— Option Culture Mathématique — séance du 12-11-2020

Autour de la Méthode de Newton

Quelques informations pratiques
- Séances enregistrées
- Notes manuscrites seront disponibles sur ecampus.

- DM à rendre (30% note de l'UE), l'énoncé est disponible sur ecampus, à rendre pour la dernière séance avant Noël : 17-12-2020.
- Contrôle Continu : la semaine prochaine (19-11) de 16h15 à 18h15 (30% note finale)
  ↳ À rendre par mail avant 18h15.
  De 16h15 à 18h15 je serai disponible au lien "ici"
  Programme : ce qu'on a vu ensemble jusqu'ici.

- Aujourd'hui : Sur ecampus le support de cours "MEU104Newton.pdf"

La méthode de Newton a pour but de calculer des solutions approchées d'une équation de la forme

$$f(x) = 0.$$

Il y a très peu de cas dans lesquels on sait résoudre cette équation de façon exacte :

→ si f est linéaire ou affine par exemple
$$4x + \pi = 0$$

→ si f est un polynôme de degré ≤ 2
$$ax^2 + bx + c = 0$$

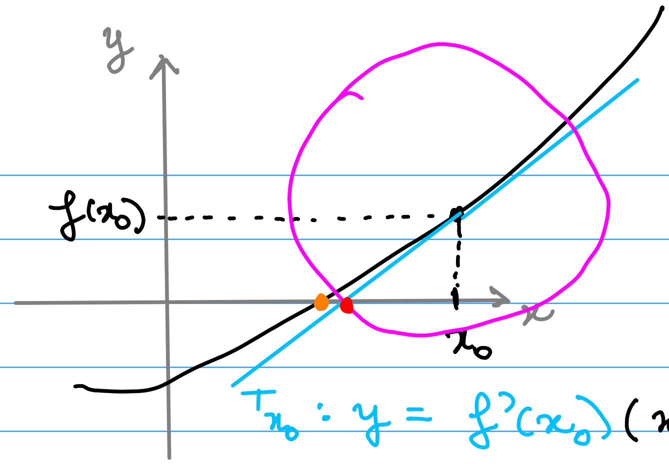
→ si f est un polynôme de degré 3 et même 4 il existe des formules qui donnent les solutions exactes à partir des coefficients du polynôme et des opérations élémentaires $+ / - / \times / \div$ et extraction de racines nième.

→ Pour les polynômes de degré ≥ 5, il n'existe pas de tel formule (montré par le mathématicien Abel).

<u>Question naturelle</u> : peut-on calculer des solutions approchées efficacement.

Soit $f : \overset{\text{intervalle}}{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. La méthode de Newton est une méthode dite "itérative".
on part de $x_0 \in I$ (qu'on espère pas trop loin d'une solution de l'équat° $f(x) = 0$)
et on calcule x_1 à partir de x_0
puis x_2 " x_1
⋮
puis x_{n+1} " x_n
et <u>le but</u> : la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha \in I$ tq $f(\alpha) = 0$.

<u>Idée de la méthode de Newton</u> : on sait résoudre les équations affines, au lieu de résoudre l'eq° $f(x) = 0$ on va résoudre une équation affine "proche"



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

$$T_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + \overset{f(x_0)}{*}$$

en $x = x_0$: $y = 0 + * = f(x_0)$

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point x_0 :

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Comme la courbe représentative de f
et la tangente T_{x_0}
sont proches l'une de l'autre au voisinage de x_0
Au lieu de résoudre $f(x) = 0$
on résout $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0 \quad (*)$

si $f'(x_0) \neq 0$: $(*) \iff x - x_0 = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$\iff x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On obtient $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ et on recommence en partant de x_1 :

on résout $f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = 0$

$\iff x = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

si $f'(x_1) \neq 0$

BILAN : Partant de $x_0 \in I$ donné, on définit la suite des itérées de Newton comme la suite récurrente

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

– La suite des itérées de Newton.

Géométriquement, on a remplacé l'équation $f(x)=0$ par l'équation $f'(x_k)(x-x_k)+f(x_k)=0$

$y = f'(x_k)(x-x_k)+f(x_k)$
équation de la tangente T_{x_k} au point x_k

Au lieu de chercher un point d'intersection de la courbe d'équation $y=f(x)$ avec l'axe $y=0$ on cherche un point d'intersection de la tangente T_{x_k} avec l'axe $y=0$.

Attention : avant même de pouvoir discuter de la convergence de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, rien n'assure en général qu'elle est bien défini pour tout $k \in \mathbb{N}$

Pbs :

- si $f'(x_k)=0$ pour un certain k.
- si $x_k \notin I$: on sort du domaine de définition de f !

Et lorsque la suite est bien définie, elle ne converge pas nécessairement.

Séance 1 : la méthode de Newton converge très vite quand elle converge.

↳ on va comparer la méthode de Newton et la méthode de Dichotomie.

TVI – Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que le réel d appartient à $[f(\alpha), f(\beta)]$ ou $[f(\beta), f(\alpha)]$. Alors, il existe $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(\gamma) = d$.
En particulier, si $f(\alpha) f(\beta) \leq 0$ ($f(\alpha)$ et $f(\beta)$ de signe opposé) il existe $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(\gamma) = 0$.

EXERCICE 1 –

1/ – Donner une condition assurant l'unicité d'un tel γ, donner un contre-exemple à l'unicité de γ en général.

2/ – Soit $\mu = \frac{\alpha + \beta}{2}$ le milieu du segment $[\alpha, \beta]$

(i) si $f(\alpha) f(\mu) \leq 0$ alors il existe $\tilde{\gamma} \in [\alpha, \mu]$ tel que $f(\tilde{\gamma}) = 0$. A-t-on toujours $\tilde{\gamma} = \gamma$?

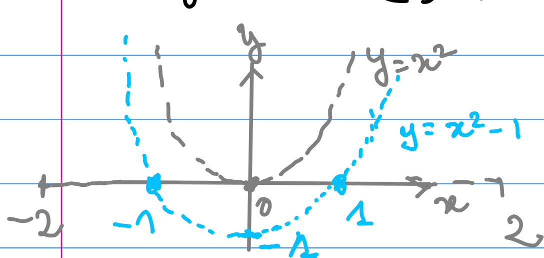
(ii) Montrer que sinon (si $f(\alpha) f(\mu) > 0$) alors $f(\beta) f(\mu) \leq 0$.

1/ – Si f est strictement monotone (en plus) alors γ est unique. Sinon, γ n'est pas forcément unique :

Exemples.

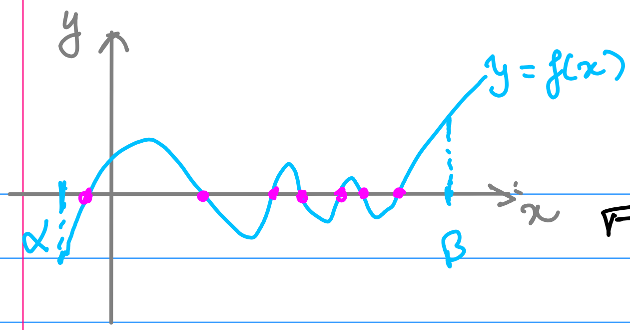
- $f(x) = x^2 - 1$ sur le segment $[-2, 2]$

$f(x) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$

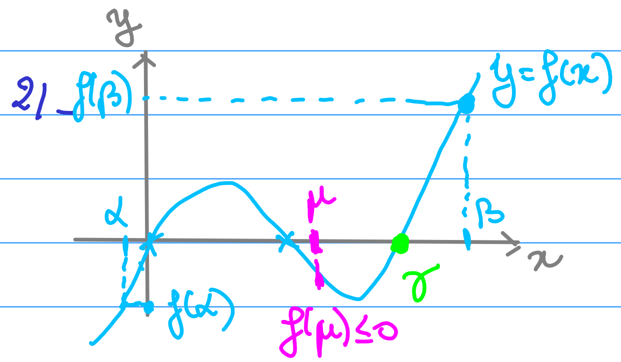


⊏ pas unicité de $\gamma \in [-2, 2]$ tel que $f(\gamma) = 0$

f n'est pas monotone sur $[-2, 2]$.
En revanche f est stt. croissante sur $[0, 2]$



{ beaucoup de $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tels que $f(\gamma) = 0$

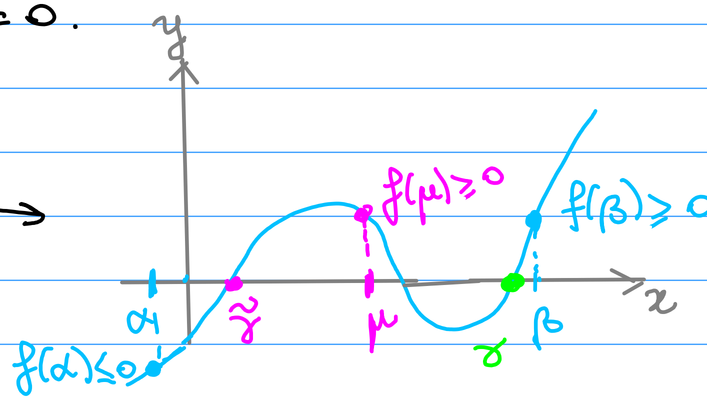


Par le TVI, on a $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tq $f(\gamma) = 0$

(i) • si $f(\alpha)\, f(\mu) \leq 0$, par le TVI sur $[\alpha, \mu]$: il existe $\tilde{\gamma} \in [\alpha, \mu]$ tel que $f(\tilde{\gamma}) = 0$.

? A-t-on $\tilde{\gamma} = \gamma$?

Non : voir bô dessin $\longrightarrow$



(ii) • si $f(\alpha) f(\mu) > 0$ alors

$f(\alpha) f(\beta) \leq 0$ par hyp.

"Avec des mots" : $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont de signe opposé

si $f(\alpha)$ et $f(\mu)$ sont de même signe

alors $f(\mu)$ et $f(\beta)$ sont de signe opposé.

Plus formellement, si $f(\alpha) f(\mu) > 0 \Rightarrow f(\alpha) \neq 0 \Rightarrow f(\alpha)^2 > 0$

de plus

$$f(\alpha)^2 f(\beta) f(\mu) = \underbrace{f(\alpha) f(\beta)}_{\leq 0} \times \underbrace{f(\alpha) f(\mu)}_{> 0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad f(\beta) f(\mu) \leq 0$$

$\times \dfrac{1}{f(\alpha)^2} > 0$

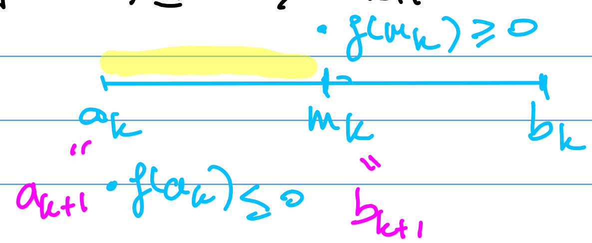
<u>Dichotomie</u> : on rencontre la méthode par dichotomie dans la démonstration du T.V.I mais cette méthode fournit également un algorithme permettant de calculer une solution approchée d'une équation $f(x)=0$

Méthode basée sur le <u>signe de f</u> : elle est "robuste", elle converge dès que f continue et $[\alpha, \beta]$ contient une solution de $f(x)=0$.
Inconvénient, elle est moins efficace (moins rapide) que la méthode de Newton (voir ex3).

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue tq $f(a)f(b) \leq 0$
On définit les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ comme suit par récurrence :

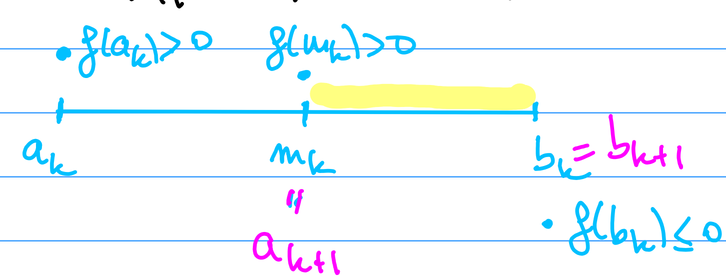
- $a_0 = a$, $b_0 = b$
- pour $k\in\mathbb{N}$ donné, on définit $m_k = \dfrac{a_k+b_k}{2}$ milieu de l'intervalle d'extrémités a_k et b_k et

* si $f(a_k)f(m_k) \leq 0 \Rightarrow a_{k+1}=a_k$ et $b_{k+1}=m_k$



* sinon (ex1-2(ii)) $\underset{\text{"}\alpha\text{"}}{f(a_k)}\,\underset{\text{"}\mu\text{"}}{f(m_k)} > 0 \Rightarrow \underset{\text{"}\beta\text{"}}{f(b_k)}\,\underset{\text{"}\mu\text{"}}{f(m_k)} \leq 0$)

et on définit $a_{k+1} = m_k$ et $b_{k+1} = b_k$



EXERCICE 2 - Convergence de la méthode par dichotomie

But : montrer que pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue tq $f(a)f(b) \leq 0$
alors les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\gamma \in [a,b]$ et $f(\gamma)=0$.

1/ Corrigé de cette question sur ecampus.
On reprendra la fois prochaine le 2/
(dans 2 semaines)

Le 26-11-2020 BONJOUR À TOUS :)

$\forall k\in\mathbb{N}$, $a_k \leq b_k$ et $f(a_k)f(b_k) \leq 0$ (Par construction)
↳ voir la récurrence sur le corrigé.

2/ - Montrer que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Mq : $\begin{cases} \bullet\ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ croissante} \\ \bullet\ (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ décroissante} \\ \bullet\ b_k - a_k \xrightarrow[k\infty]{} 0 \end{cases}$

Pas besoin de récurrence : on utilise la question 1/ - et la définition des suites (1)

• $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante. En effet, soit $k\in\mathbb{N}$.
On revient à (1) (sur polycop) :

$\left| \begin{array}{l} \text{soit } a_{k+1} = a_k \text{ en particulier } a_{k+1} \geq a_k \\ \text{soit } a_{k+1} = m_k = \dfrac{a_k+b_k}{2} \geq \dfrac{a_k+a_k}{2} = a_k \end{array} \right.$

$b_k \geq a_k$ (quest° 1)

dans les deux cas :

$a_{k+1} \geq a_k$.

• $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De la même façon, soit $k\in\mathbb{N}$:

soit $b_{k+1} = m_k = \frac{a_k+b_k}{2} \underset{a_k\le b_k}{\le} \frac{b_k+b_k}{2} = b_k$

soit $b_{k+1} = b_k$ en particulier $b_{k+1} \le b_k$

dans les deux cas $b_{k+1} \le b_k$.

• Il reste à montrer que $b_k - a_k \xrightarrow[k\infty]{} 0$

Remarque : $b_k - a_k \geq 0$ c'est la longueur du segment $[a_k, b_k]$

Pour $k\in\mathbb{N}$,

$$(b_{k+1} - a_{k+1}) = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$$

$L_k := b_k - a_k$

Pour passer de $[a_k, b_k]$ à $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ on coupe $[a_k, b_k]$ au milieu et on garde l'intervalle de gauche ou celui de droite.

en revenant à la définition (1) :

soit $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = m_k = \frac{a_k+b_k}{2}$

$$\Rightarrow b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2} - a_k = \frac{b_k - a_k}{2}$$

soit ... pareil.

La suite $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $L_{k+1} = \frac{1}{2}L_k$ suite géométrique, de raison $\frac{1}{2}$ donc

$$\forall k\in\mathbb{N},\ L_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \underbrace{L_0}_{b_0-a_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^k (b-a) \xrightarrow[k\infty]{} 0$$

car $0 < \frac{1}{2} < 1$

donc $b_k - a_k \xrightarrow[k\infty]{} 0$.

et on a de plus montré que $|b_k - a_k| = 2^{-k} |b-a|$ (avec $|b_k - a_k| = b_k - a_k$ et $|b-a| = b-a$)

$\Rightarrow$ Les suites $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ sont <u>adjacentes</u>

3|_ Utiliser le théorème des suites adjacentes :

$(a_k)_k$ et (b_k) convergent une même limite γ et de plus $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$a \leq a_k \leq \gamma \leq b_k \leq b \quad \Rightarrow \gamma \in [a_k, b_k]$$

Il reste à montrer que $f(\gamma) = 0$.

Comme pour $k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} f(a_k) f(b_k) \leq 0 \quad (\text{quest}^\circ 1) \\ f \text{ continue sur } [a_k, b_k] \end{cases}$

par le <u>T.V.I.</u>, il existe $\gamma_k \in [a_k, b_k]$ tel que $f(\gamma_k) = 0$

Par <u>encadrement</u> $\quad \underset{\gamma \xleftarrow{k\infty}}{a_k} \leq \gamma_k \leq \underset{\xrightarrow{k\infty} \gamma}{b_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

on a $\lim\limits_{k\infty} \gamma_k = \gamma$.

Par <u>continuité de f</u> au point γ : $0 = \lim\limits_{k\infty} \underbrace{f(\gamma_k)}_{=0} = \underbrace{\lim\limits_{x \to \gamma} f(x)}_{f(\gamma)}$

$$\boxed{\text{finalement } f(\gamma) = 0.}$$

! On a bien que $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ convergent vers une solut° de l'éq° $f(x) = 0$.

Comme $\gamma \geq a_k \Rightarrow b_k - \gamma \leq b_k - a_k \leq 2^{-k}(b-a)$

et $\gamma \leq b_k \Rightarrow \gamma - a_k \leq b_k - a_k \leq 2^{-k}(b-a)$

L'erreur $b_k - \gamma$ entre la solution exacte γ et la solution approchée par Bichotomie b_k

est (au pire) divisée par 2 à chaque étape.

4/_ Combien d'itérations de la méthode par Dichotomie assurent d'obtenir une solution de $f(x)=0$ avec une précision $\leq 10^{-16}$.

On cherche $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-k}(b-a) \leq 10^{-16}$.
on pourra faire le calcul avec $b-a=1$ par exemple ....

$$2^{-k}(b-a) \leq 10^{-16} \underset{\ln \text{ st } \nearrow}{\iff} \ln(2^{-k}) + \ln(b-a) \leq -16 \ln 10$$

$$\iff -k \ln 2 + \ln(b-a) \leq -16 \ln 10$$

$$\iff \frac{\ln(b-a) + 16 \ln(10)}{\ln 2} \leq k$$

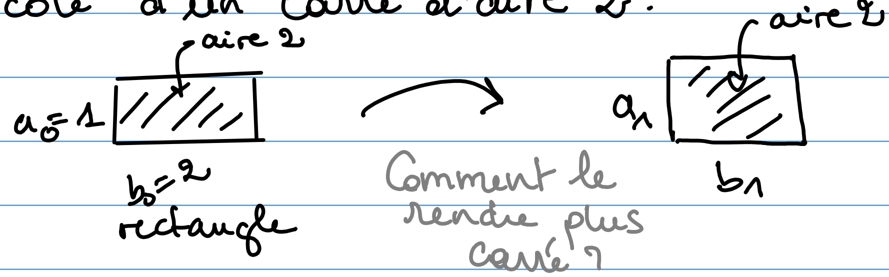
$53 <$ … < 54

On cherche un entier $k \geq$

on peut prendre $\boxed{k = 54}$

Rque : $|f(x_k)|$ proche de 0 ? ou $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-10}$
$< 10^{-10}$ donné à l'avance

ALGORITHME DE HÉRON : pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{a}$ pour un entier $a \in \mathbb{N}^*$, p.ex. $\sqrt{2}$ ($a=2$ ici)
L'idée est la suivante : on cherche la longueur des côté d'un carré d'aire 2.



$a_0 < a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} < b_0$
on essaie de prendre la moyenne

on cherche $a_0 < a_1 < b_0$ et on prend $b_1 = \frac{2}{a_1}$

On définit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$
et $\forall k\in\mathbb{N}$,

(2) $$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{a_k + \frac{2}{a_k}}{2} \text{ et } b_k = \frac{2}{a_k}$$

comme $a_k b_k = 2$
$$\underset{a_k>0}{\Leftrightarrow} b_k = \frac{2}{a_k}$$

Rque : (?) Interprétation géométrique similaire pour le calcul d'une racine cubique ?

Exercice 3.

1/_ Vérifier qu'on peut retrouver l'algorithme de Héron en appliquant la méthode de Newton à la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2$.

On veut approcher $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ est solution de $f(x) = 0$
On prend $x_0 = a_0\ (= 1)$: que donne la méthode de Newton !

La fonction f est de classe C^1 (fonction polynomiale)
et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$. ($\neq 0$ pour $x \neq 0$)

On peut définir $F : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
$= F(x_k)$

qui est F ?

Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $F(x) = x - \frac{x^2-2}{2x}$
$$= \frac{2x^2 - x^2 + 2}{2x} = \frac{x^2+2}{2x} = \frac{x + \frac{2}{x}}{2}$$

on retrouve bien l'algorithme de Héron :
$$a_{k+1} = \frac{a_k + 2/a_k}{2} = F(a_k)$$

2/ Algorithme de Héron (4 premières itérations) : $\begin{cases} a_{k+1} = \dfrac{a_k + \frac{2}{a_k}}{2} \\ b_k = \dfrac{2}{a_k} \end{cases}$

	$a_0 = 1$	$b_0 = 2$
	$a_1 = 1{,}5$	$b_1 = 4/3$
	$a_2 = 17/12 \simeq 1{,}41667$	$b_2 = 24/17 \simeq 1{,}41176$
$\lvert b_3 - a_3 \rvert \leq 10^{-5}$	$a_3 \simeq 1{,}414215$	$b_3 \simeq 1{,}414211$
$\lvert b_4 - a_4 \rvert \leq 10^{-11}$	$a_4 \simeq 1{,}41421356237\underline{4}$	$b_4 \simeq 1{,}41421356237\underline{1}$

On obtient 11 décimales exactes de $\sqrt{2}$ en seulement 4 itérations !

Pour la prochaine fois : faire la même chose mais pour la Dichotomie avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.
⊕ essayer de faire la question 4 (ressemble à l'ex 2 quest° 4)

"fractales de Newton"

3-12-2020 - Culture Mathématique

Info pratique : DM à rendre pour le mercredi 23-12 à midi et non le jeudi 17-12.

3/ On calcule les 4 premières itérations de la méthode par Dichotomie, en partant de $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ (comme à la quest° 2 pour l'algorithme de Héron).

$a_0 = 1$	$b_0 = 2$	$\lvert b_0 - a_0 \rvert = 1$
$a_1 = 1$	$b_1 = 1{,}5$	$\lvert b_1 - a_1 \rvert = 0{,}5$
$a_2 = 1{,}25$	$b_2 = 1{,}5$	$\lvert b_2 - a_2 \rvert = 0{,}25$
$a_3 = 1{,}375$	$b_3 = 1{,}5$	$\lvert b_3 - a_3 \rvert = 0{,}125$
$a_4 = 1{,}375$	$b_4 = 1{,}4375$	$\lvert b_4 - a_4 \rvert = 0{,}0625$

<u>En 4 itérations</u> : pour Héron erreur $\leq 10^{-11}$
pour Dichotomie erreur $\leq 10^{-1}$

4/ Rappel : pour la Dichotomie : $|a_k - \sqrt{2}| \leq 2^{-k}|b-a|$
combien d'itérations assurent d'obtenir une précision
- 10^{-5} : ? k tel que $2^{-k}|b-a| \leq 10^{-5}$
- 10^{-11} : ? k tel que $2^{-k}|b-a| \leq 10^{-11}$

On reprend exactement le même raisonnement que pour l'ex 2 quest° 4 :

$$2^{-k}|b-a| \leq 10^{-5} \underset{\ln \text{ stt } \nearrow}{\iff} \ln(2^{-k}|b-a|) \leq \ln(10^{-5})$$

$$\iff \ln(2^{-k}) + \underbrace{\ln(|b-a|)}_{\substack{1 \\ 0''}} \leq -5\ln 10$$

$$\iff -k\ln 2 \leq -5\ln 10$$

$$\iff k \geq 5\frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 16.61$$

Il suffit de prendre $k = 17$: <u>17 itérations</u>

↳ Il en fallait seulement 3 pour l'algorithme de Héron.

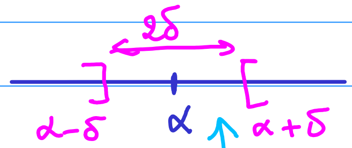
De même $2^{-k}|b-a| \leq 10^{-11} \iff k \geq 11\frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 36.54$

Il suffit d'effectuer <u>37 itérations</u>

↳ Contre 4 seulement ! par Héron.

SÉANCE 2 – Sensibilité à la condition initiale

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in I$, $f(\alpha) = 0$



$\downarrow$ γ ensuite

$x_0 \in]\alpha-\delta, \alpha+\delta[$ $\to$ la méthode de Newton converge vers α et on a une estimation de l'erreur $|x_k - \alpha|$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

"Pb" : on ne sait pas en général qui est $\delta > 0$

on sait que $\uparrow$ existe

Théorème [Convergence locale]

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 (f deux fois dérivable, f'' continue) telle que

$$f(a) < 0 < f(b) \quad \text{et} \quad \forall x \in [a,b],\ f'(x) > 0$$

On considère $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ALORS

(i) f admet un unique $\gamma \in [a,b]$ solution de $f(\gamma) = 0$.

(ii) Soit $x_0 \in [a,b]$. Si $|x_0 - \gamma|$ est assez petit

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0$, tel que si $x_0 \in]\gamma-\delta, \gamma+\delta[$

alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des itérés de Newton :

$(x_{k+1} = F(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N})$

* est bien définie (concrètement $F([a,b]) \subset [a,b]$)

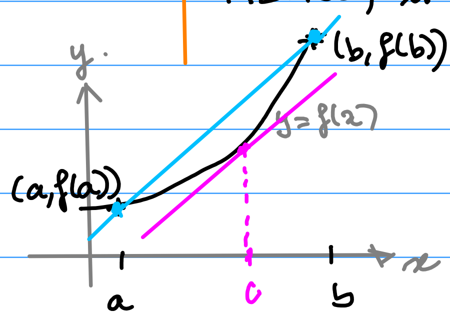
* converge vers γ

* avec une "vitesse quadratique" :
$\exists C > 0$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}$,
(*) $|x_{k+1} - r| \leq C |x_k - r|^2$

$0 < t < 1$
$t^3 < t^2 < t$

Preuve dans un cas particulier : DM ex 4.
↳ repose sur la formule de Taylor-Lagrange (ordre 2)

Rque – Théorème des accroissements finis
• $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue
dérivable sur $]a,b[$
ALORS, il existe $c \in]a,b[$ tel que



$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

pente de la droite bleue

Deux petits mots concernant la convergence quadratique (*)

Si on sait que au bout de k itérations
$C|x_k - r| \leq 10^{-N}$ ~ N décimales exactes

$$C|x_{k+1} - r| \leq C^2 |x_k - r|^2$$
$$\leq (C|x_k - r|)^2$$
$$\leq 10^{-2N}$$

$\leq C|x_k - r|^2$

~ 2N décimales exactes

On double le nombre de décimales exactes à chaque itération : 1 décimale exacte au début $\xrightarrow[\text{4 itérations}]{}$ 2^4 exactes "16"

EXERCICE 4 - Méthode de Newton et sensibilité à la condition initiale : des exemples de non-convergence.

1) Sortie de l'ensemble de définition :

$$f :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x+1}-1$$

- Pour $x \in]-1,+\infty[$, $f(x)=0 \iff \sqrt{x+1}=1$
$\iff x+1=1$
$\iff x=0$

← unique solution de $f(x)=0$

- On considère F donnée dans l'énoncé (itération de Newton)

?

On cherche $x_0 \in]-1,+\infty[$ tel que
$x_1 = F(x_0) \notin]-1,+\infty[$
et on ne peut pas définir $x_2 = F(x_1)$. $\left(= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right)$?

- La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x \in]-1,+\infty[$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$$

Donc $\forall x \in]-1,+\infty[$, $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ bien défini

$$= x - (\sqrt{x+1}-1) \times 2\sqrt{x+1}$$
$$= x - (\sqrt{x+1})^2 \times 2 + 2\sqrt{x+1}$$
$$= x - 2(x+1) + 2\sqrt{x+1}$$

$$F(x) = 2\sqrt{x+1} - x - 2$$

- $(\sqrt{t})^2 = t$ $(\forall t \geq 0)$
- $\sqrt{t^2} = |t|$
$t \in \mathbb{R}$

penser à
$\sqrt{(-2)^2} \neq -2$
$= |-2| = 2$

$(\notin \,]-1,+\infty[\,)$

On cherche x_0 tq $\quad x_0 \in \,]-1,+\infty[$ et $F(x_0) \leq -1$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2\sqrt{x_0+1} - x_0 - 2 \leq -1$$

$$\Longleftrightarrow 2\sqrt{x_0+1} \leq x_0 + 1$$

en $(\ )^2$: $\quad \underset{x_0+1 \geq 0}{\Longleftrightarrow} \quad 4(x_0+1) \leq (x_0+1)^2$

$$\Longleftrightarrow (x_0+1)^2 - 4(x_0+1) \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow (x_0+1)\big((x_0+1)-4\big) \geq 0$$

$x_0 = 3$ marche $\quad \Longleftrightarrow (x_0+1)(x_0-3) \geq 0$

$\Longleftrightarrow \quad x_0 \leq -1$ ou bien $x_0 \geq 3$ (pas entre les racines)

[en étudiant le signe

Avec $x_0 = 3$, $\quad F(x_0) = 2\sqrt{3+1} - 3 - 2$

$$= 2\cdot 2 - 5$$

$$= -1$$

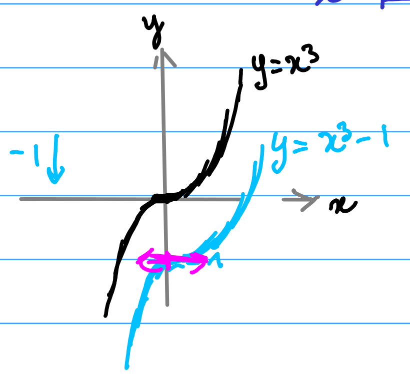
En prenant x_0 plus grand, "on s'éloigne encore plus" de l'intervalle de définition de f.

$\Rightarrow x_2$ n'est pas défini ! $\quad (x_1 = -1)$

2) Une tangente horizontale ....

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^3 - 1$$



• $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^3 - 1 = 0$

$\Longleftrightarrow x = 1$ unique solution

On ne peut pas sortir de l'intervalle de définition : c'est $\mathbb{R}$.

• On cherche $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) = 0$ $\quad (\to F(x_0)$ pas défini$)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_1 \qquad\qquad$ "

$f'(x_0) = 0 \iff 3x_0^2 = 0 \iff \underline{x_0 = 0}$

Et dans ce cas, x_1 n'est pas défini.

- Un autre $\cancel{x^0}$ x_0 ? ... Oui ! on cherche $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\underline{x_1 = 0}$

$\downarrow$

x_2 pas défini

$$x_1 = 0 \iff F(x_0) = 0$$
$$\iff x_0 - \frac{x_0^3 - 1}{3x_0^2} = 0$$
$$\iff 3x_0^3 - x_0^3 + 1 = 0$$

$\times\, 3x_0^2 \neq 0$

$$\iff 2x_0^3 = -1 \iff x_0^3 = -1/2$$
$$\iff \boxed{x_0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$$

La prochaine fois : ex 4.5

10-12-2020 -
- On corrige ex 4.5 (Newton)
- On passe aux chaînes de Markov.

BONJOUR :)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto xe^{-x}$

. L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $x = 0$

$$xe^{-x} = 0 \iff x = 0$$
$$e^{-x} > 0$$

On définit (si possible) la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des itérées de Newton qui vérifie

$$x_{k+1} = F(x_k) \quad \text{où} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

La fonction f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x)e^{-x} \quad (\neq 0 \text{ pour } x \neq 1)$$

et pour $x \neq 1$:

$$F(x) = x - \frac{x\cancel{e^{-x}}}{(1-x)\cancel{e^{-x}}} = x + \frac{x}{x-1}$$

et on remarque en particulier : pour $x > 1$: $\frac{x}{x-1} > 0$

et donc $\boxed{F(x) > x}$. (*)

Soit $I = [2, +\infty[$, $\forall x \in I$, $F(x) > x \geq 2$

$\Rightarrow F(x) \in I$

L'intervalle I est stable par F

(i) Soit $x_0 \geq 2$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \geq 2$

- Tout d'abord, $x_0 \in I$ (stable par F) donc la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ partant de x_0 et satisfaisant $x_{k+1} = F(x_k)$ est bien définie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- De plus, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in I \Rightarrow x_k \geq 2$.

(ii) Montrons que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} - x_k = F(x_k) - x_k \geq 0$ (*) à $x_k > 1$

donc la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(iii) Montrons que $\lim_{k\infty} x_k = +\infty$

- Par le théorème de la suite monotone, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ou $+\infty$.
- Par l'absurde, on suppose $x_k \xrightarrow[k\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

* $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \geq 2$ donc par comparaison,
$\ell \geq 2$
* Par continuité de F sur $[2,+\infty[$ et donc en ℓ
$\lim_{k\infty} F(x_k) = F(\ell)$
* De plus $\lim_{k\infty} x_{k+1} = \lim_{k\infty} x_k = \ell$
* Par unicité de la limite $F(\ell) = \ell$

Or pour $\ell \geq 2$, $F(\ell) = \ell$

$$\iff \cancel{\ell} + \frac{\ell}{\ell - 1} = \cancel{\ell}$$

$$\underset{\ell \neq 1}{\iff} \ell = 0$$ impossible puisque $\ell \geq 2 > 0$

<u>Conclusion</u> $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\ell \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$

<u>Remarque:</u> $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x e^{-x} = 0$
par croissance comparée

- $P(X)$ polynôme, $P'(X)$: on sait définir
  $X^k \to kX^{k-1}$

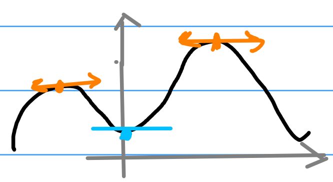
$P(z) = z^3 - 1$ pour $z \in \mathbb{C}$, $\underline{P} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

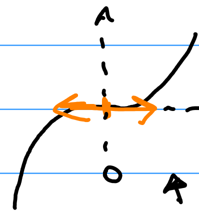
$$F(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)} = z - \frac{z^3-1}{3z^2}$$

$z_{k+1} = F(z_k)$

- Méthode de Newton en optimisation
  | f est C^1 et f a un extremum local au point a
  | alors $f'(a) = 0$

  ↳ on applique Newton à f' pour trouver des x tq $f'(x) = 0$ ("point critique")





$\to$ $g : x \mapsto x^3$

0 n'est pas un extremum local de g
$g'(0) = 0$