Exercice 1 (Méthode pour dériver une fonction)

Exemple 1 : Dériver

$$f(x) = x^3 + 5x + 2 + \frac{2}{x}$$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR^*$ (attention, on divise) je prends tous les nombres sauf x =0

Etape 2 : somme de fonctions usuelles

Etape 3 : $f'(x) = 3x^2 + 5 - \frac{2}{x^2}$

Exemple 2 : Dériver

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{1 - x}$$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR \setminus \{1\}$ (attention, on divise) je prends tous les nombres sauf 1 - x =0

Etape 2 : quotient de fonctions usuelles $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 3x^2 + 1$ et $u'(x) = 6x$ puis $v(x) = 1 - x$ et $v'(x) = -1$

Etape 3 : $f'(x) = \frac{6x(1-x) - (3x^2+1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{6x - 6x^2 + 3x^2 + 1}{(1-x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x + 1}{(1-x)^2}$

Exercice 2 (Calculs de dérivées)

a) $f(x) = x + \sqrt{x} + 2$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR^{+*}$

Etape 2 : somme de fonctions usuelles

Etape 3 : $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $O(p) = p + 3\ln(p)$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR^{+*}$

Etape 2 : somme de fonctions usuelles

Etape 3 : $O'(p) = 1 + \frac{3}{p}$

c) $D(q) = q^3 + e^q$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR$

Etape 2 : somme de fonctions usuelles

Etape 3 : $D'(q) = 3q^2 + e^q$

d) $f(x) = \frac{8}{2x+3}$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR \setminus \{-1{,}5\}$

Etape 2 : quotient de fonctions usuelles $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = 2x + 3$ et $v'(x) = 2$

Etape 3 : $f'(x) = -8 * \frac{2}{(2x+3)^2} = \frac{-16}{(2x+3)^2}$

e) $CT(q) = q\ln(q) - q$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR^{+*}$

Etape 2 : somme et produits de fonctions usuelles : $(u * v)' = u' * v + u * v'$

Etape 3 : $CT'(q) = 1 * \ln(q) + q * \frac{1}{q} - 1 = \ln(q) + 1 - 1 = \ln(q)$

f) $f(x) = \exp\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR$

Etape 2 : exponentielle d'une fonction : $(e^u)' = u' * e^u$ avec $u(x) = x^2 - \frac{3}{2}x$ et $u'(x) = 2x - \frac{3}{2}$

Etape 3 : $f'(x) = \left(2x - \frac{3}{2}\right) * \exp\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)$

g) $f(t) = C_0(1+t)^n$

Etape 1 : si n entier positif, $\mathcal{D} = IR$

Etape 2 : puissance d'une fonction : $(u^n)' = n * u' * u^{n-1}$ avec $u(t) = 1 + t$ et $u'(t) =$

Etape 3 : $f'(t) =$

j) $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR$

Etape 2 : produit et exponentielle d'une fonction : $(e^u)' = u' * e^u$ avec $u(x) = -2x$ et $u'(x) = -2$

Etape 3 :
$f'(x) = (2) * \mathrm{e}^{-2x} + (2x+1)(-2\mathrm{e}^{-2x}) = (2 - 2(2x+1))\mathrm{e}^{-2x} = (2 - 4x - 2)\mathrm{e}^{-2x} =$
$-4x\mathrm{e}^{-2x}$

l) $g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2t}$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR$

Etape 2 : fonction usuelle

Etape 3 : $g'(x) = 2\mathrm{e}^{-2t}$

m) $g(x) = \frac{x^7}{7^x}$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR$

Etape 2 : quotient de fonctions usuelles $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = x^7$ et $u'(x) = 7x^6$ puis $v(x) = 7^x = e^{x*\ln(7)}$ et $v'(x) = \ln(7) * e^{x*\ln(7)} = \ln(7) * 7^x$

Etape 3 : $f'(x) = \frac{7^x * (7x^6) - \ln(7) * 7^x * x^7}{(7^x)^2} = \frac{7x^6 - \ln(7)x^7}{7^x} = \frac{x^6}{7^x} * (7 - x\ln(7))$

Exercice 4 (Méthode pour étudier le sens de variation d'une fonction)

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR$ mais l'énoncé restreint l'ensemble à [0 ; 10]

Etape 2 : somme de fonctions usuelles :

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$$

Etape 3 : $f'(x) = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4(6)(24) = 324 > 0$$

L'équation admet donc deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-30)-\sqrt{324}}{2*6}$ ou $x_2 = \frac{-(-30)+\sqrt{324}}{2*6}$

$x_1 = 1$ ou $x_2 = 4$

Etape 4 : signe de $f'(x)$

le tableau de signe : comme $a = 6 > 0$, on a :

x		1		4	
f'	+	0	-	0	+

Etape 5 :

- f' est négative sur [1 ; 4] donc f est décroissante sur [1 ; 4]
- f' est positive sur [0 ; 1] U [4 ; 10] donc f est croissante sur [0 ; 1] et sur [4 ; 10]

x	0		1		4		10
f'		+	0	-	0	+	
f	19	↗	30	↘	3	↗	759

On a :

$f(0) = 19$; $f(1) = 30$; $f(4) = 3$; $f(10) = 759$

Etape 6 : Nous avons deux extrema locaux (nous regardons les solutions de $f'(x) = 0$)

• un maximum en $x = 1$, égal à 30 (la fonction dérivée change de signe en 1)

• un minimum en $x = 4$, égal à 3 (la fonction dérivée change de signe en 4)

Remarque : sur [0 ; 10], les extrema globaux sont, 3 (minimum global) et 759 (maximum global)

Exercice 5 (Etude de variations)

c)

$$B(q) = (q-1)e^{2-q} = 0$$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR$ mais l'énoncé restreint l'ensemble à [0 ; 10]

Etape 2 : produit de fonctions usuelles et fonction exponentielle : $(e^u)' = u' * e^u$ avec $u(q) = 2 - q$ et $u'(x) = -1$

$$B'(q) = 1 * e^{2-q} + (q-1)(-1)e^{2-q} = (1 - q + 1)e^{2-q} = (2-q)e^{2-q}$$

Etape 3 et 4 : Remarque : $e^{2-q} > 0$ pour tout q

$B'(x)$ est donc du signe $2 - q$

Etape 5 :

x	0		2		10
$B'(x)$		+	0	-	
B	$-e^2$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$9e^{-8}$

• B' est négative sur [2 ; 10] donc B est décroissante sur [2 ; 10]

• B' est positive sur [0 ; 2] donc B est croissante sur [0 ; 2]

On a :

$B(0) = -e^2 \approx -7{,}39$; $B(2) = 1$; $B(10) = 9e^{-8} \approx 0{,}003$

Etape 6 : Nous avons un extremum local (nous regardons les solutions de $B'(x) = 0$)

• un maximum en $x = 2$, égal à 1 (la fonction dérivée change de signe en 2)

Remarque : sur [0 ; 10], les extrema globaux sont, $-e^2$ (minimum global) et 1 (maximum global)

d)

$$f(n) = \ln(n) - \frac{3}{4}n$$

Etape 1 : $\mathcal{D} = IR^{+*}$ mais l'énoncé restreint l'ensemble à]0 ; 10]

Etape 2 : somme de fonctions usuelles :

$$f'(n) = \qquad =$$

Etape 3 et 4 : Remarque : $n > 0$ pour tout $n \in\ ]0\ ;\ 10]$

$f'(n)$ est donc du signe

Etape 5 :

x	0		4/3		10
f'			0		
f		$\nearrow$		$\searrow$	

• f' est négative sur [4/3 ; 10] donc f est sur [4/3 ; 10]

• f' est positive sur]0 ; 4/3] donc f est sur]0 ; 4/3]

On a :

$f\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) - 1 \approx \qquad ; f(10) = \ln(10) - \frac{30}{4} \approx$

Etape 6 : Nous avons un extremum local (nous regardons les solutions de $f'(x) = 0$)

• un maximum en $x =$, égal à (la fonction dérivée change de signe en 4/3)

<u>Remarque</u> : sur [0 ; 10], l'extremum global,