Université Paris-Saclay — Année 2020-21

Master 2 Dynamique des Fluides et Energétique

Examen de Turbulence

Vendredi 27 Novembre 2020

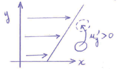
Durée : 3 heures - sans document

1 Modélisation $k - \epsilon$ d'un écoulement cisaillé homogène

1°) $k = \frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'}$ et $\varepsilon = 2\nu\,\overline{s_{ij}'s_{ij}'}$.

2°) $P = -\overline{u_i'u_j'}\,\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$. Ici, seul $\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} = S \neq 0$,

donc $\underline{P = -S\,\overline{u_x'u_y'}}$



une fluctuation $u_y' > 0$ emporte en moyenne une qté de mouvement $\rho\bar{u}_x$ de y à $y + u_y'\Delta t$, dans un environnement de qté de mvt supérieure de $S u_y'\Delta t$.

Donc cela induit une fluctuat° $u_x' < 0$, d'où $\overline{u_x'u_y'} < 0$,
d'où $\underline{P > 0}$: production d'en. cinétique turbulente.

3°) k et ε étant homogènes, on a :

$$\begin{cases} 0 = P - \varepsilon \\ 0 = C_1 \frac{P\varepsilon}{k} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \end{cases}$$

d'où $\underline{C_1 = C_2}$.

4°) $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$.

on a $-\overline{u_x'u_y'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}$, donc $P = \nu_t S^2$

d'où $\underline{C_\mu = \left(\frac{\varepsilon}{Sk}\right)^2}$

5°) $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$, avec $\varepsilon = \sqrt{C_\mu}\,S k$ et $k \simeq u'^2$
$C_\mu \simeq O(1)$

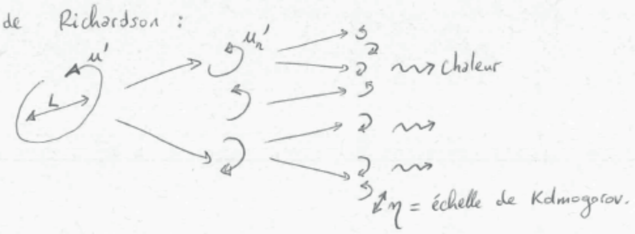
d'où $\eta \simeq \left(\frac{\nu^3}{S u'^2}\right)^{1/4}$

soit $\eta \simeq L\left(\frac{\nu}{u'L}\right)^{3/4}\left(\frac{u'}{SL}\right)^{1/4}$, d'où $\begin{cases} m = -3/4 \\ p = 1/4 \end{cases}$

2 Approche spectrale du déclin d'une turbulence homogène

1°) L'energie des grandes échelles est transférée, via des effets non-linéaires (instabilités, étirement tourbillonnaire) à des échelles inférieures tant que les effets visqueux restent négligeables.

Cascade de Richardson :



2°) $k_\eta \sim \frac{1}{\eta} = \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}$

$\frac{k_\eta}{k_0} = L\left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}$ avec $\varepsilon \simeq \frac{u'^3}{L}$, soit $\frac{k_\eta}{k_0} \simeq \left(\frac{u'^3 L^3}{\nu^3}\right)^{1/4} \simeq Re^{3/4}$

3°) $D_{LL}(r) = \overline{[u_L(x+r) - u_L(x)]^2} \simeq C_0 (\varepsilon r)^{2/3}$ pour $\eta \ll r \ll L$

4°) $e_c = \int_{k_0}^{k_\eta} C\,\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}\,dk = C\,\varepsilon^{2/3}\left[\frac{k^{-2/3}}{-2/3}\right]_{k_0}^{k_\eta}$

$= \frac{3}{2} C\,\varepsilon^{2/3}\left[\frac{1}{k_0^{2/3}} - \frac{1}{k_\eta^{2/3}}\right]$.

Pour $Re \gg 1$, $k_\eta \gg k_0$, d'où $e_c \simeq \frac{3}{2} C \frac{\varepsilon^{2/3}}{k_0^{2/3}}$

5°) La production d'energie cinétique turbulente, $P = -\overline{u_i u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$, est liée à l'existence de gradient d'écoulement moyen $\partial U_i/\partial x_j$. Donc, pour une turbulence homogène et isotrope, $P = 0$, et donc $\frac{de_c}{dt} = -\varepsilon$.

avec $e_c = \frac{3}{2} C\,(\varepsilon L)^{2/3}$, soit $\frac{de_c}{dt} = C\,\varepsilon^{-1/3} L^{2/3}\frac{d\varepsilon}{dt}$.

d'où l'eq. différentielle $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{C}\frac{1}{L^{2/3}}\varepsilon^{4/3}$

$\Rightarrow \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon(t)} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{4/3}} = -\frac{1}{C}\frac{1}{L^{2/3}}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{\varepsilon^{-1/3}}{-1/3}\right]_{\varepsilon_0}^{\varepsilon(t)} = -\frac{t}{C L^{2/3}}$

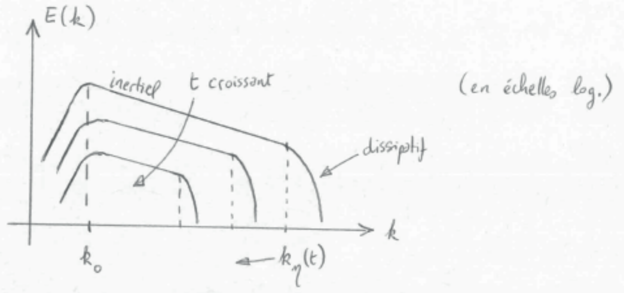
$\Rightarrow \varepsilon(t)^{-1/3} = \varepsilon_0^{-1/3} + \frac{t}{3CL^{2/3}}$, soit $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\left(1 + \frac{\varepsilon_0^{1/3} t}{3CL^{2/3}}\right)^{-3}$

d'où $p = 3$ et $\tau = \frac{3CL^{2/3}}{\varepsilon_0^{1/3}}$

6°) Puisque $\frac{de_c}{dt} = -\varepsilon$, alors $n = p - 1 = 2$

et $k_\eta(t) = \left(\frac{\varepsilon(t)}{\nu^3}\right)^{1/4}$, alors $q = p/4 = 3/4$.

7°)



8°) Le modèle prédit un déclin en t^{-2}, trop rapide par rapport à la réalité, car il suppose L = cst. En réalité, $L(t)$ va croître, ce qui va entraîner un déclin moins rapide.

3 Ecoulement turbulent dans un canal plan rugueux

1°) $$U_q = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \bar{u}_x(y)\, dy = \frac{1}{h}\int_{0}^{h} U_{max}\left(1-\left(\frac{y}{h}\right)^m\right) dy$$

$$= U_{max}\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = \boxed{\frac{m}{m+1}\, U_{max}}$$

Pour un écoulement laminaire, $m=2$, d'où $U_q = \frac{2}{3} U_{max}$.

Pour $m \to \infty$, $U_q \simeq U_{max}$: écoulement "bouchon".

2°) $$\tau_0 = \eta \left.\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}\right|_{y=-h} = -\eta\, U_{max}\, n \left.\frac{y^{n-1}}{h^n}\right|_{y=-h} = \eta\, n\, \frac{U_{max}}{h}$$

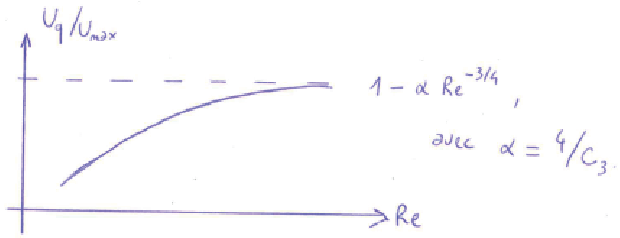
d'où $$\Lambda = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_q^2} = \frac{\eta\, n\, U_{max}/h}{\frac{1}{2}\rho\, U_q^2} = 2\nu\, \frac{(n+1)\, U_q/h}{U_q^2}$$

soit $$\Lambda = 2(n+1)\frac{\nu}{h U_q} = \boxed{4(n+1)/Re}$$

3°) $C_1 = 4(m+1)$ avec $m=2$ (laminaire), soit $\boxed{C_1 = 12}$

4°) $$\frac{U_q}{U_{max}} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \Lambda = C_3\, Re^{-1/4} = \frac{4(n+1)}{Re},$$

d'où $n+1 = \frac{C_3}{4} Re^{3/4}$, soit $\frac{U_q}{U_{max}} = 1 - \frac{4}{C_3} Re^{-3/4}$



5°) $$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad \text{et} \quad \delta_v = \frac{\nu}{u^*}$$

soit $\frac{\delta_v}{h} = \frac{\nu}{h}\sqrt{\frac{\rho}{\tau_0}}$ avec $\tau_0 = \Lambda\, \frac{1}{2}\rho U_q^2$, $\Lambda = C_3\, Re^{-1/4}$

d'où $$\frac{\delta_v}{h} = \frac{\nu}{h}\sqrt{\frac{\rho}{C_3\, Re^{-1/4}\, \frac{1}{2}\rho U_q^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{8}{C_3}}\, Re^{-7/8}}$$

6°) Transition III - IV lorsque $\frac{\delta_v}{h} = \varepsilon$

soit $\varepsilon = \sqrt{\frac{8}{C_3}}\, Re_c^{-7/8} \Rightarrow \boxed{Re_c \propto \varepsilon^{-8/7}}$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, $Re_c \to \infty$: on n'atteint jamais le régime IV pour un canal lisse, et $\Lambda \to 0$.

7°) $$\Lambda(\infty) = \Lambda(Re_c) = C_3\, Re_c^{-1/4} \propto \left(\varepsilon^{-8/7}\right)^{-1/4}$$

d'où $\boxed{\Lambda \propto \varepsilon^{2/7}}$

Plus le canal est rugueux, plus la perte de charge est importante.