

TD3 – FONCTIONS USUELLES

Objectifs : à la fin de cette séance **vous devriez être capable :**

- 1) d'**énoncer** les domaines de définitions des fonctions usuelles et de les **utiliser** pour **identifier** l'ensemble de définitions d'autres fonctions ;
- 2) d'**énoncer** les propriétés des fonctions logarithmiques et exponentielles et de les **utiliser** pour **simplifier** des expressions.

Sommaire

1 Domaines de définition	2
1.1 QUIZZ Cours	2
1.2 Exercices travaillés	3
2 Fonctions logarithmiques et exponentielles	5
2.1 QUIZZ Cours	5
2.2 Exercices travaillés	7

1 Domaines de définition

1.1 QUIZZ Cours

1)	$f(x) = \frac{1}{x}$ est définie ssi $x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$
2)	$f(x) = x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) est définie ssi $x \in \mathbb{R}$
3)	$f(x) = \sqrt{x}$ est définie ssi $x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$
4)	$f(x) = x^{1/5}$ est définie ssi $x \in \mathbb{R}$
5)	$f(x) = e^x$ est définie ssi $x \in \mathbb{R}$
6)	$f(x) = 3^x$ est définie ssi $x \in \mathbb{R}$
7)	$f(x) = \ln(x)$ est définie ssi $x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+*}$
8)	$f(x) = \log_{10}(x)$ est définie ssi $x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+*}$

1.2 Exercices travaillés

Pour identifier l'ensemble de définition d'une fonction il faut se poser les questions suivantes :

– **Est-ce que l'on divise ?** $f(x) = \frac{1}{g(x)}$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x : g(x) = 0\}$$

il faut donc résoudre l'équation $g(x) = 0$

– **Y a-t-il une racine ?** $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$$\mathcal{D}_f = \{x : g(x) \geq 0\}$$

il faut donc résoudre l'inéquation $g(x) \geq 0$

– **Y a-t-il un logarithme ?** $f(x) = \ln(g(x))$

$$\mathcal{D}_f = \{x : g(x) > 0\}$$

il faut donc résoudre l'inéquation $g(x) > 0$

– **Sinon, on est dans le cas général.**

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

Exercice 1 (Domaines de définitions).

En suivant la méthode précédente, donner les domaines de définitions des fonctions suivantes :

1)	$f(x) = x + \sqrt{x} + 2$ il y a une racine :
2)	$O(p) = p + 3 \ln(p)$ il y a un log :
3)	$D(q) = q^3 + e^q$ cas général :
4)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$ on divise et il y a une racine :
5)	$B(v) = v^2 + v - 2$ cas général :
6)	$f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ il y a un log :

2 Fonctions logarithmiques et exponentielles

2.1 QUIZZ Cours

1)	$x^n \times x^m = x^{n+m}$ $x^n / x^m = x^{n-m}$ $x^0 = 1$
2)	Pour $u, v > 0$: $\sqrt{u \times v} = \sqrt{u} \times \sqrt{v}$ $\sqrt{u/v} = \sqrt{u}/\sqrt{v}$
3)	pour $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2} = x $ pour $x > 0$: $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \sqrt{x} = x$
4)	$e^u \times e^v = e^{u+v}$
5)	$(e^u)^n = e^u \times \dots \times e^u = e^{u+\dots+u} = e^{n \times u}$
6)	$\ln(u \times v) = \ln(u) + \ln(v)$ $\ln(u/v) = \ln(u) - \ln(v)$
7)	$\ln(u^n) = \ln(u \times \dots \times u) = \ln(u) + \dots + \ln(u) = n \times \ln(u)$

8)	Pour $a > 0$: $a^x = e^{x \times \ln(a)}$
9)	Pour $a > 0$: $\ln(a^x) = x \times \ln(a)$
10)	$\ln(e^x) = x$ $\ln(e) = 1$ $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$
11)	Pour $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$

2.2 Exercices travaillés

Exercice 2 (Simplifications).

Simplifier les expressions suivantes :

1) $p^2/p^3 =$ on se ramène à un produit
 $p^2 \times p^{-3} = p^{-1} = 1/p$

2) $5\sqrt{x} - \sqrt{4x} =$ on fait apparaître \sqrt{x} dans second terme
 $5\sqrt{x} - \sqrt{4} \times \sqrt{x} = 3\sqrt{x}$

3) $e^{2x} e^{3x} =$ produit d'exp = exp de la somme
 $e^{2x+3x} = e^{5x}$

4) $\ln(x^2) - \ln(x) =$ somme de log = log des produits
 $\ln(x^2) + \ln(x^{-1}) = \ln(x^2 \times x^{-1}) = \ln(x)$

5) $(v^2)^3 = (v \cdot v \times (v \cdot v) \times (v \cdot v)) = v^6$

6) $x/\sqrt{x} = x \times x^{-1/2} = x^{1-1/2} = x^{1/2} = \sqrt{x}$

7) $e^{t^2}/e^t = e^{t^2} \times e^{-t} = e^{t^2-t}$

$$8) \ln(e^{7p}) = 7p$$

$$9) e^{x^2} \times (e^x)^2 = e^{x^2} \times e^{2x} = e^{x^2+2x}$$

$$10) \ln(e^{-2y}) = -2y$$

$$11) e^{-\ln(3)} = e^{\ln(3^{-1})} = 1/3$$

$$12) \ln(1/e^z) = \ln(e^{-z}) = -z$$

$$13) \ln((e^x)^3) = \ln(e^{3x}) = 3x$$

$$14) \ln(x) + \ln(1/x) = \ln(x \times x^{-1}) = \ln(1) = 0$$