

## SÉANCE 3

# Un peu de combinatoire ...

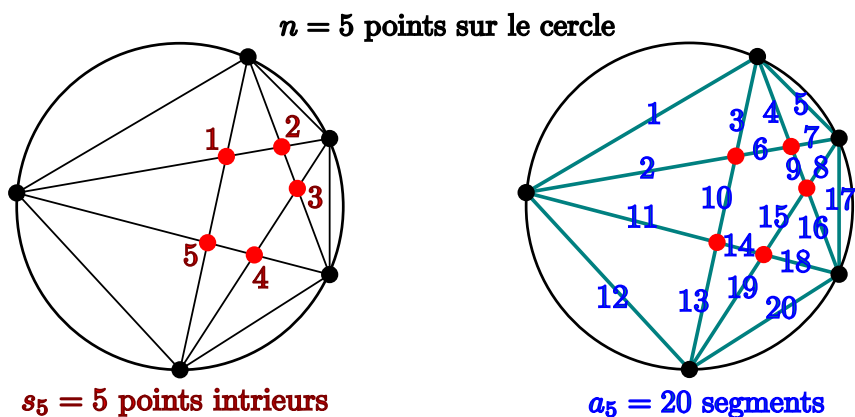
*Indications en vert*

### Exercice 1.—

1. Traiter les cas  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ . Qu'en pensez-vous ? Tester le cas  $n = 6$ , qu'en pensez-vous maintenant ?  
*Non, vous ne vous êtes pas trompés si vous trouvez  $f_6 = 31$ .*
2. On va commencer plus modestement : combien y a-t-il de cordes dans  $C^{(n)}$  ? *Une corde correspond exactement à deux points distincts, et il y a  $n$  points sur le cercle ...*

### Exercice 2.—

*Un exemple pour  $n = 5$  :*



1. Certaines cordes de  $C^{(n)}$  s'intersectent à l'intérieur du disque, on note  $S_{int}^{(n)}$  l'ensemble des points d'intersection ainsi créés à l'intérieur (pas sur le cercle) du disque. Calculer  $s_n$  le cardinal de  $S_{int}^{(n)}$ .  
*Remarquer qu'un point d'intersection intérieur correspond à deux cordes distinctes qui se croisent ... et "donc" à 4 points distincts sur le cercle ...*
2. L'ensemble des points  $S_{int}^{(n)}$  d'intersection des cordes ainsi que l'ensemble des  $n$  points de  $S^{(n)}$  sur le cercle divisent les cordes en un ensemble de segments, noté  $A^{(n)}$ . Calculer le nombre de ces segments  $a_n$ .  
*Partir du nombre de cordes trouvé dans le premier exercice. On va ajouter les points (rouges) intérieurs un à un. Chaque fois qu'on ajoute un point rouge on coupe deux segments chacun en deux nouveaux segments, bilan : 2 anciens segments donnent 4 nouveaux, on ajoute deux segments au compte précédent pour chaque point rouge...*

**Exercice 3.**— On cherche une relation liant le nombre de sommets, d'arêtes et de régions dans un polygone “maillé” (partitionné) lui-même par des polygones (convexes). On notera dans toute la suite  $S$  le nombre de sommets,  $A$  le nombre d'arêtes et  $F$  le nombre de faces dans le maillage.

1. Calculer  $S - A + F$  sur quelques exemples.
2. Étant donné un polygone convexe  $D$  à  $n$  côtés, on a  $S - A + F = n - n + 1 = 1$ . Construire une triangulation de  $D$  qui ne change pas cette identité. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 4.**— On va donner une idée de la preuve de la relation d'Euler dans le cas d'un *maillage triangulaire* d'un polygone  $D$ .

1. Que se passe-t-il si on enlève un triangle qui a exactement deux arêtes sur le bord extérieur ?

*On enlève tous les triangles de ce type.*

2. Que se passe-t-il si on enlève un triangle qui a exactement une arête sur le bord extérieur ?

*On enlève un triangle de ce type (et on demande que le triangle n'ait que deux sommets sur le bord extérieur) et on revient à la première étape. On itère jusqu'à ce que ce ne soit plus possible.*

3. Quel type de face reste-t-il (combien d'arêtes sur le bord ?)

*On admet qu'il ne reste plus qu'un seul triangle.*

4. En déduire la relation d'Euler dans ce cas.

Revenir au problème initial et conclure !

**Remarque.** La relation d'Euler reste vraie dans le cas d'un maillage avec des polygones non nécessairement convexes, mais trianguler un polygone non convexe est possible mais pas évident du tout en général.

# LA CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ

Un objet étant ainsi décomposé, nous allons fabriquer un nombre  $\chi$  qui sera égal au nombre de points, moins le nombre de segments, plus le nombre d'éléments de surface contractiles, moins le nombre de volumes contractiles (\*), et on appellera ce nombre  $\chi$  la CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ.

Ainsi pour le Cercle  $\chi = 1 - 1 = 0$

1 point, 1 segment



Pour le Tore - surface, voyons un point, deux segments, un élément de surface  $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$

C'est à dire 1 point, 2 segments et 1 élément de surface contractile

Pour la SPHÈRE - SURFACE  $\chi = 1 - 1 + 2 = 2$

un point, un segment, deux calottes

La caractéristique de la SPHÈRE - VOLUME est évidemment  $-1$ , alors que celle du TORE - VOLUME est  $1 - 1 = 0$  (Voir le dessin en haut et à droite de la page 14)

(\*) ce qui s'étend immédiatement à un nombre de dimensions supérieur à trois (c'est une somme alternée)

15

Et maintenant, écoutez bien : cette caractéristique  $\chi$  est INDÉPENDANTE DU MODE DE DÉCOMPOSITION (en cellules contractiles) !!

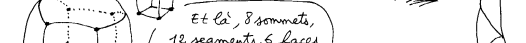
Par exemple, cette courbe fermée a été coupée en 8 segments réunis par 8 points, et sa caractéristique est toujours nulle.

effectivement.

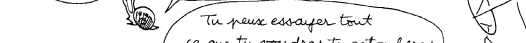
Voyons cette décomposition de la sphère : 4 sommets, 6 segments, 4 faces. Je retrouve  $\chi = 4 - 6 + 4 = 2$ .



Et là, 8 sommets, 12 segments, 6 faces  $\chi = 8 - 12 + 6 = 2$

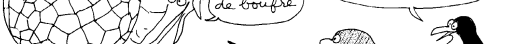


Tu peux essayer tout ce que tu voudras, tu retomberas toujours sur  $\chi = 2$



Bouffre de bouffre

Étonnant, non ?



16

Figure 1: Extrait du *Toplogicon* de Jean-Pierre Petit