

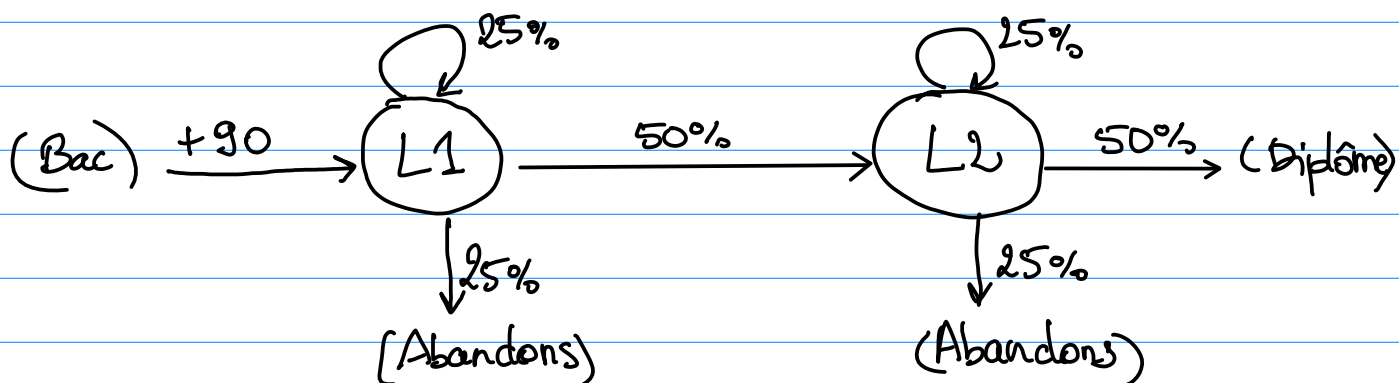
10-12-2020 -

THÈME 4 - ÉVOLUTION DE SYSTÈMES, MATRICE DE TRANSITION ET CHAÎNES DE MARKOV

Exemple 1 :

- Deux classes : L1
L2
- Entrée / Sorties

- * Chaque année : 90 étudiants arrivent en L1
- * 50% des étudiants en L1 passent en L2
25% redoublent
25% abandonnent
- * 50% des étudiants de L2 ont le diplôme
25% redoublent
25% abandonnent



- Les effectifs en L1 et L2 sont-ils stables ?
- Quelle proportion des étudiants a leur diplôme

$$\frac{\text{Nb diplômés}}{90}$$

$x_1(n)$ le nombre d'étudiants l'année n en L1
 $x_2(n)$ en L2

1/- Trouver une relation de récurrence liant $x_1(n+1), x_2(n+1)$ à $x_1(n), x_2(n)$

$$x_1(n+1) = \frac{25}{100} x_1(n) + 90$$

↑ étudiants qui redoublent

$$x_2(n+1) = \frac{25}{100} x_2(n) + \frac{50}{100} x_1(n)$$

↑ étudiants qui arrivent de L1.

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \frac{1}{4} x_1(n) + 90 \\ x_2(n+1) = \frac{1}{2} x_1(n) + \frac{1}{4} x_2(n) \end{cases}$$

2/- Réécriture sous forme matricielle $X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}$

$$X(n+1) = M X(n) + E$$

↑ M matrice de taille 2x2

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} x_1(n) + 0 \times x_2(n) \\ \frac{1}{2} x_1(n) + \frac{1}{4} x_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}}_{\tilde{M}} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 90 \\ 0 \end{pmatrix}}_E$$

3/- On suppose que les effectifs initiaux $X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$ sont solutions de

$$X = M X + E$$

Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, x(n) = x(0)$.

On pourrait définir $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$X \mapsto MX + E$$

et on aurait $X(n+1) = f(X(n))$.

Dire que $X(0)$ solution de $X = MX + E$

$$\Leftrightarrow X = f(X)$$

$X(1) = f(X(0)) = X(0)$ etc - preuve par récurrence.

On le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation ou (HR)

• Hérité: soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $X(n) = X(0)$
 alors $X(n+1) = MX(n) + E = MX(0) + E = X(0)$
 (HR)

• Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, X(n) = X(0)$.

4/- On va donc s'intéresser aux solutions (s'il y en a) de
 $X = MX + E, X \in \mathbb{R}^2$ (système linéaire
 2 équats / 2 inconnues)

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$X = MX + E \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_1 + 90 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x_1 = 90 \\ \frac{3}{4}x_2 = \frac{1}{2}x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \times 90 = 120 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_1 = \frac{2}{3} \cdot 120 = 80 \end{cases}$$

On trouve une unique solution $X_{eq} = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix}$

5/- On va pouvoir répondre à la 1^{ère} question pour
 les effectifs stables $X_{eq} = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix}, x_1^{eq} = 120, x_2^{eq} = 80$

pour $\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix}$

$$\text{taux de réussite} \frac{\text{diplômés}}{\text{entrants}} = \frac{50\% \text{ de } 80}{90} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9} \approx 44\%$$

On va maintenant montrer que lorsque $X(0)$ n'est pas solution de $X = MX + E \Leftrightarrow X(0) \neq X_{eq}$ on a quand même

$$\text{et} \left| \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1^{eq} = 120 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_2^{eq} = 80 \end{array} \right.$$

61- On introduit $\Delta(n) = X(n) - X_{eq}$. ($\xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?$)
 $\in \mathbb{R}^2$

Montrer que $\Delta(n) = M^n \Delta(0)$
 (Exprimer $\Delta(n+1)$ en fonction de $\Delta(n)$) $\underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{n \text{ fois}}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Delta(n+1) &= X(n+1) - X_{eq} \\ &= MX(n) + E - X_{eq} \\ &= M(\Delta(n) + X_{eq}) + E - X_{eq} \\ X(n) = \Delta(n) + X_{eq} \quad \swarrow \\ &= M\Delta(n) + \underbrace{MX_{eq} + E - X_{eq}}_{= 0 \text{ par définition de } X_{eq}} \end{aligned}$$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta(n+1) = M\Delta(n)$ (*)

Remarque: si on avait $\Delta(n)$ et M des réels
 $\hookrightarrow (\Delta(n))_n$ suite géométrique
 et $\Delta(n) = M^n \Delta(0)$

• On vérifie par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $\Delta(n) = M^n \Delta(0)$

* Initialisation : $M^0 \overset{\text{convention}}{:=} I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $\Delta(0) = I_2 \Delta(0)$ OK.

* Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que

$$\Delta(n) = M^n \Delta(0) \quad (HR)$$

$$\text{On a alors } \Delta(n+1) = M \Delta(n) = M \cdot M^n \Delta(0) \quad (HR)$$

$$= M^{n+1} \Delta(0)$$

* Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta(n) = M^n \Delta(0)$

7. On s'intéresse maintenant à la matrice M^n .

a) Vérifier que $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4^n} & 0 \\ \frac{2n}{4^n} & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \quad (P_n)$

On le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

* Initialisation : $M^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{et } \begin{pmatrix} \frac{1}{4^0} & 0 \\ \frac{2 \times 0}{4^0} & \frac{1}{4^0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que (P_n) est vérifiée (HR).

On a alors

$$M^{n+1} = M \times M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4^n} & 0 \\ \frac{2n}{4^n} & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \quad (HR)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^n} + 0 \cdot \frac{2n}{4^n} & \frac{1}{4} \times 0 + 0 \times \frac{1}{4^n} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2n}{4^n} & \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{4^{n+1}} = ?$

$\frac{2(n+1)}{4^{n+1}} = ?$

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2n}{4^n} = \frac{2 + 2n}{4^{n+1}} = \frac{2(n+1)}{4^{n+1}}$$

$$\text{on a bien } M^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4^{n+1}} & 0 \\ \frac{2(n+1)}{4^{n+1}} & \frac{1}{4^{n+1}} \end{pmatrix}$$

$$* \text{ Conclusion : } M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4^n} & 0 \\ \frac{2n}{4^n} & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour la prochaine fois : regarder la fin de l'exercice

17-12-2020.

Aujourd'hui :

- Fin de l'ex 1 (chaînes de Markov)
- Questions 1 à 3 de l'ex 2 ("modélisation")
- thème 5 : combinatoire et formule d'Euler

Rappel : $X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$: l'année 0, $x_1(0)$ nb d'étudiants en L1
 $x_2(0)$ ————— L2
à l'ouverture du cycle.

$$\Delta(n) = X(n) - X_{eq} = \begin{pmatrix} x_1(n) - x_1^{eq} \\ x_2(n) - x_2^{eq} \end{pmatrix}$$

on était en train d'étudier $\Delta(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
on veut montrer que chacune de ses deux composantes tend vers 0.

On avait $\Delta(n) = M^n \Delta(0)$ avec

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4^n} & 0 \\ \frac{2n}{4^n} & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$$

on revient à $\Delta(n) = M^n \Delta(0)$ et si on note $\Delta(0) = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4^n} & 0 \\ \frac{2n}{4^n} & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4^n} \delta_1 \\ \frac{2n}{4^n} \delta_1 + \frac{1}{4^n} \delta_2 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{cases} x_1(n) - x_1^{eq} = \frac{1}{4^n} \delta_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ x_2(n) - x_2^{eq} = \frac{2n}{4^n} \delta_1 + \frac{1}{4^n} \delta_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$

On en déduit que indépendamment des effectifs initiaux $x_1(0)$ en L^1 et $x_2(0)$ en L^2 , les effectifs convergent vers les effectifs stables:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1(n) = x_1^{eq} = 120 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_2(n) = x_2^{eq} = 80 \end{cases}$$

Remarque: le taux de réussite

$$\frac{50\% \text{ de } x_2(n)}{90} = \frac{\frac{1}{2} x_2(n)}{90} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot 80}{90} \approx 44\%$$

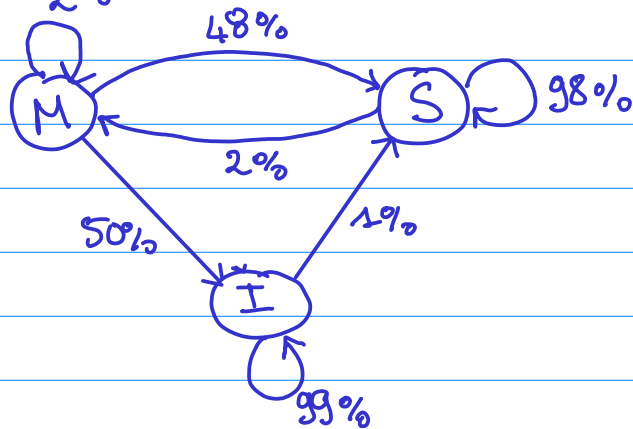
EXERCICE 2 - Un modèle d'épidémie

3 états: (M) malade

(I) immunisé

(S) sain et non immunisé

1 - Graphe associé : 2%



2 - À la semaine $k \in \mathbb{N}^*$, proportion de la population

$x_M(k)$	:	malade
$x_I(k)$	:	immunisé
$x_S(k)$	:	saine non immunisée

$$\begin{cases} x_M(k+1) = \frac{2}{100} x_M(k) + 0 \cdot x_I(k) + \frac{2}{100} x_S(k) \\ x_I(k+1) = \frac{50}{100} x_M(k) + \frac{99}{100} x_I(k) + 0 \cdot x_S(k) \\ x_S(k+1) = \frac{48}{100} x_M(k) + \frac{1}{100} x_I(k) + \frac{98}{100} x_S(k) \end{cases}$$

3 - On note $X(k) = \begin{pmatrix} x_M(k) \\ x_I(k) \\ x_S(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vecteur qui décrit les proportions de la population dans chacun des 3 états à la semaine k .

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} x_M(k+1) \\ x_I(k+1) \\ x_S(k+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,02 & 0 & 0,02 \\ 0,5 & 0,99 & 0 \\ 0,48 & 0,01 & 0,98 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_M(k) \\ x_I(k) \\ x_S(k) \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 $X(k)$

$\Leftrightarrow$ $X(k+1) = A X(k)$

$\uparrow$ • coeff $\in [0;1]$
 $\otimes$ • somme sur chaque colonne vaut 1

Dans ce cadre (*) on a un théorème : Perron-Frobenius qui nous permet de dire, sous l'hypothèse "A est irréductible" que il existe un unique état stable $x_{eq} \in \mathbb{R}^3$ solution de $x_{eq} = Ax_{eq}$ et x_{eq} coeff dans $[0,1]$ somme des coeff = 1

De plus, indépendamment des proportions initiales : $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x_{eq}$

Ici, on trouve (calcul) $x_{eq} = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,5 \\ 0,49 \end{pmatrix}$

et le but de la fin de l'exercice 2, c'était de vérifier "à la main" (sans utiliser le théorème de Perron-Frobenius) que

$$\begin{cases} x_H(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,01 \\ x_I(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,5 \\ x_S(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,49 \end{cases}$$

DEF

"A irréductible" : $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que A^p a tous ses coefficients > 0

Ici : pas vrai pour A^1 mais A^2 a tous ses coeff > 0
 $\Rightarrow A$ irréductible.