TD5 – DÉRIVÉE ET VARIATIONS D'UNE FONCTION

Objectifs : à la fin de ces séances **vous devriez être capable** :

1) d'**énoncer** les dérivées usuelles ;
2) d'**énoncer** les formules de calcul de dérivées et de les **utiliser** pour **dériver** d'autres fonctions ;
3) d'**étudier** les variations d'une fonction à partir du tableau de variations ;
4) de **justifier** l'existence d'une solution à une équation avant de la **résoudre** avec votre calculatrice ;
5) de **formaliser** une problématique d'économie ou de gestion et de la **résoudre**.

Sommaire

1 Dérivées

1.1 QUIZZ Cours

	$f(x)$	$f'(x)$
f1	constante	
f2	x^n	
f3	$\sqrt{x}$	
f4	e^x	
f5	$\ln(x)$	
f6	$a\,f(x) \;+\; b\,g(x)$	
p1	$f(x) \;\cdot\; g(x)$	
p2	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	
p3	$f\left(g(x)\right)$	
f7	$(f(x))^n$	
f8	$e^{f(x)}$	
f9	$a^x = e^{x\ln(a)}$	
f10	$\ln\left(f(x)\right)$	

Quelles questions faut-il se poser pour identifier un ensemble de définition ?

Quelles sont les différentes étapes pour étudier les variations d'une fonction f sur $[a\,;\,b]$?

1.2 Exercices travaillés

Exercice 1 (Méthode pour dériver une fonction).

- **Étape 1 : Identifier le domaine de définition de** f : « Le domaine de définition de f est $D_f = ...$ »
- **Étape 2 : Identifier la règle de calcul à utiliser** : a-t-on à faire à une fonction usuelle ($f1$, ..., $f10$) ? ou bien a-t-on besoin d'une propriété ($p1, p2$ ou $p3$) ? Puis **rédiger** les différents calculs de la dérivée.
- **Étape 3 : Conclure** : « Finalement, $f'(x) = ...$ »

Exemple 1 : Dériver $f(x) = x^3 + 5x + 2 + \dfrac{2}{x}$

- **Étape 1 :** $D_f =?$
- **Étape 2 :** $f =?$ (fonction usuelle / propriété ?)
- **Étape 3 :** $f'(x) =?$

Exemple 2 : Dériver $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{1-x}$

- **Étape 1 :** $D_f = ?$

- **Étape 2 :** $f = ?$

- **Étape 3 :** $f'(x) = ?$

Exercice 2 (Calcul de dérivées).
En utilisant la méthode précédente, dériver chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x + \sqrt{x} + 2$

b) $O(p) = p + 3\ln(p)$

c) $D(q) = q^3 + e^q$

d) $f(x) = \dfrac{8}{2\,x+3}$

e) $CT(q) = q\ln(q) - q$

f) $f(x) = \exp\left(x^2 - \dfrac{3}{2}x\right)$

g) $f(t) = C_0(1+t)^n$

h) $f(n) = C_0(1+t)^n$

i) $f(t) = \dfrac{C_0}{(1+t)^n}$

j) $f(x) = (2x+1)\,e^{-2x}$

k) $h(t) = (2x+1)\,e^{-2t}$

l) $g(x) = (2x+1)\,e^{-2t}$

m) $g(x) = \dfrac{x^7}{7^x}$

2 Variations d'une fonction

Exercice 3 (Lecture d'un tableau de variations).
Soit f une fonction définie et continue sur $[0\,;\,19]$, dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	0		5		7		13		19
$f'(x)$		$-$	**0**	$+$	**0**	$+$	**0**	$-$	
$f(x)$	24		-13		17		25		7

a) Compléter le tableau de variations en mettant les flèches.

b) Au point $x = 5$, f admet un .

Justifier la réponse en rappelant le cours :

c) Au point $x = 7$, f admet un .

Justifier la réponse en rappelant le cours :

d) Au point $x = 13$, f admet un .

Justifier la réponse en rappelant le cours :

e) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle sur $[0\,;\,19]$? En déduire le tableau du signe de f.

Exercice 4 (Méthode pour étudier les variations d'une fonction). – **Étape 1 : Déterminer le domaine d'étude** = domaine économique $\bigcap$ domaine de définition
– **Étape 2 : Calculer la dérivé** $f'(x)$
– **Étape 3 : Résoudre l'équation** $f'(x) = 0$
– **Étape 4 : Étudier le signe de la dérivée** f'
– **Étape 5 : Dresser le tableau de variations**
– **Étape 6 : Déterminer d'éventuels extrema**

Exemple corrigé Étudier les variations de $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$ sur $[0\,;\,10]$

– **Étape 1 :** Domaine d'étude :

– **Étape 2 :** Dérivée $f'(x) =?$

– **Étape 3 :** Équation $f'(x) = 0$:

- **Étape 4 :** Signe de $f'(x)$:

- **Étape 5 :** Tableau de variations :

- **Étape 6 :** Extrema :

Exercice 5 (Études de variations).
En utilisant la méthode précédente, étudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur $[0;10]$:

a) $C(q) = \frac{1}{3}\,q^3 - \frac{7}{2}\,q^2 - 10\,q + 10$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$

c) $B(q) = (q-1)\,e^{(2-q)}$

d) $f(n) = \ln(n) - \dfrac{3}{4}n$

3 Cas pratiques

Dans les exercices qui suivent, il vous est demandé de

1) **Formaliser l'énoncé**

Variables	**Fonctions**
$x = ...$ *Expliciter l'unité ! (kg, tonnes, etc.)*	$y = ...$ *Expliciter l'unité ! (€, K €,* etc.) $= f(x)$ *Donner la fonction*

2) **Formaliser chacune des questions :**
   - **Identifier le problème :** « On cherche .... : à résoudre une équation / une inéquation
à maximiser / minimiser une fonction. »
   - **Résoudre le problème.**
   - **Conclure :** rédiger une réponse à la question : « On a donc ... »

Avertissement :

Lors des contrôles, si l'énoncé n'est pas formalisé, alors les questions ne seront pas corrigées ! !

Exercice 6 (Gestion des ventes).
Une étude de marché a permis d'établir que pour un prix de vente unitaire de p euro, les quantités vendues $Q(p)$ (en millier d'unités) sont égales à :

$$Q(p) = -5\,p + 35 \qquad \text{pour} \qquad p \geq 0.$$

Le coût variable unitaire est d'un euro. On définit la marge sur coût variable comme la différence entre le chiffre d'affaires et le total des coûts variables.

a) Quel doit être le prix de vente pour que la marge sur coût variable soit positive ?
b) Quel doit être le prix de vente pour maximiser la marge sur coût variable ?

Exercice 7 (Calculs des coûts).
Partie A
Soit
$$g(x) = 6x^3 - 6x^2 - 1.$$

a) Étudier les variations de g sur $[0; 6]$.

b) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution sur $[0; 6]$.

c) Utiliser votre calculatrice pour donner une valeur approchée de la solution.

Partie B
Une entreprise fabrique un produit chimique dont le coût total (en K€) pour produire x litres est égal à :
$$CT(x) = x^3 - 2x^2 + 6x + \frac{1}{3}$$
L'entreprise ne peut pas produire plus de 6 litres. Le prix de vente est de 5 K€ le litre. L'entreprise produit à la demande (tout ce qui est produit est vendu).

a) Déterminer :

  a1) les coûts fixes, $CT(0)$;

  a2) les coûts variables, $CT(x) - CT(0)$;

  a3) le coût marginal, $CT'(x)$;

  a4) le coût moyen $CM(x) = CT(x)/x$;

  a5) le chiffre d'affaires, $CA(x)$;

  a6) la marge sur coût variable, $MCV(x) = CA(x) - CV(x)$;

  a7) le bénéfice, $B(x) = CA(x) - CT(x)$.

b) Étudier les variations du bénéfice, puis calculer :

  b1) la production qui maximise le bénéfice ;

  b2) le seuil de rentabilité.

c) Montrer que la dérivée du coût moyen est égale à $CM'(x) = \dfrac{g(x)}{3x^2}$ où $g(x)$ est définie dans la partie A.

  c1) En déduire les variations de CM.

  c2) Y a-t-il économie d'échelle ?

Exercice 8 (Gestion des ventes).
Partie A
Soit
$$f(x) = x\ \ln(x) - \frac{3}{8}x^2 + x$$

a) Montrer que f' la dérivée de f est égale à $f'(x) = \ln(x) - \dfrac{3}{4}x + 2$

b) Montrer f" la dérivée de f' est égale à $f"(x) = \dfrac{-3x+4}{4x}$.

c) Étudier le signe de f" sur $[1; 8]$; En déduire les variations de f' et le signe de f'.

d) Justifier que $f'(x) = 0$ admet une seule solution sur $[1; 8]$ et utiliser votre calculatrice pour donner une solution approchée.

e) Donner alors les variations de f et ses extrema locaux.

f) Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions sur $[1; 8]$; utiliser votre calculatrice pour donner une valeur approchée des solutions.

Partie B

Une entreprise souhaite lancer une nouvelle référence. Le service marketing estime que le nombre moyen de produits vendus (en million d'unités) au cours de l'année $2016 + n$ est égal à $v(n)$ pour $n \geq 1$:

$$V(n) = n\ \ln(n) - \frac{3}{8}\, n^2 + n$$

a) Quelle sera, en moyenne, la quantité vendue l'an prochain ?

b) Sur quelle année les ventes moyennes seront-elles maximales ?

c) Au cours de quelles années les ventes seront-elle, en moyenne, supérieures à un million d'unités ?

Exercice 9 (Gestion des ventes).

Le service R&D d'une entreprise a mis au point de nouveaux sachets à base de matériaux bio-dégradables. Le bénéfice réalisé, en milliers d'euros, pour la vente de v milliers de sachets est donné par :

$$B(v) = (18 - 5v)e^{(v-2)} - 5.$$

La capacité maximale de production est de trois milles sachets.

a) Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de mille, deux mille et trois mille sachets.

b) Déterminer le volume des ventes pour réaliser un bénéfice maximal.

c) Quel est alors le bénéfice maximal en euros ?

d) Montrer que le seuil de rentabilité (volume des ventes pour lequel le bénéfice est positif) est égal à $v \simeq 1,07$ milliers de sachets.

e) Le volume total des ventes obtenues sur n mois est égal à :

$$VT(n) = \frac{3}{1 + e^{(n-1)}}.$$

Au bout de combien de mois a-t-on on atteint le seuil de rentabilité ?

Exercice 10 (Gestion des approvisionnements).

Partie A

Étudier les variations de f sur $]0\,;3]$:

$$f(x) = 3 - \frac{2}{x^3}$$

Partie B

L'objectif de la gestion des stocks de matière première vise à reconstituer le stock après consommation en optimisant le Coût Total de Commande : somme du coût de passation d'une commande, du coût de stockage et d'éventuel surcoûts dus aux retards de livraisons. Une entreprise estime que le CTC en K€, pour un volume de commande de q tonnes de matière première, est égal à

$$CTC(q) = 3q + \frac{1}{q^2}$$

La capacité maximale de stockage est 3 tonnes.

a) Pour quels volumes de commande le CTC est-il inférieur à 5 000 € ?

b) Quel volume de commande minimise le CTC ?