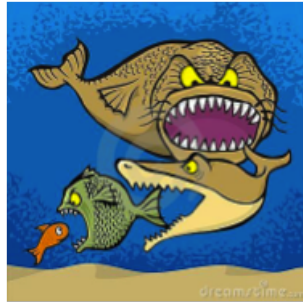


## Projet "Jeu de la vie"



### INTRODUCTION

Le but de ce projet est de modéliser l'évolution dans le temps d'une population (ou plusieurs) interagissant avec son environnement. Ces modèles permettent notamment de comprendre l'évolution d'une maladie dans une population ou encore l'interaction existant entre les proies et le prédateurs dans le monde animal.

**Mots clés : simulation, équations différentielles ordinaire, suite.**

Le principe du projet est d'étudier une question mathématique complexe de façon autonome et originale en utilisant l'outil informatique. **L'ensemble du projet est à faire par groupe de 3 étudiants.** Le projet est divisé en 2 sections : théorique et pratique. La première partie est **obligatoire**, la seconde partie correspond à des **pistes de travail**.

### Rendu du projet.

Vous devrez rendre :

- un **rapport de mi-projet** répondant aux questions de la section 1 ;
- un **exposé** en fin de projet présentant votre travail et vos résultats sur la section 2.

### Le rapport.

**Date de rendu** : cf date E-Campus

**Que faut-il faire ?** Répondre aux questions de la section 1.

**Quel format ?** Format PDF obligatoire. Si vous souhaitez ajouter des dessins, vous pouvez les scanner et les ajouter à votre document.

**Qui réalise le rapport ?** Les membres du groupe réfléchissent ensemble au rapport mais rédigent **chacun** leur propre rapport. N'oubliez pas de préciser sur votre document qui sont les autres membres du groupe !

**Comment le rendre ?** Sur E-Campus

**L'exposé.**

**Quand ?** Cf date E-Campus

**Que doit-on présenter ?** Vous devez présenter le travail effectué sur la section 2 du projet, en particulier les résultats que vous avez obtenus, les algorithmes que vous avez utilisés, les images ou vidéos produites, etc.

**En combien de temps ?** Vous aurez 10 minutes de présentation, puis 5 minutes de questions.

**Sur quel support ?** Vous aurez un vidéo projecteur et un ordinateur à disposition (ou le votre si vous le souhaitez). Vous pourrez donc présenter votre exposé sous forme d'un powerpoint ou pdf. Vous pouvez aussi préparer un notebook avec du code ainsi que des images, vidéos ou autres démos.

**Qui parle ?** Tout le monde ! Les 3 étudiants doivent participer.

**Doit-on présenter notre code ?** Vous pouvez présenter un notebook de code ou un autre type de démo, cependant nous ne notons pas la programmation mais bien les résultats obtenus !

**Doit-on répondre aux questions ?** Les questions de la section 2 ne sont pas obligatoires, ce sont des pistes de travail, vous pouvez les suivre, ou pas...

## 1. PARTIE THÉORIQUE

**1.1. Le modèle "bactérien".** Notons par  $y(t)$  l'évolution au cours du temps d'une population. On supposera continue la fonction  $y(t)$  et même dérivable par rapport au temps, ce qui est justifiable pour une population de grande taille. Les premiers modèles d'évolution de la population étaient simplement décrits par  $y'(t) = ay(t)$  où  $a$  est une constante positive indiquant le *taux d'accroissement*. Ce modèle correspond à supposer que la population possède une possibilité d'expansion illimitée.

Afin de proposer un modèle plus réaliste, le mathématicien *Verhulst* a proposé de prendre en compte la capacité d'accueil du milieu dans lequel la population vit, ce qui conduit au modèle suivant :

$$(1) \quad y'(t) = ay(t) \left( 1 - \frac{y(t)}{K} \right), \quad \text{où } a, K > 0.$$

La constante  $a$  correspond toujours au *taux d'accroissement* et  $K$  à la capacité d'accueil du milieu. Par exemple, on peut modéliser ainsi l'évolution d'une population de bactéries dans une boîte limitant leur expansion à la capacité  $K$ .

**1.2. Questions sur le modèle "bactérien".**

(1) Pour  $t = 0$ , on note  $y_0 = y(0) > 0$  la population initiale. Que se passe-t-il si  $y_0 = 0$  ou  $y_0 = K$  ? Maintenant, si  $y_0 < K$ , comment évolue la population ? De même, si  $y_0 > K$ , comment évolue la population ? Conjecturer la limite  $y(t)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

(2) Vérifier que la fonction

$$y(t) = K \frac{1}{1 + \left( \frac{K}{y_0} - 1 \right) e^{-at}}$$

est solution des équations (1). Donner le comportement asymptotique de la solution en  $t = +\infty$ , et tracer cette fonction (avec son asymptote).

Une version discrète de ce modèle est donnée par la *suite logistique*  $u_{n+1} - u_n = au_n(1 - \frac{u_n}{K})$ . On peut interpréter ce modèle comme l'évolution de la population d'une année à l'autre.

- (3) En posant  $\mu = a + 1$  et  $v_n = \frac{au_n}{\mu K}$ , donner la relation de récurrence vérifiée par la suite  $v_n$ . Si  $v_n \in [0, 1]$ , que peut on dire sur  $v_{n+1}$  ?
- (4) En cas de convergence de la suite  $v_n$ , donner sa limite.

**1.3. Le modèle Proies-Prédateurs.** Dans la nature, il existe une étroite corrélation entre l'évolution de toutes les espèces. Si une espèce disparaît, l'impact sur les autres peut être catastrophique. Nous allons maintenant étudier l'interaction entre deux populations  $x(t)$  et  $y(t)$  modélisant respectivement le nombre de *proies* et de *prédateurs*. Un modèle pour décrire l'évolution dans le temps de ces deux populations a été proposé par les mathématiciens *Alfred James Lotka* et *Vito Volterra* :

$$(2) \quad \begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \\ y'(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t), \end{cases}$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des constantes positives représentant

- $\alpha$  : le taux d'accroissement des *proies*,
- $\beta$  : le taux de mortalité des *proies* due aux *prédateurs*,
- $\gamma$  : le taux de mortalité naturelle des *prédateurs*,
- $\delta$  : le taux d'accroissement des *prédateurs* en mangeant les *proies*.

#### 1.4. Questions sur le modèle Proies-Prédateurs.

- (1) Interprétons ce modèle. Que se passe t'il si l'une des deux espèces disparaît ? Que se passe t'il si la population de proie (ou de prédateur) est très grande ? À l'inverse, que se passe t'il si la population de proie est très faible ?
- (2) Une situation d'équilibre est atteinte lorsque les deux populations conservent un même nombre d'individus au cours du temps. Déterminer les points d'équilibre en fonction des paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$ .
- (3) Montrer que la quantité :

$$V(t) = -\delta x(t) + \gamma \ln(x(t)) - \beta y(t) + \alpha \ln(y(t)),$$

est conservée au cours du temps (i.e.  $V'(t) = 0$ ). Étant donné une population initiale  $(x_0, y_0) > 0$ , que peut-on déduire (une population peut elle s'éteindre avec ce modèle) ? Conjecturer le comportement des fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$ .

## 2. MODÉLISATION ET EXTENSIONS

Le but de cette partie sera d'explorer différentes extensions possibles de nos deux précédents modèles. On s'appuiera sur le logiciel sage pour visualiser notre résultats. Nous proposons ici quelques pistes d'études que vous pouvez compléter avec de nouvelles si vous le souhaitez.

**2.1. La suite logistique.** Le comportement de la suite  $v_n$  définie précédemment dépend du paramètre  $\mu$ . On observe que pour certaines valeurs, le comportement peut devenir *chaotique* et la suite peut ne pas converger.

- (1) Afficher pour différentes valeurs de  $\mu$  dans l'intervalle  $[0, 4]$  les termes de la suite  $v_n$ . Que constatez-vous pour  $\mu \leq 3$  ? Si  $\mu \in [3, 4]$  (essayer de faire varier  $v_0$ ) ?
- (2) Tracer en fonction de  $\mu$  la limite  $v_\infty$  de la suite  $v_n$  obtenue numériquement, c'est à dire après un nombre suffisant d'itérations. Faire plusieurs calculs de  $v_\infty$  pour une même valeur de  $\mu$  en tirant aléatoirement  $v_0$  entre  $[0, 1]$ .
- (3) La suite  $v_n$  peut être vue comme le calcul d'un point fixe par la *méthode de Newton*. Représenter graphiquement l'algorithme de Newton dans notre situation.

**2.2. Visualisation du modèle Proies-Prédateurs.** Le but ici est de simuler l'évolution au cours du temps des proies et des prédateurs dans notre modèle.

- (1) La fonction  $V(t)$  définie précédemment peut être considérée comme  $V(x, y)$ . Tracer les lignes de niveaux de  $V(x, y)$  dans un graphe 2D avec  $x$  en abscisse et  $y$  en ordonnée (i.e. l'ensemble des points tels que  $V(x, y) = C$  pour différentes constantes  $C$ ). Ce diagramme est appelé *portrait de phase*.
- (2) En utilisant la *méthode d'Euler explicite*, tracer dans un graphique l'évolution de  $x(t)$  et de  $y(t)$  en fonction du temps  $t$ . Vous choisirez et testerez différentes valeurs des coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$ .
- (3) Tester la *méthode d'Euler modifiée*. Comparer les deux méthodes.
- (4) Faire une animation qui montre l'évolution des deux populations dans le temps, et la position  $V(x(t), y(t))$  sur la courbe de niveau.

**2.3. Modèle Proies-Prédateurs avec compétition.**

- (1) Étudier un nouveau modèle incluant une notion de compétition entre les deux espèces (chercher dans la littérature).
- (2) Reprendre les questions précédentes pour ce nouveau modèle.