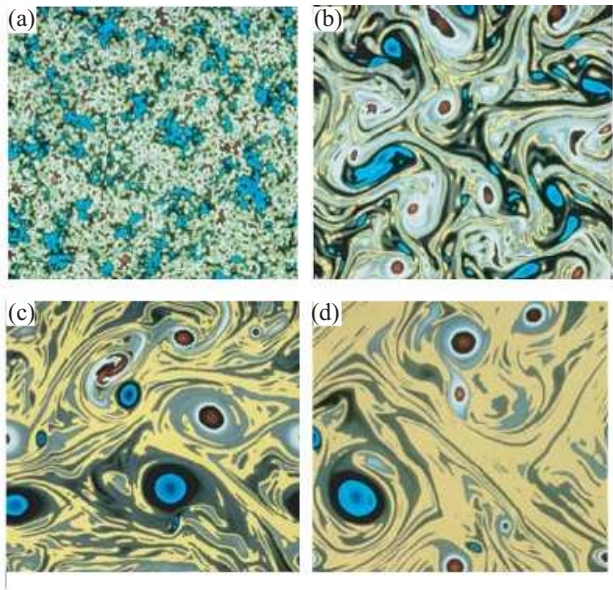


FIG. 12.19 – Simulation numérique de l’évolution temporelle d’une distribution de vorticité, initialement aléatoire dans un écoulement turbulent à deux dimensions, et évoluant ensuite sans apport d’énergie extérieure. Le code de couleurs représentant le champ de vorticité est : rouge pour les valeurs fortement positives, bleu pour les valeurs fortement négatives, gris pour les valeurs faibles et jaune pour la valeur nulle). Les images (a) ; (b) ; (c) ; (d) correspondent respectivement à des temps normalisés $t = 0, t = 1, t = 3, t = 5$ (docs. M. Farge et J-F. Colonna).

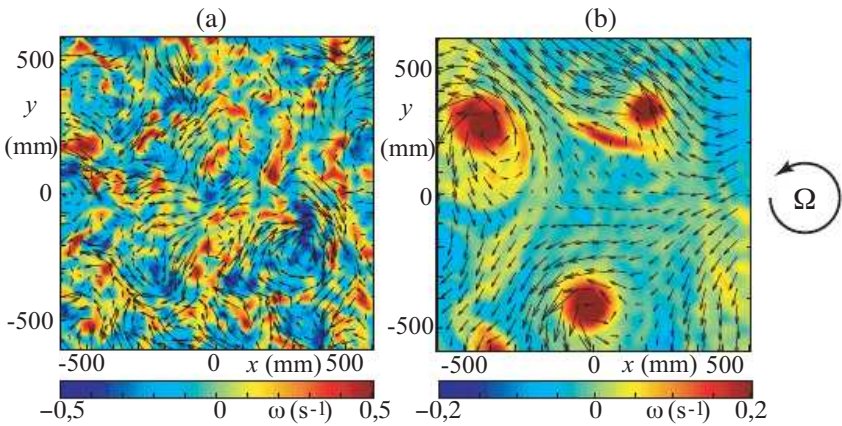


FIG. 12.20 – Distribution de la vorticité dans une cuve en rotation à une vitesse angulaire Ω (1 tour toutes les 30 s) autour d’un axe vertical perpendiculaire au plan de figure après : (a) 2 tours, (b) 10 tours. L’écoulement turbulent a été créée par le déplacement d’une grille perpendiculairement au plan de figure. La vorticité est indiquée par le code de couleurs et le champ de vitesse par les vecteurs. Les zones de vorticité cyclonique (en rouge) correspondent à une rotation locale de même sens que celle imposée ; les zones de vorticité anticyclonique de signe opposé sont en bleu (docs. F. Moisy, C. Morize, M. Rabaud et J. Sommeria).