Université Paris Sud
Blanche Buet
www.math.u-psud.fr/~buet

2020–2021
Bâtiment 307, bureau 2A8
blanche.buet@u-psud.fr

Contrôle Continu – MEU104 – jeudi 19 novembre

Culture Mathématique

L'épreuve est prévue pour 1 heure, le sujet est déposé à 16h15 sur ecampus, votre copie est à rendre **avant 18h15 le même jour** *par mail à l'adresse* blanche.buet@u-psud.fr *: un mail vous sera envoyé en retour pour confirmer la bonne réception. N'oubliez pas la pièce jointe ...*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1.— *Dynamique des populations et suites récurrentes.*

1. On considère le modèle discret pour une population $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant

$$p_0 > 0 \,\text{donné et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n\,.$$

   (a) Quelle fonction de croissance f permet d'écrire $p_{n+1} = p_n + f(p_n)$?
   La fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x$ convient.

   (b) Exprimer p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et p_0.
   C'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N},\, p_n = \frac{1}{2^n}p_0$.

   (c) Quel est le devenir de la population p_n quand $n \to +\infty$?
   La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 : on a extinction de la population.

2. On considère le modèle discret pour une population $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant

$$w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 2\,. \tag{1}$$

   (a) Soit $c \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = w_n - c$. Quelle relation de récurrence vérife la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   On a $v_{n+1} = w_{n+1} - c$ et $w_n = v_n + c$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 2 - c = \frac{1}{2}(v_n + c) + 2 - c = \frac{1}{2}v_n + 2 - \frac{1}{2}c \quad \Rightarrow \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2 - \frac{1}{2}c\,.$$

   (b) Exprimer v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ pour $c = 4$.
   Soit $c = 4$, par la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N},\, v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ et par la question 1, comme $v_0 = w_0 - c = w_0 - 4 = -3$ on en déduit que

$$v_n = \frac{1}{2^n}v_0 = -\frac{3}{2^n}\,.$$

   (c) Quel est le devenir de la population w_n quand $n \to +\infty$?
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et comme $\forall n \in \mathbb{N},\, w_n = v_n + 4$ on peut conclure que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4. On a donc stabilisation de la population.

Exercice 2.— *Modèle discret de Gompertz*

Soit $a > 0$. On définit la fonction $f_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_a(x) = x(1 - a \ln x) .$$

1. Pour $a > 0$ fixé, résoudre l'équation $f_a(x) = x$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.

   Soit $x > 0$,

   $$f_a(x) = x \Leftrightarrow x(1 - a \ln x) = x \underset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 - a \ln x = 1 \underset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 .$$

2. On suppose $a = 1$ et donc $f_a(x) = f_1(x) = x(1 - \ln x)$.

   (a) Étudier les variations de f_1 sur $]0, 1]$.

   La fonction f_1 est dérivable comme combinaison de fonctions usuelles qui sont dérivables sur leur ensemble de définition et on a pour tout $x \in]0, 1]$,

   $$f_1'(x) = 1 - \ln x + x\left(\frac{-1}{x}\right) = -\ln x \geq 0 .$$

   La fonction f_1 est donc croissante sur $]0, 1]$. De plus $f_1(1) = 1$ et comme $\lim_{x \to 0_+} x \ln x = 0$, on en déduit $\lim_{x \to 0_+} f_1(x) = 0$.

   (b) Montrer que l'intervalle $]0, 1]$ est stable par f_1 (c'est-à-dire $f_1(]0, 1]) \subset]0, 1]$.

   Soit $x \in]0, 1]$, on doit montrer que $f_1(x) \in]0, 1]$. On a d'une part $\ln x \leq 0$ et donc $1 - \ln x \geq 1 > 0$ ainsi que $x > 0$ donc leur produit $f_1(x) > 0$. D'autre part, par l'étude des variations de f_1 sur $]0, 1]$, on a $f_1(x) \leq f_1(1) = 1$. On a donc bien $0 < f_1(x) \leq 1$.

   (c) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in]0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_1(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

   Comme l'intervalle $]0, 1]$ est stable par f_1 et $u_0 \in]0, 1]$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1]$. On étudie la signe de $f_1(x) - x$ pour $x \in]0, 1]$:

   $$f_1(x) - x = x(1 - \ln x) - x = -x \ln x \geq 0 .$$

   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

   (d) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

   La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1, elle converge donc vers $l \leq 1$. Comme de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$, on en déduit que $l \geq u_0 > 0$. Déterminons à présent $l \in]0, 1]$. Par continuité de f_1 sur $]0, 1]$ et donc au point $l \in]0, 1]$, on a

   $$\lim_{n \to \infty} f_1(u_n) = \lim_{x \to l} f_1(x) = f_1(l) .$$

   Par ailleurs $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_1(u_n)$, il vient par unicité de la limite que $f_1(l) = l$. Il reste à appliquer la première question pour conclure que $l = 1$.

3. *Question plus difficile.* Étudier les variations de f_a pour $a \geq 1$ fixé et en déduire que l'intervalle $]0, 1]$ est stable par f_a si et seulement si a satisfait $a \exp\left(\frac{1-a}{a}\right) \leq 1$.

   La fonction f_a est dérivable sur $]0, 1]$ comme combinaison de fonctions usuelles dérivables sur leur ensemble de définition et pour tout $x \in]0, 1]$,

   $$f_a'(x) = 1 - a \ln x + x\left(\frac{-a}{x}\right) = 1 - a - a \ln x .$$

On étudie le signe de f_a' sur $]0,1]$:

$$f_a'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-a-a\ln x \geq 0 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} \ln x \leq \frac{1-a}{a} \underset{\exp \text{ et } \ln \nearrow}{\Leftrightarrow} x \leq \exp\left(\frac{1-a}{a}\right).$$

Notons $x_a = \exp\left(\frac{1-a}{a}\right)$, comme $a \geq 1$ on a $\frac{1-a}{a} \leq 0$ et donc $x_a = \exp\left(\frac{1-a}{a}\right) \leq \exp(0) = 1$. On en déduit les variations de f_a sur $]0,1]$:

x	0		x_a		1
$f_a'(x)$		$+$	0	$-$	
f_a	$\lim_{0_+} f_a = 0$	$\nearrow$	$f_a(x_a)$	$\searrow$	1

Finalement, l'intervalle $]0,1]$ est stable par f_a si et seulement si $f_a(x_a) \leq 1$ et

$$f_a(x_a) = \exp\left(\frac{1-a}{a}\right)\left(1-a\left(\frac{1-a}{a}\right)\right) = a\exp\left(\frac{1-a}{a}\right).$$

Exercice 3.— *Nombre de dominos.*

1. Un domino est un rectangle sur lequel sont inscrits deux nombres allant de 0 à 6. Lorsqu'on joue, on peut tourner le domino, de sorte que le domino

   $\boxed{0 \mid 6}$ et le domino $\boxed{6 \mid 0}$ sont en fait le même domino.

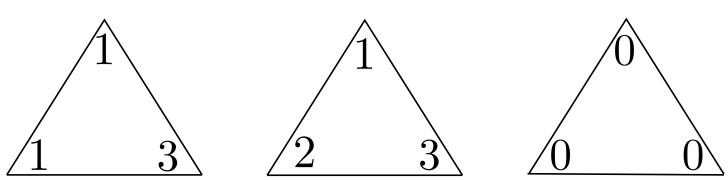
   (a) Un jeu de dominos contient exactement un exemplaire de chaque domino. Combien y a-t-il de dominos ?
   Comptons les doubles : il y en a 7, comptons les autres : on a 7 choix pour le premier chiffre et 6 pour le deuxième, cela fait 42 et on les compte deux fois, cela fait 21 et donc 28 dominos en tout.

   (b) On joue maintenant avec des dominos sur lesquels sont incrits deux nombres allant de 0 à n, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de dominos (en fonction de n) ?
   On effectue le même raisonnment:

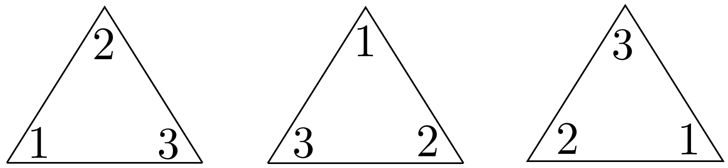
   - on a $n+1$ doubles,
   - et $n+1$ choix fois n choix divisé par 2 i.e. $\frac{n(n+1)}{2}$ dominos non doubles.

   On a donc en tout $n+1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ dominos.

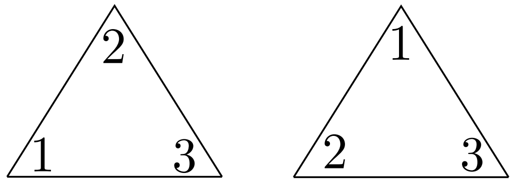
2. On s'intéresse à présent à des *triominos*, ce sont des triangles sur lesquels sont inscrits 3 nombres (un à chaque sommet du triangle) choisis parmi $\{0,1,\dots,5\}$. Exemples de triominos:



On peut faire tourner un triomino de sorte qu'on a ci-dessous trois positions différentes du même triomino:



En revanche les deux triominos suivants sont différents:



(a) Combien le jeu comporte-t-il de triominos différents ?

(b) *Question plus difficile.* Si les nombres inscrits sont maintenant choisis parmi $\{0, 1, \ldots, n\}$, combien le jeu comporte-t-il de triominos différents (en fonction de n) ?

On établit directement la formule en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

- On a $n+1$ triominos dont les trois nombres sont égaux.
- Comptons les triominos dont les trois nombres sont différents. Étant donnés trois nombres différents, on peut former exactement deux triominos différents. Et on a $\binom{n+1}{3}$ façons de choisir 3 éléments distincts parmi $n+1$. On a donc $2\binom{n+1}{3}$ triominos à trois nombres différents.
- Il reste les triominos à deux nombres, dont l'un apparaît deux fois. Il y $\binom{n+1}{2}$ façon de choisir 2 éléments distincts parmi $n+1$ et ensuite 2 choix de triomino selon le nombre qu'on décide de répéter, soit au total $2\binom{n+1}{2}$ triomino de cette sorte.

Au final on obtient $n+1+2\binom{n+1}{3}+2\binom{n+1}{2} = n+1+\frac{(n+1)n(n-1)}{3}+n(n+1) = \frac{(n+1)(n^2+2n+3)}{3}$ triominos différents. Pour $n=5$, cela fait 76 triominos différents.