TD4 – ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Objectifs : à la fin de ces séances **vous devriez être capable** :

1) de **résoudre** des équations et des inéquations ;
2) de **formaliser** une problématique d'économie ou de gestion à l'aide d'équations et d'inéquations et de la **résoudre**.

Sommaire

1 Équations

1.1 QUIZZ Cours

1) Pour $a \neq 0$: $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -b/a$

2) Pour $a \neq 0$: $ax^2 + bx + c = 0$

Étape 1 : On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

Étape 2 : On rappelle les formules des solutions éventuelles :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Nb de solutions	2	1	pas de solution
$x =$	$\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$\dfrac{-b}{2a}$	$\emptyset$

Étape 3 : On utilise sa calculatrice pour faire l'application numérique

3)	Pour $a > 0$: $x^2 = a \Leftrightarrow x = -\sqrt{a}$ ou $-\sqrt{a}$
4)	Pour $a > 0$: $a^x = b \Leftrightarrow e^{x\ln(a)} = b \Leftrightarrow x\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow x = ln(b)/ln(a)$
5)	Pour $\cancel{a > 0}$: $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$ a appartient à IR
6)	Pour a > 0 : e^x = a ssi x = ln(a)

1.2 Exercices travaillés

Exercice 1 (Attention à la méthode !).
Pour résoudre l'équation $3x^2 = 9x$ dans $\mathbb{R}$, on propose la méthode suivante :

$$3x^2 = 9x \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3.$$

a) Indiquer pourquoi cette méthode n'est pas correcte.

Diviser par x qui peut être nul !

b) Résoudre cette équation.

1) On cherche x solution de Eq : $3x^2 = 9x$
2) les fonctions sont **toutes** définies sur $\mathbb{R}$
3) Eq $\Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-3) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$ ou $x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$
4) Les solutions sont donc $x = 0$ ou $x = 3$

AVEC DE LA MÉTHODE ON ÉVITE LES ERREURS!!!!!

Exercice 2 (Résolution d'équations).

Méthode à suivre pour résoudre une équation :

- **Étape 1 : Expliciter l'inconnue** : « On cherche $x =?$ solution de l'équation $P(x) = Q(x)$ »
- **Étape 2 : Identifier l'ensemble de définition**
- **Étape 3 : Se ramener à une équation usuelle** en utilisant les propriétés d'équivalence du cours
- **Étape 4 : Conclure** : « On a donc $x = ...$ »

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $6x - 11 = -1 + x$	**b)** $\dfrac{2q+1}{q-3} = 1$	**c)** $(2x+1)(x-3) = 0$
d) $2x^2 - x - 3 = 0$	**e)** $x^2 - 6x + 9 = 0$	**f)** $x^2 + 10x + 26 = 0$
g) $e^{x-3} = 1$	**h)** $2e^{x-3} = 4$	**i)** $e^{x^2}\, e^{-6x+9} = 1$
j) $3^x = 7$	**k)** $x^3 = 7$	**l)** $6\sqrt{x} - 11 = -1 + \sqrt{x}$
m) $\ln(3x+1) = 2$	**n)** $\ln(x) + \ln(x-2) = 0$	**o)** $-5\,x + 20\,\sqrt{x} - \dfrac{5}{2} = 0$

2 Inéquations

2.1 QUIZZ Cours

1) Pour $a \neq 0$: signe de $f(x) = ax + b$

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
signe de $ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

2) Pour $a \neq 0$: signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

1) On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$ et on résout $ax^2 + bx + c = 0$
2) On donne le tableau des signes (voir cours)
$\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x		x1		x2	
signe de $ax^2 + bx + c$		0		0	

$\Delta = 0$: $f(x) = a(x - \frac{b}{2a})^2$

x		-b/2a	
signe de $ax^2 + bx + c$		0	

$\Delta < 0$: $f(x)$ n'admet pas de factorisation

x	
signe de $ax^2 + bx + c$	

3)	Résoudre $\ln(f(x)) \leq a$ $Def = ?$ $(Eq) \Leftrightarrow f(x) \leq \exp(a)$ la fonction exp est croissante
4)	Pour $a > 0$, résoudre $e^{f(x)} \leq a$ $Def = ?$ $(Eq) \Leftrightarrow f(x) \leq \ln(a)$ la fonction ln est croissante
5)	Pour $a > 0$, résoudre $b^{f(x)} \leq a$ $Def = ?$ $(Eq) \Leftrightarrow f(x)\ln(b) \leq \ln(a)$ la fonction ln est croissante

2.2 Exercices travaillés

Exercice 3 (Attention à la méthode !).

Pour résoudre l'équation $\dfrac{4}{x} > x$ dans $\mathbb{R}$, on propose la méthode suivante :

$$\frac{4}{x} > x \Leftrightarrow 4 > x^2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

a) Indiquer pourquoi cette méthode n'est pas correcte.

Multiplier par x qui peut être négatif !

b) Résoudre cette inéquation.

1) On cherche x solution de InEq : $\frac{4}{x} > x$
2) les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^*$
3) InEq $\Leftrightarrow \frac{4}{x} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x} > 0$
on étudie le signe du rapport !!!

x		-2		0		2	
signe de x	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$
signe de $4-x^2$	$-$	0	$+$	4	$+$	0	$-$
signe de $\dfrac{4-x}{x}$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$

4) Les solutions sont donc $x < -2$ ou $0 < x < 2$

AVEC DE LA MÉTHODE ON ÉVITE LES ERREURS !!!!!

Exercice 4 (Résolution d'inéquations).

Méthode à suivre pour résoudre une inéquation :

- **Étape 1 : Expliciter l'inconnue** : « On cherche $x =?$ solution de l'inéquation $P(x) \leq Q(x)$ »
- **Étape 2 : Identifier l'ensemble de définition**
- **Étape 3 : Se ramener à une inéquation usuelle** en utilisant les propriétés d'équivalence du cours
- **Étape 4 : Conclure** : « On a donc $x = ; > ; < ; \leq ; \geq$ ... »

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $6x - 11 \leq -1 + x$ **b)** $\dfrac{x+2}{x-1} > 0$ **c)** $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{x}{x+1}$

d) $2x^2 + 11x - 21 < 0$ **e)** $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ **f)** $x^2 + 10x + 26 \geq 0$

g) $2e^{x-3} < 4$ **h)** $3^x > 7$ **i)** $\ln(3x+1) \leq 2$

j) $6\sqrt{x} - 11 \geq -1 + \sqrt{x}$ **k)** $(\ln(x))^2 - 6\ln(x) + 9 > 0$ **l)** $x^3 < 7$

m) $\dfrac{3}{1+e^{(t-1)}} \geq \dfrac{13}{5}$ **n)** $-5v\, e^{(v-1)} + 13\, e^{(v-1)} \leq 0$ **o)** $6x^2 - 4x \leq 0$

3 Cas pratiques

Dans les exercices qui suivent il vous est demandé de :

1) **Formaliser l'énoncé**

Variables	**Fonctions**
$x = ...$ *Expliciter l'unité ! (kg, tonnes, etc.)*	$y = ...$ *Expliciter l'unité ! (€, K €,* etc.) $= f(x)$ *Donner la fonction*

2) **Formaliser chacune des questions :**

- **Étape 1 : Expliciter l'inconnue** et **Trouver une équation ou inéquation vérifiée par cette inconnue :** « On cherche $x =?$ telle que : $f(x) = ; \leq ; \geq ; > ; < \quad 0$ »
- **Étape 2 : Identifier l'ensemble de définition**
- **Étape 3 : Résoudre l'équation ou inéquation** en utilisant les équivalences : $\ldots \Leftrightarrow \ldots$
- **Étape 4 : Conclure** : « On a donc $x \ = ; \in ...$ » (*en précisant bien l'unité !*)

Avertissement :
Lors des contrôles, si l'une des étapes n'est pas faite, la suite n'est pas corrigée ! !

Exercice 5 (Économie).
L'offre $O(p)$ et la demande $D(p)$ désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné p.
Une étude économique concernant une matière première a permis d'établir que pour un prix $5 \leq p \leq 12$ en €, l'offre et la demande exprimées en tonnes sont égales à :

$$D(p) = -0,1\,p^2 + 0,7\,p + 9 \qquad ; \qquad O(p) = 0,4\,p + 3,6.$$

a) Calculer l'offre et la demande pour un prix de 7€ : quel est le problème ?
b) Calculer l'offre et la demande pour un prix de 10€ : quel est le problème ?
c) Pour quel prix a-t-on l'équilibre $O(p) = D(p)$?
d) Quelle est alors la quantité associée ?

Exercice 6 (Calcul des coûts).
Une coopérative agricole estime que pour v tonnes d'abricot vendus, le bénéfice est égal à :

$$B(v) = \exp(3\,v - 7) - 2 \qquad \text{pour} \quad v \geq 0.$$

Le volume total des ventes sur n mois est égal à :

$$VT(n) = \ln(3\,n - 1) \qquad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

a) On appelle « seuil de rentabilité » le volume des ventes pour lequel le bénéfice est nul. Calculer le seuil de rentabilité.
b) On appelle « point mort » le nombre de mois à partir duquel on dépasse le seuil de rentabilité. Calculer le point mort.

Exercice 7 (Gestion financière).
Un capital C_0 est placé sur un compte à long terme au taux annuel de t. Sa valeur acquise, C_n, au bout de n années est égale à

$$C_n = C_0\,(1 + t)^n.$$

a) Si l'on place 10 000€ à un taux de 5% par an : au bout de combien d'années aura-t-on doublé notre capital initial ?
b) Combien faut-il placer, à un taux de 5% par an, pour obtenir 20 000€ au bout de 4 ans ?
c) À quel taux doit-on placer 10 000€ pour obtenir 20 000€ au bout de 3 ans ?

Exercice 8 (Gestion financière).
Un capital C_0 est placé sur un compte à court terme au taux mensuel de t. Sa valeur acquise, C_n, au bout de n mois est égale à

$$C_n = C_0\,(1 + n\,t).$$

a) Si l'on place 10 000€ à un taux de 0,5% par mois : au bout de combien de mois aura-t-on doublé notre capital initial ?
b) Combien faut-il placer, à un taux de 0,5% par mois, pour obtenir 20 000€ au bout de 4 mois ?
c) À quel taux doit-on placer 10 000€ pour obtenir 20 000€ au bout de 3 mois ?

Exercice 9 (Contrôle de gestion et gestion prévisionnelle).
On estime que le nombre moyen de produits vendus (en million) au cours de l'année $2015+n$ est égal à

$$T(n) = (1,7)^n \qquad \text{pour} \qquad n \geq 1.$$

a) Quelle sera, en moyenne, la quantité vendue l'an prochain ?

b) Au cours de quelle année les ventes vont-elles, en moyenne, dépasser 4 millions ?