Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2020–2021
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Contrôle Continu – MEU104 – jeudi 19 novembre

Culture Mathématique

L'épreuve est prévue pour 1 heure, le sujet est déposé à 16h15 sur ecampus, votre copie est à rendre **avant 18h15 le même jour** *par mail à l'adresse* blanche.buet@u-psud.fr : *un mail vous sera envoyé en retour pour confirmer la bonne réception. N'oubliez pas la pièce jointe ...*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1.— *Dynamique des populations et suites récurrentes.*

1. On considère le modèle discret pour une population $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant

$$p_0 > 0 \,\text{donné et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n\,.$$

   (a) Quelle fonction de croissance f permet d'écrire $p_{n+1} = p_n + f(p_n)$?

   (b) Exprimer p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et p_0.

   (c) Quel est le devenir de la population p_n quand $n \to +\infty$?

2. On considère le modèle discret pour une population $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant

$$w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 2\,. \tag{1}$$

   (a) Soit $c \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = w_n - c$. Quelle relation de récurrence vérife la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   (b) Exprimer v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ pour $c = 4$.

   (c) Quel est le devenir de la population w_n quand $n \to +\infty$?

Exercice 2.— *Modèle discret de Gompertz*

Soit $a > 0$. On définit la fonction $f_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_a(x) = x(1 - a\ln x)\,.$$

1. Pour $a > 0$ fixé, résoudre l'équation $f_a(x) = x$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.

2. On suppose $a = 1$ et donc $f_a(x) = f_1(x) = x(1 - \ln x)$.

   (a) Étudier les variations de f_1 sur $]0, 1]$.

   (b) Montrer que l'intervalle $]0, 1]$ est stable par f_1 (c'est-à-dire $f_1(]0, 1]) \subset]0, 1]$.

   (c) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in]0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_1(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (d) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3. *Question plus difficile.* Étudier les variations de f_a pour $a \geq 1$ fixé et en déduire que l'intervalle $]0, 1]$ est stable par f_a si et seulement si a satisfait $a \exp\left(\frac{1-a}{a}\right) \leq 1$.

Exercice 3.— *Nombre de dominos.*

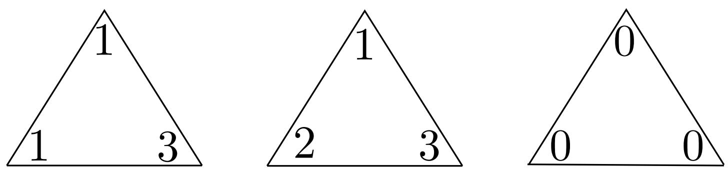
1. Un domino est un rectangle sur lequel sont inscrits deux nombres allant de 0 à 6. Lorsqu'on joue, on peut tourner le domino, de sorte que le domino

$$\boxed{0 \mid 6} \quad \text{et le domino} \quad \boxed{6 \mid 0} \quad \text{sont en fait le même domino.}$$

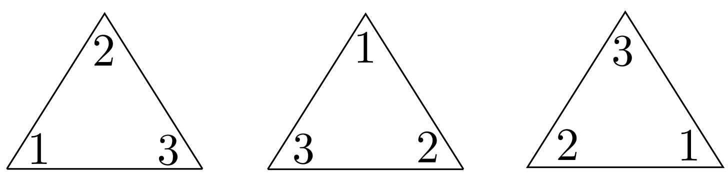
   (a) Un jeu de dominos contient exactement un exemplaire de chaque domino. Combien y a-t-il de dominos ?

   (b) On joue maintenant avec des dominos sur lesquels sont incrits deux nombres allant de 0 à n, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de dominos (en fonction de n) ?

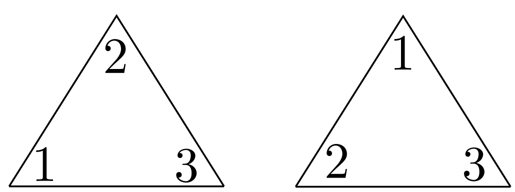
2. On s'intéresse à présent à des *triominos*, ce sont des triangles sur lesquels sont inscrits 3 nombres (un à chaque sommet du triangle) choisis parmi $\{0, 1, \ldots, 5\}$. Exemples de triominos:



   On peut faire tourner un triomino de sorte qu'on a ci-dessous trois positions différentes du même triomino:



   En revanche les deux triominos suivants sont différents:



   (a) Combien le jeu comporte-t-il de triominos différents ?

   (b) *Question plus difficile.* Si les nombres inscrits sont maintenant choisis parmi $\{0, 1, \ldots, n\}$, combien le jeu comporte-t-il de triominos différents (en fonction de n) ?