1.2 Exercices travaillés

Exercice 1 (Attention à la méthode !).

Pour résoudre l'équation $3x^2 = 9x$ dans IR, on propose la méthode suivante : $3x^2 = 9x \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$.

a) Indiquer pourquoi cette méthode n'est pas correcte.

Attention : simplifier (donc diviser ici) par x qui peut être nul !!!!!

b) Résoudre cette équation

1) On cherche x solution de l'équation : $3x^2 = 9x$

2) les fonctions sont définies sur IR (x = 0 pourrait être solution)

3) $3x^2 = 9x \Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 9) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $3x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$

4) Les solutions de l'équation sont donc $x = 0$ ou $x = 3$.

Exercice 2 (Résolutions d'équations)

a)

- On cherche x solution de l'équation : $6x - 11 = -1 + x$
- L'équation est définie sur IR
- $6x - 11 = -1 + x \Leftrightarrow 6x - x = -1 + 11 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$
- Les solutions de l'équation sont : $x = 2$

c)

- On cherche x solution de l'équation : $(2x + 1)(x - 3) = 0$
- L'équation est définie sur IR
- $(2x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 3$
- Les solutions de l'équation sont : $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 3$

d)

• On cherche x solution de l'équation : $2x^2 - x - 3 = 0$

• L'équation est définie sur IR

• $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 25 > 0$

L'équation admet donc deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2*2}$ ou $x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2*2}$

$x_1 = -1$ ou $x_2 = \frac{3}{2}$

• Les solutions de l'équation sont : $x_1 = -1$ ou $x_2 = \frac{3}{2}$

f)

• On cherche x solution de l'équation : $x^2 + 10x + 26 = 0$

• L'équation est définie sur IR

• $\Delta = b^2 - 4ac = (10)^2 - 4(1)(26) = -4 < 0$

• Les solutions de l'équation sont : vide

g)

• On cherche x solution de l'équation : $e^{x-3} = 1$

• L'équation est définie sur IR (cas général)

• $e^{x-3} = 1 \Leftrightarrow x - 3 = \ln(1) \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

• Les solutions de l'équation sont : $x = 3$

m)

• On cherche x solution de l'équation : $\ln(3x + 1) = 2$

• (Attention : une fonction ln). L'équation est définie pour tout x tel que $3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$

• $\ln(3x + 1) = 2 \Leftrightarrow 3x + 1 = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2-1}{3}$ remarque : $\frac{e^2-1}{3} > -\frac{1}{3}$

• Les solutions de l'équation sont : $x = \frac{e^2-1}{3}$

h) On cherche x solution de l'équation : $2e^{x-3} = 4$

• L'équation est définie sur IR (cas général)

• $2e^{x-3} = 4 \Leftrightarrow e^{x-3} = 2 \Leftrightarrow x - 3 = \ln(2) \Leftrightarrow x = \ln(2) + 3$

• Les solutions de l'équation sont : $x = \ln(2) + 3$

n)

• On cherche x solution de l'équation : $\ln(x) + \ln(x-2) = 0$

• (Attention : une fonction ln). L'équation est définie pour tout x tel que :

$x > 0$ ET $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ ET $x > 2 \Leftrightarrow x > 2$

• $\ln(x) + \ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow \ln\big((x) * (x-2)\big) = 0 \Leftrightarrow (x) * (x-2) = e^0 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 8 > 0$$

L'équation admet donc deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2*1}$ ou $x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2*1}$

$x_1 = 1 - \sqrt{2}$ ou $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ remarque : $1 - \sqrt{2} < 2$ et $1 + \sqrt{2} > 2$

• Les solutions de l'équation sont : $x = 1 + \sqrt{2}$

b)

• On cherche x solution de l'équation : $\frac{2q+1}{q-3} = 1$

• L'équation est définie sur IR \ {3}

• $\frac{2q+1}{q-3} = 1 \Leftrightarrow 2q + 1 = q - 3 \Leftrightarrow q = -4$

• Les solutions de l'équation sont : $q = -4$

e)

• On cherche x solution de l'équation : $x^2 - 6x + 9 = 0$

• L'équation est définie sur IR (cas général)

• $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$$

L'équation admet donc une solution (dite double) :

$x_1 = \frac{-b}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-6)}{2*1}$

$x_1 = 3$

• Les solutions de l'équation sont : $x = 3$

i)

• On cherche x solution de l'équation : $e^{x^2}e^{-6x+9} = 1$

• L'équation est définie sur IR (cas général)

• $e^{x^2}e^{-6x+9} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2-6x+9} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$$

L'équation admet donc une solution (dite double) :

$x_1 = \frac{-b}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-6)}{2*1}$

$x_1 = 3$

• Les solutions de l'équation sont : $x = 3$

j) On cherche x solution de l'équation : $3^x = 7$

• L'équation est définie sur IR (cas général)

• $3^x = 7 \Leftrightarrow x * \ln(3) = \ln(7) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(7)}{\ln(3)}$

• Les solutions de l'inéquation sont : $x = \frac{\ln(7)}{\ln(3)}$

k) On cherche x solution de l'équation : $x^3 = 7$

• L'équation est définie sur IR (cas général)

• $x^3 = 7 \Leftrightarrow x = 7^{\frac{1}{3}}$

• Les solutions de l'inéquation sont : $x = 7^{\frac{1}{3}}$

l) On cherche x solution de l'équation : $6\sqrt{x} - 11 = -1 + \sqrt{x}$

• (Attention : une fonction racine). L'équation est définie pour tout x tel que : $x \geq 0$

• $6\sqrt{x} - 11 = -1 + \sqrt{x} \Leftrightarrow 6\sqrt{x} - \sqrt{x} = -1 + 11 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$

• Les solutions de l'inéquation sont : $x = 4$

o) On cherche x solution de l'équation : $-5x + 20\sqrt{x} - \frac{5}{2} = 0$

• (Attention : une fonction racine). L'équation est définie pour tout x tel que : $x \geq 0$

• En posant X = $\sqrt{x}$, on a pour tout X ≥ 0, $X^2 = x$. D'où :

$-5x + 20\sqrt{x} - \frac{5}{2} = 0$ revient à résoudre, pour tout $x \geq 0$, $-5X^2 + 20X - \frac{5}{2} = 0$ $(X \geq 0)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (20)^2 - 4(-5)\left(-\frac{5}{2}\right) = 350 > 0$$

L'équation admet donc deux solutions distinctes :

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$X_1 = \frac{-(20)-\sqrt{350}}{2*(-5)}$ ou $X_2 = \frac{-(20)+\sqrt{350}}{2*(-5)}$

$X_1 = \frac{20+\sqrt{350}}{10} = \frac{4+\sqrt{14}}{2}$ ou $X_2 = \frac{4-\sqrt{14}}{2}$ remarque : $\frac{4+\sqrt{14}}{2} > 0$ et $\frac{4-\sqrt{14}}{2} > 0$

On a donc : $\frac{4+\sqrt{14}}{2} = \sqrt{x_1}$ et $\frac{4-\sqrt{14}}{2} = \sqrt{x_2}$

• Les solutions de l'équation sont : $x_1 = \left(\frac{4+\sqrt{14}}{2}\right)^2$ et $x_2 = \left(\frac{4+\sqrt{14}}{2}\right)^2$

2 INEQUATIONS

2.1 QUIZZ Cours

2) Exemple :

• $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$ il y a une racine et on divise : $x^2 + x - 2 > 0$ (il faudrait résoudre cette inéquation : voir feuille 4)

• On cherche x solution de l'inéquation : $x^2 + x - 2 > 0$

• L'inéquation est définie sur IR

• Dans un premier temps, nous cherchons les racines de $x^2 + x - 2$, c'est à dire les solutions x de l'équation : $x^2 + x - 2 = 0$

• $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-2) = 9 > 0$

L'équation admet donc deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-(1)-\sqrt{9}}{2*1}$ ou $x_2 = \frac{-(1)+\sqrt{9}}{2*1}$

$x_1 = -2$ ou $x_2 = 1$

Puis, dans un second temps, le tableau de signe : comme $a = 1 > 0$, on a

x		-2		1	
$x^2 + x - 2$	+	0	-	0	+

Donc l'ensemble de définition de f est : $\mathcal{D} : x \in]-\infty\,;\, -2[\cup]\,1\,;\, +\infty[$

Exercice 4 (Résolutions d'inéquations)

a)

• On cherche x solution de l'inéquation : $6x - 11 < -1 + x$

• L'inéquation est définie sur IR

• $6x - 11 < -1 + x \Leftrightarrow 6x - x < -1 + 11 \Leftrightarrow 5x < 10 \Leftrightarrow x < 2$

• Les solutions de l'inéquation sont : $x < 2$ ou $x \in]-\infty\,;\, 2[$

b)

On cherche x solution de l'inéquation : $\frac{x+2}{x-1} > 0$

• (Attention : on divise) L'inéquation est définie sur IR\{1}

• Tableau de signe :

x		-2		1	
$x + 2$	-	0	+		+
$x - 1$	-		-	0	+
$\frac{x+2}{x-1}$	+	0	-	||	+

• Les solutions de l'inéquation sont : $x < -2$ ou $x > 1$ ou $x \in]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]\,1\,;\,+\infty[$

d)

• On cherche x solution de l'inéquation : $2x^2 + 11x - 21 < 0$

• L'inéquation est définie sur IR

• Dans un premier temps, nous cherchons les racines de $2x^2 + 11x - 21$, c'est à dire les solutions x de l'équation : $2x^2 + 11x - 21 = 0$

• $\Delta = b^2 - 4ac = (11)^2 - 4(2)(-21) = 289 > 0$

L'équation admet donc deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-(11)-\sqrt{289}}{2*2}$ ou $x_2 = \frac{-(11)+\sqrt{289}}{2*2}$

$x_1 = -7$ ou $x_2 = \frac{3}{2}$

Puis, dans un second temps, le tableau de signe : comme $a = 2 > 0$ on a

x		-7		1,5	
$2x^2 + 11x - 21$	+	0	-	0	+

• Les solutions de l'inéquation sont : $-7 < x < 1{,}5$ ou $x \in]-7\,;\,1{,}5[$

g) On cherche x solution de l'inéquation : $2e^{x-3} < 4$

• L'inéquation est définie sur IR (cas général)

• $2e^{x-3} < 4 \Leftrightarrow e^{x-3} < 2 \Leftrightarrow x - 3 < \ln(2) \Leftrightarrow x < \ln(2) + 3$

• Les solutions de l'inéquation sont : $x < \ln(2) + 3$ ou $x \in]-\infty\,;\,\ln(2) + 3[$

h) On cherche x solution de l'inéquation : $3^x > 7$

• L'inéquation est définie sur IR (cas général)

• $3^x > 7 \Leftrightarrow x * \ln(3) > \ln(7) \Leftrightarrow x > \frac{\ln(7)}{\ln(3)}$

• Les solutions de l'inéquation sont : $x > \frac{\ln(7)}{\ln(3)}$ ou $x \in \left]\frac{\ln(7)}{\ln(3)} ;\ +\infty\right[$

i)

• On cherche x solution de l'inéquation : $\ln(3x+1) \leq 2$

• (Attention : une fonction ln). L'inéquation est définie pour tout x tel que $3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$

• $\ln(3x+1) \leq 2 \Leftrightarrow 3x+1 \leq e^2 \Leftrightarrow x \leq \frac{e^2-1}{3}$ remarque : $\frac{e^2-1}{3} > -\frac{1}{3}$

• Les solutions de l'inéquation sont : $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{e^2-1}{3}$ ou $x \in \left]-\frac{1}{3} ;\ \frac{e^2-1}{3}\right]$

n) On cherche *v* solution de l'inéquation : $-5ve^{v-1} + 13e^{v-1} < 0$

• L'inéquation est définie sur IR (cas général)

• $-5ve^{v-1} + 13e^{v-1} < 0 \Leftrightarrow (-5v+13)e^{v-1} < 0$

Or $e^{v-1} > 0$ pour tout x. Donc $(-5v+13)e^{v-1} < 0 \Leftrightarrow -5v+13 < 0 \Leftrightarrow v > \frac{13}{5}$

• Les solutions de l'inéquation sont : $v > \frac{13}{5}$ ou $v \in \left]\frac{13}{5} ;\ +\infty\right[$

c)

On cherche x solution de l'inéquation : $\frac{1}{x+2} < \frac{x}{x+1}$

• L'inéquation est définie sur IR\{-2 ; -1}

• $\frac{1}{x+2} < \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{1*(x+1) - x*(x+2)}{(x+2)(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-x+1}{(x+2)(x+1)} < 0$

Tableau de signe : une ligne avec le signe de $-x^2 - x + 1$, une avec le signe de $(x+2)$ et une avec le signe de $x+1$.

On obtient comme solution : $x \in \left]-\infty ;\ -2\right[\cup \left]-1 ; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2} ;\ +\infty\right[$

e)

• On cherche x solution de l'inéquation : $x^2 - 6x + 9 < 0$

• L'inéquation est définie sur IR

• Dans un premier temps, nous cherchons les racines de $x^2 - 6x + 9$, c'est à dire les solutions x de l'équation : $x^2 - 6x + 9 = 0$

• $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$

L'équation admet donc une solution (dite double) :

$x_1 = \frac{-b}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-6)}{2*1}$

$x_1 = 3$

Puis, dans un second temps, le tableau de signe : comme $a = 1 > 0$ on a $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ pour tout x.

• Les solutions de l'inéquation sont : vide

f)

• On cherche x solution de l'inéquation : $x^2 + 10x + 26 \geq 0$

• L'équation est définie sur IR

• Dans un premier temps, nous cherchons les racines de $x^2 + 10x + 26$, c'est à dire les solutions x de l'équation : $x^2 + 10x + 26 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (10)^2 - 4(1)(26) = -4 < 0$$

Puis, dans un second temps, le tableau de signe : comme $a = 1 > 0$ on a $x^2 + 10x + 26 > 0$ pour tout x.

• Les solutions de l'inéquation sont : IR

l)

• On cherche x solution de l'inéquation : $x^3 < 7$

• L'équation est définie sur IR

• $x^3 < 7 \Leftrightarrow x < 7^{\frac{1}{3}}$

• Les solutions de l'inéquation sont : $\left]-\infty\ ;\ 7^{\frac{1}{3}}\right[$

3 CAS PRATIQUES

Exercice 5 (Economie)

a) $D(7) = 9$ et $O(7) = 6{,}4$. On remarque que pour ce prix (7 euros) la demande est supérieure à l'offre (n'est-il pas vendu trop peu cher ?).

b) $D(10) = 6$ et $O(10) = 7{,}6$. On remarque que pour ce prix (10 euros) l'offre est supérieure à la demande (n'est-il pas vendu trop cher ?).

c)

• On cherche p en euros solution de l'équation : $D(p) = O(p)$

• L'équation est définie sur [5 ; 12]

• $D(p) = O(p) \Leftrightarrow -0{,}1p^2 + 0{,}7p + 9 = 0{,}4p + 3{,}6 \Leftrightarrow -0{,}1p^2 + 0{,}3p + 5{,}4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0{,}3)^2 - 4(-0{,}1)(5{,}4) = 2{,}25 > 0$$

L'équation admet donc deux solutions distinctes :

$p_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $p_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$p_1 = \frac{-0{,}3-\sqrt{2{,}25}}{2*(-0{,}1)}$ ou $p_2 = \frac{-0{,}3+\sqrt{2{,}25}}{2*(-0{,}1)}$

$p_1 = 9$ ou $p_2 = -6 < 0$

• Le prix d'équilibre est donc égal à 9 euros.

d) $D(7) = O(7) = 7{,}2$ tonnes

Exercice 6 (Calcul des coûts)

a)

• On cherche v en tonnes solution de l'équation : $B(v) = e^{3v-7} - 2 = 0$

• L'équation est définie sur IR^+ (cas général mais lié à l'exercice)

• $e^{3v-7} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{3v-7} = 2 \Leftrightarrow 3v - 7 = \ln(2) \Leftrightarrow 3v = 7 + \ln(2) \Leftrightarrow v = \frac{7+\ln(2)}{3}$

• Le seuil de rentabilité est donc égal à $v = \frac{7+\ln(2)}{3} \approx 2{,}56$ tonnes d'abricots

b)

• On cherche n en mois solution de l'inéquation : $VT(n) = \ln(3n-1) > \frac{7+\ln(2)}{3}$

• (Attention : une fonction ln). L'équation est définie pour tout $n \geq 1$ (donné dans l'énoncé)

• $\ln(3n-1) > \frac{7+\ln(2)}{3} \Leftrightarrow 3n - 1 > e^{\frac{7+\ln(2)}{3}} \Leftrightarrow n > \frac{e^{\frac{7+\ln(2)}{3}}+1}{3} \approx 4{,}66$ (remarque : $\frac{e^{\frac{7+\ln(2)}{3}}+1}{3} \geq 1$)

• Le point mort est égal à 5 mois.