

Examen de Turbulence

Vendredi 27 Novembre 2020

Durée : 3 heures - sans document

1 Modélisation $k - \epsilon$ d'un écoulement cisailé homogène

On considère un écoulement de cisaillement homogène statistiquement stationnaire décrit par un champ moyen $\bar{u}_x(y) = Sy$, avec $S > 0$. A cet écoulement moyen se superposent des fluctuations turbulentes u'_i , telles que l'énergie cinétique turbulente k et le taux de dissipation d'énergie par unité de masse ϵ sont tous deux homogènes et stationnaires.

On rappelle que le modèle $k - \epsilon$ est construit à partir de deux équations de transport pour les champs k et ϵ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \epsilon,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \epsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + c_1 \frac{P\epsilon}{k} - c_2 \frac{\epsilon^2}{k}.$$

1. Rappeler l'expression de k et de ϵ .
2. Rappeler l'expression générale du terme de production d'énergie cinétique turbulente P , et donner son expression ici en fonction de S et d'une composante du tenseur $u'_i u'_j$. Par un argument de type "particule déplacée", expliquer pourquoi on doit avoir $P > 0$.
3. Que deviennent les deux équations de transport dans ce problème ? Quelle relation doivent satisfaire les constantes c_1 et c_2 ici ?
4. Rappeler l'expression de la viscosité turbulente en fonction de k et ϵ , en faisant intervenir la constante sans dimension c_μ . Montrer que ce problème permet d'identifier la valeur de c_μ en fonction de k , ϵ et S .
5. On considère maintenant que l'écoulement est confiné dans un espace de dimension caractéristique L . On note u' l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse turbulente. Montrer que l'échelle de Kolmogorov peut s'écrire

$$\eta \simeq L Re^n \left(\frac{u'}{SL} \right)^p,$$

où $Re = u'L/\nu$ est le nombre de Reynolds turbulent, et n, p deux exposants que l'on identifiera. Commenter les cas limites $S \ll u'/L$ et $S \gg u'/L$.

2 Approche spectrale du déclin d'une turbulence homogène

Attention : dans cet exercice, k désigne le nombre d'onde, exprimé en m^{-1} . L'énergie cinétique turbulente par unité de masse, habituellement notée k , est ici notée $e_c = \overline{u_i u_i}/2$.

On considère une turbulence homogène et isotrope, d'échelle intégrale L et de vitesse quadratique moyenne selon chacune des 3 directions donnée par u' . On rappelle le spectre d'énergie de Kolmogorov (loi dite "des 5/3") :

$$E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3},$$

pour des nombres d'onde k compris dans l'intervalle $[k_0, k_\eta]$ (domaine inertiel), avec C la constante de Kolmogorov, et ϵ le taux de dissipation d'énergie par unité de masse.

1. Rappeler (en quelques lignes, avec schéma explicatif) les mécanismes physiques de la cascade d'énergie.
2. On admet que la borne inférieure du domaine inertiel s'écrit $k_0 = 1/L$. Proposer par analyse dimensionnelle une expression pour le nombre d'onde de Kolmogorov k_η en fonction de ν et ϵ . Montrer que l'on a

$$\frac{k_\eta}{k_0} \propto Re^{3/4},$$

où $Re = u'L/\nu$ est le nombre de Reynolds turbulent.

3. Quel est l'équivalent de la loi des 5/3 pour la fonction de structure longitudinale d'ordre 2 ?
4. L'énergie cinétique par unité de masse de_c comprise entre k et $k + dk$ est $E(k)dk$. En supposant que l'essentiel de l'énergie est compris dans l'intervalle $[k_0, k_\eta]$, calculer e_c en fonction de ϵ , k_0 et k_η . Que devient e_c dans la limite $Re \gg 1$?
5. Justifier pourquoi, pour une turbulence homogène et isotrope, l'énergie cinétique est nécessairement une fonction décroissante du temps, et qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$\frac{de_c}{dt} = -\epsilon(t).$$

Intégrer cette équation différentielle en supposant que L reste indépendant du temps, et en déduire que la dissipation suit une loi de la forme

$$\epsilon(t) = \epsilon_0(1 + t/\tau)^{-p},$$

où l'on identifiera l'exposant p (l'expression de τ n'est pas demandée).

6. En déduire que l'énergie cinétique et le nombre d'onde k_η évoluent comme

$$e_c(t) = e_{c0}(1 + t/\tau)^{-n}, \quad k_\eta(t) = k_{\eta0}(1 + t/\tau)^{-q},$$

et identifier les exposants n et q .

7. Représenter le spectre d'énergie $E(k)$ à plusieurs instants t sur un même graphique, en faisant bien apparaître le domaine inertiel et le domaine dissipatif.
8. Des mesures expérimentales en soufflerie montrent que le déclin de l'énergie cinétique suit une loi en $t^{-1.25}$ à temps long. Comment expliquer la différence avec l'exposant n calculé ici ? Quelle modification faudrait-il apporter à ce modèle pour reproduire une loi de déclin d'énergie plus proche des résultats expérimentaux ?

3 Écoulement turbulent dans un canal plan rugueux

On considère un écoulement stationnaire dans un canal plan, de longueur L (selon x) et d'épaisseur $2h$ (selon y). Les parois du canal sont couvertes de rugosités d'épaisseur $e \ll h$ (voir la figure 1). Dans ce problème, on note $\epsilon = e/h$ la rugosité normalisée (*attention, ici ϵ n'est pas la dissipation d'énergie !*) Cet écoulement est généré par une différence de pression Δp imposée entre l'entrée et la sortie du canal. La distance entre les parois latérales (selon z) est supposée suffisamment grande par rapport à h pour que l'écoulement puisse être considéré comme bidimensionnel. De plus, on se place suffisamment loin de l'entrée du canal ($x \gg h$) pour que toutes les quantités statistiques basées sur la vitesse soient invariantes par translation selon x .

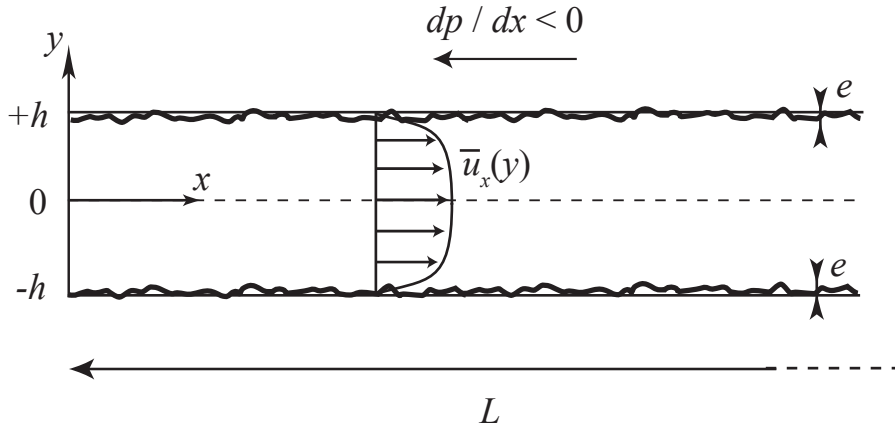


Figure 1: Écoulement dans un canal plan avec parois rugueuses.

Afin de décrire le profil de vitesse dans le cas turbulent, on utilise le modèle empirique suivant, obtenu en généralisant le profil de Poiseuille laminaire :

$$\bar{u}_x(y) = U_{max} \left(1 - \left| \frac{y}{h} \right|^n \right), \quad (1)$$

avec $n \geq 2$ un exposant dépendant du nombre de Reynolds.

1. Montrer que la vitesse débitante U_q (vitesse moyennée sur la hauteur du canal) vaut

$$U_q = \frac{n}{n+1} U_{max}.$$

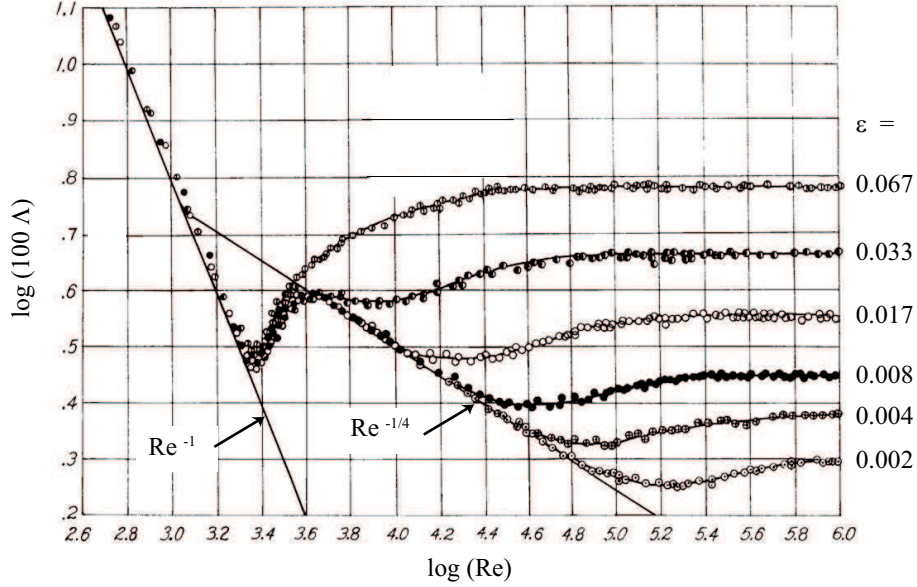


Figure 2: Coefficient de perte de charge Λ en fonction du nombre de Reynolds $Re = 2hU_q/\nu$, pour différentes valeurs de rugosité normalisée $\epsilon = e/h$. Figure adaptée des mesures en tube circulaire de Nikuradse (1932).

2. Exprimer la contrainte τ_0 sur une des plaques, en fonction de η , U_q , h et n (on prendra $\tau_0 > 0$ par convention). En déduire le coefficient de perte de charge

$$\Lambda = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_q^2}, \quad (2)$$

en fonction de n et du nombre de Reynolds $Re = 2hU_q/\nu$.

La figure 2 représente des mesures expérimentales du coefficient Λ en fonction de Re , pour différentes valeurs de rugosité ϵ . On distingue 4 régimes :

- I- Régime laminaire, pour lequel $\Lambda = C_1 Re^{-1}$;
- II- Régime transitionnel ;
- III- Régime turbulent sans influence de la rugosité, pour lequel $\Lambda = C_3 Re^{-1/4}$;
- IV- Régime turbulent avec influence de la rugosité, pour lequel $\Lambda = \Lambda_t(\epsilon)$.

3. A partir de l'expression de Λ (2), déterminer la valeur de C_1 .
4. On se place maintenant dans le régime III. Exprimer n en fonction de Re et C_3 , et en déduire que le rapport U_q/U_{max} peut s'écrire sous la forme

$$\frac{U_q}{U_{max}} = 1 - \alpha Re^{-3/4},$$

où α est une constante que l'on identifiera en fonction de C_3 . Tracer l'allure de ce rapport en fonction de Re .

5. Rappeler l'expression de la vitesse de friction u^* en fonction de τ_0 , ainsi que l'expression de l'épaisseur de sous-couche visqueuse δ_v . En déduire, toujours dans le régime III,

$$\frac{\delta_v}{h} = \beta Re^{-7/8},$$

où β est une constante que l'on identifiera en fonction de C_3 .

6. On suppose que, lorsque le nombre de Reynolds augmente, la sous-couche visqueuse s'affine jusqu'à atteindre l'épaisseur de rugosité e : c'est la transition entre les régimes III et IV. Au-delà, c'est la rugosité qui limite l'épaisseur de la sous-couche visqueuse. Montrer que cette transition a lieu lorsque le nombre de Reynolds atteint une valeur critique $Re_c(\epsilon)$ de la forme :

$$Re_c(\epsilon) \propto \epsilon^\gamma.$$

Déterminer la valeur de l'exposant γ . Que pensez-vous physiquement de la limite $\epsilon \rightarrow 0$?

7. Dans le régime IV, le coefficient Λ ne dépend plus de Re mais uniquement de ϵ : exprimer cette dépendance, et commenter physiquement le résultat obtenu.