

Calcul intégral / Analyse
Université Paris–Saclay, Orsay

Licence 1 Double Diplôme, 2ème semestre

Cours de 2020-21
MDD 151, code Apogée OLMA151

Enseignants : Jean-Baptiste Apoung Kamga, Gabriella Bettonte,
David Corlin Marchand, Stéphane Fischler, Pascal Gamblin,
Chinh Lu et Bruno Vallet.

Ce poly est le résultat du travail de plusieurs auteurs, notamment
Stéphane Fischler, Dorian Le Peutrec, Jean-Christophe Léger,
Daniel Perrin et Bruno Vallet.

Table des matières

1	Bijections réciproques	7
1.1	Rappels d'algèbre	7
1.1.1	Injectivité	7
1.1.2	Subjectivité	8
1.1.3	Bijectivité	8
1.2	Théorème de la bijection	8
1.3	Bijection réciproque	10
1.3.1	Définition et premières propriétés	10
1.3.2	Le théorème de continuité	11
1.3.3	Le théorème de dérivabilité	12
1.4	Les fonctions racine n -ième, $\sqrt[n]{}$	13
1.4.1	Rappel : Les fonctions « puissance » d'exposant entier	13
1.4.2	Le cas n impair, $n \geq 3$	14
1.4.3	Le cas n pair, $n \geq 2$	14
1.4.4	Puissances rationnelles	14
1.5	Les fonctions logarithme et exponentielle	16
1.5.1	Rappels : définitions et premières propriétés	16
1.5.2	Croissances comparées	18
1.5.3	Exponentielles et logarithmes de base $a > 0$, notation a^x avec $x \in \mathbb{R}$	19
1.6	Fonctions trigonométriques réciproques	19
1.6.1	La fonction arctan	19
1.6.2	La fonction arcsin	21
1.6.3	La fonction arccos	22
1.7	Transformation polaires/cartésiennes	23
2	Intégration	27
2.1	Primitives	27
2.2	Aires	27
2.3	Intégrale d'une fonction continue positive	28
2.3.1	Définition	28
2.3.2	Lien avec les primitives	28
2.4	Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque	29
2.4.1	Définition	29
2.4.2	Discussion	29
2.4.3	Propriétés	30
2.4.4	Calcul d'intégrales en pratique	30
2.5	Applications	31
2.5.1	L'inégalité des accroissements finis	31
2.5.2	La quadrature de la parabole	31

2.6	Intégration par parties	32
2.6.1	La formule	32
2.6.2	Utilisation de l'intégration par parties	32
2.7	Changement de variables dans les intégrales	33
2.7.1	Utilisation de la formule (1)	34
2.7.2	Utilisation de la formule (2)	34
2.7.3	Deux autres exemples	35
2.8	Développement en éléments simples (cas particulier)	37
2.9	Construction de l'intégrale de Riemann	38
2.10	Sommes de Riemann	41
2.11	Fonctions continues par morceaux	42
3	Formules de Taylor	45
3.1	Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral	45
3.2	Inégalité de Taylor-Lagrange	47
3.3	Notations o et $\sim$	47
3.4	Formule de Taylor-Young	49
4	Développements limités	53
4.1	Définition et exemples	53
4.2	Unicité du développement limité	54
4.3	Développement limité et dérivabilité	55
4.4	Développements limités à connaître.	55
4.5	Opérations sur les développements limités	56
4.6	Applications des développements limités au calcul de limites	59
4.7	Applications des développements limités à l'étude locale des graphes de fonctions : équation de tangente et position relative du graphe et de sa tangente.	60
4.8	Développement limité en $x_0 \in \mathbb{R}$, pas nécessairement 0.	61
4.9	Recherche d'asymptote.	62
5	Équations différentielles linéaires	65
5.1	Équations différentielles linéaires d'ordre 1	65
5.1.1	Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1	65
5.1.2	Équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre	67
5.1.3	Problème de Cauchy.	68
5.2	Équations différentielles linéaires d'ordre 2	69
5.3	Équations d'ordre 2 à coefficients constants	69
5.3.1	Équations homogènes	69
5.3.2	Équations d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre	71
5.4	Equations différentielles non linéaires	73
A	Primitives des fonctions rationnelles	75
A.1	Introduction et rappels	75
A.1.1	Les primitives connues de fonctions rationnelles	75
A.2	Quelques résultats sur les polynômes	75
A.2.1	Division euclidienne	75
A.2.2	Racines	76
A.3	Le théorème de décomposition en éléments simples	78
A.3.1	Définition des éléments simples	78
A.3.2	Primitives des éléments simples	78
A.3.3	Le théorème de décomposition	79
A.4	Méthodes pratiques de décomposition	79
A.4.1	Le cas où D est de degré 2	79
A.4.2	Le cas où D est de degré 3	80

A.4.3	Le cas général	81
B	Les fonctions hyperboliques et leurs réciproques	83
B.1	Les fonctions hyperboliques	83
B.2	Les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques	84
B.3	Développements limités	85
C	La continuité uniforme	87

Chapitre 1

Bijections réciproques

1.1 Rappels d'algèbre

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f (dans un repère orthonormé fixé une fois pour toutes), aussi appelée graphe de f : c'est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in D$ et $y = f(x)$. Etant donné $x_0 \in D$, on dit que $f(x_0)$ est l'image de x_0 par f . Etant donné $y_0 \in \mathbb{R}$, on appelle *antécédent* de y_0 par f tout élément $x_0 \in D$ tel que $f(x_0) = y_0$. Graphiquement, on peut chercher les antécédents (éventuels) de y_0 par f de la façon suivante. On trace la droite horizontale d'équation $y = y_0$, et on cherche les points d'intersection de cette droite avec la courbe $\mathcal{C}$ qui représente f . Chaque point d'intersection a pour ordonnée y_0 ; si on note x_0 son abscisse, on a bien $f(x_0) = y_0$ c'est-à-dire que x_0 est un antécédent de y_0 par f . Comme tous les antécédents de y_0 par f s'obtiennent ainsi, on a démontré le résultat suivant.

Proposition 1.1 *Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Les antécédents de y_0 par f sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite horizontale d'équation $y = y_0$. En conséquence, le nombre d'antécédents de y_0 par f est égal au nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite horizontale d'équation $y = y_0$.*

1.1.1 Injectivité

Définition 1.2 *On dit que f est injective si tout élément de $\mathbb{R}$ possède au plus un antécédent. Cela s'écrit formellement :*

$$\forall x, x' \in D \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

On peut remplacer cette définition formelle par sa contraposée, qui est équivalente :

$$\forall x, x' \in D \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

En français cela signifie : si deux éléments de D sont différents alors leurs images sont différentes. Autrement dit, si deux éléments de D ont la même image alors ils sont égaux.

La proposition 1.1 fournit la caractérisation suivante.

Proposition 1.3 *La fonction f est injective si, et seulement si, sa courbe représentative $\mathcal{C}$ coupe toute droite horizontale en au plus un point.*

En analyse, le moyen le plus simple de démontrer qu'une fonction est injective est le résultat suivant.

Proposition 1.4 *Si D est un intervalle et si f est strictement monotone sur D alors f est injective.*

Pour démontrer cette proposition, supposons que f est strictement décroissante (le cas où f est strictement croissante se démontrant de façon analogue). Soient $x, x' \in D$ tels que $x \neq x'$. Si $x < x'$ alors $f(x) > f(x')$ donc $f(x) \neq f(x')$. Sinon, on a $x > x'$ donc $f(x) < f(x')$ et $f(x) \neq f(x')$. Dans tous les cas on a donc démontré que $f(x) \neq f(x')$, ce qui termine la preuve.

1.1.2 Subjectivité

Maintenant on se donne aussi une partie V de $\mathbb{R}$, et on suppose que f est une fonction de D dans V , ce qu'on note $f : D \rightarrow V$; on dit aussi que f est à valeurs dans V . Cela signifie que pour tout $x \in D$, on a $f(x) \in V$. Par exemple on peut considérer la fonction carré, définie par $f(x) = x^2$, comme une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, ou bien comme une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [-2, +\infty[$. Mais on ne peut pas la considérer comme une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [-2, 5]$ car on a $3 \in \mathbb{R}$ mais $f(3) = 9 \notin [-2, 5]$.

Cette partie V de $\mathbb{R}$, dans laquelle f est à valeurs, n'intervient pas dans la définition d'injectivité ci-dessus. Mais elle est fondamentale pour la définition suivante.

Définition 1.5 *On dit que $f : D \rightarrow V$ est surjective si tout élément de V possède au moins un antécédent. Cela s'écrit formellement :*

$$\forall y \in V \quad \exists x \in D \quad y = f(x).$$

La proposition 1.1 fournit la caractérisation suivante. Dans cet énoncé, on suppose a priori que f est bien une fonction de D dans V .

Proposition 1.6 *La fonction $f : D \rightarrow V$ est surjective si, et seulement si, sa courbe représentative $\mathcal{C}$ coupe toute droite horizontale d'équation $y = y_0$ (avec $y_0 \in V$) en au moins un point.*

1.1.3 Bijectivité

Considérons toujours une fonction $f : D \rightarrow V$.

Définition 1.7 *On dit que $f : D \rightarrow V$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de V possède un et un seul antécédent. Cela s'écrit formellement :*

$$\forall y \in V \quad \exists! x \in D \quad y = f(x).$$

Rappelons que le symbole $\exists!$ signifie *il existe un et un seul*.

On a alors la caractérisation suivante :

Proposition 1.8 *La fonction $f : D \rightarrow V$ est bijective si, et seulement si, sa courbe représentative $\mathcal{C}$ coupe toute droite horizontale d'équation $y = y_0$ (avec $y_0 \in V$) en exactement un point.*

1.2 Théorème de la bijection

Le théorème suivant s'appelle, au choix, *théorème de la bijection* ou *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*. Pour l'appliquer il faut montrer que f est strictement monotone sur un intervalle I . Le résultat suivant est très utile pour cela : si f est dérivable sur I , et si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x , alors f est strictement croissante sur I . Bien sûr le résultat analogue avec $f'(x) < 0$ est vrai aussi. Par exemple la fonction $f : x \mapsto x^3$ vérifie $f'(x) = 3x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (mais pas pour $x = 0$), donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

	$I = [a, b]$	$I =]a, b[$	$I = [a, b[$	$I =]a, b]$
f strict. croissante	$J = [f(a), f(b)]$	$J =]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$	$J = [f(a), \lim_{b^-} f[$	$J =]\lim_{a^+} f, f(b)]$
f strict. décroissante	$J = [f(b), f(a)]$	$J =]\lim_{b^-} f, \lim_{a^+} f[$	$J =]\lim_{b^-} f, f(a)]$	$J = [f(b), \lim_{a^+} f[$

TABLE 1.1 – Intervalle image d'une bijection continue

Théorème 1.9 Soient a, b, c, d quatre réels, avec $a < b$ et $c < d$. Soit f une fonction définie sur $[a, b[$ et à valeurs réelles. On suppose que :

- La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[a, b[$.
- On a $f(a) = d$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$.

Alors :

- La fonction f est à valeurs dans $]c, d]$, c'est-à-dire qu'on peut écrire $f : [a, b[\rightarrow]c, d]$.
- La fonction $f : [a, b[\rightarrow]c, d]$ est bijective.

Pour résumer ces deux conclusions on dit que f réalise une bijection de $[a, b[$ dans $]c, d]$.

On a de nombreuses variantes de ce théorème, qui sont toutes très importantes.

- Si f est strictement croissante au lieu d'être strictement décroissante, il faut au tout début du théorème supposer $c > d$ au lieu de $c < d$, et remplacer l'intervalle $]c, d]$ par $[d, c[$: il est toujours fermé en $d = f(a)$ et ouvert en $c = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$, mais comme $d < c$ la première borne doit être d .
- Si f est définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$, on doit remplacer $f(a) = d$ par $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = d$ et ouvrir l'intervalle $]c, d]$ en d , c'est-à-dire le remplacer par $]c, d[$.
- Inversement, si f est définie sur le segment $[a, b]$, on doit remplacer $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$ par $f(b) = c$ et fermer l'intervalle $]c, d]$ en c , c'est-à-dire le remplacer par $[c, d]$.
- Si l'intervalle de départ est ouvert en a , on peut prendre $a = -\infty$, et dans ce cas on peut prendre aussi $d = -\infty$ (si f est strictement croissante) ou $d = +\infty$ (si f est strictement décroissante).
- De même, si l'intervalle de départ est ouvert en b , on peut prendre $b = +\infty$, et dans ce cas on peut prendre aussi $c = +\infty$ (si f est strictement croissante) ou $c = -\infty$ (si f est strictement décroissante).

On peut bien sûr combiner ces différentes variations. On obtient les différentes possibilités de la table 1.1, dans laquelle à chaque fois f est une bijection de I dans J .

Exemples et Remarques

1. Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Elle est continue et strictement décroissante sur $I =]0, 1]$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. Donc f réalise une bijection de I dans $J = [1, +\infty[$.
2. La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. En outre on a $\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \tan x = \pm \infty$, donc $\tan$ réalise une bijection de I dans $\mathbb{R}$.

Exemples Dans ces exemples on considère toujours la fonction carré, définie par $f(x) = x^2$, mais sur différents intervalles.

- 1) Elle est continue et strictement croissante sur $[2, 3]$, et on a $f(2) = 4$ et $f(3) = 9$. Donc f réalise une bijection de $[2, 3]$ dans $[4, 9]$.
- 2) Elle est continue et strictement croissante sur $[2, +\infty[$, et on a $f(2) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Donc f réalise une bijection de $[2, +\infty[$ dans $[4, +\infty[$.
- 3) Elle est continue et strictement croissante sur $]2, 3]$, et on a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ et $f(3) = 9$. Donc f réalise une bijection de $]2, 3]$ dans $]4, 9]$.
- 4) Elle est continue et strictement décroissante sur $[-3, -2]$, et on a $f(-3) = 9$ et $f(-2) = 4$. Donc f réalise une bijection de $[-3, -2]$ dans $[4, 9]$.

- 5) Elle est continue et strictement décroissante sur $] - \infty, -2]$, et on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(-2) = 4$. Donc f réalise une bijection de $] - \infty, -2]$ dans $[4, +\infty[$.
- 6) Elle est continue et strictement décroissante sur $] -3, -2]$, et on a $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 9$ et $f(-2) = 4$. Donc f réalise une bijection de $] -3, -2]$ dans $[4, 9[$.

1.3 Bijection réciproque

1.3.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.10 Soit $f : D \rightarrow V$ une fonction bijective. On appelle alors bijection réciproque de f , ou fonction réciproque de f , la fonction $f^{-1} : V \rightarrow D$ définie pour tout $y \in V$ de la façon suivante : $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f , c'est-à-dire l'unique $x \in D$ tel que $f(x) = y$.

Cette définition signifie qu'on a :

$$\forall x \in D \quad \forall y \in V \quad \left(x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y \right). \quad (1.1)$$

Cette fonction f^{-1} n'est définie que si f est bijective.

Exemples 1) La fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle vérifie $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$. D'après le théorème 1.9, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$. Sa bijection réciproque est le logarithme népérien, qui est une bijection $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.

2) La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; elle vérifie $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème 1.9 elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, +\infty[= \mathbb{R}_+$. Sa bijection réciproque est la fonction racine carrée, qui est une bijection $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

3) L'exemple précédent se généralise immédiatement à la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^k$ avec k un entier strictement positif fixé. Sa réciproque est la fonction racine k -ième : pour $x, y \in \mathbb{R}_+$ on a

$$x = \sqrt[k]{y} \Leftrightarrow y = x^k.$$

4) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Pour que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admette **au moins** une solution, il faut que y soit ≥ 0 . Si $y > 0$, l'équation $x^2 = y$ admet deux solutions distinctes (non nulles et opposées). Pour que f établisse une bijection d'une partie A de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$, il faut et il suffit que A contienne 0 et que pour tout $y > 0$ l'ensemble A contienne une et une seule des deux solutions de l'équation $x^2 = y$. On choisit en général la solution positive (que l'on note $\sqrt{y}$) et on obtient (comme à l'exemple 2 ci-dessus) que la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On aurait aussi pu choisir systématiquement la solution négative : la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ établit une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exemples et Remarques

- Si $f : D \rightarrow V$ est bijective, la relation (1.1) montre que $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in D$ et $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in V$. Autrement dit, $f^{-1} \circ f$ est l'application identité sur D (i.e. l'application $D \rightarrow D, x \mapsto x$) et $f \circ f^{-1}$ est l'application identité sur V .
- Dans ce contexte, la fonction $f^{-1} : V \rightarrow D$ est une bijection de V dans D et sa fonction réciproque est $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Ne surtout pas confondre f^{-1} avec la fonction $\frac{1}{f}$! Le vocable **fonction inverse** de f est parfois utilisé mais il est ambigu : selon le contexte, il désigne f^{-1} la bijection réciproque de f , ou $\frac{1}{f}$ la composée de l'inversion $x \mapsto \frac{1}{x}$ et de f .

Rappelons que le graphe $\mathcal{C}$ d'une fonction f de variable réelle à valeurs réelles est le sous-ensemble du plan formé par les points $(x, f(x))$ lorsque x décrit le domaine de définition de f . Si

$f : D \rightarrow V$ est une bijection, alors un couple (x, y) est dans $\mathcal{C}$ si et seulement si $x \in D$, $y \in V$ et $y = f(x)$. D'après la caractérisation (1.1) de f^{-1} , un couple (x, y) appartient à $\mathcal{C}$ ssi le couple (y, x) est dans le graphe de f^{-1} . Or (puisque l'on travaille toujours, dans ce cours, dans un repère orthonormé) les points (x, y) et (y, x) sont symétriques l'un de l'autre dans la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice du plan, i.e la droite d'équation $y = x$. On a donc le résultat suivant.

Proposition 1.11 *Soit f une bijection de D dans V . Alors le graphe de f^{-1} est le symétrique, par rapport à la première bissectrice, du graphe de f .*

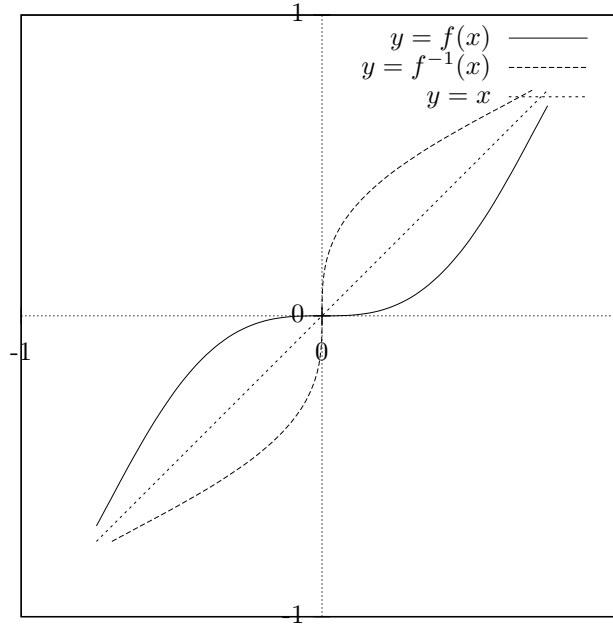


FIGURE 1.1 – Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice

On a le résultat suivant, vu au S1.

Proposition 1.12 *Si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ sont deux bijections alors $g \circ f : A \rightarrow C$ est une bijection et l'on a*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

1.3.2 Le théorème de continuité

Dans ce paragraphe on considère deux intervalles I et J , et une fonction f bijective de I dans J . En pratique on démontrera toujours cette bijectivité en appliquant le théorème 1.9.

Théorème 1.13 *Soit $f : I \rightarrow J$ continue, strictement monotone et bijective. Alors la fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J , de même sens de variation que f .*

Preuve. *Montrons que f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f :*

Pour fixer les idées, supposons que f soit strictement croissante. Soient y_1, y_2 dans J avec $y_1 < y_2$. De deux choses l'une : soit $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, soit $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Si la première inégalité a lieu, alors par croissance de f on obtient $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$ c'est-à-dire $y_1 \geq y_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse sur y_1 et y_2 . Par conséquent, c'est la deuxième inégalité qui est vérifiée, autrement dit, pour tous y_1, y_2 dans J vérifiant $y_1 < y_2$, on a $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Cela montre que

f est strictement croissante.

Montrons que f^{-1} est continue sur J :

Supposons encore pour fixer les idées que f (et donc aussi f^{-1}) est strictement croissante et montrons que, quel que soit $y_0 \in J$, la fonction f^{-1} est continue en y_0 . Pour alléger un peu la preuve, supposons que y_0 n'est pas l'extrémité droite de J et montrons seulement que f^{-1} est continue à droite en y_0 (la continuité à gauche en y_0 se montre de façon analogue). Cela équivaut à montrer que pour toute suite strictement décroissante $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de J telle que $y_n \rightarrow y_0$, on a $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y_0)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n := f^{-1}(y_n)$, de telle sorte que x_n appartient à I et $y_n = f(x_n)$ (et notamment on a $y_0 = f(x_0)$). Il s'agit donc de montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x_0 .

Or, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante de limite y_0 et la fonction f^{-1} est strictement croissante, donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de I strictement décroissante et minorée par $x_0 \in I$. Elle admet donc une limite ℓ dans I (et on a $\ell \geq x_0$). De plus, par continuité de f sur I , on a $f(x_n) \rightarrow f(\ell)$ i.e. $y_n \rightarrow f(\ell)$, ce qui implique $f(\ell) = y_0 = f(x_0)$. Mais alors, par injectivité de f , on déduit que $\ell = x_0$, cqfd. $\diamond$

1.3.3 Le théorème de dérivabilité

Notons encore I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Rappelons qu'une fonction φ est dite *de classe $\mathcal{C}^1$* sur un intervalle I si elle est dérivable sur I , et si sa dérivée φ' est continue sur I . Plus généralement, pour tout entier $n \geq 0$, elle est dite *de classe $\mathcal{C}^n$* sur I si elle est dérivable n fois sur I , et si sa dérivée n -ième $\varphi^{(n)}$ est continue sur I . Pour $n = 0$, être de classe $\mathcal{C}^0$ sur I signifie simplement être continue sur I . Enfin, φ est dite *de classe $\mathcal{C}^\infty$* sur I si elle est indéfiniment dérivable sur I , c'est-à-dire si pour tout n elle est dérivable n fois. Cela équivaut à dire que φ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n .

Théorème 1.14 *Soit $f : I \rightarrow J$ continue, strictement monotone et bijective. Alors on a les propriétés suivantes :*

- (i) *Si $x_0 \in I$, si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in J$ et on a*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

- (ii) *Si f est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur J et sa dérivée est donnée par la formule*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

- (iii) *Soit n un entier ≥ 1 . Si f est n fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$, resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est n fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$, resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur J .*

Preuve. Admettons provisoirement que le point (i) est démontré. On en déduit alors immédiatement que si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et sa dérivée est donnée par $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. Cette expression montre que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (et que sa dérivée f' ne s'annule en aucun point de I) alors $(f^{-1})'$ est continue sur J et donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J . Ceci achève la preuve du point (ii) (moyennant que (i) soit établi). Le point (iii) peut ensuite être démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, en partant de la relation $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$; cette démonstration est laissée en exercice.

Prouvons maintenant le point (i). On va utiliser, dans un cas très simple, les développements limités qui seront vus en détails au chapitre 4. Comme f est dérivable en x_0 , il existe une fonction ε continue et nulle en 0 telle que, pour tout x dans I suffisamment proche de x_0 , on ait

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0) = y_0 + (x - x_0)(f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)).$$

Par continuité de f^{-1} , si y est un point de J assez proche de y_0 (qui est égal à $f(x_0)$) alors $f^{-1}(y)$ est assez proche de x_0 pour être substitué à x dans le développement limité ci-dessus, ce qui donne

$$y - y_0 = (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))g(y) \quad \text{où} \quad g(y) = f'(x_0) + \varepsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)).$$

Par continuité de f^{-1} sur J d'une part, par continuité et nullité de ε en 0 d'autre part, la fonction g est continue en y_0 donc $g(y) \rightarrow g(y_0) = f'(x_0)$ lorsque y tend vers y_0 en étant dans J . Comme $f'(x_0)$ est non nul par hypothèse, on a $g(y) \neq 0$ pour y voisin de y_0 et donc pour y voisin de y_0 mais distinct de y_0 on a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{g(y)} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

◇

1.4 Les fonctions racine n -ième, $\sqrt[n]{}$

1.4.1 Rappel : Les fonctions « puissance » d'exposant entier

Si n est un entier naturel non nul et si x est un nombre réel, on pose

$$x^n = \underbrace{x \dots x}_{n \text{ fois}}.$$

Proposition 1.15 *Pour tous réels x, y et tous entiers naturels non nuls n, m on a*

1. $1^n = 1$
2. $x^{m+n} = x^m x^n$
3. $(xy)^n = x^n y^n$
4. $(x^n)^m = x^{mn}$
5. *Binôme de Newton*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{\substack{k+\ell=n \\ k, \ell \geq 0}} \frac{n!}{k! \ell!} x^k y^\ell$$

On rappelle que le coefficient binomial est défini par $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour k et n entiers tels que $0 \leq k \leq n$.

Les règles 1, 2, et 4 suggèrent l'extension de la notation x^n à $n = 0$ en posant $x^0 = 1$ pour tout x , et même son extension aux entiers négatifs (à condition de se restreindre aux nombres réels x non nuls) en posant pour tout entier $n < 0$ et tout $x \neq 0$

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}.$$

On vérifie alors facilement la proposition suivante.

Proposition 1.16 *Pour tous réels non nuls x, y et tous entiers relatifs n, m on a*

1. $1^n = 1$
2. $x^{m+n} = x^m x^n$
3. $(xy)^n = x^n y^n$
4. $(x^n)^m = x^{mn}$

Soit n un entier relatif. Notons p_n (comme "puissance n ") la fonction définie par $p_n(x) = x^n$. Le domaine de définition de p_n est égal à $\mathbb{R}$ pour $n \geq 0$ et il est égal à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pour $n \leq -1$.

Proposition 1.17 1. Pour $n \geq 1$, la fonction p_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$p'_n(x) = n p_{n-1}(x) \quad (\text{donc } p'_n(x) = n \frac{p_n(x)}{x} \text{ si } x \neq 0)$$

2. Pour $n \leq -1$, la fonction p_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$. Sa dérivée est donnée par

$$p'_n(x) = n p_{n-1}(x) = n \frac{p_n(x)}{x}$$

1.4.2 Le cas n impair, $n \geq 3$

Le cas $n = 1$ est trivial : la fonction p_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et elle est égale à sa bijection réciproque. On supposera donc ici que n est un entier naturel impair ≥ 3 .

Proposition 1.18 1. La fonction p_n est impaire, de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction p_n définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On la note habituellement avec la notation racine n -ième :

$$p_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

3. La fonction p_n^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

4. Pour $x \neq 0$, on a

$$(p_n^{-1})'(x) = \frac{1}{n} \frac{p_n^{-1}(x)}{x}.$$

5. La fonction p_n^{-1} n'est pas dérivable en 0, son graphe admet une tangente verticale au point $(0, 0)$.

1.4.3 Le cas n pair, $n \geq 2$

On suppose ici que n est un entier naturel pair non nul, donc ≥ 2 .

Proposition 1.19 1. p_n est paire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. La fonction p_n définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Sa bijection réciproque est continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On la note habituellement avec la notation racine n -ième :

$$p_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

3. La fonction p_n^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4. Pour $x > 0$, on a

$$(p_n^{-1})'(x) = \frac{1}{n} \frac{p_n^{-1}(x)}{x}$$

5. La fonction p_n^{-1} n'est pas dérivable en 0, son graphe admet une demi-tangente verticale au point $(0, 0)$.

1.4.4 Puissances rationnelles

Pour tout réel $x > 0$ et tout entier naturel non nul n , on pose

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Pour tout $x > 0$ et tout nombre rationnel α dont la forme réduite est $\alpha = \frac{p}{q}$ (avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux) on pose

$$x^\alpha = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$

c'est-à-dire que, par définition, x^α est l'unique nombre $y > 0$ tel que $y^q = x^p$. On observera que pour n entier les définitions de x^n et de $x^{\frac{n}{1}}$ coïncident et que si $\alpha = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ mais que la fraction n'est pas réduite, on a quand même

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = x^\alpha.$$

Posons $y = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ et montrons que y est égal à x^α . Soit d le PGCD de p et q . On a $p = dp'$, $q = dq'$ et la forme réduite de α est $\alpha = \frac{p'}{q'}$. L'égalité cherchée découle de la suite d'implications

$$\left((y^{q'})^d = y^q = x^p = (x^{p'})^d \right) \text{ implique } \left(y^{q'} = x^{p'} = (x^\alpha)^{q'} \right) \text{ implique } \left(y = x^\alpha \right).$$

Nous conservons par ailleurs la convention $x^0 = 1$.

Proposition 1.20 *Pour tous réels x, y strictement positifs et tous rationnels α, β on a :*

1. $1^\alpha = 1$
2. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
4. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
5. La fonction $p_\alpha :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, $x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et sa dérivée est donnée par

$$p'_\alpha(x) = \alpha p_{\alpha-1}(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Preuve. Montrons, à titre d'exemple, que $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$. On suppose que $\alpha = \frac{p}{q}$. Par définition, $(xy)^\alpha$ est le nombre réel $z > 0$ tel que $z^q = (xy)^p$. En utilisant les règles de calcul déjà établies pour les exposants entiers, on obtient

$$(x^\alpha y^\alpha)^q = (x^\alpha)^q (y^\alpha)^q = x^p y^p = (xy)^p,$$

et, comme par ailleurs $x^\alpha y^\alpha$ est > 0 , on a donc

$$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha.$$

Pour établir les propriétés de continuité et de dérivation de p_α , notons pour commencer que par définition on a $p_\alpha = p_{\frac{1}{q}} \circ p_p$. De plus, en remarquant que $p_{\frac{1}{q}}$ n'est autre que la restriction de $(p_q)^{-1}$

à $]0, +\infty[$, on obtient que la fonction $p_{\frac{1}{q}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et vérifie $p'_{\frac{1}{q}}(x) = \frac{1}{q} \frac{p_{\frac{1}{q}}(x)}{x}$. Par ailleurs la fonction p_p est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$. On en déduit que $p_\alpha := p_{\frac{1}{q}} \circ p_p$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et vérifie

$$p'_\alpha(x) = p'_p(x) p'_{\frac{1}{q}}(p_p(x)) = p \frac{p_p(x)}{x} \frac{1}{q} \frac{p_{\frac{1}{q}}(p_p(x))}{p_p(x)} = \frac{p}{q} \frac{p_\alpha(x)}{x} = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha p_{\alpha-1}(x).$$

◇

Proposition 1.21 1. La fonction $x \mapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1.

2. Si $\alpha \neq 0$, alors p_α est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, de bijection réciproque $p_{\frac{1}{\alpha}}$.
3. Si $\alpha < 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$. De plus, la fonction p_α est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
4. Si $\alpha > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$. De plus, la fonction p_α se prolonge par continuité en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$, strictement croissante.
5. Si $\alpha \geq 1$, alors la fonction p_α se prolonge par continuité en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
6. Si $0 < \alpha < 1$, la fonction p_α n'est pas dérivable en 0. Son graphe admet une demi-tangente verticale au point $(0, 0)$.

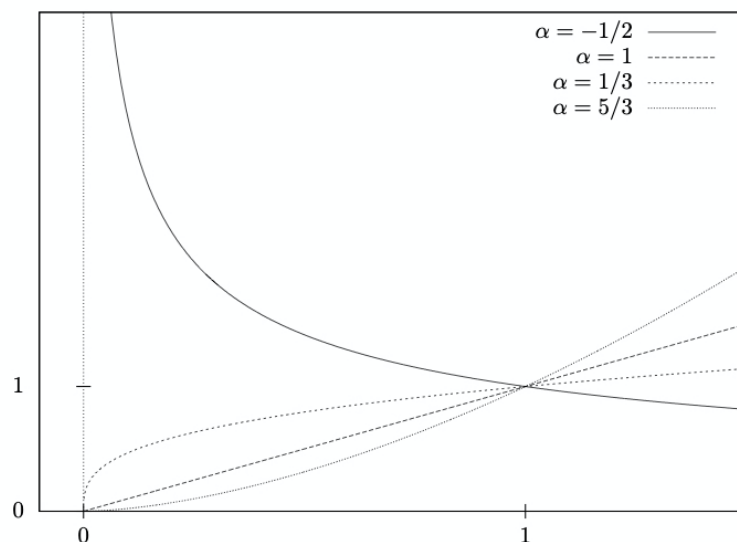


FIGURE 1.2 – Les graphes de différentes fonctions puissances

1.5 Les fonctions logarithme et exponentielle

1.5.1 Rappels : définitions et premières propriétés

On va définir le logarithme népérien comme étant la **primitive** s'annulant en 1 de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Cette définition nécessite la connaissance du théorème d'existence des primitives de fonctions continues, que nous aborderons dans le chapitre 2.

Théorème 1.22 (et Définition) *Il existe une unique fonction, notée $\ln$, appelée le **logarithme népérien** définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ vérifiant*

1. $\ln 1 = 0$.
2. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

De ceci, on peut déduire immédiatement les propriétés suivantes.

Proposition 1.23 1. Pour tous $x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
 2. Pour tout réel $x > 0$ et tout rationnel α , $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.
 3. La fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$
 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Preuve. Prouvons par exemple le point 2. Fixons un rationnel α et considérons la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x^\alpha)$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , elle vérifie $f(1) = 0$ et

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \frac{1}{x^\alpha} = \alpha \frac{1}{x}.$$

On en déduit que $f(x) = \alpha \ln(x)$ pour $x \in I$, comme annoncé. En ce qui concerne le point 3, la stricte croissance de $\ln$ découle de la stricte positivité de sa dérivée. On en déduit : $\ln 2 > \ln(1) = 0$. Le point 2 implique que $\ln 2^n = n \ln 2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Comme 2^n et $n \ln 2$ tendent vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, on en déduit alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. $\diamond$

On peut définir la fonction exponentielle comme étant la seule fonction f telle que $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$ pour tout réel x . Mais nous préférons adopter ici une autre définition : d'après le point 3 de la question précédente et le fait que $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ pour $x > 0$, $\ln$ réalise une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, ce qui mène à la définition et aux résultats ci-dessous.

Théorème 1.24 (et Définition) *La fonction exponentielle, notée $\exp$, est définie comme la bijection réciproque de $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. On a donc :*

1. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est strictement croissante, à valeurs > 0 et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

2. $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
3. $\exp(0) = 1$ et, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.
4. pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout rationnel α , $\exp(\alpha x) = (\exp(x))^\alpha$.

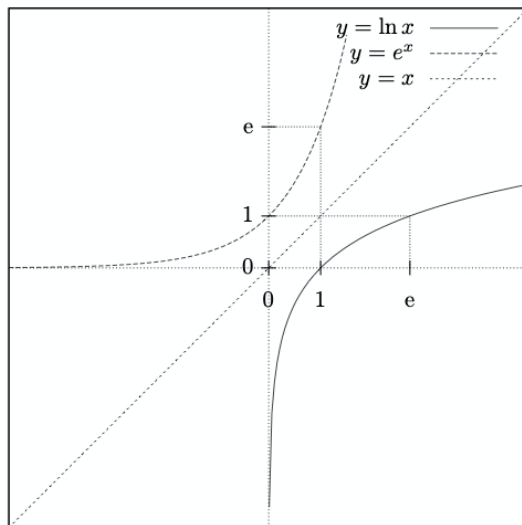


FIGURE 1.3 – Les graphes $y = \ln x$ et $y = e^x$

Exemples et Remarques

1. Montrons que la fonction exponentielle est bien l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Déjà, on a $\exp(0) = 1$ et $\exp' = \exp$ sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, si $f' = f$ sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x) \exp(-x) - f(x) \exp(-x) = 0$ c'est-à-dire que la fonction $x \mapsto f(x) \exp(-x)$ a une dérivée nulle en tout point $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, cette fonction est donc constante : il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \exp(-x) = A$ i.e. $f(x) = A \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Et si de plus $f(0) = 1$, alors $A = 1$ et $f = \exp$.
2. La preuve de $\exp' = \exp$ s'écrit : $\exp'(x) = \frac{1}{(\exp^{-1})'(\exp(x))} = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x)$.
3. Si on pose $e = \exp(1)$ (i.e. si on définit e comme l'unique réel > 0 tel que $\ln e = 1$), le point 4 implique que pour tout α rationnel, on a $e^\alpha = \exp(\alpha)$. On choisit d'étendre la relation aux nombres irrationnels en posant pour tout x réel

$$e^x := \exp(x).$$

Les règles de calcul fondamentales sur les puissances sont respectées :

- (a) $e^0 = 1$,
- (b) pour x, y réels, $e^{x+y} = e^x e^y$,
- (c) pour x réel et α rationnel, $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$.

1.5.2 Croissances comparées

Proposition 1.25 1. Pour tout nombre rationnel α on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^x = +\infty.$$

2. Pour tout rationnel α ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

3. Pour tout rationnel $\alpha > 0$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha \ln x = 0.$$

4. Pour tout rationnel $\alpha < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \ln x = 0.$$

Preuve. La difficulté majeure est de prouver le point 1. Commençons par établir, en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}_n : \ll \forall x \geq 0, \quad e^x \geq 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} \gg.$$

Soit $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x - 1$ et pour tout entier $n \geq 1$ soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x - (1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!})$. On vérifie immédiatement que les fonctions f_n s'annulent en $x = 0$, qu'elles sont dérivables et que pour tout $n \geq 1$ on a $f'_n = f_{n-1}$. Comme la fonction exp est croissante, la fonction f_0 est ≥ 0 sur $\mathbb{R}_+$. Mais alors f_1 est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $f_1(0) = 0$ on en déduit que f_1 est ≥ 0 sur $\mathbb{R}_+$. De même, si pour un certain $n \geq 1$ la fonction f_n est ≥ 0 sur $\mathbb{R}_+$ on en déduit que f_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $f_{n+1}(0) = 0$ on déduit que f_{n+1} est elle aussi ≥ 0 sur $\mathbb{R}_+$. Par récurrence on obtient que toutes les fonctions f_n sont positives sur $\mathbb{R}_+$ et cela montre que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $e^x \geq \frac{x^n}{n!}$ quel que soit $x \geq 0$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etant donné un nombre rationnel α , fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ strictement supérieur à $-\alpha$. En utilisant ce qui précède, on obtient

$$\forall x > 0, \quad x^\alpha e^x \geq \frac{1}{n!} x^{\alpha+n},$$

et par ailleurs on a $x^{\alpha+n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, car $\alpha + n > 0$ et on en déduit $x^\alpha e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, en vertu du théorème des gendarmes.

Pour le deuxième point, il suffit de se rappeler que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. En effet, on a donc

$$x^\alpha e^{-x} = \frac{1}{x^{-\alpha} e^x},$$

et d'après le point 1, le membre de droite de cette égalité tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ car son dénominateur tend vers $+\infty$.

Les points 3 et 4 sont des conséquences du point 2 : en effet, si on pose $y = -\alpha \ln x$, on a $x^\alpha \ln x = -\frac{1}{\alpha} y e^{-y}$ et on observe que si α est > 0 et x tend vers 0^+ ou bien si α est < 0 et x tend vers $+\infty$, alors y tend vers $+\infty$ et donc $y e^{-y}$ tend vers 0.

◇

1.5.3 Exponentielles et logarithmes de base $a > 0$, notation a^x avec $x \in \mathbb{R}$

D'après ce qui précède, pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{Q}$, on a :

$$\ln(a^x) = x \ln a \quad \text{et} \quad a^x = \exp(x \ln a).$$

Pour $a > 0$, on généralise cette définition à tout réel nous définissons alors a^x pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ par :

Définition 1.26 Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

On a alors : $\ln(a^x) = x \ln a$. Dans le cas particulier où $a = \exp(1) = e \in \mathbb{R}$, cette définition donne $e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$, ce qui explique la notation e^x pour $\exp(x)$.

Lorsque a est > 0 et différent de 1, la fonction $\exp_a : x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in]0, +\infty[$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Sa bijection réciproque est la fonction $\ln_a :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\ln_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

La valeur $a = 10$ est particulièrement prisée en physique-chimie, par exemple pour définir le pH d'une solution ou le bruit en décibels. La fonction $\ln_{10}$ est le plus souvent notée $\log$. Le cas particulier $a = 2$ est fréquent en informatique ; on note souvent $\log_2$ au lieu de $\ln_2$.

Ce qui précède nous permet de définir la fonction $p_\alpha :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, $x \mapsto p_\alpha(x) = x^\alpha$ non seulement pour α rationnel, mais pour tout réel α . Pour cela on utilise la formule $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$. Ces fonctions ont déjà été étudiées pour les valeurs rationnelles de α et les résultats des propositions 1.20, 1.21 et 1.25 sont encore valables avec des exposants réels.

1.6 Fonctions trigonométriques réciproques

Les généralités sur les fonctions réciproques montrent que celles-ci servent à résoudre une équation du type $f(x) = y$ d'inconnue x pour un certain paramètre y . Sous l'hypothèse de bijectivité, une telle équation possède une et une seule solution, qui est $x = f^{-1}(y)$.

D'un intérêt particulier sont les équations trigonométriques, i.e faisant intervenir les fonctions $\tan$, $\sin$, $\cos$ etc. Certaines d'entre elles pourront être résolues grâce aux fonctions réciproques $\arctan$, $\arcsin$, $\arccos$, etc.

Le lecteur doit cependant être conscient que du fait de leur périodicité les fonctions trigonométriques usuelles ne peuvent être inversées que sur des intervalles particuliers.

1.6.1 La fonction $\arctan$

La fonction $\tan$ est définie par $\tan(x) := \frac{\sin x}{\cos x}$ en tout point x tel que $\cos x \neq 0$. Elle est donc définie sur

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

La fonction $\tan$ est impaire et π -périodique. Ses propriétés sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 1.27 1. La fonction $\tan$ restreinte à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle est impaire.

2. Sa dérivée est $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}$, qui est > 0 sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ donc la fonction $\tan$ est strictement croissante sur cet intervalle.

3. Les limites de la fonction $\tan$ aux bornes de l'intervalle sont

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan x = -\infty,$$

4. Quelques valeurs remarquables : $\tan 0 = 0$, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, $\tan \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, etc.

On en déduit donc que

Théorème 1.28 1. La fonction $\tan$ restreinte à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ définit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est notée $\arctan$.

2. La fonction $\arctan$ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

3. La fonction $\arctan$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. Les limites en $\pm\infty$ de la fonction $\arctan$ sont

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

5. La fonction $\arctan$ est impaire, $\arctan(0) = 0$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, etc.

Concernant la résolution de l'équation $\tan x = y$ avec pour inconnue le réel x , on a :

Proposition 1.29 Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Le réel x est solution de l'équation $\tan x = y$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $x = \arctan y + k\pi$.

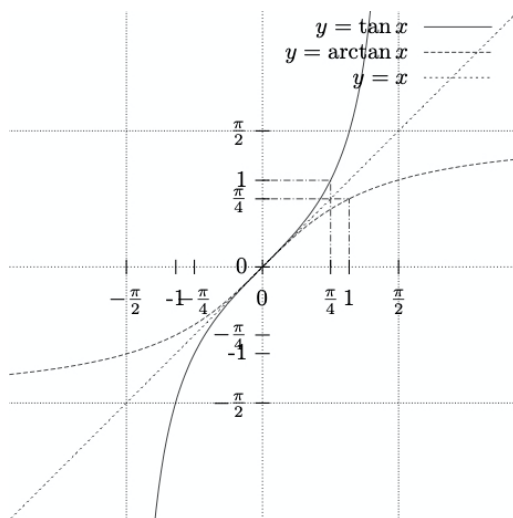


FIGURE 1.4 – Les graphes de $y = \tan x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $y = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan } x$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

$$\text{Arctan } x \in]-\pi/2, \pi/2[\text{ et } \tan(\text{Arctan } x) = x.$$

Cette fonction vérifie aussi, pour tout $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\tan \theta \in \mathbb{R} \text{ et } \text{Arctan}(\tan \theta) = \theta.$$

Il faut être attentif que cette relation est *fausse* pour tout réel $\theta \notin]-\pi/2, \pi/2[$, puisqu'on a $\text{Arctan}(\tan \theta) \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Enfin la proposition suivante, qui peut se prouver en montrant que la dérivée du membre de gauche est identiquement nulle, permet de ramener l'étude de $\arctan x$ en $+\infty$ à son étude en 0.

Proposition 1.30 *Pour tout $x > 0$, on a*

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

1.6.2 La fonction arcsin

La fonction sin est impaire et 2π -périodique, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. La proposition suivante résume ses propriétés sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

Proposition 1.31 1. *La fonction sin restreinte à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ est de classe C^∞ et elle est impaire.*

2. *Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ on a $\sin'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \geq 0$ et en particulier on a $\sin'(x) > 0$ pour tout x dans l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. La fonction sin est donc strictement croissante sur le segment $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.*

3. *Quelques valeurs remarquables : $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = +1$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, etc.*

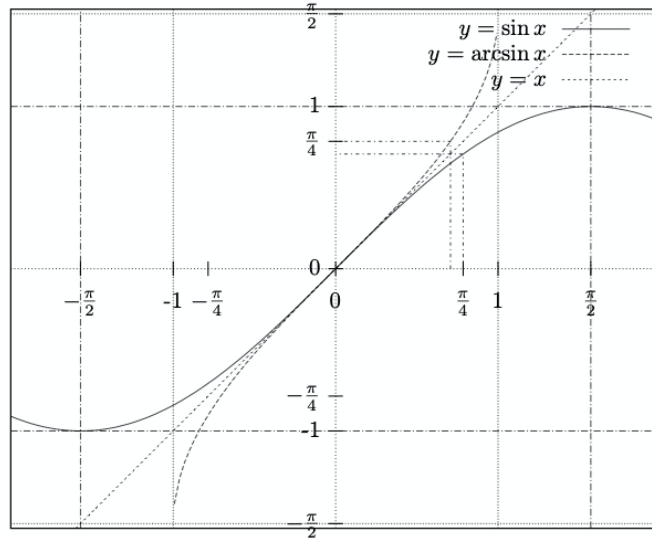


FIGURE 1.5 – Les graphes de $y = \sin x$ et $y = \arcsin x$

On en déduit donc que

Théorème 1.32 1. *La fonction sin définit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, +1]$. Sa bijection réciproque est notée arcsin.*

2. *La fonction arcsin est une bijection continue, strictement croissante de $[-1, +1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.*

3. La fonction $\arcsin$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +1[$ et sa dérivée y est définie par

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

4. La fonction $\arcsin$ est impaire, $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, etc.

5. Le graphe de $\arcsin$ admet des demi-tangentes verticales aux points d'abscisses $x = \pm 1$.

Concernant la résolution de l'équation $\sin x = y$ où l'inconnue est le réel x , on a

Proposition 1.33 Soit $y \in [-1, +1]$ fixé. Le réel x est solution de l'équation $\sin x = y$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $x = \arcsin y + 2k\pi$ ou $x = \pi - \arcsin y + 2k\pi$.

Pour conclure rappelons que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\text{Arcsin } x$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

$$(A_{\sin}) \quad \text{Arcsin } x \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ et } \sin(\text{Arcsin } x) = x.$$

Cette fonction vérifie aussi, pour tout $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$:

$$(B_{\sin}) \quad \sin \theta \in [-1, 1] \text{ et } \text{Arcsin}(\sin \theta) = \theta.$$

Il faut prendre garde au point suivant. Dans $(A_{\sin})$, la relation $\sin(\text{Arcsin } x) = x$ a un sens si, et seulement si, $x \in [-1, 1]$; quand c'est le cas, elle est toujours vraie. En revanche, dans $(B_{\sin})$, la relation $\text{Arcsin}(\sin \theta) = \theta$ a un sens pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, mais n'est vraie que pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ (elle est fausse pour les autres valeurs de θ !).

1.6.3 La fonction arccos

La fonction $\cos$ est paire, 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La proposition suivante résume ses propriétés sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Proposition 1.34 1. La fonction $\cos$ restreinte à l'intervalle $[0, \pi]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle est paire.

2. Pour $x \in [0, \pi]$ on a $\cos'(x) = -\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x} \leq 0$ et en particulier on a $\cos'(x) < 0$ pour tout x dans l'intervalle ouvert $]0, \pi[$. La fonction $\cos$ est donc strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

3. Quelques valeurs remarquables : $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \pi = -1$ etc.

On en déduit donc que

Théorème 1.35 1. La fonction $\cos$ définit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, +1]$. Sa bijection réciproque est notée $\arccos$.

2. La fonction $\arccos$ est une bijection continue, strictement décroissante de $[-1, +1]$ sur $[0, \pi]$.

3. La fonction $\arccos$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +1[$ et sa dérivée y est définie par

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

4. La fonction $\arccos$ est paire, $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, etc.

5. Le graphe de $\arccos$ admet des demi-tangentes verticales aux points d'abscisses $x = \pm 1$.

Concernant la résolution de l'équation $\cos x = y$ où l'inconnue est le réel x , on a

Proposition 1.36 Soit $y \in [-1, +1]$ fixé. Le réel x est solution de l'équation $\cos x = y$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $x = \arccos y + 2k\pi$ ou $x = -\arccos y + 2k\pi$.

On a la relation suivante entre $\arcsin$ et $\arccos$. Une preuve consiste à dériver le membre de gauche. Cette relation est à rapprocher de la formule de trigonométrie bien connue $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ valable pour tout réel x .

Proposition 1.37 Pour tout $x \in [-1, +1]$, on a $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

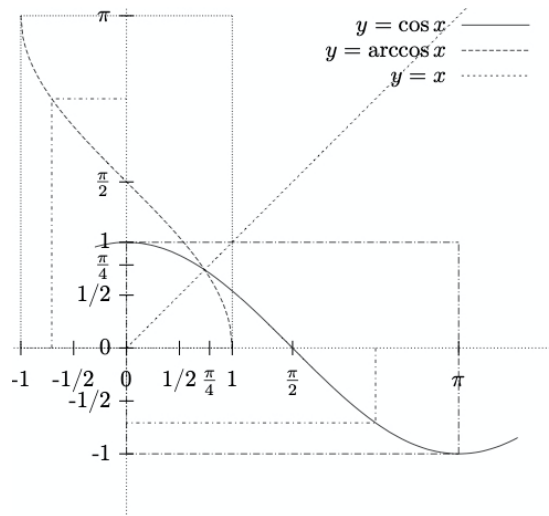


FIGURE 1.6 – Les graphes de $y = \cos x$ et $y = \arccos x$

1.7 Transformation polaires/cartésiennes

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on décrit la position d'un point M grâce à ses coordonnées cartésiennes. Il est parfois utile de décrire la position à l'aide de ρ , la distance de M à l'origine, et de l'angle θ (défini modulo 2π) que fait $O\vec{M}$ avec le vecteur $\vec{i}$ dirigeant l'axe des abscisses (cet angle n'est pas défini si $M = O$). On passe des coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de M à ses coordonnées cartésiennes en posant $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.

La question à laquelle nous allons répondre ici concerne le passage dans l'autre sens : connaissant les coordonnées cartésiennes de M , déterminer ses coordonnées polaires. La détermination de ρ ne pose pas de problème : si $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ alors $x^2 + y^2 = \rho^2$ et donc $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Le problème est de calculer θ . Si M n'est pas sur l'axe des ordonnées, on a $x \neq 0$ et on a

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta} = \tan \theta.$$

Cette formule suggère l'utilisation de la fonction arctan. Trois cas principaux se dégagent (voir la figure 1.7) :

- (i) Si $x > 0$, l'angle θ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ donc $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.
- (ii) Si $x < 0$ et $y > 0$, l'angle θ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π donc $\theta = \pi + \arctan \frac{y}{x}$, dont la tangente vaut bien $\frac{y}{x}$.
- (iii) Si $x < 0$ et $y < 0$, l'angle θ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$ donc $\theta = -\pi + \arctan \frac{y}{x}$, dont la tangente vaut bien $\frac{y}{x}$.

Concernant les points de l'axe des ordonnées, on pose

- (iv) $\theta = \frac{\pi}{2}$ si $x = 0$ et $y > 0$, ce qui est la limite naturelle de θ lorsque $y > 0$ est fixé et que x tend vers 0 par valeurs positives ou négatives.
- (v) $\theta = -\frac{\pi}{2}$ si $x = 0$ et $y < 0$, ce qui est là encore la limite naturelle de θ lorsque $y < 0$ est fixé et que $x \rightarrow 0$.

Ce faisant, nous avons associé à tout point M de coordonnées (x, y) , sauf à ceux vérifiant $y = 0$ et $x \leq 0$, un couple $(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$. En un sens que vous verrez au S4, on peut montrer que

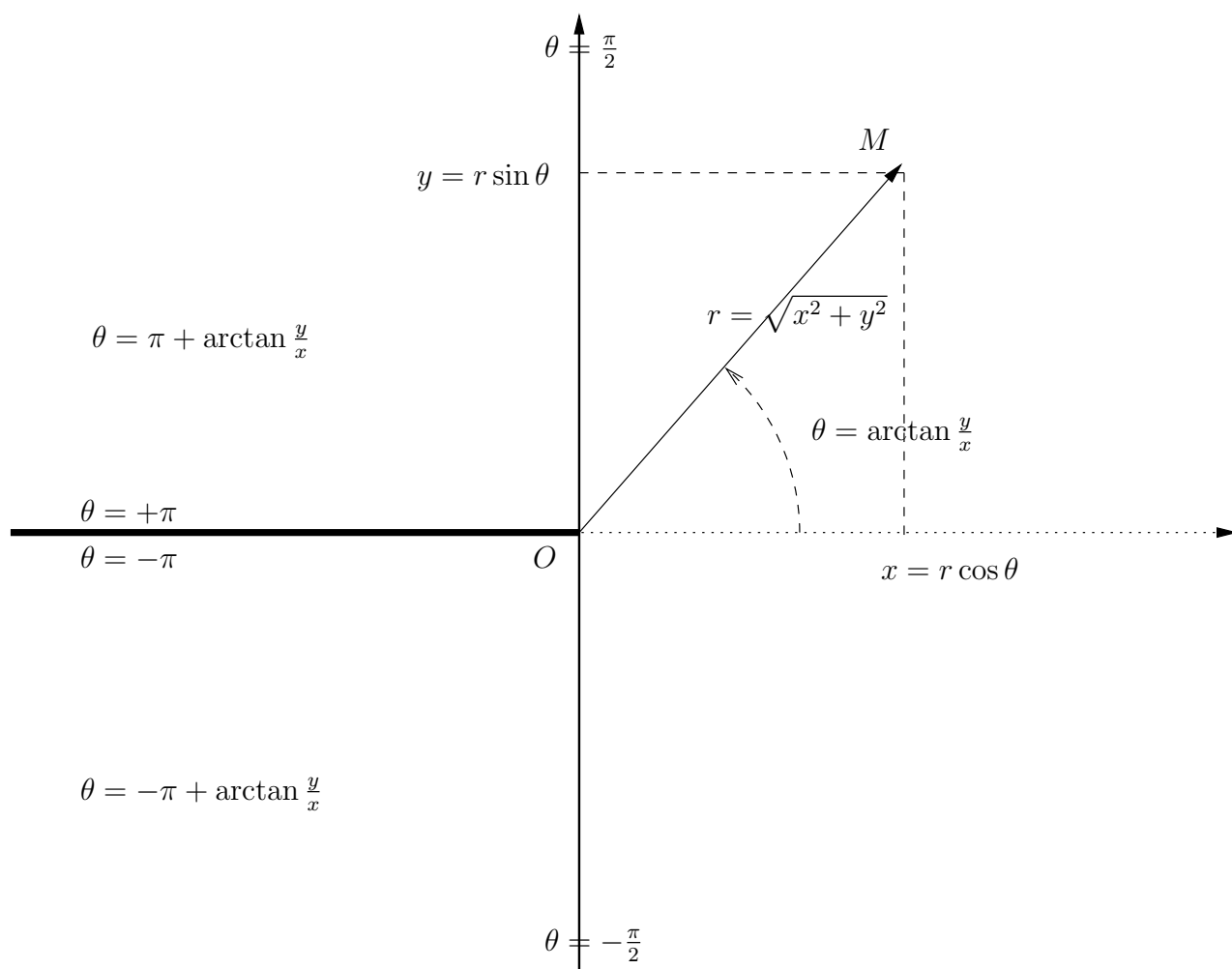


FIGURE 1.7 – Passage polaires-cartésiennes

ρ et θ sont des fonctions continues du couple (x, y) dans le plan privé du demi-axe des abscisses négatives (c'est-à-dire privé des points (x, y) tels que $y = 0$ et $x \leq 0$).

Si $x < 0$ est fixé, lorsque y tend vers 0 par valeurs positives, θ tend vers π et lorsque y tend vers 0 par valeurs négatives, θ tend vers $-\pi$: on pourrait choisir de poser $\theta = \pi$ au point $(x, 0)$, ou bien $\theta = -\pi$, mais dans les deux cas la fonction θ serait discontinue en ce point. On peut montrer que la fonction $\theta(x, y)$ ne peut pas se prolonger par continuité au plan (même en privant celui-ci de l'origine).

En résumé, la correspondance coordonnées polaires-coordonnées cartésiennes que nous venons d'expliciter établit une bijection continue et de réciproque continue (au sens que vous verrez au S4) entre $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$. L'élimination du demi-axe des abscisses négatives est nécessaire pour éviter de choisir si ces points doivent avoir un angle π ou $-\pi$, et ainsi obtenir une fonction θ continue.

Si nous avions eu à étudier un problème où les points intéressants sont proches de ce demi-axe négatif, on aurait choisi d'utiliser d'autres conventions pour l'angle θ . Une option est d'éliminer le demi-axe des réels positifs et de considérer $\theta \in]0, 2\pi[$.

Intégration

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (ni vide, ni réduit à un point). Pour rendre ce chapitre plus compréhensible en première lecture, on définit les intégrales à partir de la notion d'aire, dont on admet qu'elle existe et qu'elle vérifie des propriétés raisonnables. Ce n'est qu'au paragraphe 2.9 qu'on définit précisément la notion d'intégrale, sans rien admettre. Bien évidemment tous les résultats démontrés avant le paragraphe 2.9 à partir de la notion intuitive sont vrais avec la définition précise.

2.1 Primitives

Définition 2.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou une réunion d'intervalles). On dit que la fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable et si l'on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Proposition 2.2

- 1) Si F est une primitive de f il en est de même de $F + k$ où k est une fonction constante.
- 2) Si F et G sont deux primitives de f sur un intervalle I , la différence $F - G$ est une constante.
- 3) Soit $c \in I$ et $k \in \mathbb{R}$. Si f admet une primitive F , il existe une unique primitive G de f qui vérifie $G(c) = k$; en particulier il existe une et une seule primitive de f qui s'annule en c .

Démonstration. Le point 1) est clair. Pour 2) on a $(F - G)' = 0$, donc $F - G$ est constante; il est fondamental ici de travailler sur un intervalle (par exemple la fonction qui à $x \in \mathbb{R}^*$ associe 1 si $x > 0$, et -1 si $x < 0$, n'est pas constante bien que ce soit une primitive de la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$). Le point 3) découle immédiatement des deux précédents.

2.2 Aires

On travaille dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Nous *admettons* (voir le paragraphe 2.9) l'existence de la notion d'aire et ses propriétés essentielles :

- 0) On prend comme unité d'aire celle du carré unité bâti sur le repère.
- 1) Les polygones ont une aire, ainsi que l'hypographe d'une fonction f continue et positive sur un segment (cet hypographe est par définition la partie limitée par l'axe des x , le graphe de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, voir figure ci-dessous).
- 2) L'aire d'un rectangle R dont les côtés sont de longueurs a et b est égale à ab .
- 3) L'aire est additive : si A, B sont des parties disjointes, on a $\mathcal{A}(A \cup B) = \mathcal{A}(A) + \mathcal{A}(B)$. C'est encore vrai si les parties sont presque disjointes i.e. si leur intersection est une réunion finie

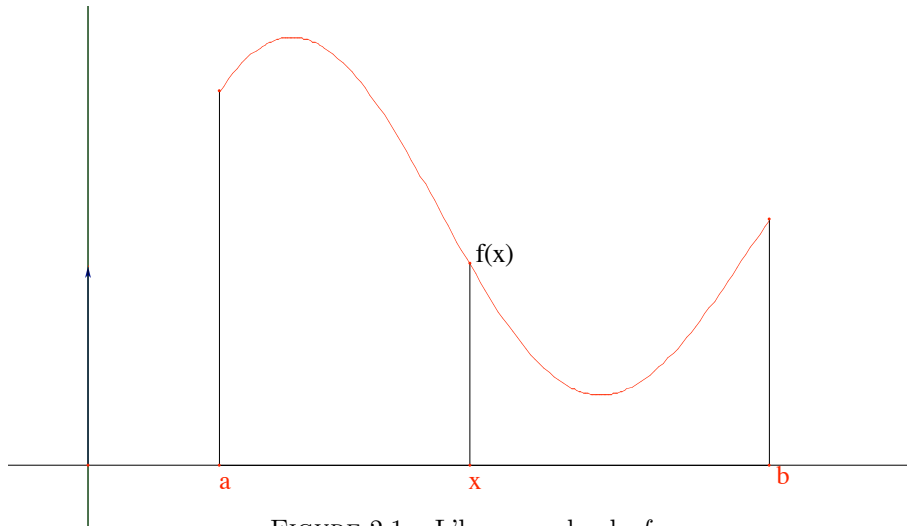


FIGURE 2.1 – L'hypographe de f

de segments. Un corollaire de cette propriété est la croissance de l'aire : si on a $A \subset B$ on a $\mathcal{A}(A) \leq \mathcal{A}(B)$.

4) L'aire est invariante par isométrie : si g est une isométrie (une translation, une rotation, une symétrie) on a $\mathcal{A}(g(A)) = \mathcal{A}(A)$.

5) Elle est homogène : si h est une homothétie de rapport k on a $\mathcal{A}(h(A)) = k^2 \mathcal{A}(A)$.

2.3 Intégrale d'une fonction continue positive

2.3.1 Définition

Définition 2.3 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ≥ 0 . On appelle **intégrale** de a à b de f et on note $\int_a^b f(t)dt$ la mesure de l'aire de l'hypographe de f défini ci-dessus par rapport au carré unité.

2.3.2 Lien avec les primitives

Le théorème essentiel est le suivant.

Théorème 2.4 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ≥ 0 . La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f . Précisément, c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a . Si G est une primitive quelconque de f on a $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$.

Démonstration.

On traite seulement le cas monotone, disons croissant. On calcule le taux d'accroissement $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$, disons pour $h > 0$. La quantité $F(x+h) - F(x)$ est l'aire de l'hypographe entre les abscisses x et $x+h$. Comme cette partie est comprise entre deux rectangles de largeur h et de longueurs $f(x)$ et $f(x+h)$ on a : $hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$, d'où $f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$. Quand h tend vers 0, comme f est continue, les deux extrêmes tendent vers $f(x)$, donc aussi le taux d'accroissement et on a donc, par définition de la dérivée, $F'(x) = f(x)$.

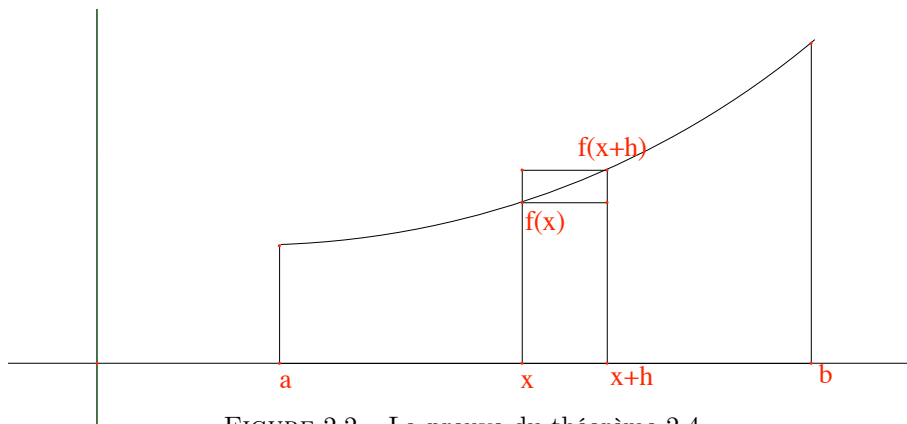


FIGURE 2.2 – La preuve du théorème 2.4

Par ailleurs on a $F(a) = 0$ puisqu'un segment est d'aire nulle (en effet, s'il est de longueur l , on peut l'englober dans des rectangles de longueur l et de largeur ε et faire tendre ε vers 0). Donc F est bien une primitive de f qui s'annule en a ; c'est la seule d'après la proposition 2.2.

Enfin on a $F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(t)dt$. Si G est une autre primitive de f , la formule vaut aussi avec G car on a $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante.

Corollaire 2.5

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f admet des primitives.

Démonstration. Comme f est continue sur un segment, elle est minorée par une constante m (c'est le théorème des bornes atteintes, vu en S1). On considère $g = f - m$ qui est continue ≥ 0 . La fonction g admet une primitive G et f admet la primitive $F(x) = G(x) + mx$.

2.4 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

2.4.1 Définition

Pour une fonction positive, les choses sont claires, l'intégrale c'est l'aire sous la courbe. Le théorème 2.4 montre alors que, si F est une primitive de f , on a $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Cette formule est une première justification de la définition suivante, qui vaut pour une fonction de signe quelconque et sans supposer la condition $a < b$ sur les bornes :

Définition 2.6 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, a et b des points de I et soit F une primitive de f sur I . On définit l'intégrale de a à b de f par la formule $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Remarque 2.7 Avec la définition ci-dessus, on vérifie que $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I ; c'est la seule qui s'annule en a . De façon un peu abusive, on notera $\int f(x)dx$ une primitive de f .

2.4.2 Discussion

On peut donner une justification supplémentaire de la définition 2.6 en voyant l'intégrale comme une aire "orientée".

On considère une fonction continue définie sur un intervalle I , de signe constant, mais pas nécessairement ≥ 0 , et deux points $a, b \in I$ (on ne suppose pas $a < b$). On considère son hypographe H et le bord orienté ∂H qui est la courbe fermée simple constituée du segment $[a, b]$, parcouru de a vers b , puis du segment vertical qui va de $(b, 0)$ à $(b, f(b))$, puis du graphe de f allant jusqu'à $(a, f(a))$ et enfin du segment vertical qui joint ce point à $(a, 0)$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ sera alors l'aire de l'hypographe, comptée positivement (resp. négativement) si ∂H tourne dans le sens

trigonométrique (resp. dans le sens des aiguilles d'une montre). En particulier, l'aire sera négative si on a $a < b$ et $f \leq 0$, et aussi dans le cas où $a > b$ et $f \geq 0$. Examinons ces deux cas et montrons que l'intégrale est encore donnée par la formule $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f .

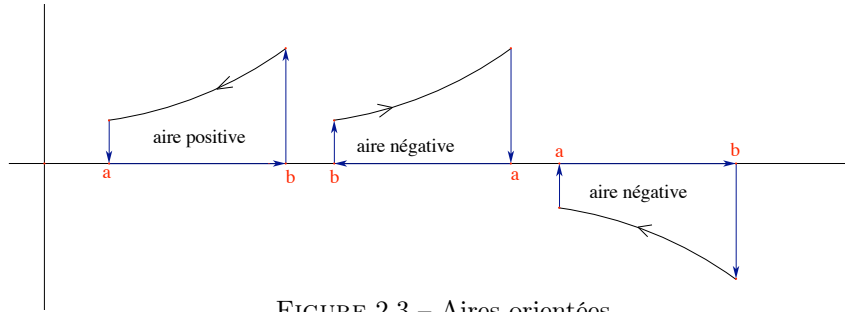


FIGURE 2.3 – Aires orientées

Si on a $a < b$ et f négative, l'aire de l'hypographe, en valeur absolue, est la même que celle de l'hypographe de $-f$ en vertu de l'invariance de l'aire par symétrie. Notons α cette aire. Si F est une primitive de f , $-F$ en est une de $-f$ et on a $\alpha = (-F)(b) - (-F)(a)$ en vertu du théorème 2.4. Comme l'intégrale, par convention, doit être négative, c'est bien $-\alpha = F(b) - F(a)$.

Si maintenant on a $a > b$, mais $f \geq 0$, c'est l'intégrale de b à a qui est positive et vaut $F(a) - F(b)$. Comme l'intégrale de a à b correspond à la même aire, comptée négativement, c'est encore $F(b) - F(a)$.

2.4.3 Propriétés

Proposition 2.8 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $a, b, c \in I$. On a les propriétés suivantes :

1) **(Relation de Chasles)** On a $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$, $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$, $\int_a^a f(t)dt = 0$.

2) **(Linéarité)** Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$.

3) **(Positivité)** On suppose $a \leq b$. Si $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. Si on a $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Démonstration. En notant F est une primitive de f , la relation de Chasles provient des formules suivantes, qui sont triviales : $F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$, $F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$ et $F(a) - F(a) = 0$.

Pour la linéarité, on note que $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ et il s'agit de vérifier alors $(\lambda F + \mu G)(b) - (\lambda F + \mu G)(a) = \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a))$.

Enfin, la positivité est évidente avec la définition 2.3.

2.4.4 Calcul d'intégrales en pratique

Etant donné une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, pour calculer $\int_a^b f(x)dx$ il est pratique de déterminer une primitive de f . On y arrive souvent grâce à la table ci-dessous, qui s'obtient en lisant un tableau de dérivées à rebours : f est la dérivée de F .

$F(x)$	$f(x)$	I
x^n	nx^{n-1}	$I = \mathbb{R}$ si $n \in \mathbf{N}$
x^n	nx^{n-1}	$I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$ si $n \in \mathbb{Z}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$I = \mathbb{R}$
$\ln x$	$1/x$	$I =]0, +\infty[$
$\ln x $	$1/x$	$I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$
$\sin x$	$\cos x$	$I = \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$I = \mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \in I_k, I_k =]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$I =]-1, 1[$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$I =]-1, 1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$I = \mathbb{R}$

TABLE 2.1 – Primitives classiques : F est primitive de f sur I

2.5 Applications

2.5.1 L'inégalité des accroissements finis

Proposition 2.9 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe m et M tels que l'on ait $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors, on a l'**inégalité des accroissements finis** :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$ et d'appliquer la positivité de l'intégrale.

2.5.2 La quadrature de la parabole

On considère la parabole d'équation $y = x^2$ et on cherche à calculer l'aire de la partie limitée par l'axe des x , les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$ et la courbe. Par symétrie, cette aire est double de celle de sa moitié droite E , définie par $x \geq 0$. Pour la calculer, voici deux méthodes.

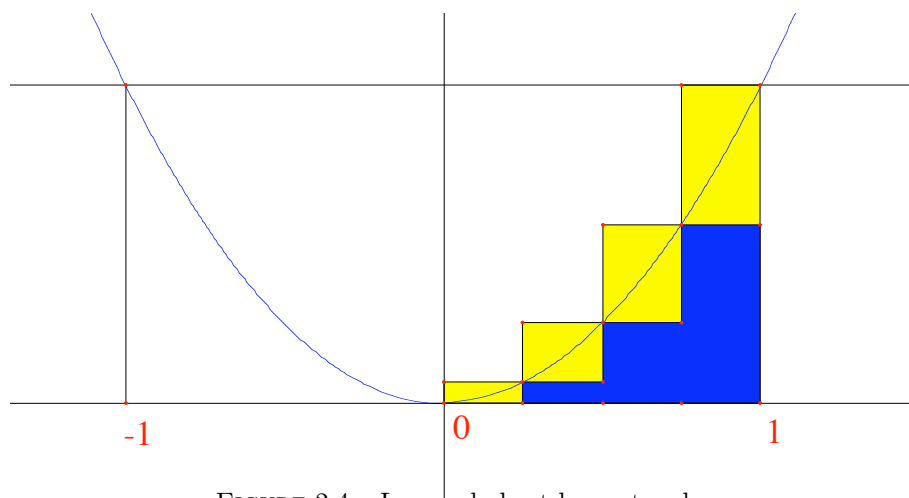


FIGURE 2.4 – La parabole et les rectangles

• On encadre E par des rectangles, voir figure ci-dessus. Si l'on partage le segment $[0, 1]$ en n parties égales, la somme des aires des rectangles situés en-dessous de la courbe est égale à

$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2}$ et celle des aires situées au-dessus de la courbe est égale à $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2}$. Pour

faire ce calcul, il faut se souvenir de la formule $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On obtient alors :

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leq \int_0^1 t^2 dt \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes montre qu'on a $\int_0^1 t^2 dt = 1/3$.

- On remarque que $x^3/3$ est une primitive de x^2 et on a le résultat.

Remarque 2.10 *La première méthode n'est ici que comme repoussoir, pour montrer combien la méthode utilisant les primitives est plus simple. La procédure de découpage, qui remonte à Archimède¹ et qui ramène le calcul à la somme des termes d'une suite, est beaucoup plus compliquée que le calcul des primitives (méthode plus récente puisqu'elle remonte à Newton et Leibniz, vers 1650). Encore, dans le cas de la parabole, parvient-on à faire relativement aisément le calcul de $\sum n^2$, mais on pensera à la difficulté du calcul de $\sum n^{23}$ par rapport à celle de $\int x^{23} dx$ pour mesurer le progrès accompli avec l'invention du calcul infinitésimal.*

Attention, ce qui vient d'être dit suppose que l'on sache calculer une primitive de f , ce qui n'est pas toujours le cas (par exemple on ne connaît pas de primitive de $f(x) = e^{-x^2}$).

2.6 Intégration par parties

Rappelons que la notation $[f]_a^b$ (f à prendre entre a et b) signifie $f(b) - f(a)$.

2.6.1 La formule

Proposition 2.11 *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un intervalle I . On a la formule :*

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Démonstration. C'est la formule $(uv)' = u'v + uv'$ intégrée entre a et b .

2.6.2 Utilisation de l'intégration par parties

Il n'y a pas de formule générale pour l'intégrale d'un produit : la formule d'intégration par parties tient ce rôle. On l'utilise dans le but d'avoir une expression plus simple à calculer que celle de départ. Par exemple, pour calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx,$$

on a le choix entre

1. poser $u(x) = x$, $v'(x) = \cos x$ et donc $u'(x) = 1$, $v(x) = \sin x$
2. ou poser $u(x) = \cos x$, $v'(x) = x$ et donc $u'(x) = -\sin x$, $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

1. Attention, Archimède calcule effectivement l'aire d'un segment de parabole par une méthode de découpage et passage à la limite, mais pas du tout en encadrant par des rectangles comme ci-dessus. En revanche, Archimède utilise une méthode très voisine de celle évoquée ici, et notamment la somme des k^2 , pour le calcul de l'aire de la spirale qui porte son nom.

Le premier mène à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

alors que le second mène à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}x^2 \sin x \, dx$$

Il est clair que dans le premier cas, les choses tendent à se simplifier alors que dans le second, elles ont tendance à se compliquer. En suivant la première voie, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

On utilise l'intégration par parties essentiellement dans deux cas que l'on retrouvera dans les exercices. Rappelons qu'une fonction rationnelle est une fonction de la forme $f(x) = P(x)/Q(x)$ où P et Q sont des fonctions polynomiales.

Une fonction transcendante à dérivée rationnelle multipliée par un polynôme

L'exemple type est le suivant : u est la fonction logarithme népérien (dont la dérivée $1/x$ est rationnelle) et v' est un polynôme (voire une fonction rationnelle). Par exemple on a :

$$\int_a^b \ln(x)x^n \, dx = \left[\ln(x)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b - \frac{1}{n+1} \int_a^b x^n \, dx$$

et l'intégrale de droite est facile à calculer. Cette méthode peut aussi être utilisée avec la fonction $\text{Arctan}(x)$ à la place de $\ln(x)$ (voir à la fin du paragraphe 2.7.3). En tout cas on peut retenir qu'en présence d'une de ces fonctions (ou d'une autre fonction trigonométrique réciproque), il est souvent utile d'intégrer par parties en la dérivant.

Un polynôme multiplié par une fonction facile à primitiver

Le cas le plus courant est celui où u est un polynôme et v' une exponentielle (ou une fonction sinus ou cosinus). On utilise alors plusieurs intégrations par parties successives. Précisément, on va dériver le polynôme jusqu'à ce qu'il soit nul et, parallèlement, calculer des primitives de v' . On peut par exemple calculer ainsi l'intégrale de $x^n e^x$. Par exemple, en intégrant trois fois par parties on obtient :

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x \, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x \, dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x.$$

On voit sur cet exemple qu'il peut être utile de dériver un polynôme, puisque cela fait baisser son degré. A l'inverse, intégrer une exponentielle ou une fonction trigonométrique ($\sin$, $\cos$, sh , ch – voir l'appendice B pour ces deux dernières fonctions) ne pose aucun problème puisque la primitive d'une telle fonction n'est pas plus compliquée que la fonction elle-même.

2.7 Changement de variables dans les intégrales

Théorème 2.12 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $\varphi : J \rightarrow I$ une fonction de classe C^1 . Soient $a, b \in J$. On a les formules :

$$(1) \quad \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \, du,$$

$$(2) \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt.$$

Remarque 2.13 Bien entendu, les formules (1) et (2) sont exactement identiques, mais ne seront pas employées de la même façon. Le point de vue adopté ici est que l'intégrale qu'on veut calculer est celle qui fait intervenir x .

Dans ce théorème, l'hypothèse $\varphi : J \rightarrow I$ signifie que pour tout $x \in J$, $\varphi(x)$ existe et appartient à I . Par ailleurs le fait que φ soit de classe $\mathcal{C}^1$ signifie que φ est dérivable sur J , et que sa dérivée φ' est continue sur J .

Démonstration. Comme f est continue sur I elle admet une primitive F sur I et on a $\mathcal{I} := \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$. On considère ensuite la fonction $G = F \circ \varphi$. Elle est dérivable sur J et on a $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. On a donc $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b G'(t) dt = G(b) - G(a) = \mathcal{I}$.

Remarque 2.14 En pratique, pour mémoriser la formule (1), on pose $u = \varphi(x)$ ce qui donne $du = \varphi'(x) dx$ (penser à la notation $\frac{du}{dx}$ utilisée en physique pour désigner la dérivée de u vue comme une fonction de x : ici cette fonction est φ , donc $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$ et il ne reste plus qu'à multiplier formellement par dx). De même pour (2) on note $x = \varphi(t)$ d'où $dx = \varphi'(t) dt$. Concernant les bornes, dans (1) quand x vaut a , $u = \varphi(x)$ vaut $\varphi(a)$ (et de même, quand x vaut b , u vaut $\varphi(b)$) : l'intégrale de a à b en x devient une intégrale de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$ en u . La situation est analogue pour (2).

2.7.1 Utilisation de la formule (1)

Règle 1 On utilise la formule (1) quand, dans l'intégrale à calculer, on voit apparaître une fonction $\varphi(x)$ et que sa dérivée $\varphi'(x)$ intervient dans un terme de la forme $\varphi'(x) dx$.

Exemples

1) On cherche à calculer $I = \int_1^3 (\ln(x))^7 \frac{dx}{x}$. On applique la formule en posant $\varphi(x) = \ln(x)$ (car la dérivée de φ , c'est-à-dire $1/x$, apparaît en facteur de dx). On trouve $I = \int_0^{\ln(3)} u^7 du = \frac{\ln(3)^8}{8}$.

2) On cherche à calculer $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$. Ici, on se souvient de la formule $\tan x = \sin x / \cos x$ et on pose $\varphi(x) = \cos x$ (là encore, sa dérivée apparaît, au signe près en facteur de dx). On a alors $I = - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{u} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

3) On peut de même calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{4x^3}{1+x^4} dx, \quad \int \frac{\ln(x)}{x} dx, \quad \int x e^{x^2} dx, \quad \int \sqrt{\sin(x)} \cos(x) dx, \quad \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}$$

en prenant respectivement pour $\varphi(x)$ les fonctions suivantes : $1+x^4$ sur $\mathbb{R}$, $\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, x^2 sur $\mathbb{R}$, $\sin(x)$ sur $[0, \pi]$, ax^2+bx+c sur un intervalle sur lequel cette fonction est strictement positive.

Remarques

1) Dans la pratique, on fait le changement de variable de la manière suivante. On pose $u = \varphi(x)$ et on écrit $du = \varphi'(x) dx$. On exprime la fonction à intégrer en fonction de u et enfin on change les bornes a, b en $\varphi(a), \varphi(b)$.

2) L'exemple 2) ci-dessus montre que la fonction φ n'a pas besoin d'être bijective (ici elle n'est pas injective : on a $\cos x = \cos(-x)$ pour $x \in [0, \pi/6]$).

2.7.2 Utilisation de la formule (2)

Règle 2 On utilise la formule (2) quand on repère que la fonction à intégrer serait plus simple si x était remplacé par $\varphi(t)$ pour une certaine fonction φ .

Il faut faire attention, en appliquant la formule (2), au fait qu'une fois la fonction φ choisie, on doit aussi trouver a et b tels que les bornes de l'intégrale à calculer (c'est-à-dire α et β si on cherche $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$) s'écrivent $\alpha = \varphi(a)$ et $\beta = \varphi(b)$. Il faut donc résoudre les équations $\varphi(t) = \alpha$ et $\varphi(t) = \beta$ pour trouver a et b . Eventuellement on peut avoir plusieurs choix pour a et b , avec certains menant à des calculs plus simples que d'autres.

On utilise principalement cette méthode quand on voit apparaître l'une des cinq expressions suivantes :

$$\sqrt{1-x^2}, \quad 1+x^2, \quad \sqrt{x^2-1}, \quad \sqrt{1+x^2}, \quad 1-x^2.$$

On pose alors respectivement $x = \sin t$, $x = \tan t$, $x = \operatorname{ch} t$, $x = \operatorname{sh} t$, $x = \operatorname{th} t$ (voir l'annexe B pour ces trois dernières fonctions). Ces expressions deviennent ainsi respectivement $|\cos t|$, $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, $|\operatorname{sh} t|$, $\operatorname{ch} t$, $1 - \operatorname{th}^2 t = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$. Il faut prendre garde au fait que $\sqrt{\alpha^2}$ a un sens pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, mais en général est égal à $|\alpha|$: on n'obtient α que si $\alpha \geq 0$.

Il y a une situation particulière dans laquelle ces cinq changements de variables sont encore plus utiles : c'est lorsqu'on intègre une expression comportant

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{dx}{1+x^2}, \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{dx}{1-x^2}.$$

En effet les cinq changements de variables $x = \varphi(t)$ mentionnés précédemment transforment chacune de ces expressions en $\pm dt$ (puisque $dx = \varphi'(t)dt$; le terme $\varphi'(t)$ annule exactement le dénominateur, au signe près lorsqu'il y a une valeur absolue).

Exemples 1) On veut calculer $I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$. On pose $x = \sin t = \varphi(t)$ avec $a = 0$ et $b = \pi/2$. On a alors $dx = \cos t dt$ et $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ car $\cos t \geq 0$ puisque $t \in [0, \pi/2]$. On voit, comme annoncé, que le terme $\sqrt{1-x^2}$ se simplifie et on a $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt$, ce qui se calcule en linéarisant $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$. On trouve $I = \pi/4$.

2) On veut calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. On pose $x = \tan t$ et on a $dx = (1+\tan^2 t)dt = (1+x^2)dt$ et un des facteurs $1+x^2$ se simplifie. On se souvient aussi de la formule $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. On a donc $I = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt$. On linéarise : $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ et on a $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

3) On veut calculer $I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$. On pose $x = \operatorname{sh} t$. On a $dx = \operatorname{ch} t dt$ et $\sqrt{1+x^2} = \operatorname{ch} t$. Il reste donc $I = \int_0^a \operatorname{sh}^2 t dt$ avec $a = \operatorname{argsh} 1 = \ln(1 + \sqrt{2})$. On linéarise en notant qu'on a $\operatorname{sh}^2 t = \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}$. On obtient $I = \frac{\operatorname{sh} 2a}{4} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{2}$.

2.7.3 Deux autres exemples

Voici un exemple pour lequel il est intéressant de poser le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

sur un intervalle sur lequel $\sin x \neq 0$, i.e. $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On remarque que $\frac{1}{\sin x}$ est bien définie pour $x \in [\pi/4, \pi/2]$ et que la fonction $x \rightarrow \tan \frac{x}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle, de dérivée $\frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{x}{2})$ et inversible, d'inverse $2 \arctan t$.

Pour continuer il est nécessaire de connaître l'expression de $\sin x$ en fonction de t . Profitons-en pour aussi exprimer $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de t . on a alors :

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

(On vérifie bien que pour x tel que $\tan \frac{x}{2} = 1$ soit $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan x$ n'est pas défini.) De plus

$$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ainsi en appliquant la formule du changement de variable, nous pouvons exprimer la primitive $\int \frac{1}{\sin x} dx$ comme une primitive d'une fonction rationnelle en la variable t :

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{(1+t^2)(2dt)}{(1+t^2)(2t)} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

De façon plus générale, le calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$, devient, grâce à ce changement de variable un calcul de primitive d'une fonction rationnelle (que l'on sait toujours calculer grâce aux résultats qui seront présentés dans l'appendice A). En fait, pour calculer une primitive d'une fonction de la forme

$$f(x) = R(\sin x, \cos x)$$

il y a souvent un changement de variable plus efficace que de poser $t = \tan(x/2)$ (c'est-à-dire qui permet de mener le calcul à bien plus rapidement). Il s'agit de la règle de Bioche, que voici :

- Si $f(x)dx$ est inchangé quand on remplace x par $-x$, on pose $t = \cos x$.
- Si $f(x)dx$ est inchangé quand on remplace x par $\pi - x$, on pose $t = \sin x$.
- Si $f(x)dx$ est inchangé quand on remplace x par $\pi + x$, on pose $t = \tan x$.

Détaillons le premier cas. Il s'agit de poser $x' = -x$, ce qui donne $dx' = -dx$ (comme si on faisait le changement de variable $x' = -x$). Si la fonction f est impaire, on a $f(-x) = -f(x)$ donc finalement $f(-x)d(-x) = (-f(x))(-dx) = f(x)dx$ ce qui signifie que $f(x)dx$ est inchangé quand on remplace x par $-x$: dans ce cas on pose $t = \cos x$. On peut s'en souvenir car $\cos(x)$ est invariant quand on remplace x par $-x$: on a $\cos(-x) = \cos(x)$. La même méthode permet de retenir les deux autres cas.

Par exemple pour calculer

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$$

on est dans le premier cas et en posant $t = \cos x$ on obtient $dt = -\sin x dx$; comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$ on a :

$$I = - \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(-1 + \frac{2}{1+t^2} \right) dt = \left[-t + 2 \operatorname{Arctan}(t) \right]_{\sqrt{2}/2}^1 = -1 + \frac{\pi}{2} + \sqrt{2}/2 - 2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}/2).$$

Finalement voici un exercice qui mêle changement de variable et intégration par parties : calculer $\int \arctan x dx$. Faisons une intégration par parties en posant : $u(x) = \arctan x$ et $v'(x) = 1$. Ainsi : $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $v(x) = x$, la formule nous donne alors :

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Or on reconnaît dans l'expression $\frac{x}{1+x^2}$ la forme $\frac{1}{2} \frac{\psi'}{\psi}$ avec $\psi(x) = 1+x^2$. Ainsi en posant $t = 1+x^2$ on obtient :

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

D'où

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

2.8 Développement en éléments simples (cas particulier)

On appelle *fonction rationnelle* toute fonction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes, avec $Q \neq 0$. Le développement en éléments simples est une technique qui permet de calculer une primitive de n'importe quelle fonction rationnelle. Elle est présentée en Annexe A.

Dans ce chapitre on se contente du résultat suivant, qui est un cas particulier du théorème principal énoncé au paragraphe A.3.3 de l'annexe A.

Théorème 2.15 *Soient P et Q deux polynômes. On suppose que Q est de la forme*

$$Q(x) = \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i) \text{ avec } \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R} \text{ deux à deux distincts.}$$

Alors il existe des réels $A_1, \dots, A_r$ et un polynôme E tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ on ait :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_r}{x - \alpha_r}. \quad (2.1)$$

En outre :

- *On a $E = 0$ si $\deg(P) < \deg(Q)$, et $\deg(E) = \deg(P) - \deg(Q)$ sinon.*
- *Le polynôme E et les réels $A_1, \dots, A_r$ sont uniques.*
- *Pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ on peut trouver A_j en évaluant en $x = \alpha_j$ la fonction*

$$\frac{(x - \alpha_j)P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\prod_{i \neq j} (x - \alpha_i)}.$$

Le polynôme E est le quotient dans la division euclidienne de P par Q : voir l'annexe A pour l'algorithme qui permet de calculer E en général. Lorsque $\deg(P) < \deg(Q)$ il n'y a rien à faire puisque $E = 0$; quand $\deg(P) = \deg(Q)$ on a $\deg(E) = 0$ donc E est une constante, qu'on peut trouver en faisant tendre x vers l'infini dans la relation (2.1). De même, en multipliant la relation (2.1) par $x - \alpha_j$ puis en faisant tendre x vers α_j on obtient A_j comme énoncé à la fin du théorème 2.15.

On peut démontrer le théorème 2.15 par récurrence sur r , mais dans le cadre de ce cours il est admis. Une preuve des résultats de l'annexe A, qui sont beaucoup plus généraux, sera vue en S3.

L'intérêt du théorème 2.15 pour la recherche de primitives est évident : il est facile, sur n'importe quel intervalle, de trouver une primitive du membre de droite de l'égalité (2.1). Par exemple on a

$$\frac{x^2 + 5}{x(x-1)} = 1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x-1}$$

ce qui donne $x - 5 \ln |x| + 6 \ln |x-1|$ comme primitive sur tout intervalle inclus dans $]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2.9 Construction de l'intégrale de Riemann

Dans ce paragraphe on donne une définition rigoureuse de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Celle présentée jusqu'ici est fondée sur la notion d'aire, dont on a admis au paragraphe 2.2 qu'elle a un sens et qu'elle possède un certain nombre de propriétés raisonnables. Or il n'est pas du tout évident de définir de façon précise l'aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$! Evidemment si c'est un triangle, un carré ou un autre polygone on peut la définir et la calculer facilement (par exemple en pavant cette figure par des triangles deux à deux disjoints et en calculant la somme de leurs aires), mais si c'est une partie très compliquée il n'est même pas évident que la notion d'aire ait toujours un sens.

Dans ce paragraphe on montre donc comment définir l'intégrale sur un segment $[a, b]$ d'une fonction continue sur un segment. Pour cela on a besoin de quelques définitions. Dans tout ce qui suit on fixe un segment $[a, b]$.

Soient $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, et $c_0, \dots, c_n, d_0, \dots, d_{n-1} \in \mathbb{R}$. On définit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant :

$$f(x) = \begin{cases} c_i & \text{si } x = x_i \text{ pour un indice } i \in \{0, \dots, n\} \\ d_i & \text{si } x_i < x < x_{i+1} \text{ pour un indice } i \in \{0, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (2.2)$$

Définition 2.16 On appelle fonction en escalier sur $[a, b]$ toute fonction qui peut s'écrire ainsi.

Par exemple la fonction partie entière est en escalier sur tout segment. Si on considère $a = 1$ et $b = 3$, on peut prendre $n = 2$, $x_1 = 2$, $c_0 = d_0 = 1$, $c_1 = d_1 = 2$ et $c_2 = 3$ puisqu'on a (en notant $[x]$ la partie entière de x , parfois notée $E(x)$) :

$$[x] = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 3 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Définition 2.17 L'intégrale d'une fonction f en escalier, donnée par (2.2), est définie par :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} d_i(x_{i+1} - x_i) = d_0(x_1 - x_0) + \dots + d_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Cette définition appelle plusieurs remarques. D'abord $d_i(x_{i+1} - x_i)$ est l'aire du rectangle dont les sommets sont les points de coordonnées $(x_i, 0)$, (x_i, d_i) , $(x_{i+1}, 0)$ et (x_{i+1}, d_i) . Il est logique de dire que cette aire est égale à l'intégrale de f entre x_i et x_{i+1} , puisque f est constante égale à d_i sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Les valeurs que prend f aux points x_i et x_{i+1} n'ont aucune importance pour le calcul d'une intégrale, donc les réels notés c_i dans (2.2) n'interviennent pas dans la définition de $\int_a^b f(x)dx$.

L'intérêt de considérer les fonctions en escalier est que leur hypographe est une réunion disjointe de rectangles (mis à part des segments sur les droites verticales $x = x_i$, qui sont d'aire nulle). La définition ci-dessus formalise le calcul de l'aire d'un tel hypographe.

Une fonction en escalier f peut s'écrire sous la forme (2.2) de multiples façons ; par exemple la fonction partie entière sur $[1, 3]$ (vue ci-dessus) pourrait aussi s'écrire en prenant $n = 3$, $x_1 = 3/2$ et $x_2 = 2$ par exemple (en fait la seule contrainte est que l'un des x_i soit égal à 2 : on peut ajouter autant d'autres x_i qu'on veut). On peut démontrer que la valeur de $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend que de f : c'est la même quelle que soit l'écriture (2.2) qu'on considère pour une fonction en escalier f donnée.

Considérons maintenant une fonction continue f sur $[a, b]$. Intuitivement on peut l'approcher par une fonction en escalier. C'est ce que fait une calculatrice graphique quand elle trace la fonction : si par exemple elle trace une fonction sur $[0, 1]$ et que la largeur de l'écran est de 1000 pixels, alors chaque pixel correspond à la valeur de la fonction sur un intervalle de longueur $1/1000$,

de la forme $]\frac{j}{1000}, \frac{j+1}{1000}[$. Autrement dit, la calculatrice trace le graphe d'une fonction en escalier, constante sur chaque intervalle de cette forme.

On va utiliser cette idée pour définir l'intégrale d'une fonction continue.

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et à valeurs réelles. Dans toute la suite on suppose que f est bornée, ce qui est automatique si f est continue (par le théorème des bornes atteintes). On note $I_-(f)$ l'ensemble des intégrales $\int_a^b \varphi(x)dx$ où φ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b]$ on ait $\varphi(x) \leq f(x)$. Autrement dit, $I_-(f)$ est l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier qui minorent f . C'est un ensemble non vide de réels puisque f est bornée.

De même on note $I_+(f)$ l'ensemble des intégrales $\int_a^b \psi(x)dx$ où ψ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b]$ on ait $\psi(x) \geq f(x)$.

Définition 2.18 On dit qu'une fonction f définie et bornée sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann si les trois conditions suivantes sont remplies :

- L'ensemble $I_-(f)$ est majoré.
- L'ensemble $I_+(f)$ est minoré.
- On a $\sup I_-(f) = \inf I_+(f)$.

Quand c'est le cas on définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ en posant :

$$\int_a^b f(x)dx = \sup I_-(f) = \inf I_+(f).$$

Lorsque f elle-même est en escalier, on montre sans grande difficulté que f est intégrable au sens de Riemann et que la définition donnée ici de $\int_a^b f(x)dx$ est cohérente avec celle donnée plus haut.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.19 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable au sens de Riemann, donc la définition précédente donne un sens à l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

Démontrons ce théorème. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors elle est bornée (et atteint ses bornes, mais on ne s'en sert pas ici) : il existe m et M tels que pour tout x on ait $m \leq f(x) \leq M$. Soient φ et ψ deux fonctions en escalier telles que pour tout x on ait $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$. Alors les deux encadrements précédents donnent $\varphi(x) \leq M$ et $m \leq \psi(x)$ pour tout x . En appliquant la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier on en déduit $\int_a^b \varphi(x)dx \leq M(b-a)$ et $m(b-a) \leq \int_a^b \psi(x)dx$. Donc $M(b-a)$ est un majorant de $I_-(f)$ et $m(b-a)$ est un minorant de $I_-(f)$. Comme $I_-(f)$ et $I_+(f)$ sont non vides (il suffit de considérer les fonctions constantes égales respectivement à m et M), on en déduit l'existence de $\sup I_-(f)$ et $\inf I_+(f)$. Pour conclure la preuve du théorème, il suffit de montrer que ces nombres sont égaux.

Soient φ et ψ deux fonctions en escalier telles que pour tout x on ait $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$; en particulier on a $\varphi(x) \leq \psi(x)$. En calculant leurs intégrales avec une même suite finie (x_i) dans (2.2), on en déduit que $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$. Cela montre que tout élément de $I_-(f)$ est inférieur ou égal à tout élément de $I_+(f)$. On en déduit que $\sup I_-(f) \leq \inf I_+(f)$.

Pour terminer la preuve on applique le théorème de Heine (voir l'annexe C) : comme f est continue sur un segment elle est uniformément continue. Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [a, b]$ vérifiant $|x - y| \leq \delta$ on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soient $\varepsilon > 0$, et $\delta > 0$ un réel tel que pour tous $x, y \in [a, b]$ vérifiant $|x - y| \leq \delta$ on ait $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Notons n un entier suffisamment grand pour que $\frac{b-a}{n} < \delta$, et posons $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq i \leq n$; on a bien $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Pour tout entier i compris entre 0 et $n-1$, considérons la fonction f sur $[x_i, x_{i+1}]$. Comme elle est continue sur ce segment, elle y est bornée et atteint ses bornes : il existe $\mu_i, \sigma_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tels que pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$ on ait :

$$f(\mu_i) \leq f(x) \leq f(\sigma_i).$$

On définit alors deux fonctions en escalier $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour $0 \leq i \leq n-1$:

$$\varphi(x) = f(\mu_i) \text{ et } \psi(x) = f(\sigma_i) \text{ pour tout } x \in]x_i, x_{i+1}]$$

et aussi $\varphi(a) = \psi(a) = f(a)$. Par construction on a bien $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, donc $\int_a^b \varphi(x)dx \in I_-(f)$ et $\int_a^b \psi(x)dx \in I_+(f)$. En outre, vu le choix de n à partir de la définition d'uniforme continuité, on a $|f(\sigma_i) - f(\mu_i)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ pour tout i , puisque μ_i et σ_i appartiennent tous les deux à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ dont la longueur est $x_{i+1} - x_i = a + (i+1) \cdot \frac{b-a}{n} - a - i \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} < \delta$. On a donc $f(\sigma_i) \leq f(\mu_i) + \frac{\varepsilon}{b-a}$ pour tout i , ce qui donne $\int_a^b \psi(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx + \varepsilon$. On a donc :

$$\inf I_+(f) \leq \int_a^b \psi(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx + \varepsilon \leq \sup I_-(f) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\inf I_+(f) \leq \sup I_-(f)$ ce qui termine la preuve du théorème 2.19.

On montre facilement que les propriétés du paragraphe 2.4.3 sont vérifiées avec cette définition de l'intégrale. Pour en déduire les autres propriétés énoncées dans ce chapitre, il ne reste qu'à prouver le théorème suivant.

Théorème 2.20 *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f .*

Démontrons ce résultat. Soit $x_0 \in [a, b]$: il s'agit de démontrer que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$. La combinaison de ces deux propriétés signifie :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

On va démontrer cela en revenant à la définition de limite. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0 , il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$ on ait $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Montrons que pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$ distinct de x_0 on a

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon \quad (2.3)$$

ce qui terminera la preuve (compte tenu de la définition d'une limite). D'après la relation de Chasles on a $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Or pour tout t compris entre x_0 et x , on a $f(x) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(x) + \varepsilon$ par définition de δ . Supposons dans un premier temps $x > x_0$. Alors on a, par croissance de l'intégrale,

$$(x - x_0)(f(x) - \varepsilon) = \int_{x_0}^x (f(x) - \varepsilon)dt \leq F(x) - F(x_0) \leq \int_{x_0}^x (f(x) + \varepsilon)dt = (x - x_0)(f(x) + \varepsilon)$$

d'où, puisque $x - x_0 > 0$:

$$f(x) - \varepsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x) + \varepsilon$$

ce qui démontre la majoration (2.3). Dans le cas où $x < x_0$ la preuve est similaire, mais les inégalités sont renversées : on a par exemple $(x - x_0)(f(x) - \varepsilon) \geq F(x) - F(x_0)$, ce qui donne bien $f(x) - \varepsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ puisqu'on divise par $x - x_0 < 0$ ce qui inverse à nouveau le sens de l'inégalité. Ceci termine donc la preuve du théorème 2.20.

Cette définition d'intégrale a le mérite d'être rigoureuse. Un de ses inconvénients majeurs est qu'il y a *trop peu* de fonctions intégrables au sens de Riemann, ce qui pose des problèmes (par exemple en probabilités). En effet considérons la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie de la façon suivante, pour tout $x \in [0, 1]$: $f(x) = 1$ si x est un rationnel (c'est-à-dire si x est de la forme p/q avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$), et $f(x) = 0$ sinon. Montrons alors qu'on a $I_-(f) = 0$ et $I_+(f) = 1$. Pour montrer que $I_-(f) = 0$, on constate que d'une part la fonction nulle est inférieure à f et d'intégrale 0 entre 0 et 1, et d'autre part que si une fonction φ en escalier vérifie $\varphi(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ alors on a $\varphi(x) \leq 0$ pour tout x sauf un nombre fini de points (car si on avait $\varphi(x) > 0$ sur un intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < b$, on pourrait trouver un nombre irrationnel $x \in]a, b[$ et on aurait $\varphi(x) > 0 = f(x)$ ce qui contredit l'hypothèse). De même, on montre que $I_+(f) = 1$ en montrant que si une fonction ψ en escalier vérifie $\psi(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ alors on a $\psi(x) \geq 1$ pour tout x sauf un nombre fini de points.

Finalement pour cette fonction f on a donc $I_-(f) \neq I_+(f)$: elle n'est pas intégrable au sens de Riemann. C'est un peu dommage car on aurait envie de dire que cette fonction vaut presque toujours 0. En effet entre 0 et 1 il y a *très peu* de rationnels par rapport au nombre d'irrationnels. La difficulté est de donner un sens précis à ce constat (car évidemment il y a une infinité d'irrationnels, et aussi une infinité de rationnels). Une façon de le faire est de dire que l'ensemble des rationnels est dénombrable, c'est-à-dire qu'on peut le mettre en bijection avec $\mathbb{N}$, ce qui n'est pas le cas de l'ensemble des irrationnels (qui est beaucoup plus gros).

L'intégrale de Lebesgue (qui est au programme du S5) résout ce problème. Il s'agit d'une autre façon de définir les intégrales, pour laquelle cette fonction f possède bien une intégrale (qui est nulle). Bien entendu pour des fonctions f continues, on retrouve l'intégrale au sens de Riemann définie ci-dessus.

2.10 Sommes de Riemann

Le résultat principal de cette partie est le suivant.

Théorème 2.21 *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Le cas particulier où $[a, b] = [0, 1]$ est celui qu'on utilise dans presque toutes les applications :

Corollaire 2.22 *Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Par exemple on peut utiliser ce corollaire pour déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + n^2}.$$

En effet on a, en divisant par n^2 au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k/n}{(k/n)^2 + 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n)$$

en posant $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ pour $x \in [0, 1]$. La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est bien continue, donc le corollaire montre que la suite (u_n) converge et que sa limite est égale à

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

Dans le théorème 2.21, la somme $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$ s'appelle la *somme de Riemann* associée à f . Si au lieu de commencer cette somme à $k = 1$ on la commence à $k = 0$, cela revient à ajouter un terme ce qui ajoute $\frac{b-a}{n} f(a)$ à la somme. La suite obtenue ainsi tend toujours vers $\int_0^1 f(x)dx$, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} f(a) = 0$. Cela signifie que dans le théorème 2.21 et dans son corollaire, on aurait pu remplacer $\sum_{k=1}^n$ par $\sum_{k=0}^n$. La même remarque montre que la somme aurait pu se terminer à $n - 1$ au lieu de n .

Démontrons maintenant le théorème 2.21. La preuve est assez proche de celle du théorème 2.19. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \geq 1$, notons

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

la somme de Riemann considérée. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a, b]$ donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [a, b]$ tels que $|x - y| \leq \delta$ on ait $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Notons N un entier suffisamment grand pour que $\frac{b-a}{N} < \delta$, et soit $n \geq N$. Posons $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq i \leq n$; on a bien $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Pour tout entier i compris entre 0 et $n - 1$, considérons la fonction f sur $[x_i, x_{i+1}]$. Comme elle est continue sur ce segment, elle y est bornée et atteint ses bornes : il existe $\mu_i, \sigma_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tels que pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$ on ait :

$$f(\mu_i) \leq f(x) \leq f(\sigma_i).$$

On définit alors deux fonctions en escalier $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour $0 \leq i \leq n - 1$:

$$\varphi(x) = f(\mu_i) \text{ et } \psi(x) = f(\sigma_i) \text{ pour tout } x \in]x_i, x_{i+1}]$$

et aussi $\varphi(a) = \psi(a) = f(a)$. Par construction on a pour tout k compris entre 1 et n :

$$\frac{b-a}{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} f(x_k) \leq \frac{b-a}{n} f(\sigma_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(x) dx$$

et de même $\frac{b-a}{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \geq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi(x) dx$. En sommant pour k allant de 1 à n on obtient

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq S_n \leq \int_a^b \psi(x) dx.$$

Comme dans la preuve du théorème 2.19 on a $\int_a^b \psi(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx + \varepsilon$; comme $\varphi(x) \leq f(x)$ pour tout x on en déduit $\int_a^b \psi(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx + \varepsilon$. De même on a $\int_a^b \varphi(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx - \varepsilon$. En combinant ces inégalités avec l'encadrement de S_n obtenu précédemment, on obtient

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right) - \varepsilon \leq S_n \leq \left(\int_a^b f(x) dx \right) + \varepsilon.$$

Etant donné la définition de limite d'une suite, cela termine la preuve du théorème 2.21.

2.11 Fonctions continues par morceaux

Définition 2.23 Une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ est dite continue par morceaux si il existe des réels $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ vérifiant $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ et tels que :

- Pour tout i compris entre 0 et $n - 1$, la fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$.
- Pour tout i compris entre 0 et $n - 1$, la fonction f possède une limite à droite en x_i .
- Pour tout i compris entre 1 et n , la fonction f possède une limite à gauche en x_i .

Ces conditions signifient que f est continue en tout point de $[a, b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points particuliers qu'on note x_i ; on demande aussi qu'en chacun de ces points, f possède une limite à droite et une limite à gauche (sauf bien sûr en $x_0 = a$, où on demande seulement une limite à droite puisque cela n'aurait aucun sens de parler de limite à gauche, et symétriquement en $x_n = b$).

Un exemple de fonction continue par morceaux est la fonction partie entière sur $[0, 3]$: on peut prendre $n = 3$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. De façon générale, la fonction partie entière est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$: on prend pour x_i tous les entiers compris entre a et b , car si n désigne un tel entier on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} [x] = n - 1 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} [x] = n.$$

Définition 2.24 Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. On définit l'intégrale de f entre a et b par :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

où $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ sont des réels comme dans la définition 2.23.

Evidemment les réels x_i dans la définition 2.23 ne sont pas uniques (on peut par exemple ajouter arbitrairement des réels à cette famille), mais on montre sans difficulté que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ qu'on définit ainsi ne dépend pas du choix de la famille (x_i) . Tous les résultats vus dans ce chapitre se généralisent lorsque les fonctions considérées sont seulement supposées continues par morceaux, et pas forcément continues.

Chapitre 3

Formules de Taylor

3.1 Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel.

Théorème 3.1 *Théorème de Taylor-Lagrange avec reste intégral à l'ordre $n \geq 1$.*

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , et soit $a, b \in I$. Alors,

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{(n)!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+s(b-a)) ds. \end{aligned}$$

Exemples et Remarques

1. Nous appellerons le polynôme $\sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$ le polynôme de Taylor de la fonction f .
2. On remarque que pour $n = 0$, c'est l'application directe du théorème fondamental de l'analyse :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt,$$

la fonction f étant $\mathcal{C}^1$.

3. Si P est une fonction polynomiale de degré n , alors $P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x^k$ les a_k étant des coefficients réels et $a_n \neq 0$. La fonction P est alors bien de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et en appliquant la formule du théorème pour $a, b \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$P(b) = P(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!}P^{(k)}(a)$$

car $P^{(n+1)} = 0$. Si l'on pose $b = x$ et $a = 0$ nous obtenons l'expression :

$$P(x) = P(0) + \sum_{k=1}^n \frac{(x)^k}{k!}P^{(k)}(0)$$

qui n'est autre que l'expression polynomiale de P , i.e. $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout k entre 0 et n .

Preuve. La preuve de ce théorème se fait par récurrence et repose essentiellement sur une intégration par parties. Supposons que la fonction f soit $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I : en appliquant le théorème fondamental de l'analyse nous avons pour $n = 1$: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$. Supposons maintenant que la formule du théorème soit juste à l'ordre $n - 1$, c'est à dire que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Faisons une intégration par parties sur le reste intégrale en choisissant de dériver $f^{(n)}$, ce qui est possible car f est $\mathcal{C}^{n+1}$, et d'intégrer $\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ nous obtenons alors :

$$\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = \left[-\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Ce qui prouve la formule du théorème. La forme avec $\int_0^1$ s'obtient grâce au changement de variable $t = a + s(b-a)$. $\diamond$

Ce théorème a une grande utilité pour comparer une fonction à son polynôme de Taylor sur tout un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. En appliquant la formule à la fonction $\cos$ à l'ordre 2, on obtient :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t) dt.$$

En remarquant que $\sin(t)$ est positive si $t \in [0, \pi]$ et négative si $t \in [-\pi, 0]$, on déduit que

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t) dt \geq 0, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Ainsi on a montré l'inégalité $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.

2. En appliquant la formule à l'ordre n à la fonction exponentielle entre x et 0, on a :

$$e^x = e^0 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t) dt.$$

Or comme $\exp^{(n+1)}(t) = e^t$ la formule devient :

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Or si t est tel que $0 \leq t \leq x$ alors $e^t \leq e^x$ et donc

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \leq e^x \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt,$$

ainsi

$$0 < e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 3.2 *Inégalité de Taylor-Lagrange*

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $a, b \in I$. Si M est un réel tel que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$ alors,

$$|f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Preuve. Supposons f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et appliquons le théorème de Taylor-Lagrange entre a et b . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} |f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| &= |(b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+s(b-a)) ds| \\ &\leq |b-a|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} |f^{(n+1)}(a+s(b-a))| ds \\ &\leq |b-a|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} M ds \\ &= |b-a|^{n+1} M \left[\frac{(1-s)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 \\ &= \frac{M |b-a|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

◇

Exemples et Remarques

1. Nous avons supposé que la fonction f est $\mathcal{C}^{n+1}$. Ainsi par le théorème des bornes atteintes, l'existence de majorants M est assurée : nous pouvons poser $M = \sup_{s \in [a, b]} |f^{(n+1)}(s)|$. Ceci dit, en pratique, déterminer explicitement cette borne supérieure est le plus souvent inutile : on vérifie simplement que M est un majorant pour appliquer le théorème.
2. Démontrons pour un réel x quelconque l'inégalité suivante :

$$|\sin x - (x - \frac{1}{6}x^3)| \leq \frac{|x|^5}{120}.$$

Pour cela on applique l'inégalité de Taylor à la fonction $\sin$ à l'ordre 4 entre 0 et x , et on remarque que $|\cos(s)| \leq 1$.

3.3 Notations o et $\sim$

Dans la suite de ce cours nous aurons besoin de la notation suivante.

Définition 3.3 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Soit x_0 un élément de I ou une borne de I . On note

$$f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x)),$$

et on dit que $f(x)$ est un petit o de $g(x)$, si il existe une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Dans tous les cas intéressants, la fonction g ne s'annulera pas au voisinage de x_0 , et pour x assez proche de x_0 la fonction ε sera nécessairement donnée par $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Dans ce cas on a :

$$f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

La définition 3.3 se généralise immédiatement au cas où $x_0 = \pm\infty$, à condition que x_0 soit une borne de I . En pratique on précise toujours explicitement au voisinage de quel point x_0 on travaille, et on écrit simplement $f(x) = o(g(x))$ au lieu de $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x))$. On prendra garde à bien former la lettre o (de préférence en écriture cursive plutôt qu'en script) pour éviter la confusion avec une notation O qui existe aussi mais qu'on ne verra pas ce semestre.

Exemples La définition donne immédiatement les résultats suivants, en utilisant si nécessaire le théorème de croissance comparée.

- 1) Quand x tend vers 0 (c'est-à-dire avec $x_0 = 0$), on a $x^3 = o(x^2)$, et plus généralement $x^a = o(x^b)$ pour tous réels a, b tels que $a > b$. On a aussi $x^a = o(\ln x)$ et $\ln x = o(x^{-a})$ pour tout $a > 0$.
- 2) Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ on peut généraliser immédiatement les relations précédentes, quand $x \rightarrow x_0$: on a $(x - x_0)^a = o((x - x_0)^b)$ pour tous réels a, b tels que $a > b$, et aussi $(x - x_0)^a = o(\ln(x - x_0))$ et $\ln(x - x_0) = o((x - x_0)^{-a})$ pour tout $a > 0$.
- 3) Quand x tend vers $+\infty$, on a $x^2 = o(x^3)$, et plus généralement $x^a = o(x^b)$ pour tous réels a, b tels que $a < b$. On a aussi $\ln x = o(x^a)$ et $x^a = o(e^x)$ pour tout $a > 0$.
- 4) Quand x tend vers $-\infty$, on a $x^2 = o(x^3)$, et plus généralement $x^a = o(x^b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a < b$. On a aussi $e^x = o(x^a)$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.
- 5) On a $f(x) = o(1)$ si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

On a alors les propriétés suivantes (si x tend vers x_0 fixé). Tout d'abord, si $f_1(x) = o(g(x))$ et $f_2(x) = o(g(x))$, alors en notant c_1 et c_2 deux constantes réelles on a :

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = o(g(x)) \quad \text{et} \quad f_1(x) = o(c_1 g(x)) \text{ si } c_1 \neq 0.$$

Par ailleurs si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = o(g_2(x))$ alors

$$f_1(x) f_2(x) = o(g_1(x) g_2(x)).$$

Enfin, si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = o(h(x))$ alors $f(x) = o(h(x))$ puisque

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)}$$

est le produit de deux fonctions qui tendent vers 0, donc tend vers 0. Les propriétés précédentes se démontrent de façon similaire.

Définissons maintenant une notion différente mais voisine.

Définition 3.4 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Soit x_0 un élément de I ou une borne de I . On note

$$f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

et on dit que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$, si il existe une fonction $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \eta(x)g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x) = 1$.

Dans tous les cas intéressants, la fonction g ne s'annulera pas au voisinage de x_0 , et pour x assez proche de x_0 la fonction η sera nécessairement donnée par $\eta(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Dans ce cas on a :

$$f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

La définition 3.4 se généralise au cas où $x_0 = \pm\infty$, si c'est une borne de I . En pratique on précise explicitement la valeur de x_0 au voisinage de laquelle on travaille, et on écrit $f(x) \sim g(x)$ au lieu de $f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Bien évidemment cette notion d'équivalence n'a rien à voir avec celle notée $\Leftrightarrow$. Elle est liée à la notation o :

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)).$$

Dans cette dernière relation, comme dans toute la suite, on voit qu'on peut faire intervenir la notation $o(g(x))$ au sein de n'importe quelle expression. C'est cette maniabilité, très pratique, qui rend cette notation o aussi utile. Bien évidemment, $g(x) + o(g(x))$ désigne une fonction de la forme $g(x) + h(x)$, avec h telle que $h(x) = o(g(x))$.

Exemples

- 1) Quand x tend vers 0, on a $x^2 + x^3 \sim x^2$, et $x^a + 1 \sim x^a$ pour tout $a < 0$. On a aussi $e^x \sim 1$.
- 2) Quand x tend vers $+\infty$, on a $5x^3 + 2x^2 - x + 1 \sim 5x^3$. Plus généralement, pour tout polynôme $P(X) = a_d X^d + \dots + a_1 X + a_0$ avec $a_d \neq 0$, on a $P(x) \sim a_d x^d$ quand $x \rightarrow +\infty$ (et aussi quand $x \rightarrow -\infty$). Toutefois, $P(x)$ n'est pas équivalent à x^d (sauf bien sûr si $a_d = 1$).
- 3) Quand x tend vers $+\infty$, on a $5e^x + 3x^2 \sim 5e^x$ par croissance comparée.

L'intérêt de la notion d'équivalent est de pouvoir remplacer une fonction f par une fonction g plus simple telle que f/g tende vers 1, c'est-à-dire telle qu'en gros $f(x)$ et $g(x)$ aient la même taille. Les équivalents se comportent bien par relations multiplicatives : si $f_1(x) \sim g_1(x)$ alors on a :

$$(f_1(x))^a \sim (g_1(x))^a \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}$$

à condition que cela ait un sens (on suppose notamment $f_1(x)$ et $g_1(x)$ non nuls si a est un entier strictement négatif, voire strictement positifs si a est un réel non entier). En prenant $a = -1$ et $a = 1/2$ on a donc :

$$\frac{1}{f_1(x)} \sim \frac{1}{g_1(x)} \quad \text{et} \quad \sqrt{f_1(x)} \sim \sqrt{g_1(x)}.$$

On peut aussi faire des produits et des quotients : si $f_1(x) \sim g_1(x)$ et $f_2(x) \sim g_2(x)$, alors on a :

$$f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x) \quad \text{et} \quad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

,

La notation $\sim$ est une *relation d'équivalence* car elle est :

- Symétrique : si $f(x) \sim g(x)$ alors $g(x) \sim f(x)$.
- Réflexive : on a toujours $f(x) \sim f(x)$.
- Transitive : si $f(x) \sim g(x)$ et $g(x) \sim h(x)$ alors $f(x) \sim h(x)$.

Elle est compatible avec la notation o au sens suivant : si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) \sim g_1(x)$, alors $f(x) = o(g_1(x))$. De même, si $f(x) = o(g(x))$ et $f(x) \sim f_1(x)$, alors $f_1(x) = o(g(x))$. Enfin elle est reliée à la notion de limite : pour un réel ℓ non nul, on a :

$$f(x) \sim \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Il faut faire attention au fait que $f(x) \sim 0$ signifierait que f est identiquement nulle au voisinage de 0 : en pratique on ne rencontre jamais cette notation.

Terminons par une double mise en garde. Tout d'abord, *les équivalents ne s'additionnent pas*. Autrement dit, le fait d'avoir $f_1(x) \sim g_1(x)$ et $f_2(x) \sim g_2(x)$ n'implique pas $f_1(x) + f_2(x) \sim g_1(x) + g_2(x)$. Par exemple, quand $x \rightarrow +\infty$ on a $x^2 + x \sim x^2 + 5x$ et $-x^2 \sim -x^2$; en additionnant membre à membre on trouverait $x \sim 5x$ ce qui est faux.

La deuxième mise en garde est que *les équivalents ne se composent pas*. Autrement dit, le fait d'avoir $f(x) \sim g(x)$ n'implique pas $\varphi(f(x)) \sim \varphi(g(x))$ avec une fonction φ (même continue). Par exemple on a $x + 1 \sim x$ quand $x \rightarrow \infty$, mais $\exp(x + 1)$ n'est pas équivalent à $\exp(x)$ puisque $\frac{\exp(x+1)}{\exp(x)} = e$ ne tend pas vers 1.

3.4 Formule de Taylor-Young

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, n un entier naturel et $a \in I$.

Théorème 3.5 *Théorème de Taylor-Young (à l'ordre n).*

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Alors quand x tend vers a on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n). \quad (3.1)$$

Nous remarquons tout d'abord que si la fonction f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , nous pouvons appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange. Il existe alors $M > 0$ tel que sur un voisinage de a on ait :

$$|f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ainsi

$$\frac{|f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)|}{|x-a|^n} \leq M \frac{|x-a|}{(n+1)!},$$

et donc le quotient

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(x-a)^n}$$

tend bien vers 0 quand x tend vers a .

Preuve. Si $n = 0$ nous posons $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers a car f est continue par hypothèse. Supposons maintenant que $n \geq 1$ et comme ci-dessus posons

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(x-a)^n}$$

pour tout $x \in I$ et $x \neq a$. Nous cherchons donc à montrer que $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow a$. Nous supposons que $f^{(n)}(a) = 0$. (On peut toujours se ramener à ce cas en posant $g(x) = f(x) - f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$). D'après la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral écrite à l'ordre $n-1$ nous avons :

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(x-a)^n} = \frac{1}{(x-a)^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Or $f^{(n)}(a) = 0$ et comme $f^{(n)}$ est continue par hypothèse, $f^{(n)}(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow a$ donc

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad |t-a| < \eta \implies |f^{(n)}(t)| < \alpha.$$

Donc pour tout x tel que $|x-a| < \eta$ alors tout $t \in [a, x]$ vérifie $|t-a| < \eta$ et donc $|f^{(n)}(t)| < \alpha$. Ainsi nous obtenons pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$:

$$|\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt| \leq \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |f^{(n)}(t)| dt \leq \alpha \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

Or

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{(x-a)^n}{n!}$$

donc la fonction ε vérifie :

$$\varepsilon(x) \leq \alpha \frac{1}{n!}$$

ce qui signifie bien que $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow a$. ◇

Exemples et Remarques

1. Calcul de limite.

Connaissant les dérivées successives des fonctions $\sin$ et $\cos$, on peut appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 5 en 0 ce qui donne :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\end{aligned}$$

Nous en déduisons par exemple la limite suivante, lorsque $x \rightarrow 0$:

$$\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^3} \rightarrow \frac{-1}{3}.$$

De même

$$\frac{x \cos(x) - \sin(x) + \frac{x^3}{3}}{x^5} \rightarrow \frac{1}{30}$$

lorsque $x \rightarrow 0$.

2. Minimum ou maximum local.

Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$. Supposons que $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. Alors nous pouvons démontrer que a est un minimum local pour la fonction f . En effet, appliquons la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a :

$$f(x) - f(a) = (x - a)^2 \frac{f''(a)}{2} + o((x - a)^2).$$

Ainsi

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = \frac{1}{2}f''(a) + o(1)$$

donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} \rightarrow \frac{1}{2}f''(a)$$

quand $x \rightarrow 0$, et comme $f''(a) > 0$, $f(x) - f(a) > 0$ quand x est proche de a ($x \neq a$) : le point a est bien un minimum local de f .

Chapitre 4

Développements limités

4.1 Définition et exemples

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 et soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition 4.1 *Développement limité en 0 à l'ordre n .*

La fonction f possède un développement limité à l'ordre n en 0 si et seulement si il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que, quand $x \rightarrow 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n). \quad (4.1)$$

Le polynôme

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k$$

s'appelle le développement limité de f en 0 à l'ordre n .

Exemples et Remarques

1. Posons $f(x) = x - x^2 + x^3 - x^3 \ln(x+1)$
alors f possède un développement limité à l'ordre 3 en 0.
2. Posons $f(x) = x - x^2 + x^3 - x^3 \ln(x)$
alors f possède un développement limité à l'ordre 2 en 0.
3. Nous savons que $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ pour tout $x \neq 1$.

Ainsi

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + x^n \frac{x}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n). \quad (4.2)$$

Cette formule donne un développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ à l'ordre n en 0.

4. On remplace x par $-x^2$ dans l'exemple précédent, on obtient alors :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-x^2)^k + x^{2n} \frac{(-x)^2}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \quad (4.3)$$

ce qui donne un développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ en 0 à l'ordre $2n$.

5. Si f est $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle ouvert contenant 0 alors d'après la formule de Taylor-Young, f possède un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \quad (4.4)$$

4.2 Unicité du développement limité

Proposition 4.2 Si f est une fonction pour laquelle il existe deux $(n+1)$ -uplets $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ vérifiant : $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ et $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$, alors :

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) = (b_0, b_1, \dots, b_n).$$

Preuve. Supposons qu'il existe au moins un entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ tel que $a_k \neq b_k$ et notons i le plus petit. Faisant la soustraction des deux égalités précédentes, nous obtenons :

$$f(x) - f(x) = (a_i - b_i) x^i + \sum_{k=i+1}^n (a_k - b_k) x^k + o(x^n). \quad (4.5)$$

Ainsi en divisant l'égalité par x^i et en plaçant le terme $a_i - b_i$ à gauche, nous obtenons :

$$b_i - a_i = \sum_{k=i+1}^n (a_k - b_k) x^{k-i} + o(x^{n-i}). \quad (4.6)$$

En faisant tendre x vers 0 nous obtenons bien que $b_i - a_i = 0$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. $\diamond$

Les deux propositions qui suivent sont des conséquences directes de la proposition 4.2.

Proposition 4.3 Si une fonction f admet $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ comme développement limité en 0 à l'ordre n , alors elle admet un développement limité à tout ordre p si $p \leq n$ de la forme $\sum_{k=0}^p a_k x^k$.

Proposition 4.4 Si une fonction f admet $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ comme développement limité en 0 à l'ordre n alors :

- si f est paire, P ne contient que des puissances paires de x
- si f est impaire, P ne contient que des puissances impaires de x .

Preuve. Ecrivons f sous la forme : $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$. Si f est paire alors pour tout x de I , $f(-x) = f(x)$ i.e. $f(x) - f(-x) = 0$ et donc

$$0 = \sum_{k=0}^n (a_k - (-1)^k a_k) x^k + o(x^n) \quad (4.7)$$

car $o((-x)^n) = o((-1)^n x^n) = o(x^n)$. Par unicité du développement limité de la fonction nulle nous obtenons que $a_k - (-1)^k a_k = 0$ pour tout k , ce qui implique $a_k = 0$ si k est impair.

De même si f est impaire alors pour tout x de I on a $f(-x) = -f(x)$, et en reprenant les mêmes arguments nous obtenons que $a_k + (-1)^k a_k = 0$, ce qui prouve que $a_k = 0$ lorsque k est pair. $\diamond$

4.3 Développement limité et dérivabilité

Nous montrons dans les propositions qui suivent que les deux premiers termes d'un développement limité, lorsqu'ils existent, correspondent à la valeur de la fonction en 0 et à la valeur de sa dérivée en 0.

Proposition 4.5 *Une fonction f possède une limite l en 0 si et seulement si elle possède un développement limité à l'ordre 0 en 0.*

Preuve. Si $f(x) \rightarrow l$ quand $x \rightarrow 0$ alors posant $\varepsilon(x) = f(x) - l$, nous avons bien que $f(x) = l + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, c'est-à-dire $f(x) = l + o(1)$.

Réciproquement, si $f(x) = a_0 + o(1)$ alors $f(x)$ tend vers a_0 quand x tend vers 0. $\diamond$

Proposition 4.6 *Une fonction f est dérivable en 0 si et seulement si elle possède un développement limité d'ordre 1 en 0.*

Preuve. Si f est dérivable en 0 alors le taux d'accroissement de f en 0 admet $f'(0)$ comme limite. Donc si l'on pose $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0)$ pour tout $x \in I$, $x \neq 0$, et $\varepsilon(0) = 0$ on obtient bien que $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Ainsi f possède bien un développement limité à l'ordre 1 : $f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$ quand $x \rightarrow 0$.

Réciproquement, si f possède un développement limité en 0 à l'ordre 1, alors $f(x) = a_0 + a_1x + o(x)$ quand $x \rightarrow 0$. Alors $f(0) = a_0$ et le taux d'accroissement de f en 0 vérifie : $\frac{f(x) - a_0}{x} = a_1 + o(1)$ donc il possède a_1 comme limite quand $x \rightarrow 0$. Cela signifie que f est dérivable en 0 et que sa dérivée vaut a_1 . $\diamond$

En revanche une fonction f possédant un développement limité d'un ordre strictement plus grand que 1 n'est pas nécessairement $\mathcal{C}^1$. Par exemple la fonction f définie par $f(x) = 1 + x^3 + x^4 \sin \frac{1}{x^3}$ s'écrit $f(x) = 1 + x^3 + o(x^3)$ donc possède bien un développement limité à l'ordre 3 en 0 mais, calculant sa dérivée f' pour tout $x \neq 0$, nous obtenons $f'(x) = 3x^2 + 4x^3 \sin \frac{1}{x^3} - 3 \cos \frac{1}{x^3}$ qui n'a pas de limite en 0 : f' n'a donc pas de limite en 0 et ne peut donc pas être continue en 0.

4.4 Développements limités à connaître.

Les fonctions ci-dessous, dites élémentaires, sont celles dont il faut connaître par cœur les développements limités en 0 (ou au moins savoir les retrouver rapidement). Elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc leur développement limité découle de la formule de Taylor-Young. Nous verrons par la suite comment établir les développements limités de fonctions composées de ces fonctions élémentaires. Dans tous ces exemples, x tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n) \\
&= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \\
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) \\
\sin(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n}) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).
\end{aligned}$$

4.5 Opérations sur les développements limités

Nous proposons ici une liste de techniques permettant de calculer efficacement (lorsque c'est possible) le développement limité d'une fonction.

Proposition 4.7 (Somme)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 et admettant les développements limités en 0 à l'ordre n suivants :

$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ où P et Q sont des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égale à n .

Alors la fonction $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n qui s'écrit :

$$f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n).$$

Proposition 4.8 (Produit)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 et admettant les développements limités en 0 à l'ordre n suivants :

$f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ où P et Q sont des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égale à n .

Alors la fonction $f g$ admet un développement limité à l'ordre n qui s'écrit :

$$f(x) g(x) = R(x) + o(x^n)$$

où la fonction R s'obtient en ne gardant dans le produit $P(x)Q(x)$ que les termes de degré inférieur ou égal à n .

Preuve.

Pour la somme : en additionnant $f(x)$ et $g(x)$ nous obtenons immédiatement le résultat, car $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$.

Pour le produit : en effectuant le produit $f(x)g(x)$ nous obtenons : $f(x)g(x) = P(x)Q(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n)$. Chacun des trois derniers termes est un $o(x^n)$ donc leur somme aussi, ce qui donne $f(x)g(x) = P(x)Q(x) + o(x^n)$. Enfin on a $P(x)Q(x) = R(x) + o(x^n)$ puisque $a_k x^k = o(x^n)$ pour tout $k > n$ (rappelons qu'ici x tend vers 0). On a donc $f(x)g(x) = R(x) + o(x^n)$, et R est un polynôme de degré au plus n , donc il s'agit du développement limité de la fonction $f g$ à l'ordre n en 0. $\diamond$

Proposition 4.9 (Composition) Soient f et u deux fonctions possédant un développement limité d'ordre n en 0 : $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $u(x) = Q(x) + o(x^n)$ où P et Q sont des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égale à n , avec $Q(0) = 0$. Alors la fonction $f \circ u$ admet un développement limité à l'ordre n qui s'écrit :

$$f(u(x)) = R(x) + o(x^n)$$

où la fonction R s'obtient en ne gardant dans la composée $P(Q(x))$ que les termes de degré inférieur ou égal à n .

Exemples et Remarques

En 0 les fonctions $\sin$ et $\cos$ possèdent un développement limité à tout ordre (et donc à l'ordre 4) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

1. Ainsi la somme a pour développement limité en 0 à l'ordre 4 :

$$\sin x + \cos x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

ce qui donne

$$\sin x + \cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

2. Le produit

$$(\sin x)(\cos x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

donne en développant :

$$(\sin x)(\cos x) = x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^4) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4).$$

3. La composée $\cos(\sin x)$ s'écrit quand x tend vers 0 :

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4).$$

Or en développant chacun des termes on a :

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 = x^4 + o(x^4)$$

ce qui donne :

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + o(x^4).$$

Proposition 4.10 Si une fonction u possède un développement limité en 0 à l'ordre n , noté $u(x) = P(x) + o(x^n)$, et si $u(0) = 0$, alors le quotient $\frac{1}{1-u(x)}$ possède un développement limité à l'ordre n en 0.

Preuve. Il suffit de remarquer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ est la composée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et de la fonction u . Or $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$, donc le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-u(x)}$ est constitué des termes de $\sum_{k=0}^n P(x)^k$ de degré inférieur ou égal à n . $\diamond$

Ce résultat permet de calculer le développement limité d'un quotient de deux fonctions $\frac{f(x)}{g(x)}$, lorsqu'il existe. En effet, quitte à diviser $f(x)$ et $g(x)$ par $g(0) \neq 0$, on peut supposer $g(0) = 1$. On applique alors la proposition 4.10 avec $u(x) = 1 - g(x)$ (de telle sorte que $1 - u(x) = g(x)$ et $u(0) = 0$), puis on calcule le développement limité du produit $f \cdot \frac{1}{g}$.

Exemples et Remarques

1. Calcul du développement limité de $\frac{1}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 5. On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ donc

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - o(x^5))}.$$

Or

$$(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - o(x^5))^2 = (\frac{x^2}{2})^2 + o(x^5)$$

et

$$(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - o(x^5))^3 = o(x^5)$$

d'où

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + (-\frac{1}{24} + \frac{1}{4})x^4 + o(x^5) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$

2. On peut en déduire le développement de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = (\sin x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 5 : il suffit de faire le produit des deux développements,

$$\tan x = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5))(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)),$$

et on obtient

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

Proposition 4.11 Intégration des développements limités

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue possédant un développement limité en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ qui vaut $\sum_{k=0}^n a_k x^k$. Alors toute primitive F de f

admet alors un développement limité en 0 à l'ordre $n+1$ qui vaut $F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$.

Preuve. Démontrons tout d'abord que si ε_0 est une fonction continue sur I et vérifie $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_0(x) = 0$ alors $\int_0^x t^n \varepsilon_0(t) dt = x^{n+1} \varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. En effet si $\varepsilon_0(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$ alors $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $|x| < \alpha \implies |\varepsilon_0(x)| < \varepsilon$. Donc $|\int_0^x t^n \varepsilon_0(t) dt| < \int_0^x \varepsilon t^n dt$

pour tout $|x| < \alpha$. Donc, en intégrant le terme à droite de l'inégalité, $|\int_0^x t^n \varepsilon_0(t) dt| < \varepsilon \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pour tout $|x| < \alpha$. Cela signifie bien, d'après la définition de la limite, que $\varepsilon_1(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \varepsilon_0(t) dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi écrivant la fonction f comme : $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_0(x)$ on conclut que le développement limité de toute primitive F de f est une primitive de P , et ceci à l'ordre $n+1$. $\diamond$

Exemples et Remarques

1. En intégrant le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ en 0 à l'ordre n on trouve que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

2. En intégrant le développement limité de $\frac{1}{1+x^2}$ en 0 à l'ordre $2n$ on trouve que

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

3. On a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^\alpha$ avec $\alpha = -1/2$ ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1-2k}{2}}{k!} (-x^2)^k + o((-x^2)^n) = \sum_{k=0}^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n}).$$

On peut multiplier le numérateur et le dénominateur par $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k) = 2^k k!$ pour obtenir l'expression suivante, qui est plus agréable :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} k!^2} x^{2k} + o(x^{2n}).$$

En intégrant on obtient :

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} k!^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + o(x^6).$$

4. Si f est une fonction $\mathcal{C}^1$ et que l'on sait que sa dérivée possède un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0, on peut déduire le développement limité de f' de celui de f , $f(x) = P(x) + o(x^n)$ en dérivant le développement de f : $f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$.

Les développements limités de $\ln(1+x)$ et $\arctan x$ obtenus ici sont à connaître par cœur (pour le second il peut suffire de savoir le retrouver très rapidement).

4.6 Applications des développements limités au calcul de limites

Une utilisation très courante des développements limités est la recherche de limite.

Calculons par exemple $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$: On remarque que

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon(x).$$

Or $(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \ln(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))}$ et sachant que $\ln(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$ on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

Plus généralement, si on dispose d'un développement limité de $f(x)$ alors on peut trouver un équivalent simple de $f(x)$ en ne gardant que le premier terme. Par exemple on a $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ quand $x \rightarrow 0$; le premier terme donne $e^x \sim 1$. On pourrait écrire $e^x \sim 1 + x$, ce qui serait vrai aussi, mais c'est fortement déconseillé car on a aussi $e^x \sim 1 - 5x$ et $e^x \sim 1 + 7x$ par exemple, et plus généralement $e^x \sim 1 + \varepsilon(x)$ pour toute fonction ε telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Le développement limité $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ quand $x \rightarrow 0$ donne aussi $e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, d'où $e^x - 1 \sim x$. On en déduit de même que $e^x - 1 - x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, d'où $e^x - 1 - x \sim \frac{1}{2}x^2$.

4.7 Applications des développements limités à l'étude locale des graphes de fonctions : équation de tangente et position relative du graphe et de sa tangente.

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en x_0 . Alors le graphe de f possède une tangente (non verticale) en x_0 qui a pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Ainsi, si l'on suppose que $x_0 = 0$ et que f est dérivable en 0, alors f possède un développement limité en 0 à l'ordre au moins 1 qui s'écrit : $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$. L'équation de la tangente est alors $y = a_0 + a_1 x$ et la position relative du graphe de f et de la tangente est donnée par le signe de la différence : $f(x) - (a_0 + a_1 x)$. Ainsi, si f possède un développement limité en 0 d'ordre supérieur ou égale à 2, et si a_p , $p > 1$, est le premier terme non nul du développement limité de $f(x) - (a_0 + a_1 x)$, alors le signe de

$$f(x) - (a_0 + a_1 x) = a_p x^p + o(x^p)$$

dépend de celui de a_p et de la parité ou non de p . En effet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1 x)}{x^p} = a_p$$

et donc est du signe de a_p . Ainsi lorsque p est pair, si $a_p > 0$ alors la courbe représentant le graphe de f est au-dessus de la tangente en 0, mais si $a_p < 0$ la courbe est en-dessous de la tangente en 0. Lorsque p est impair la courbe traverse la tangente en 0 : on dit que 0 est un point d'inflexion. Si $a_p > 0$ la courbe est en-dessous de la tangente pour $x < 0$ puis passe au-dessus lorsque $x > 0$. C'est l'inverse si $a_p < 0$: la courbe étant au-dessus pour $x < 0$ puis au-dessous pour $x > 0$.

Exemples et Remarques

1. Le développement de $\sin x$ en 0 est :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

donc l'équation de la tangente de la fonction $\sin$ en 0 est $y = x$ et 0 est un point d'inflexion, la courbe est au-dessus de la tangente si $x < 0$ mais en-dessous pour $x > 0$, car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

2. Il en est de même pour la fonction $\arctan x$ car

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

3. Le développement de $\ln(x+1)$ en 0 est :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

alors la courbe reste en-dessous de la tangente qui a pour équation $y = x$.

4.8 Développement limité en $x_0 \in \mathbb{R}$, pas nécessairement 0.

Rechercher un développement limité d'une fonction f en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ revient, en posant $x = x_0 + h$, à rechercher un développement limité de la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ en $h = 0$. En effet $x \rightarrow x_0$ lorsque $h \rightarrow 0$: il suffit donc de faire le changement de variable $x = x_0 + h$ dans l'expression $f(x)$ pour se ramener à une étude de développement limité en 0.

Exemples et Remarques

1. Recherchons le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ en $x = 1$. Posons alors $x = h + 1$, ainsi $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+h}$. Nous connaissons le développement limité de $\frac{1}{1+h}$ en $h = 0$,

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3).$$

Donc on déduit que $\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + o((x-1)^3)$ est le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{x}$ en $x = 1$ à l'ordre 3.

2. Recherchons le développement limité de la fonction $x \mapsto \sqrt{2+x}$ en $x = 2$ à l'ordre 3. Tout d'abord nous vérifions que cette fonction est bien définie sur $] -2, +\infty[$ donc au voisinage de $x = 2$. Posons $x = 2 + h$, ainsi $\sqrt{2+x} = \sqrt{4+h}$. Or $\sqrt{4+h} = 2\sqrt{1+\frac{h}{2}}$ et comme $\frac{h}{2} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 2$, faisons un développement limité de $\sqrt{1+\frac{h}{2}}$ en $h = 0$:

$$\sqrt{1+\frac{h}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \left(\frac{h}{2}\right)^3 + o(h^3)$$

et donc

$$\sqrt{4+h} = 2 \left(1 + \frac{h}{2^2} - \frac{h^2}{2^5} + \frac{h^3}{3 \cdot 2^7} + o(h^3)\right).$$

Nous en déduisons donc que le développement limité de $x \mapsto \sqrt{2+x}$ en $x = 2$ est :

$$2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2^4} + \frac{(x-2)^3}{3 \cdot 2^6} + o((x-2)^3).$$

4.9 Recherche d'asymptote.

Définition 4.12 Soient a_0 et a_1 deux réels, et f une fonction définie au voisinage de l'infini. On dit que la droite d'équation $y = a_0 x + a_1$ est asymptote en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) au graphe de f si $f(x) - (a_0 x + a_1) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ (resp. $x \rightarrow -\infty$).

Exemples et Remarques

1. S'il existe un point a de $\mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$) alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) au graphe de f lorsque $x \rightarrow a^-$ (resp. $x \rightarrow a^+$), le graphe étant à gauche de la droite d'équation $x = a$ (resp. à droite).
2. Si une fonction f est telle que $f(x) - (a_0 x + a_1) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ alors nous pouvons écrire $f(x) = a_0 x + a_1 + o(1)$. La position du graphe de f en $+\infty$ par rapport à son asymptote se déduit du signe de $f(x) - (a_0 x + a_1)$. Ainsi s'il existe des réels a_0, a_1, a_p (avec $p \geq 1$) tels que $f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_p}{x^p} + o(\frac{1}{x^p})$ alors l'asymptote au graphe de f en $+\infty$ est la droite d'équation $y = a_0 x + a_1$ et le graphe de f est au-dessus de cette droite si $a_p > 0$, et en-dessous si $a_p < 0$. En effet on a $f(x) - (a_0 x + a_1) \sim \frac{a_p}{x^p}$ si $a_p \neq 0$; cela montre que si x est assez proche de 0 alors $f(x) - (a_0 x + a_1)$ est du même signe que $\frac{a_p}{x^p}$ (puisque le quotient de ces deux quantités tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, il est strictement positif pour x assez grand).
3. Etudions la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ quand $x \rightarrow +\infty$. En factorisant le numérateur on a :

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = x \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$$

car $\sqrt{x^2} = |x| = x$. En posant $u = \frac{1}{x}$ et remarquant que lorsque $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0$ nous déduisons que

$$\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = (1-u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o(u^2).$$

Donc

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = x \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

d'où, pour x au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc le graphe de f possède une asymptote d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ et le graphe est au-dessus de l'asymptote car $\frac{3}{8} > 0$.

4. Etudions la fonction $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$ quand $x \rightarrow -\infty$. On écrit que :

$$\frac{x^3-1}{x^2+1} = \frac{x^3(1-\frac{1}{x^3})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = x \left(\frac{1-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} \right).$$

Posant $u = \frac{1}{x}$ et vérifiant que lorsque $x \rightarrow -\infty$, $u \rightarrow 0$, nous effectuons un développement limité en 0 du quotient $\frac{1-u^3}{1+u^2}$:

$$\frac{1-u^3}{1+u^2} = (1-u^3)(1-u^2+o(u^2)) = 1-u^2+o(u^2).$$

Ainsi lorsque x est au voisinage de $-\infty$ on a :

$$f(x) = x \left(1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc $y = x$ est l'équation de l'asymptote au graphe de f lorsque $x \rightarrow -\infty$, et comme $-\frac{1}{x}$ est alors positif, le graphe est situé au-dessus de la droite.

Chapitre 5

Équations différentielles linéaires

5.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Il s'agit des équations du type

$$f'(t) = a(t).f(t) + b(t), \quad t \in I, \quad (E)$$

où I est un intervalle et $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$; l'inconnue est la fonction $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. **Résoudre** (E) , c'est donner **toutes les fonctions** $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^1$ sur I) telles que

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = a(t).f(t) + b(t).$$

L'équation (E) est dite « différentielle » car elle porte sur une fonction inconnue f et ses dérivées; elle est dite d'« ordre 1 » car seule sa dérivée du premier ordre apparaît dans l'équation (et pas la dérivée seconde f'' , ni la dérivée troisième f''' , ...).

Elle est « linéaire » car elle possède la propriété remarquable suivante lorsque b est la fonction nulle : si f, g sont solutions de l'équation (E) alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est aussi solution. Plus précisément, l'application qui à f associe la fonction $f' - af$ est linéaire, et résoudre (E) revient à chercher son noyau (si $b(t) = 0$ pour tout t) ou les antécédents de b par cette application (dans le cas général).

Pour toute la suite de ce chapitre nous appellerons y (au lieu de f) la fonction inconnue, et nous noterons y' sa dérivée par rapport à la variable t réelle.

Un premier exemple : on sait que pour $a, \lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \lambda e^{at}$ possède $a \lambda e^{at}$ pour dérivée et est donc solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$y' = a y, \quad t \in I. \quad (5.1)$$

Dans ce qui suit nous donnons une méthode générale pour résoudre (E) .

5.1.1 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1

Il s'agit des équations précédentes avec b identiquement nulle, i.e. des équations du type

$$y'(t) = a(t).y(t), \quad t \in I, \quad (E_0)$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ donnée.

Proposition 5.1 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Notons A une primitive quelconque de a sur I . Alors $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est solution de (E_0) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $y(t) = \lambda e^{A(t)}$. Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0) est donné par

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \lambda e^{A(t)}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Preuve.

“ $\supset$ ” Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \lambda e^{A(t)}$, où A est une primitive de a sur I . Alors A , et donc y , est de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et on a de plus

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = A'(t) \lambda e^{A(t)} = \lambda a(t) \cdot e^{A(t)} = a(t) \cdot y(t)$$

donc $y \in \mathcal{S}_0$.

“ $\subset$ ” Si $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est solution de (E_0) , alors

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad y'(t) - a(t) \cdot y(t) = 0 &\xRightarrow{\times e^{-A(t)}} \forall t \in I, \quad y'(t) e^{-A(t)} - a(t) \cdot y(t) e^{-A(t)} = 0 \\ &\implies \forall t \in I, \quad (y e^{-A})'(t) = 0 \\ &\implies \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in I, \quad y(t) e^{-A(t)} = \lambda \\ &\xRightarrow{\times e^{A(t)}} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in I, \quad y(t) = \lambda e^{A(t)}. \end{aligned}$$

◇

Exemples et Remarques

1. Toutes les solutions de l'équation homogène (E_0) sont donc multiples d'une solution ne s'annulant jamais, à savoir $t \mapsto e^{A(t)}$.
2. Dans le cas où $a(t) = a \in \mathbb{R}$ est une constante, on a en particulier

$$\{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), y' = a y\} = \{y : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \lambda e^{at}; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

3. La fonction a étant continue sur I , elle admet bien des primitives sur I ; elles sont de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Le fait que I soit un intervalle est très important. Si l'on résout (E_0) sur une union d'intervalles disjoints, il faut alors considérer une constante différente λ pour chacun de ces intervalles. Résolvons par exemple :

$$y' = \frac{1}{t} y, \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

La fonction a donnée par $a(t) = \frac{1}{t}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Ainsi l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions de la forme

$$t \mapsto \begin{cases} \lambda_1 t & \text{si } t < 0 \\ \lambda_2 t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

où λ_1 et λ_2 sont deux constantes réelles. On remarque qu'il existe, parmi ces solutions, des fonctions qui sont prolongeables par continuité en 0 et donc $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ tout entier : ce sont celles pour lesquelles $\lambda_1 = \lambda_2$.

5. Autre exemple :

$$y' = \frac{1}{t(t-1)} y.$$

Existe-t-il parmi les solutions, des fonctions qui soient $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

5.1.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre

Il s'agit des équations annoncées au début de cette section et de la forme

$$y'(t) = a(t).y(t) + b(t), \quad t \in I, \quad \text{avec } a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \quad (E)$$

qui s'écrivent encore

$$\underbrace{y'(t) - a(t).y(t)}_{\text{membre dépendant de } y} = \underbrace{b(t)}_{\text{second membre}}, \quad t \in I, \quad \text{avec } a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}). \quad (E)$$

Proposition 5.2 Si $y_1 \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est une solution de (E), alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S} = \{y_0 + y_1 ; y_0 \text{ solution de } (E_0)\} =: y_1 + \mathcal{S}_0$$

où (E_0) est l'équation homogène associée à (E) : $y'(t) = a(t).y(t)$, $t \in I$ (E_0).

Preuve.

“ $\supset$ ” Si $y = y_1 + y_0$, alors $y'(t) = y_1'(t) + y_0'(t) = a(t).y_1(t) + b(t) + a(t).y_0(t) = a(t).y(t) + b(t)$ pour tout $t \in I$ donc y est solution.

“ $\subset$ ” Si y est solution de (E), alors

$$\forall t \in I, \quad y'(t) - a(t).y(t) = b(t) = y_1'(t) - a(t).y_1(t)$$

donc $(y - y_1)'(t) - a(t).(y - y_1)(t) = 0$ sur I i.e. $y - y_1$ est solution de (E_0) et il existe $y_0 \in \mathcal{S}_0$ telle que $y - y_1 = y_0$. ◇

On vient donc de démontrer que si l'on connaît une solution particulière de l'équation différentielle (E), alors on en déduit toutes ses solutions en résolvant l'équation homogène associée (E_0) .

Méthode de variation de la constante

On montre maintenant que l'équation différentielle (E) admet toujours des solutions ; on donne en même temps une méthode pour les déterminer.

Considérons l'équation (E) et cherchons une solution sous la forme $y_1 : t \mapsto \lambda(t).e^{A(t)}$ où A est une primitive de a sur I et $\lambda \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est une fonction à déterminer¹. On a alors

$$\begin{aligned} y_1 \text{ est solution de } (E) & \text{ ssi } \forall t \in I, \quad y_1'(t) = a(t).y_1(t) + b(t) \\ & \text{ssi } \forall t \in I, \quad \lambda'(t).e^{A(t)} + a(t).\lambda(t).e^{A(t)} = a(t).\lambda(t).e^{A(t)} + b(t) \\ & \text{ssi } \forall t \in I, \quad \lambda'(t).e^{A(t)} = b(t) \\ & \text{ssi } \forall t \in I, \quad \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}. \end{aligned}$$

Pour que y_1 soit solution de (E), il suffit donc (et c'est aussi nécessaire) de prendre pour λ une primitive de la fonction $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$ de classe $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Une telle fonction λ existe bien, et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Exemples et Remarques

1. Pour résoudre (E), on procède souvent comme suit :
 - On résout l'équation différentielle homogène associée (E_0) .
 - On cherche une solution particulière y_1 . Pour cela, on peut essayer de trouver une solution « évidente » grâce à son intuition ; on utilise sinon la méthode de variation de la constante.

1. D'où le nom de « variation de la constante » : on remplace la constante λ des solutions de l'équation homogène associée (E_0) par une fonction $\lambda(t)$.

— On a finalement

$$\mathcal{S} = \{y_1 + y_0, y_0 \text{ solution de } (E_0)\}.$$

2. Si a est identiquement nulle, (E) devient $y'(t) = b(t)$ et ses solutions sont donc les primitives de b : chercher les primitives d'une fonction continue c'est résoudre une équation différentielle particulière.
3. Exemple :

$$y' = \frac{1}{t} y + 1.$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \begin{cases} t \ln(-t) + \lambda_1 t & \text{si } t < 0 \\ t \ln(t) + \lambda_2 t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

où λ_1 et λ_2 sont deux constantes réelles. Toutes ces fonctions sont prolongeables par continuité en 0 puisqu'elles tendent vers 0 quand t tend vers 0 (que ce soit vers 0^+ ou vers 0^-), mais elles ne sont pas dérivables en 0 (le taux d'accroissement en 0 tend vers $-\infty$, et le graphe de chacune de ces fonctions présente une tangente verticale au point de coordonnées $(0, 0)$).

4. Autre exemple :

$$y' = \frac{1}{t(t-1)} y + \frac{1}{t(t-1)}.$$

5. On remarque que le fait de trouver une solution explicite (i.e. sous forme de fonctions élémentaires) de ces équations différentielles est subordonné au fait de pouvoir calculer explicitement une primitive, ce qui en pratique, n'est pas toujours le cas. Par exemple résoudre :

$$y' = 2t y + 1.$$

5.1.3 Problème de Cauchy.

Le problème de Cauchy associé à l'équation différentielle $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ ($t \in I$) consiste à trouver une solution de cette équation qui vérifie la condition suivante (dite condition initiale) : $y(t_0) = y_0$ où $y_0 \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in I$.

Proposition 5.3 *Le problème de Cauchy, pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, admet toujours une unique solution.*

Preuve. Toute solution y de l'équation différentielle linéaire d'ordre un (E) a la forme suivante :

$$\forall t \in I, y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_1(t)$$

où A est une primitive sur I de la fonction a et y_1 est une solution particulière de (E) . Résoudre $y(t_0) = y_0$ revient à résoudre $\lambda e^{A(t_0)} + y_1(t_0) = y_0$ ce qui fixe la valeur du paramètre

$$\lambda = e^{-A(t_0)} (y_0 - y_1(t_0)),$$

et donne l'unique solution du problème. ◇

Exemples et Remarques

1. Trouver la solution de l'équation $y' = \frac{1}{t} y + 1$ telle que $y(-1) = 2$.
2. Trouver la solution de l'équation $y' = \frac{1}{t(t-1)} y + \frac{1}{t(t-1)}$ telle que $y(3) = 0$.

3. Le problème de Cauchy revient à se donner un point M du plan, de coordonnées (t_0, y_0) , et à chercher une solution de (E) dont le graphe passe par ce point. La proposition 5.3 montre que pour tout point M (avec $t_0 \in I$) il existe une et une seule telle solution. Donc si on trace les graphes de toutes les solutions, ils vont recouvrir tout le plan (ou du moins la bande verticale formée par les points (t, y) tels que $t \in I$) et deux graphes distincts ne se croisent jamais.
4. L'équation (E) permet d'associer à tout point M du plan, de coordonnées (t_0, y_0) , une valeur de la dérivée $y'(t_0) = a(t_0)y_0 + b(t_0)$. Cette dérivée correspond à la valeur du coefficient directeur de la tangente à l'unique graphe (cf. 3. ci-dessus) passant par ce point M . On dit alors que l'équation différentielle (E) définit un champ de directions. Ainsi géométriquement, résoudre une équation différentielle consiste à trouver les courbes dont la tangente en chacun de ses points est donnée par la valeur de la dérivée en ce point : ces courbes sont appelées courbes intégrales de l'équation.

5.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est une équation du type

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t), \quad t \in I, \quad a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R} \quad (\tilde{E})$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$; l'inconnue est une fonction $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

Elle est dite d'« ordre 2 » car les dérivées impliquées ne dépassent pas le second ordre. Lorsque $c(t) = 0$ pour tout $t \in I$, on dit que l'équation est homogène. Enfin, on dit qu'elle est linéaire car lorsque $c(t) = 0$ pour tout $t \in I$, elle possède la propriété remarquable qu'étant données y_1, y_2 deux solutions et λ, μ deux constantes réelles, alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi une solution. Autrement dit, l'application qui à la fonction y associe la fonction $y'' + ay + bt$ est linéaire.

Ce type d'équation apparaît naturellement en mécanique (mouvement dans un champ gravitationnel, dynamique du ressort avec ou sans frottement, approximation de l'équation du pendule), en électricité (circuit RLC) et dans bien d'autres domaines.

On dispose aussi dans ce contexte d'une notion de *problème de Cauchy*. Il s'agit cette fois de se donner $t_0 \in I$ et deux réels y_0 et y'_0 , et de chercher une solution y de $(\tilde{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$. Ces données t_0, y_0 et y'_0 s'appellent les conditions initiales. On dispose alors du résultat suivant, que nous admettrons.

Proposition 5.4 *Le problème de Cauchy, pour une équation différentielle linéaire du second ordre, admet toujours une unique solution. Autrement dit, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b, c trois fonctions continues sur I . Soit $t_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une solution y de $(\tilde{E})$, et une seule, telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$.*

En physique on peut appliquer ce résultat à l'étude du mouvement d'une balle qu'on lance. Elle est soumise à son poids, ce qui mène à une équation du type $(\tilde{E})$ en notant t le temps et $y(t)$ la position de la balle à l'instant t . On suppose qu'on lance la balle verticalement, si bien que sa position est décrite par une seule coordonnée (sa cote, i.e. son altitude). Les conditions initiales sont l'instant t_0 auquel on lance la balle, la cote y_0 de la balle à l'instant où on la lance, et la vitesse y'_0 qu'on lui donne à ce moment. Le résultat ci-dessus montre que ces conditions initiales déterminent complètement le mouvement ultérieur de la balle, ce qui est conforme à l'expérience qu'on peut en faire.

5.3 Équations d'ordre 2 à coefficients constants

5.3.1 Équations homogènes

Dans ce paragraphe on considère des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants, c'est-à-dire que dans $(\tilde{E})$ les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont constantes (elles

ne dépendent pas de t) et la fonction $c(t)$ est identiquement nulle. On peut alors résoudre ces équations sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, on cherche les fonctions $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (E)$$

où a et b sont deux réels fixés.

Par analogie avec la partie précédente, cherchons une fonction y solution de cette équation (E) sous la forme : $y(t) = e^{rt}$, $r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{rt}, \\ y'(t) &= r e^{rt}, \\ y''(t) &= r^2 e^{rt}, \end{aligned}$$

d'où $y''(t) + a y'(t) + b y(t) = (r^2 + ar + b)e^{rt}$. Cela montre que y est solution de (E) si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique associée à (E) :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Proposition 5.5 Soit $x^2 + ax + b = 0$ l'équation caractéristique associée à l'équation (E). Alors :

- i) Si $\Delta := a^2 - 4b > 0$, l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes notées $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E) sont les fonctions y de la forme

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- ii) Si $\Delta := a^2 - 4b < 0$, alors il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta = (i\delta)^2$ et l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$ a deux solutions complexes distinctes $r_1 = \frac{-a + i\delta}{2}$ et $r_2 = \frac{-a - i\delta}{2}$: les solutions de (E) sont les fonctions y de la forme

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto e^{-\frac{a}{2}t} \left(\lambda \cos\left(\frac{\delta}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\delta}{2}t\right) \right),$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- iii) Si $\Delta := a^2 - 4b = 0$, l'équation caractéristique a une solution double $r_0 \in \mathbb{R}$ et les solutions de (E) sont les fonctions

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t},$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Nous proposons une démonstration des cas (i) et (iii). La démonstration du cas (ii) se ramène à celle du cas (i) à condition de bien connaître l'exponentielle d'un nombre complexe.

Preuve.

“ $\supset$ ” Les solutions annoncées sont bien des solutions dans chacun des trois cas.

“ $\subset$ ” Cas (i). Montrons que si y est solution alors elle est nécessairement sous la forme annoncée. Comme r_1 et r_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique on a $r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2)$, ce qui en développant, donne $r_1 r_2 = b$ et $r_1 + r_2 = -a$. Ainsi l'équation différentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + ay' + by \\ &= y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1 r_2 y \\ &= (y' - r_1 y)' - r_2 (y' - r_1 y). \end{aligned}$$

En notant z la fonction $z = y' - r_1 y$, nous remarquons que z est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$z' - r_2 z = 0.$$

Résolvant cette équation on déduit que z s'écrit sous la forme $z(t) = \mu_1 e^{r_2 t}$ avec $\mu_1 \in \mathbb{R}$. Ainsi y est solution de l'équation :

$$y' - r_1 y = \mu_1 e^{r_2 t}.$$

En résolvant l'équation homogène et en remarquant que $t \mapsto \frac{\mu_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}$ est une solution particulière de l'équation, on obtient alors que :

$$y = \lambda e^{r_1 t} + \frac{\mu_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 t} = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Dans ce cas, on a $r^2 + ar + b = (r - r_0)^2$ et en refaisant le même raisonnement que précédemment nous trouvons :

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + ay' + by \\ &= y'' - (2r_0)y' + r_0^2 y \\ &= (y' - r_0 y)' - r_0 (y' - r_0 y). \end{aligned}$$

On pose alors $z = y' - r_0 y$ et ainsi z est solution de l'équation différentielle :

$$z' - r_0 z = 0,$$

donc s'écrit sous la forme $z(t) = \mu e^{r_0 t}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$. La fonction y est alors solution de l'équation :

$$y' - r_0 y = \mu e^{r_0 t}.$$

En remarquant que $t \mapsto \mu t e^{r_0 t}$ est une solution particulière on en déduit que y a bien la forme annoncée dans la proposition. ◇

Exemples et Remarques

1. Les solutions de l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont sous la forme

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2. Les solutions de l'équation $y'' + 2y' + 2y = 0$ sont sous la forme

$$y(t) = e^{-t}(\lambda \cos t + \mu \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. (On remarque que le discriminant du polynôme $r^2 + 2r + 2$ est $\Delta = (2i)^2$).

3. Les solutions de l'équation $y'' - 2y' + y = 0$ sont sous la forme

$$y(t) = (\lambda + \mu t) e^t, \quad t \in \mathbb{R}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

5.3.2 Équations d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre

On considère maintenant des équations du type

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = c(t), \quad t \in I, \tag{E}$$

avec toujours des coefficients constants $a, b \in \mathbb{R}$, mais cette fois la fonction c n'est plus forcément nulle : elle est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et l'inconnue est une fonction $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

D'après les résultats précédents, on connaît l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée

$$y'' + a y' + b y = 0 \quad (E_0)$$

donc il suffit de déterminer une solution particulière de l'équation (E) . En effet, tout comme le cas des équations linéaires du 1er ordre, si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E) alors la différence $y_1 - y_2$ est solution de l'équation homogène (E_0) ; et réciproquement, si on ajoute une solution de (E) et une de (E_0) on en trouve une de (E) .

Il existe bien une méthode dite de variation des constantes pour trouver une solution particulière, mais nous ne l'exposerons pas ici. Dans des cas particuliers, selon la fonction c , nous allons deviner la forme d'une solution particulière. Avant d'étudier ces cas, énonçons le principe de superposition qui permet, en décomposant le second membre en somme de fonctions, ramener l'étude des solutions de l'équation à l'étude de plusieurs équations à second membre a priori plus simple :

Principe de superposition

Supposons que l'équation différentielle s'écrive comme :

$$y'' + a y' + b = f_1 + f_2 \quad (E)$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions continues sur un intervalle I . Alors on remarque que si y_1 est solution de l'équation

$$y'' + a y' + b = f_1$$

et si y_2 est solution de

$$y'' + a y' + b = f_2$$

alors la somme $y_1 + y_2$ est solution de (E) . C'est ce qu'on appelle le principe de superposition.

Etudions maintenant quelques cas d'équations dont on sait deviner une solution particulière.

Cas où c est une fonction polynomiale

Supposons que c est de degré n il faut alors chercher une fonction solution sous la forme d'un polynôme de degré :

$$\begin{aligned} &= n \quad \text{si } b \neq 0 \\ &= n + 1 \quad \text{si } b = 0 \quad \text{et } a \neq 0 \\ &= n + 2 \quad \text{si } b = 0 \quad \text{et } a = 0. \end{aligned}$$

Prenons quelques exemples :

1. Trouver une solution particulière y_0 de $y'' - 4y' + 3y = 3t + 2$. Nous cherchons y_0 sous la forme $y_0(t) = at + b$. Alors $y_0''(t) = 0$, $y_0'(t) = a$ et l'équation devient alors :

$$-4a + 3(at + b) = 3t + 2,$$

soit en identifiant les coefficients : $3a = 3$ et $-4a + 3b = 2$ ce qui donne $a = 1$ et $b = 2$. Une solution particulière est donc $y_0(t) = t + 2$.

2. Trouver une solution particulière y_0 de $y'' - y' + 2y = 2t^2 + 2t + 4$. Nous cherchons y_0 sous la forme $y_0(t) = at^2 + bt + c$. Ainsi $y_0''(t) = 2a$, $y_0'(t) = 2at + b$ et l'équation devient alors :

$$2a - (2at + b) + 2(at^2 + bt + c) = 2t^2 + 2t + 4.$$

En identifiant les coefficients devant les puissances de t on trouve $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$.

3. Trouver une solution particulière de $y'' + y' = 3t^2$. Il faut chercher y_0 de degré égal à 3 soit $y_0(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, l'équation devient alors $(6at + 2b) + (3at^2 + 2bt + c) = 3t^2$. En identifiant on trouve $a = 1$, $b = -3$, $c = 6$.

Cas où $c(t) = p(t)e^{rt}$ avec p une fonction polynomiale de degré n .

Il faut alors chercher une solution sous la forme $q(t)e^{rt}$ où q est une fonction polynomiale :
de degré n si r n'est pas racine de $r^2 + ar + b$,
de degré $n + 1$ si r est racine simple de $r^2 + ar + b$
et de degré $n + 2$ si r est racine double de $r^2 + ar + b$.

Autres cas

Il existe bien d'autres cas pour lesquels nous pouvons "deviner" la forme d'une solution particulière : par exemple le cas où le second membre s'écrit comme $e^{rt}(P(t) \cos(\alpha t) + Q(t) \sin(\alpha t))$ avec des polynômes P et Q , que l'on peut déduire des cas précédents en utilisant l'exponentielle complexe et le principe de superposition.

5.4 Equations différentielles non linéaires

Les équations traitées jusqu'ici sont toutes linéaires, et d'ordre 1 ou 2. Il ne s'agit que d'équations très particulières : en général une équation différentielle peut faire intervenir non seulement la fonction inconnue y et sa dérivée y' , mais aussi ses dérivées successives y'' , y''' , ..., jusqu'à sa dérivée n -ième $y^{(n)}$. Cet entier n s'appelle alors l'ordre de l'équation différentielle.

Lorsqu'une équation différentielle d'ordre n est linéaire à coefficients constants, on peut la résoudre explicitement en généralisant ce qu'on a fait lorsque $n = 2$ (cf. votre futur cours d'Analyse au S4). Mais lorsque les coefficients ne sont pas constants c'est plus délicat, et surtout si l'équation n'est pas linéaire on ne sait pas (en général) trouver de formule pour les solutions. Par exemple l'équation d'ordre 1

$$\sin(y'(t))y(t)^2 + 5 \exp(y(t)y'(t)^2) = \frac{1}{1+t^2}$$

ne se prête pas à une résolution explicite. Plus généralement, une équation différentielle d'ordre 1 est simplement une équation de la forme $F(t, y(t), y'(t)) = 0$ où F est une fonction quelconque.

Nous étudierons ici une seule sorte d'équation non linéaire qu'on arrive à résoudre : celles à variables séparables (qu'on appelle aussi à *variables séparées*).

Définition 5.6 Une équation différentielle à variables séparables est une équation de la forme

$$y'(t) = f(y(t))g(t) \quad (\text{VS})$$

où f et g sont deux fonctions.

Nous ne donnerons pas de théorème général sur ces équations, mais juste une méthode pour les résoudre.

Il faut toujours commencer par chercher les solutions constantes, c'est-à-dire de la forme $y(t) = y_0$ avec un réel y_0 (indépendant de t). En remplaçant dans (VS) on voit que cette fonction est solution si, et seulement si, $f(y_0) = 0$ (en supposant bien sûr que la fonction g n'est pas identiquement nulle). Cela donne une liste (souvent finie, parfois vide) de solutions constantes.

Cherchons maintenant les solutions non constantes. Soit y une telle solution, définie et dérivable sur un intervalle I . On suppose en outre que $f(y(t))$ ne s'annule pas sur I . Alors (VS) équivaut à

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t) \text{ pour tout } t \in I.$$

Notons Φ une primitive de la fonction $\frac{1}{f}$ (que l'on suppose continue sur un intervalle convenable, à préciser dans chaque exercice), et G une primitive de g (également supposée continue, sur I cette fois). Alors on peut primitiver la relation précédente, ce qui donne

$$\Phi(y(t)) = G(t) + c$$

pour une certaine constante c . Si la fonction Φ est bijective (entre deux intervalles à préciser), on en déduit

$$y(t) = \Phi^{-1}(G(t) + c) \text{ pour tout } t \in I.$$

Il reste alors une question parfois délicate : les hypothèses qu'on a dû faire ont pu nous obliger à remplacer I par des intervalles plus petits, sur lesquels on mène à bien séparément cette stratégie. Il faut pour conclure essayer de recoller les solutions obtenues sur les différents intervalles, pour trouver une solution y qui soit dérivable et vérifie (VS) sur I tout entier.

Prenons comme premier exemple l'équation $y'(t) = ty(t)$ sur $\mathbb{R}$ (qui est linéaire donc pour laquelle on a déjà vu comment obtenir directement l'ensemble des solutions). Les solutions constantes $y(t) = y_0$ sont celles qui vérifient $0 = ty_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: il y a la solution nulle, et aucune autre. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui ne s'annule pas et qui vérifie $y'(t) = ty(t)$ pour tout $t \in I$. Alors on a $\frac{y'(t)}{y(t)} = t$ puisque y ne s'annule pas, ce qu'on peut primitiver en $\ln(|y(t)|) = \frac{1}{2}t^2 + c$ pour une constante c . On a donc $|y(t)| = \exp(\frac{1}{2}t^2 + c) = e^c e^{\frac{1}{2}t^2}$ donc il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $y(t) = \varepsilon e^c e^{\frac{1}{2}t^2}$. A noter qu'a priori $\varepsilon = \varepsilon(t)$ dépend de t , car pour tout t fixé il existe $\varepsilon(t) \in \{-1, 1\}$ tel que $|y(t)| = \varepsilon(t)y(t)$; mais on a $\varepsilon(t) = \frac{y(t)}{e^c e^{\frac{1}{2}t^2}}$ qui est le quotient de deux fonctions continues, avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur I , donc la fonction $t \mapsto \varepsilon(t)$ est continue sur I . Si elle n'était pas constante, elle prendrait une fois la valeur 1 et une fois la valeur -1 ; le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'elle devrait prendre toutes les valeurs comprises entre -1 et 1 , ce qui n'est pas le cas puisque 1 et -1 sont les seules valeurs qu'elle peut prendre.

On a donc montré que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui ne s'annule pas et qui vérifie $y'(t) = ty(t)$ pour tout $t \in I$, alors il existe un réel non nul $\lambda = \varepsilon e^c$ tel que $y(t) = \lambda e^{\frac{1}{2}t^2}$ pour tout $t \in I$. Réciproquement cette formule définit bien une fonction dérivable qui ne s'annule pas, et elle fonctionne sur $\mathbb{R}$.

Finalement l'équation $y'(t) = ty(t)$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$, qui sont données par $y(t) = \lambda e^{\frac{1}{2}t^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (puisque le cas $\lambda = 0$ donne la solution constante qu'on avait trouvée au début), et toute solution de cette équation sur un intervalle est la restriction de l'une de ces solutions.

Voici un deuxième exemple : on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$y'(t) = t \exp(-y(t)).$$

En divisant par $\exp(-y(t))$ (puisque une exponentielle ne s'annule jamais) cette équation équivaut à

$$y'(t) \exp(y(t)) = t.$$

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui est solution de cette équation sur $\mathbb{R}$. Alors en primitivant les deux membres on voit qu'il existe un réel c tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait :

$$\exp(y(t)) = \frac{1}{2}t^2 + c.$$

Comme on suppose que cette égalité est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et qu'une exponentielle est toujours strictement positive, en prenant $t = 0$ on obtient $c > 0$. On a alors bien $\frac{1}{2}t^2 + c > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et en prenant le logarithme :

$$y(t) = \ln\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On a démontré que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'(t) = t \exp(-y(t))$ est de cette forme, pour une constante $c > 0$. Réciproquement, pour tout $c > 0$ on peut définir une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ en posant $y(t) = \ln\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)$, et on obtient bien une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'(t) = t \exp(-y(t))$ (en remontant les calculs précédents, ou juste en remplaçant $y(t)$ et $y'(t)$ par leurs valeurs dans l'équation).

Annexe A

Primitives des fonctions rationnelles

Le contenu de cette annexe, et des deux suivantes, est un complément utile au cours proprement dit. Cependant il n'est pas exigible pour le partiel et l'examen.

A.1 Introduction et rappels

Une fonction rationnelle est une fonction de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes à coefficients réels. Une telle fonction est définie (et indéfiniment dérivable) là où son dénominateur $Q(x)$ est non nul.

A.1.1 Les primitives connues de fonctions rationnelles

On note $\int f(x) dx$ une primitive de la fonction f . On a les formules suivantes, qui vont nous suffire pour traiter tous les cas de primitives de fonctions rationnelles :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x-a} &= \ln|x-a| + C, \\ \int \frac{dx}{(x-a)^n} &= \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \quad \text{pour } n \in \mathbb{R}, n \neq 1, \\ \int \frac{x dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + C, \\ \int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

Ici (et dans toute cette annexe) C désigne une constante qu'on peut choisir arbitrairement. La notation λ^n est claire pour $n \in \mathbb{Z}$; lorsque $n \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ elle désigne $\exp(n \ln \lambda)$ (comme on l'a défini au paragraphe 1.5.3). Par exemple pour $\lambda > 0$ on a $\lambda^{1/2} = \sqrt{\lambda}$ et $\lambda^{1/3} = \sqrt[3]{\lambda}$.

Le but de ce chapitre est de montrer comment on peut calculer l'intégrale d'une fonction rationnelle quelconque en se ramenant à ces cas particuliers.

A.2 Quelques résultats sur les polynômes

A.2.1 Division euclidienne

Rappelons qu'un polynôme $P(x)$ est une expression de la forme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ où les a_i sont des réels; si en outre $a_n \neq 0$ on dit que P est de degré n (et on note $\deg P = n$). Les

polynômes de degré 0 sont les constantes non nulles : $P(x) = a_0$ pour tout x , avec a_0 un nombre réel non nul. Les polynômes de degré 1 sont les applications affines (non constantes), c'est-à-dire $P(x) = a_1x + a_0$ avec $a_1 \neq 0$. Le polynôme nul (c'est-à-dire celui dont tous les coefficients sont nuls) est, par convention, de degré $-\infty$.

Si on a $P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ avec $a_n \neq 0$ (donc $n = \deg P$), on dit que a_n est le coefficient dominant de P . On dit que P est unitaire si $a_n = 1$. Enfin, a_0 s'appelle le coefficient constant ; on a $a_0 = P(0)$.

On peut diviser un polynôme $A(x)$ par un polynôme $B(x)$, un peu comme on divise un entier a par un entier b . Précisément, on a :

Théorème A.1 Soient A et B deux polynômes, avec $B \neq 0$. Il existe des polynômes Q et R vérifiant $A = BQ + R$ et ($R = 0$ ou $\deg R < \deg B$). Le polynôme Q s'appelle le **quotient** de A par B et le polynôme R s'appelle le **reste**. Ces polynômes sont uniques.

Démonstration. L'unicité découle du fait que $BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ s'écrit $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$: si $\deg(R_2 - R_1) < \deg B$ alors $B(Q_1 - Q_2) = 0$. Pour l'existence, on fixe B et on raisonne par récurrence sur le degré n de A . Si on a $\deg A < \deg B = p$ on prend $Q = 0$ et $R = A$. Supposons la propriété prouvée pour un certain degré $n \geq p - 1$ et passons à $n + 1$. On écrit $A(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ et $B(x) = b_px^p + \dots + b_0$. On considère le polynôme $Q_1(x) = -\frac{a_{n+1}}{b_p}x^{n+1-p}$. Le polynôme $\tilde{A} = A - BQ_1$ est alors de degré $\leq n$ (on a annulé le terme de degré $n + 1$), donc on peut (c'est l'hypothèse de récurrence) le diviser par B . On a ainsi $\tilde{A} = BQ_2 + R$ avec $\deg R < \deg B$ et donc $A = B(Q_1 + Q_2) + R$ est l'écriture cherchée.

Montrons maintenant, sur un exemple, comment trouver en pratique Q et R . Considérons $A(X) = X^5 - 4X^4 + 2X^2 - X + 1$ et $B(X) = X^2 + 1$. Pour trouver Q et R explicitement, on pose la division comme dans les entiers en posant les soustractions à chaque pas. On a le tableau suivant :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 X^5 & -4X^4 & & +2X^2 & -X & +1 \\
 -X^5 & & -X^3 & & & \\
 \hline
 & -4X^4 & -X^3 & +2X^2 & -X & +1 \\
 & 4X^4 & & +4X^2 & & \\
 \hline
 & & -X^3 & +6X^2 & -X & +1 \\
 & & X^3 & & +X & \\
 \hline
 & & & 6X^2 & & +1 \\
 & & & -6X^2 & & -6 \\
 \hline
 & & & & & -5
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} X^2 + 1 \\ X^3 - 4X^2 - X + 6 \end{array} \right.$$

On a donc $Q(X) = X^3 - 4X^2 - X + 6$ et $R(X) = -5$. Pour être sûr qu'il n'y a pas d'erreur de calcul, on peut vérifier que $A = BQ + R$ mais ce n'est pas nécessaire en théorie.

A.2.2 Racines

On dit qu'un nombre $\alpha \in \mathbf{C}$ est racine de P si l'on a $P(\alpha) = 0$. En général il est difficile de trouver les racines d'un polynôme $P(x)$, mais c'est facile si $\deg P \leq 2$ (si le degré est égal à 2, on utilise le discriminant Δ de P). Lorsque $\deg P \geq 3$, on a parfois la chance de constater que 1 ou -1 (par exemple) est racine de P : une telle racine est dite évidente, car on peut arriver à la deviner.

Un résultat majeur (appelé *théorème fondamental de l'algèbre*, ou *théorème de D'Alembert*) affirme que tout polynôme non constant admet au moins une racine *complexe* : il existe $\alpha \in \mathbf{C}$

tel que $P(\alpha) = 0$. Mais un tel α réel n'existe pas toujours : par exemple pour $P(x) = x^2 + 1$ les racines sont i et $-i$, et il n'y en a aucune qui soit réelle.

Proposition A.2 *Le nombre réel α est racine de P si et seulement si on a $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où Q est un polynôme.*

Démonstration. Il est clair que, si P est de la forme annoncée, alors α est racine de P . Pour montrer la réciproque, on effectue la division euclidienne. On a $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R(x)$ avec $\deg R < 1$. Le polynôme R est donc une constante r et cette constante est nulle comme on le voit en écrivant $P(\alpha) = 0 + r = 0$.

En pratique, pour trouver Q dans la proposition précédente on peut utiliser une division euclidienne. Si on trouve une racine α' de Q alors on peut appliquer de nouveau la proposition A.2 ce qui donne $Q(x) = (x - \alpha')S(x)$ et donc $P(x) = (x - \alpha)(x - \alpha')S(x)$ pour un certain polynôme $S(x)$. On peut continuer (en prenant une racine de $S(x)$, à moins que ce ne soit un polynôme constant) et démontrer ainsi le résultat suivant :

Théorème A.3 *Soit $P(x)$ un polynôme non nul de degré n , noté $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Alors il existe des nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $P(x) = a_n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.*

Ces nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont exactement les racines (complexes ou réelles) de P , c'est-à-dire les nombres z tels que $P(z) = 0$ (et certaines racines peuvent être répétées plusieurs fois dans la liste $\lambda_1, \dots, \lambda_n$).

On déduit notamment de ce théorème qu'un polynôme non nul de degré n a au plus n racines. En particulier, si un polynôme $P(x)$ s'annule en une infinité de points x , alors c'est le polynôme nul : ses coefficients sont nuls, et on a alors $P(x) = 0$ pour tout x .

Pour éviter d'introduire les racines complexes de $P(x)$ (ce qui fait sortir du cadre des nombres réels), on utilise en général le théorème suivant (qui est admis) :

Théorème A.4 *Soit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients réels, avec $a_n \neq 0$. Alors P s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_r)Q_1(x) \dots Q_s(x)$$

où les α_i sont des réels et les Q_i des polynômes de degré 2 de la forme $Q_i(x) = x^2 + p_i x + q_i$ de discriminant $p_i^2 - 4q_i < 0$ et où l'on a $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + 2s = n$.

Un polynôme du second degré à discriminant strictement négatif est dit **irréductible**. Les polynômes Q_i de ce théorème sont donc des polynômes de degré 2, irréductibles et unitaires.

Remarques

- 1) Les α_i sont les racines réelles de P tandis que les Q_i correspondent aux autres racines complexes de P , qui sont conjuguées deux à deux. Par exemple on a $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2)$ avec les racines 1 et $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$, d'où $r = 1$, $s = 1$, $\alpha_1 = 1$, $Q_1(x) = x^2 + x + 2$.
- 2) Certaines des racines α_i peuvent être égales (ou certains des Q_i).
- 3) Si $r = 0$ (c'est-à-dire si P n'a aucune racine réelle), la factorisation s'écrit $P(x) = a_n Q_1(x) \dots Q_s(x)$. Si $s = 0$ (c'est-à-dire que toutes les racines complexes de P sont en fait réelles), elle s'écrit $P(x) = a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_r)$. Il s'agit en fait d'une convention générale : si $t = 0$, un produit de la forme $y_1 y_2 \dots y_t$ ne comporte aucun facteur, et par convention il vaut 1. Un tel produit s'appelle un produit vide. De façon analogue, une somme vide vaut 0 par convention.

A.3 Le théorème de décomposition en éléments simples

A.3.1 Définition des éléments simples

Définition A.5 On appelle **élément simple** une fonction rationnelle de l'une des deux formes suivantes :

- $\frac{a}{(x - \alpha)^n}$ avec $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
- $\frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^m}$ avec $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $m \in \mathbb{N}^*$ et le polynôme $x^2 + px + q$ de discriminant $p^2 - 4q < 0$ (donc irréductible).

A.3.2 Primitives des éléments simples

Le premier intérêt des éléments simples vient du fait qu'on sait en calculer des primitives. On l'a vu pour ceux du premier type. Pour les autres, qui sont plus compliqués, on montre d'abord un lemme :

Lemme A.6 On désigne par F_n une primitive de $\frac{1}{(x^2 + 1)^n}$ pour $n \geq 1$. On a $F_1(x) = \text{Arctan } x + C_1$ et, pour $n \geq 2$, la relation de récurrence :

$$F_n(x) = \frac{2n-3}{2n-2} F_{n-1}(x) + \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + C_n$$

où C_n est une constante qui dépend du choix de la primitive F_n . Cette relation permet de calculer F_n par récurrence.

Démonstration. La preuve repose sur deux astuces classiques :

1) On écrit $F_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^n} dx$, donc $F_n(x) = F_{n-1}(x) - \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx = F_{n-1}(x) - G_n(x)$ en notant $G_n(x)$ la dernière intégrale.

2) On sépare alors le terme x^2 du numérateur de $G_n(x)$ en $x.x$ et on intègre par parties en posant $u = x$, d'où $u' = 1$, et $v' = \frac{x}{(x^2 + 1)^n}$, d'où $v = -\frac{1}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}}$. On en déduit :

$$G_n(x) = -\frac{x}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} F_{n-1}$$

à une constante additive près, et le résultat annoncé s'ensuit.

Primitives d'éléments simples du second type.

On peut maintenant calculer $\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^m} dx$. On fait apparaître la dérivée de $x^2 + px + q$ (c'est-à-dire $2x + p$) au numérateur en écrivant :

$$ax + b = \frac{a}{2}(2x + p) + b - \frac{ap}{2}.$$

L'intégrale $\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^m} dx$ se calcule aisément : dans le cas $m = 1$ on trouve $\ln(x^2 + px + q) + C$ et $\frac{1}{(1-m)(x^2 + px + q)^{m-1}} + C$ sinon. Il reste à calculer $\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^m} dx$. Pour cela, on

regarde $x^2 + px + q$ comme le début d'un carré. Si on pose $\Delta = p^2 - 4q$, on a $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + \frac{-\Delta}{4}$. Comme Δ est négatif, on peut poser $\Delta = -c^2$ avec $c \in \mathbb{R}$ et il reste à calculer

$\int \frac{dX}{(X^2 + c^2)^m}$ où l'on a posé $X = x + \frac{p}{2}$. Si on effectue le changement de variable $u = X/c$ on est ramené à l'intégrale calculée dans le lemme ci-dessus.

A.3.3 Le théorème de décomposition

Le second intérêt des éléments simples c'est que toute fonction rationnelle se décompose comme **somme** de tels éléments :

Théorème A.7 Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ une fonction rationnelle. Alors f s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = E(x) + \sum_{i=1}^r e_i(x)$ où E est un polynôme et où les e_i sont des éléments simples.

Plus précisément :

- le polynôme E est le quotient dans la division euclidienne de N par D ;
- si le dénominateur de f s'écrit :

$$D(x) = c \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^s Q_j(x)^{l_j}$$

où c est un réel non nul, les α_i des réels distincts et les Q_j des polynômes unitaires de degré 2 irréductibles et distincts, avec $r, s \geq 0$, $k_i \geq 1$, $l_j \geq 1$, alors les éléments simples qui interviennent dans la décomposition sont des types suivants :

- $\frac{a}{(x - \alpha_i)^m}$, avec $1 \leq m \leq k_i$,
- $\frac{ax + b}{Q_j^m}$, avec $1 \leq m \leq l_j$.

Si $s = 0$ alors il n'y a que des éléments simples du premier type ; si $r = 0$ il n'y en a que du second.

Le polynôme E s'appelle la partie entière du développement.

Le cas particulier où $s = 0$ et $k_i = 1$ pour tout i est le théorème 2.15 énoncé au paragraphe 2.8.

Le théorème A.7 est admis (il sera démontré au S3) ; signalons simplement que pour le démontrer (ou l'appliquer en pratique), on commence par faire la division euclidienne de N par D : $N = DE + R$ avec $\deg R < \deg D$. On a alors $f = E + R/D$ et on est donc ramené au cas $\deg N < \deg D$.

A.4 Méthodes pratiques de décomposition

Nous allons expliciter ces méthodes sur quelques exemples. On commence toujours par faire la division euclidienne pour se ramener au cas où $\deg N < \deg D$. En divisant N et D par le coefficient dominant de D , on peut supposer D unitaire.

A.4.1 Le cas où D est de degré 2

Posons $f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + px + q}$. Il y a trois cas.

- 1) Si D n'a pas de racine réelle, il n'y a rien à faire, on a déjà un élément simple.
- 2) Si D a deux racines réelles distinctes : $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$ avec $\alpha \neq \beta$, on cherche A, B tels que :

$$(*) \quad \frac{ax + b}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

Il y a deux méthodes.

- Méthode brutale. On réduit les fonctions au même dénominateur et on identifie $A(x - \beta) + B(x - \alpha) = ax + b$. On obtient un système en A et B :

$$\begin{cases} A + B = a \\ \beta A + \alpha B = -b. \end{cases}$$

La résolution est facile et donne $A = \frac{\alpha a + b}{\alpha - \beta}$ et $B = \frac{\beta a + b}{\beta - \alpha}$.

- Méthode astucieuse (c'est celle présentée dans le théorème 2.15 au paragraphe 2.8). On multiplie (*) par $x - \alpha$. On obtient $\frac{ax + b}{x - \beta} = A + \frac{B(x - \alpha)}{x - \beta}$ et on fait $x = \alpha$ dans cette expression.

On trouve bien $A = \frac{\alpha a + b}{\alpha - \beta}$. On procède de même pour B en multipliant par $x - \beta$.

3) Il reste le cas d'une racine double : $x^2 + px + q = (x - \alpha)^2$. On doit écrire :

$$(**) \quad \frac{ax + b}{(x - \alpha)^2} = \frac{A}{(x - \alpha)^2} + \frac{B}{x - \alpha}.$$

Là encore, il y a deux méthodes.

- La méthode d'identification comme ci-dessus.
- Une méthode astucieuse. On multiplie (**) par $(x - \alpha)^2$, il reste $ax + b = A + B(x - \alpha)$ et on fait $x = \alpha$, d'où $A = a\alpha + b$. Pour trouver B on multiplie par x . On obtient :

$$\frac{ax^2 + bx}{(x - \alpha)^2} = \frac{Ax}{(x - \alpha)^2} + \frac{Bx}{x - \alpha}.$$

On fait alors tendre x vers l'infini. Le membre de gauche tend vers a , celui de droite vers B , d'où $B = a$.

A.4.2 Le cas où D est de degré 3

On sait qu'alors D admet au moins une racine réelle : cela découle du théorème des valeurs intermédiaires, puisque $x \mapsto D(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont les limites quand $x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow +\infty$ sont $-\infty$ et $+\infty$ respectivement (puisque D est unitaire de degré impair). Dans le théorème A.4, on a donc $r \geq 1$ et $r + 2s = 3$. Il y a quatre cas possibles (les trois premiers correspondent à $r = 3, s = 0$, et le dernier à $r = 1, s = 1$).

1) Si D a trois racines réelles distinctes, il faut écrire :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{x - \gamma}.$$

On utilise la méthode astucieuse vue ci-dessus : on multiplie par $x - \alpha$ et on fait $x = \alpha$. On trouve

$$A = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \text{ et de même pour } B, C.$$

2) Si D a une racine double et une autre racine réelle, on doit écrire :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)^2(x - \beta)} = \frac{A}{(x - \alpha)^2} + \frac{B}{x - \alpha} + \frac{C}{x - \beta}.$$

Pour trouver C on utilise la même méthode (multiplier par $x - \beta$ et faire $x = \beta$), pour trouver A on fait de même en multipliant par $(x - \alpha)^2$. Enfin, pour trouver B on multiplie par x et on fait tendre x vers l'infini. On obtient $a = B + C$, ce qui donne B .

3) Si D a une racine triple on doit écrire :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)^3} = \frac{A}{(x - \alpha)^3} + \frac{B}{(x - \alpha)^2} + \frac{C}{x - \alpha}.$$

Pour A on multiplie par $(x - \alpha)^3$ et on fait $x = \alpha$. Pour C on multiplie par x et on fait tendre x vers l'infini. Enfin, pour B , le plus simple est de donner une valeur particulière à x , différente de α , par exemple 0 si c'est possible. On trouve alors $-c/\alpha^3 = -A/\alpha^3 + B/\alpha^2 - C/\alpha$, ce qui donne B .

4) Si D a une unique racine réelle simple, on doit écrire :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)(x^2 + px + q)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}.$$

La méthode est toujours la même pour trouver A . Pour B on multiplie par x et on fait tendre x vers l'infini, ce qui donne $a = A + B$ donc B . Enfin, pour C , le plus simple est de donner à x une valeur quelconque, différente de α , par exemple $x = 0$ si c'est possible. On trouve alors $-\frac{c}{\alpha q} = -\frac{A}{\alpha} + \frac{C}{q}$, ce qui donne C .

A.4.3 Le cas général

Les méthodes sont analogues à celles vues ci-dessus. On peut notamment toujours utiliser les méthodes brutales d'identification ou d'attribution de valeurs. Dans la pratique, la limite du théorème est essentiellement la difficulté de factoriser le dénominateur $D(X)$ (c'est-à-dire de lui appliquer concrètement le théorème A.4).

Les fonctions hyperboliques et leurs réciproques

B.1 Les fonctions hyperboliques

Il s'agit de fonctions qui se calculent à partir de l'exponentielle réelle comme les fonctions trigonométriques avec l'exponentielle complexe et ont un comportement assez voisin.

Définition B.1 Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Ces fonctions s'appellent **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique**. On définit la **tangente hyperbolique** comme le quotient $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$.

La proposition suivante n'est pas difficile à démontrer, elle est laissée en exercice. Les graphes des fonctions ch et sh sont représentés dans la figure B.1 ci-dessous. On prendra garde au fait que le repère utilisé n'est pas orthonormé : contrairement à ce que le dessin pourrait laisser croire, la pente de la tangente au graphe de sh au point d'abscisse 0 vaut $\operatorname{sh}'(0) = \operatorname{ch}(0) = 1$.

Proposition B.2 On a les propriétés suivantes.

- 1) La fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est paire, positive sur $\mathbb{R}$, et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $\operatorname{sh} x$. Elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et on a $\operatorname{ch} x \sim \frac{1}{2}e^x$ quand $x \rightarrow +\infty$. Elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.
- 2) La fonction $x \mapsto \operatorname{sh} x$ est impaire, positive sur $[0, +\infty[$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $\operatorname{ch} x$. Elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et on a $\operatorname{sh} x \sim \frac{1}{2}e^x$ quand $x \rightarrow +\infty$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- 3) La fonction $x \mapsto \operatorname{th} x$ est impaire, positive sur $[0, +\infty[$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. Elle tend vers 1 en $+\infty$ et vers -1 en $-\infty$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.
- 4) On a la formule $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 5) On a les formules $\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$ et $\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b + \operatorname{ch} b \operatorname{sh} a$. En particulier, on a $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ et $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x$.

La formule $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ explique l'appellation "hyperbolique". En effet, de même qu'on a une paramétrisation du cercle $X^2 + Y^2 = 1$ par les fonctions trigonométriques ordinaires : $X = \cos t$, $Y = \sin t$, on a une paramétrisation de l'hyperbole $X^2 - Y^2 = 1$ par les fonctions hyperboliques : $X = \operatorname{ch} t$, $Y = \operatorname{sh} t$.

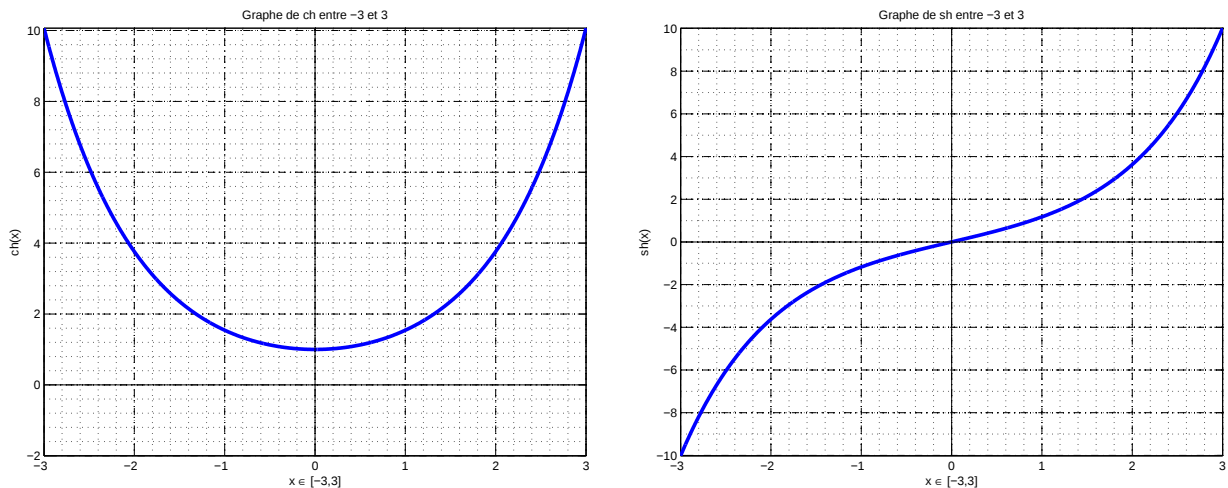


FIGURE B.1 – Graphe des fonctions ch et sh

B.2 Les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

Commençons par la fonction ch. On obtient les résultats suivants, en notant $\operatorname{argch} x$ la bijection réciproque de ch : $[0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$:

Proposition B.3 *La fonction argch est définie sur $[1, +\infty[$, elle prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{argch} x$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes :*

$$(A_{\operatorname{ch}}) \quad \operatorname{argch} x \in [0, +\infty[\text{ et } \operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = x.$$

Cette fonction vérifie aussi, pour tout $\theta \in [0, +\infty[$:

$$(B_{\operatorname{ch}}) \quad \operatorname{ch} \theta \in [1, +\infty[\text{ et } \operatorname{argch}(\operatorname{ch} \theta) = \theta.$$

En outre la fonction $\operatorname{argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par $\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ pour tout $x \in]1, +\infty[$. Enfin on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{argch}(x) = +\infty$.

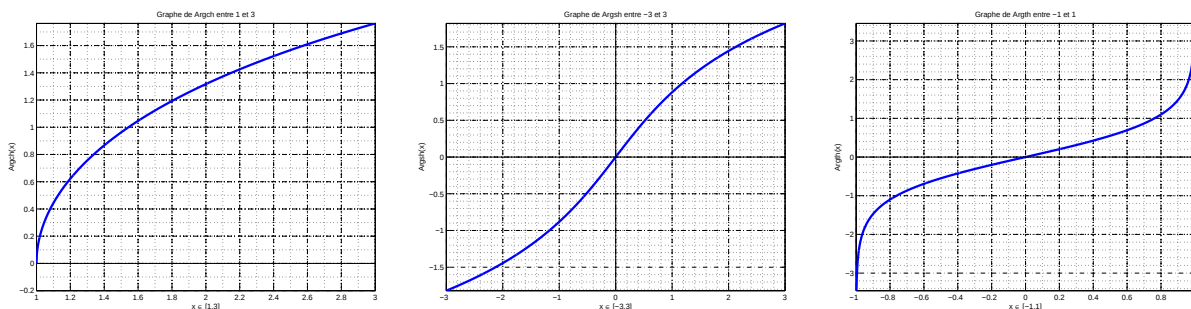


FIGURE B.2 – Graphe des fonctions Argch, Argsh et Argth

De même, on note $\operatorname{argsh} x$ la bijection réciproque de sh : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on a :

Proposition B.4 La fonction argsh est définie sur $\mathbb{R}$, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh} x$ est caractérisé par $\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = x$ et on a aussi $\operatorname{argsh}(\operatorname{sh} \theta) = \theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. En outre la fonction $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par $\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. Enfin on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{argsh}(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{argsh}(x) = -\infty$; la fonction argsh est impaire.

Enfin, on note $\operatorname{argth} x$ la bijection réciproque de $\operatorname{th} : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ et on a :

Proposition B.5 La fonction argth est définie sur $] -1, 1[$, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in] -1, 1[$, $\operatorname{argth} x$ est caractérisé par $\operatorname{th}(\operatorname{argth} x) = x$ et on a aussi $\operatorname{argth}(\operatorname{th} \theta) = \theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. En outre la fonction $\operatorname{argth} :] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante sur $] -1, 1[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ et sa dérivée est donnée par $\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \in] -1, 1[$. Enfin on a $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{argth}(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{argth}(x) = -\infty$; la fonction argth est impaire.

Le seul point à démontrer dans ces trois propositions est la valeur des dérivées. Soient $\theta \in]0, +\infty[$ et $x \in]1, +\infty[$ tels que $x = \operatorname{ch}(\theta)$. Alors on a $\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\theta)} = \frac{1}{\operatorname{sh} \theta} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \theta - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ car $\operatorname{sh} \theta = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \theta - 1}$ puisque $\operatorname{sh} \theta \geq 0$. On raisonne de même pour argsh' et pour argth' (en utilisant que $\operatorname{th}'(\theta) = 1 - \operatorname{th}^2(\theta)$).

Dans l'optique de ce cours, l'une des propriétés essentielles de ces fonctions réciproques est la valeur de leur dérivées. On les résume donc dans la proposition suivante, avec aussi une expression de ces fonctions réciproques à l'aide de la fonction logarithme népérien :

Proposition B.6

1) La fonction $\operatorname{argch} x$, définie sur $[1, +\infty[$, est aussi égale à $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

2) La fonction $\operatorname{argsh} x$, définie sur $\mathbb{R}$, est aussi égale à $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

3) La fonction $\operatorname{argth} x$, définie sur $] -1, 1[$, est aussi égale à $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

Démonstration. La seule nouveauté réside dans les expressions avec les logarithmes. Démontrons par exemple la seconde. On écrit $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et on cherche à calculer x en fonction de y . Posons $u = e^x$, donc $e^{-x} = \frac{1}{u}$. On en déduit $y = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u})$, d'où $u^2 - 2uy - 1 = 0$. On résout cette équation du second degré en u et on trouve $u = y \pm \sqrt{1 + y^2}$. Comme u est > 0 (c'est une exponentielle), le signe $-$ est à écarter et on a donc $u = e^x = y + \sqrt{1 + y^2}$, donc $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$. Cela termine la preuve. Une autre méthode aurait consisté à dériver la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ et à constater qu'on obtient $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$: en effet cela démontre que cette fonction a la même dérivée que argsh , donc elle est égale à argsh à une constante additive près. Comme ces deux fonctions s'annulent en 0, cette constante est nulle et la preuve est terminée.

B.3 Développement limités

La définition de ch et sh donne directement, pour tout entier n , quand x tend vers 0 :

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)$$

Ici on a utilisé la parité de ces fonctions pour dire, par exemple pour ch , que le coefficient de x^5 sera nul donc le développement limité à l'ordre 4 est en fait valable à l'ordre 5.

Par quotient on peut obtenir les premiers termes du développement limité de $\operatorname{th} x$:

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6).$$

On obtient le développement limité de $\operatorname{argsh} x$ en intégrant celui de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (comme au paragraphe 4.5 pour $\arcsin x$). On trouve

$$\operatorname{argsh} x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} k!^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6).$$

Pour argth le calcul est plus facile, et donne

$$\operatorname{argth} x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^6).$$

Enfin argch n'est pas définie au voisinage de 0, et son développement limité en un autre point n'est pas spécialement simple.

La continuité uniforme

Dans cette annexe, on introduit la notion de continuité uniforme et on démontre le théorème principal à ce sujet, appelé théorème de Heine. Ce résultat est utilisé dans la preuve du théorème 2.19 au §2.9, pour démontrer que toute fonction continue sur un segment est intégrable au sens de Riemann.

La continuité uniforme est une notion plus forte que la continuité. Elle se définit ainsi :

Définition C.1 Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur A . On dit que la fonction f est uniformément continue sur A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left(\forall x, y \in A, \quad |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right).$$

Exemples et Remarques

1. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur A , alors elle est continue sur A . En effet, si $x \in A$ et $\varepsilon > 0$ sont fixés, alors le $\eta = \eta(\varepsilon)$ qui apparaît dans la définition précédente (il **ne dépend pas de x mais seulement de ε**) vérifie :

$$\forall y \in A, \quad |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

d'où la continuité de f au point x , quel que soit $x \in A$.

2. En d'autres termes, la continuité de $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sur A se traduit par le fait que pour chaque $x \in A$ et chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta = \eta(x, \varepsilon) > 0$ tel que :

$$\forall y \in A, \quad |x - y| < \eta(x, \varepsilon) \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

tandis que l'uniforme continuité de f sur A signifie que le choix du $\eta(x, \varepsilon) > 0$ peut être fait indépendamment de $x \in A$, i.e. que, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \forall y \in A, \quad |x - y| < \eta(\varepsilon) \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

C'est exactement la définition C.1.

3. En revanche, la réciproque est fautive : la continuité d'une fonction n'implique généralement pas son uniforme continuité. Montrons par exemple que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est continue sur $]0, 1]$, n'est pas uniformément continue sur cet intervalle. Pour cela, considérons un ε dans $]0, 1[$ et un x quelconque de $]0, 1]$. Alors, pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \iff -\varepsilon + \frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \varepsilon + \frac{1}{x}$$

$$\stackrel{\text{car } 1-\varepsilon x > 0}{\iff} x - \frac{\varepsilon x^2}{1 + \varepsilon x} = \frac{x}{1 + \varepsilon x} < y < \frac{x}{1 - \varepsilon x} = x + \frac{\varepsilon x^2}{1 - \varepsilon x}.$$

Le point x est fixé dans $]0, 1]$ et on cherche $\eta(x, \varepsilon)$ tel que :

$$\text{pour tout } y \in]0, 1], \quad |y - x| < \eta(x, \varepsilon) \text{ implique } |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Il est donc nécessaire que $\eta(x, \varepsilon)$ vérifie

$$]0, 1] \cap]x - \eta(x, \varepsilon), x + \eta(x, \varepsilon)[\subset \left] x - \frac{\varepsilon x^2}{1 + \varepsilon x}, x + \frac{\varepsilon x^2}{1 - \varepsilon x} \right[. \quad (*)$$

Or pour $x > 0$ suffisamment proche de 0, on a

$$x - \frac{\varepsilon x^2}{1 + \varepsilon x} = \frac{x}{1 + \varepsilon x} > 0 \quad \text{et} \quad x + \frac{\varepsilon x^2}{1 - \varepsilon x} = \underbrace{\frac{x}{1 - \varepsilon x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0} < 1$$

et dans ce cas l'intervalle $]x - \frac{\varepsilon x^2}{1 + \varepsilon x}, x + \frac{\varepsilon x^2}{1 - \varepsilon x}[$ est inclus dans $]0, 1[$. Mais alors, l'inclusion $(*)$ exige que $\eta(x, \varepsilon)$ vérifie

$$\eta(x, \varepsilon) \leq \min\left(\frac{\varepsilon x^2}{1 + \varepsilon x}, \frac{\varepsilon x^2}{1 - \varepsilon x}\right) = \frac{\varepsilon x^2}{1 + \varepsilon x}.$$

De ce qui précède on déduit maintenant que si $\eta(\varepsilon) > 0$ vérifie

$$\text{pour tout } x \in]0, 1] \text{ et tout } y \in]0, 1], \quad |y - x| < \eta(\varepsilon) \text{ implique } |f(y) - f(x)| < \varepsilon,$$

on doit avoir $0 < \eta(\varepsilon) \leq \tilde{\eta}(x, \varepsilon) := \frac{\varepsilon x^2}{1 + \varepsilon x}$ pour tout x suffisamment proche de 0. Mais cette condition est impossible à satisfaire car $\tilde{\eta}(x, \varepsilon)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+ . Il s'ensuit que la fonction f n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

4. Au point précédent, à visée pédagogique, on a calculé explicitement, pour $\varepsilon \in]0, 1[$ et x assez petit, le $\eta(x, \varepsilon)$ maximal, à savoir $\tilde{\eta}(x, \varepsilon) := \frac{\varepsilon x^2}{1 + \varepsilon x}$, qui assure $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \varepsilon$ pour tout y dans l'intervalle $]x - \eta(x, \varepsilon), x + \eta(x, \varepsilon)[$, et on a conclu que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$ parce que $\tilde{\eta}(x, \varepsilon) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Mais ces calculs sont relativement fastidieux alors qu'en fait on peut arriver au résultat beaucoup plus vite. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $x \mapsto \frac{1}{x}$ soit uniformément continue sur $]0, 1]$. En considérant $\varepsilon = 1$, il existe alors $\eta > 0$, que l'on d'ailleurs choisit tel que $0 < \eta \leq 1$ (s'il ne l'est pas on le remplace par $\min(\eta, 1)$ ce qui ramène à la situation souhaitée), tel que

$$\forall x \in]0, 1], \forall y \in]0, 1], \quad |x - y| < \eta \implies \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < 1.$$

En considérant alors $y = \eta \in]0, 1]$, on a en particulier $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < 1$ pour tout $x \in]0, \eta]$ et donc $\frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{\eta}$ pour tout $x \in]0, \eta]$. L'hypothèse que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est uniformément continue sur $]0, 1]$ a conduit à la contradiction que cette fonction est bornée sur $]0, \eta]!$

Avec cet exemple, nous avons montré qu'une fonction continue n'est pas nécessairement uniformément continue. C'est néanmoins le cas pour les fonctions continues sur un segment comme l'énonce le théorème suivant :

Théorème C.2 (Théorème de Heine) Soient deux réels $a \leq b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur le segment $[a, b]$.

Preuve. Démontrons ce théorème par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. D'après la définition C.1 de l'uniforme continuité, on obtient par négation :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \quad \exists x, y \in [a, b] \text{ tels que } |x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Fixons un tel $\varepsilon > 0$. On a alors en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists x_n, y_n \in [a, b] \quad \text{tels que} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset [a, b]$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers un certain $x \in [a, b]$. D'après l'inégalité $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, la suite $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge elle aussi vers x , puisque d'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|y_{\varphi(n)} - x| \leq \underbrace{|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}|}_{< \frac{1}{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{|x_{\varphi(n)} - x|}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La continuité de f implique donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{\varphi(n)}) = f(x)$. Mais par ailleurs on a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en particulier on a $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En passant à la limite dans cette dernière inégalité lorsque n vers $+\infty$ on obtient une contradiction, à savoir $0 \geq \varepsilon > 0$, et cela termine la preuve du théorème C.2. $\diamond$