

Exercice 1 : l'équation est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\frac{4}{5} - 8 \exp(3x-2) &= \frac{2}{5} \Leftrightarrow -8 \exp(3x-2) = -\frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow \exp(3x-2) &= \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow 3x-2 &= \ln\left(\frac{4}{5}\right) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3} \left(\ln\left(\frac{4}{5}\right) + 2 \right)\end{aligned}$$

Exercice 2 : l'inéquation est définie pour tout x tel que
 $6x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

• produit de fonctions : tableau de signes

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	
$5x-2$	-	-	0	+
$\ln(6x+3)$	-	0	+	+
$(5x-2)\ln(6x+3)$	+	-	0	+

$$\begin{aligned}\ln(6x+3) &> 0 \\ 6x+3 &> e^0 = 1 \\ x &> -\frac{1}{3} \\ 5x-2 &> 0 \\ x &> \frac{2}{5}\end{aligned}$$

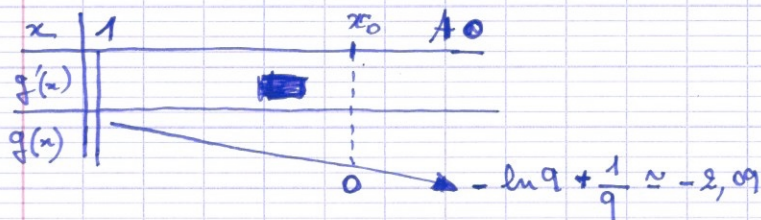
donc les solutions de l'inéquation sont : $x \in]-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{5}; +\infty[$

Exercice 3 : 1) la fonction est définie pour tout x tel que
 $x-1 > 0 : \mathcal{D}_f =]1; +\infty[$

$$\begin{aligned}2) f'(x) &= -\exp(3-x) \ln(x-1) + \exp(3-x) \times \frac{1}{x-1} \\ &= \exp(3-x) \left[-\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} \right]\end{aligned}$$

$$3) g'(x) = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-1-(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-x}{(x-1)^2} < 0 \text{ sur } \mathcal{D}_f$$

4) $g'(x) < 0$ sur $\mathcal{D}_f$ donc g est décroissante sur $]1; +\infty[$



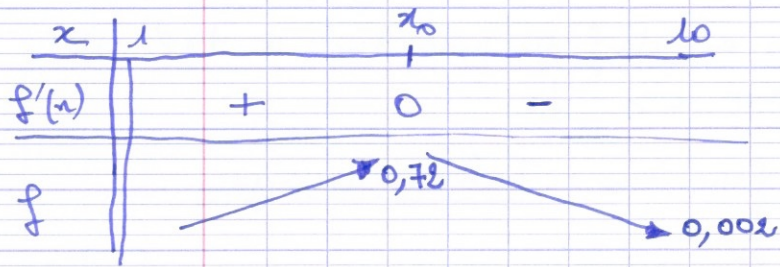
5) sur $]1; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante, or $g(2) = 1$ et $g(3) = -\ln 2 + \frac{1}{2} \approx -1,5$, donc change de signe. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une solution x_0 avec $2 < x_0 < 3$. A l'aide de la calculatrice, on a $x_0 \approx 2,76$

6) On en déduit que $g(x) > 0$ sur $]1; x_0[$
 et $g(x) < 0$ sur $]x_0; +\infty[$

Comme $f'(x) = \exp(3-x) \cdot g(x)$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

7) $f'(x) \geq 0$ sur $]1; x_0]$ et f est croissante sur cet intervalle

$f'(x) \leq 0$ sur $[x_0; +\infty[$ et f est décroissante sur cet intervalle



8) en $x = x_0$, la fonction dérivée s'annule et change de signe, la fonction admet donc un maximum égal à $f(x_0)$ en $x = x_0$

9) sur D_f $f(x) = 0 \Leftrightarrow \exp(3-x) = 0$ ou $\ln(x-1) = 0$
(impossible) $x-1 = e^0$
 $x = 2 \in D_f$

Partie B : a) elle réalise un bénéfice si $f(x) > 0$ donc pour $x > 2$. La société réalise un bénéfice si elle produit entre 200 et 1000 objets (voir question 9) de la partie A)

b) le bénéfice est maximum pour $x \approx 2,76$
Ce bénéfice max est égal à 720 €
(voir question 7) partie A)

c) $x \approx 2,76$ soit 276 objets produits