Cours Analyse MDD 151 : Calcul Intégral
Bruno Vallet

Chapitre I : Bijections réciproques.

1.1 Rappels :

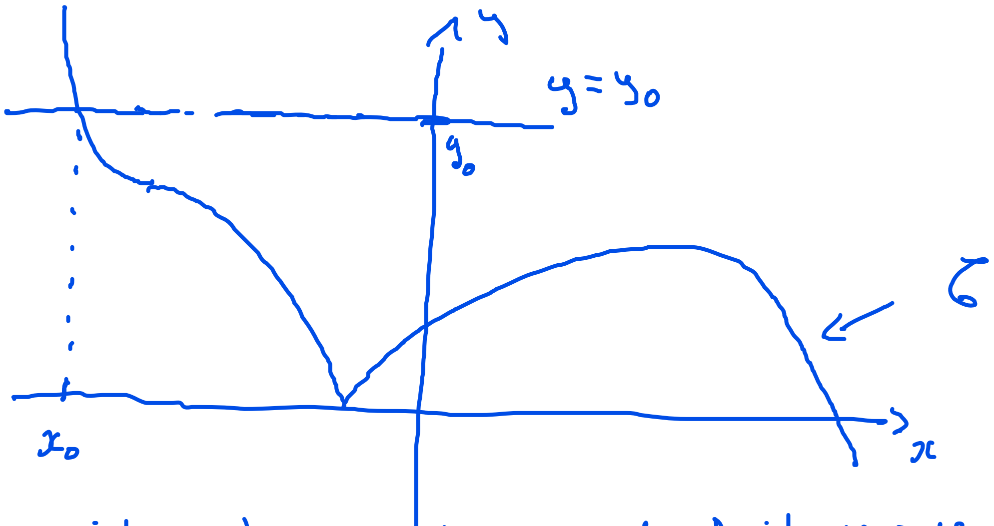
$D \subset \mathbb{R}$ $\quad f : D \to \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in D,\ f(x) \in \mathbb{R}$

Graphe de f $= \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{C} = \{(x, f(x))\ \forall x \in D\}$

$\forall x \in D$ $\quad f(x)$ = image par f de x

$y \in \mathbb{R}$ $\quad x \in D$ (n'existe pas toujours) t.q $y = f(x)$

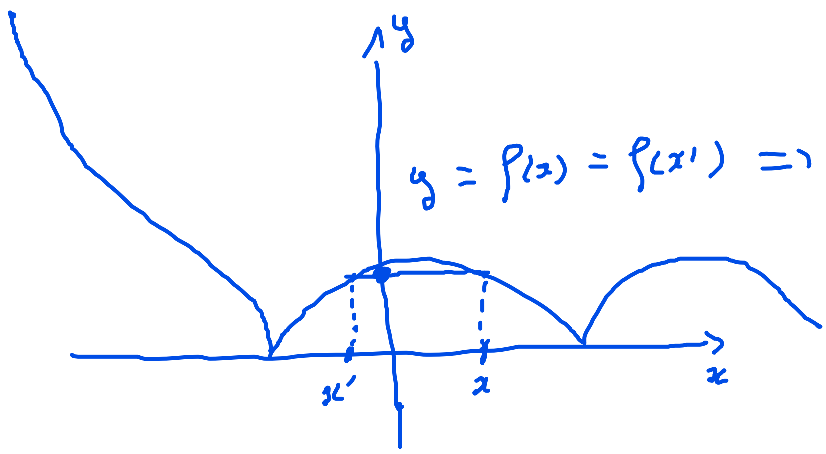
y = image par f de x
x = antécédent de y $\qquad x \mapsto y$



$y_0 = f(x_0)$: intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite $y = y_0$

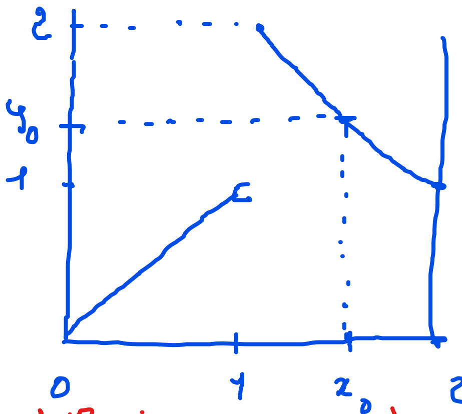
1° Injective :

f est injective ssi $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
$\forall x, x' \in D$



$y = f(x) = f(x') \Rightarrow f$ n'est pas injective

Exemple
fonction non monotone mais injective



définie sur un intervalle
continue par morceaux

$f(x) = x \quad \forall x \in [0, 1[$

$f(x) = 3 - x \quad \forall x \in [1, 2]$

$f : [0,2] \to [0,2]$

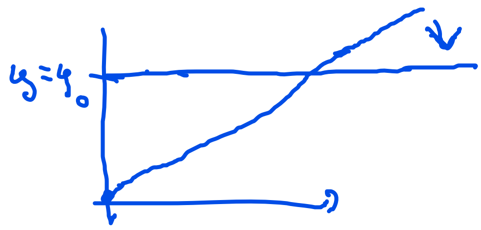
$\forall y \in [0, 2]\ \exists$ unique $x \in [0,2]$ t.q $y = f(x)$

Proposition : Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective

f strictement monotone : f strictement croissante
ou f strictement décroissante
(f jamais constante)

I = intervalle

idée



Dem : $x \neq x' \Rightarrow x < x'$ ou $x' < x$ si f est strictement $\nearrow$
alors $f(x) < f(x')$ ou $f(x') < f(x)$
$\Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Réponse à Mehdi :
On peut construire une fonction continue injective définie sur deux intervalles disjoints, qui ne soit pas monotone.

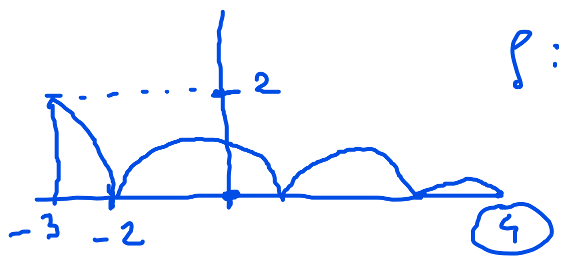
2°) Surjection :

ens de définition

$f : D \to V$ est surjective ssi

$\forall y \in V \ \exists x \in D$ t.q $y = f(x)$: tous les éléments de V ont au moins un antécédent

ex :



$f : [-3, 4] \to \mathbb{R}$
n'est pas surjective
car -1 n'a pas d'antécédent,

Thomas : il est facile de rendre f surjective :

$f([-3,2]) = \{ f(x),\ x \in [-3,4] \} = \mathrm{Im} f$

$\forall y \in f([-3,4])$, y a au moins un antécédent

$\Rightarrow f$ est surjective de $[-3,4] \longrightarrow f([-3,4])$

f sera toujours surjective de $D \to f(D)$

$\left(f([-3,4]) = [0,2] \ ; \ \text{NB } f([-3,-2]) = (0,2] \right)$

$$\begin{cases} f(n) = 0 \\ f(x) = \sin x & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$ non continue sur $\mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = [-1,1]$: $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ surjective

$\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : \begin{array}{ll} x \mapsto 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ x \mapsto 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{array}$

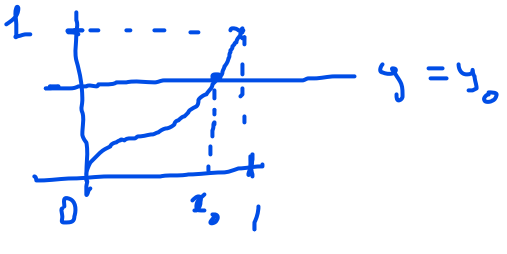
surjective de $[0,1] \to \{0,1\}$

3°) Bijectivité

$f : D \longrightarrow V$ f est bijective ssi f est injective et surjective.

$\forall y \in V \ \underbrace{\exists}_{\text{surjection}} \overset{\text{injective}}{!} (\text{unique})\ x \in D$ t.q $y = f(x)$

Aussi : $\forall y_0 \in V$, la droite $y = y_0$ coupe le graphe $\mathcal{C}$ de f en un unique point (x_0, y_0) avec $y_0 = f(x_0)$



$x \to y$ unique

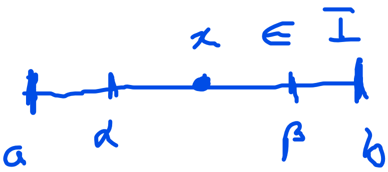
$y \to x$ unique antécédent (bijection)

1-2 Théorème de la bijection (corollaire du TVI)

Thm : f continue et strictement monotone sur un intervalle alors f est bijective et sa réciproque est continue

Exemple $I=[a,b]$ $a,b \in \mathbb{R}$ est un intervalle,

def $\forall \alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta \Rightarrow \forall x$, $\alpha < x < \beta$
$x \in I$



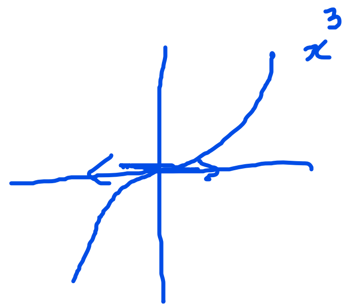
Si f est strictement croissante sur $[a,b]$, f continue
alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

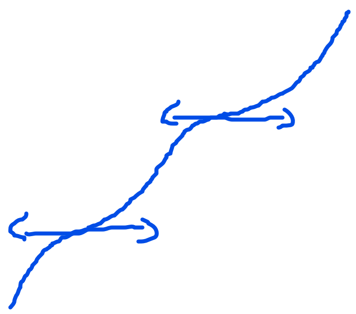
Si f est strictement croissante sur $[a,b[$, f continue
alors $f([a,b[) = [f(a), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$

ex : $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f :]0,1]$ alors $f(]0,1]) = [f(1), \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)[$
f est strictement décroissante $= [1, +\infty[$

N.B. : Si f est dérivable sur I et $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$
alors f est strictement croissante

(pas d'équivalence : Trouver un exemple)
$f(x) = x^3$ $\quad f'(0) = 0$ $\quad$ strictement ↑





prop : Si $f : I \to f(I)$ est dérivable sur I et $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$, pouvant s'annuler en un nombre fini de points de I $\Longrightarrow$ f est strictement croissante.

(T.A.F, utiliser le taux d'accroissement)

Ex : $f :]0,1] \to [1,+\infty[$ $\quad f$ est continue

$x \mapsto \frac{1}{x}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in]0,1] \Rightarrow f$ est strictement décroissante $\Rightarrow f$ est bijective.

Ex $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow$ strictement croissante

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$

$f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$: f est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$

1.3 : Bijection Réciproque

$f : D \to V$ une fonction bijective, on appelle bijection réciproque, ou réciproque de f la fonction $f^{-1} : V \to D$ définie par $\forall y \in V \quad f^{-1}(y) = x$ t.q $y = f(x)$

à y on associe son unique antécédent.

Exemple : $f = \exp : \mathbb{R} \to V$ $\quad$ strictement croissante

$x \mapsto e^x$ $\quad$ continue sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\Rightarrow \exp$ est une bijection de $\mathbb{R} \to]0,+\infty[$

donc exp admet une réciproque

$f^{-1} = \ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$y \mapsto \ln y = x \qquad \ln y = x \iff y = e^x$

f^{-1} = la réciproque de f (f étant bijective)

25/01

Remarque : $f : \underline{D \to V}$ bijective $\Rightarrow$ f possède une réciproque notée $f^{-1} : \underline{V \to D}$

$f : x \mapsto y \qquad y = f(x)$

$f^{-1} : y \to x \qquad f^{-1}(y) = x$

$$\boxed{y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x}$$

$$\begin{tikzcd} D & & V \\ x \arrow[rr, bend left, "f"] & & y \arrow[ll, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$

donc $f^{-1} \circ f : D \to D$
$x \mapsto x$

$f^{-1} \circ f = Id_D$

de même : $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ donc $f \circ f^{-1} = Id_V$
$= f \circ f^{-1}(y)$

Remarque : si f est bijective $\Rightarrow$ f possède une réciproque f^{-1}
f^{-1} est bijective $\Rightarrow$ f^{-1} possède une réciproque qui est f
i.e. $(f^{-1})^{-1} = f$

Que se passe-t-il pour les graphes ?

Le graphe de $f = \Gamma_f = \{ (x, f(x)),\ x \in D \}$ $\qquad f : D \to V$ bijective

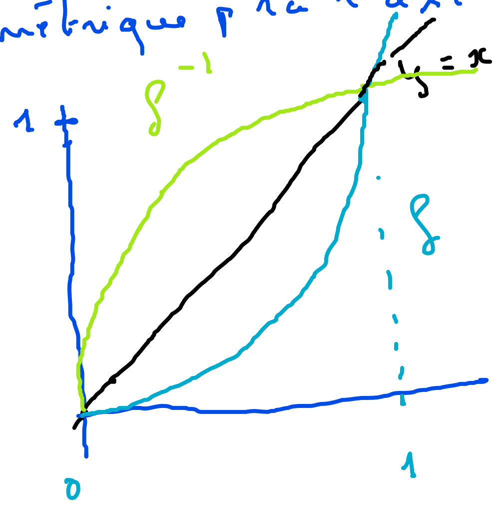
$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in D,\ y = f(x) \}$

or $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$

donc $\Gamma_f = \{ (f^{-1}(y), y) , y \in V \}$

$=$ symétrique p.r.à l'axe $y=x$ de $\{ (y, f^{-1}(y)) , y \in V \}$

$=$ symétrique p.r.à l'axe $y=x$ de $\Gamma_{f^{-1}}$



<u>Thm de continuité</u> . 1.3.2

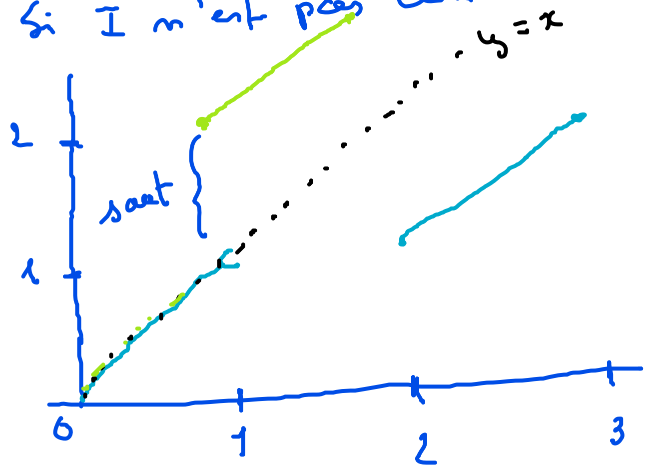
Soit $f : I \to J$, I, J sont des intervalles

f est continue, strictement monotone et bijective ($J = f(I)$)

<u>Alors</u> f^{-1} existe, f^{-1} est continue, et est strictement monotone de $\hat{m}$ sens de variations que f

<u>Remarque</u> : Si I n'est pas un intervalle le thm est faux

exemple :



$\begin{cases} f(x) = x & \text{sur } [0,1[\\ f(x) = x-1 & \text{sur } [2,3] \end{cases}$

$f \uparrow$ st^t. f est $\mathcal{C}^0$

f bijective de $[0,1[\cup [2,3] \to [0,2]$

donc f^{-1} existe et : $f^{-1} [0,2] \to [0,1[\cup [2,3]$

f^{-1} n'est pas continue en $x = \underline{\underline{1}}$

Bien retenir que f et f^{-1} (dans les conditions du thm) ont le même sens de variations.

Remarque : f continue st^t monotone $\Rightarrow$ est bijective de I vers $f(I)$.

Si on considère $f : I \to J$ C^0, st^t monotone, pour que f soit bijective, il faut $J = f(I)$

C^0 = continue

Thm de dérivabilité 1-3-3.

<u>Thm 1-14</u> : $f : I \to J$ I, J intervalles, continue, strictement monotone et bijective $(J = f(I)) \Rightarrow f$ possède une réciproque C^0

si de plus : f est dérivable en $x_0 \in I$ et $\underline{f'(x_0) \neq 0}$

<u>alors</u> : f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$\boxed{\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

← à savoir

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, bend left, "f"] & y_0 \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

<u>Dem</u> : on la voit tout à l'heure

<u>Applications à savoir</u> : . fonctions puissances
. exp et ln
. cos arccos, sin arcsin, tan arctan

1-4 : Les fonctions racine n-ième, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots x}_{n \text{ fois}}$ $\quad$ donc $1^n = 1$: $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$

$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

si $n = 0$: $x^0 = 1$ si $x \neq 0$ (0^0 Forme indéterminée)

On peut étendre x^n aux entiers relatifs, $n \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$

si $n < 0$ $\quad x^n = \frac{1}{x^{-n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$ $\quad -n > 0$

ainsi, $f_n : x \mapsto x^n$ bien définie pour $x \neq 0$, si $n \in \mathbb{Z}$.

prop 1-17 : Si $n \geq 1$ P_n est infiniment dérivable ($\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée $P'_n(x) = n \cdot x^{n-1} = n\, P_{n-1}(x)$

Si $n \leq -1$ P_n est $\mathcal{C}^\infty$ $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

et de même $P'_n(x) = n \cdot x^{n-1} = n \cdot \dfrac{P_n(x)}{x}$

prop 1-18 : Réciproque de P_n

infiniment dérivable

. Si n est impair ≥ 3, alors P_n est $\mathcal{C}^\infty$ strictement croissante de dérivée : $P'_n(x) = n\, x^{n-1} > 0$ $\forall x \neq 0$

$P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad P_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc P_n est bijective

donc possède une réciproque P_n^{-1} qui est strictement croissante continue : dérivable ?

Soit x_0 t.q $P'_n(x_0) \neq 0$, $y_0 = P_n(x_0)$ $\quad P'_n(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$

$$\text{alors } (P_n^{-1})'(y_0) = \frac{1}{P'_n(x_0)} = \frac{1}{P'_n(P_n^{-1}(y_0))}$$

$$\text{or } P'_n(x_0) = n \cdot P_{n-1}(x_0) = n \frac{P_n(x_0)}{x_0} \quad (= n\, x_0^{n-1})$$

$$\text{donc } (P_n^{-1})'(y_0) = \frac{1 \times P_n^{-1}(y_0)}{n\, P_n(P_n^{-1}(y_0))} = \frac{P_n^{-1}(y_0)}{n \cdot y_0}$$

$$\text{donc } \boxed{(P_n^{-1})'(y_0) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{P_n^{-1}(y_0)}{y_0}\right)}$$

quand $x_0 \to 0$ $\quad P_n(x_0) \to 0$ i.e $y_0 \to 0$

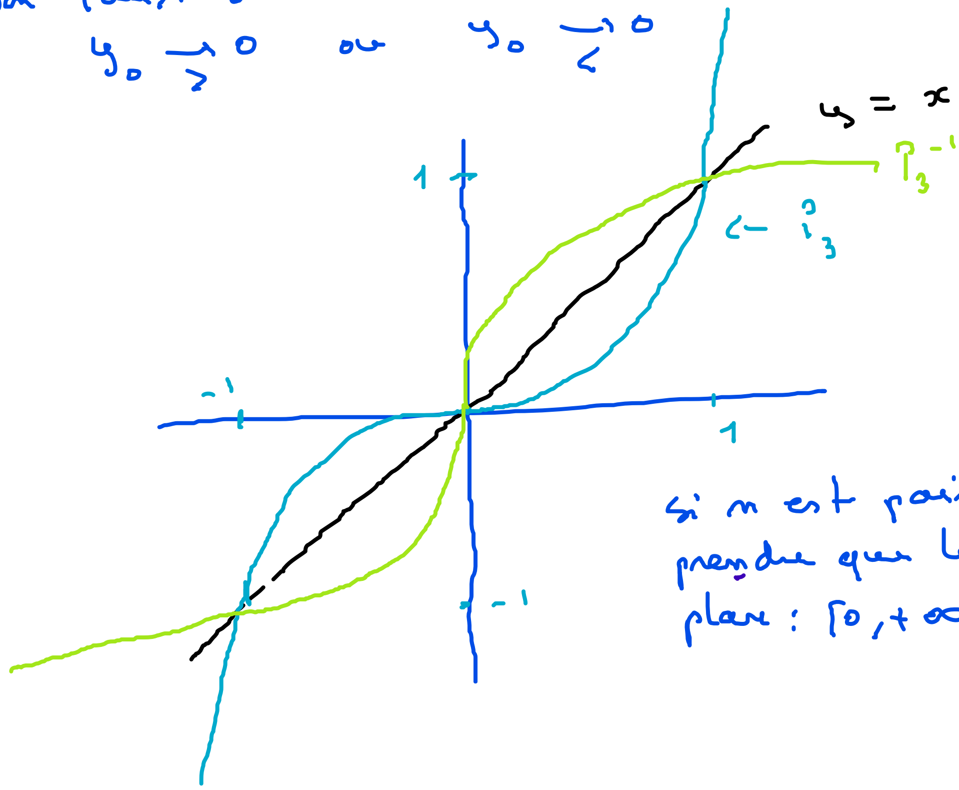
quand $y_0 \underset{>}{\to} 0$ alors $(P_n^{-1})'(y_0) \to +\infty$

la pente du graphe de P_n^{-1} est verticale en $(0,0)$.

On note : $P_n^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ $\qquad P_n(x) = x^n$ ainsi $\sqrt[n]{x^n} = x$

si n impair ≥ 3, $x \in \mathbb{R}$

mais f_n^{-1} n'est pas dérivable en 0 :
(son taux d'accroissement tend vers $+\infty$ qd)
$y_0 \underset{>}{\to} 0$ ou $y_0 \underset{<}{\to} 0$



si n est pair, ne prendre que le quart du plan : $[0,+\infty[\times [0,+\infty[$

Si n est pair ≥ 2 : f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et strictement croissante sur $[0,+\infty[$: f_n possède une réciproque
de $f_n : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ $\quad f_n^{-1} : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$

Les calculs sont les mêmes : $\quad (f_n')(x_0) = n \dfrac{f_n(x_0)}{x_0}$

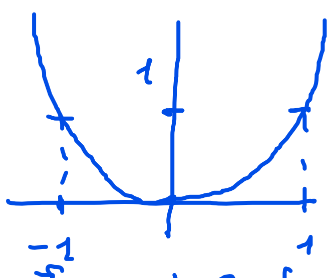
$$(f_n^{-1})'(y_0) = \frac{1}{n} \frac{f_n^{-1}(y_0)}{y_0}$$ non dérivable en 0

Si $n<0$: f_n est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$
C^∞ : mêmes calculs :

N.B : Dériver revient à diviser par y_0 (ou x_0)

• On définit les fonctions puissance : $x \mapsto x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{Q}$

N.B. Si n est pair : $x \to x^2$:
n'est pas injective.
$\Rightarrow$ pas bijective



en restreignant f_2 à $]-\infty,0] \to [0,+\infty[$: bijective.

On a défini $\sqrt{x}$, comme étant le nombre $\underline{\underline{\geq 0}}$ t.q $(\sqrt{x})^2 = x = P_2(\sqrt{x}) = x$.

on a décidé de prendre la réciproque de P_2 sur $[0,+\infty[$

- Les fonctions puissance : $\alpha \in \mathbb{Q}$, $x \longmapsto x^\alpha$ $\boxed{x>0}$

$\alpha \in \mathbb{Q}$, donc $\alpha = \frac{p}{q}$ $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $(p,q)=1$ (premiers entre eux)

on pose $x^\alpha = \sqrt[q]{x^p} = P_q^{-1} \circ P_p(x)$, $x \in]0,+\infty[$

P_q^{-1} est bien défini car $x^p > 0$

__Thm:__ Alors : $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^*$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha . x^\beta \qquad x \in]0,+\infty[$$
$$(xy)^\alpha = x^\alpha . y^\alpha \qquad y \in]0,+\infty[$$
$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha.\beta}$$

et $P_\alpha : x \to x^\alpha$ est C^∞, strictement monotone

$\alpha \neq 0$ (croissante si $\alpha > 0$, décroissante $\alpha < 0$)

$$P'_\alpha(x) = \alpha\, x^{\alpha-1} = \alpha \frac{P_\alpha(x)}{x} \qquad (\hat{m} \text{ calcul})$$

P_α est bijective de $]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$

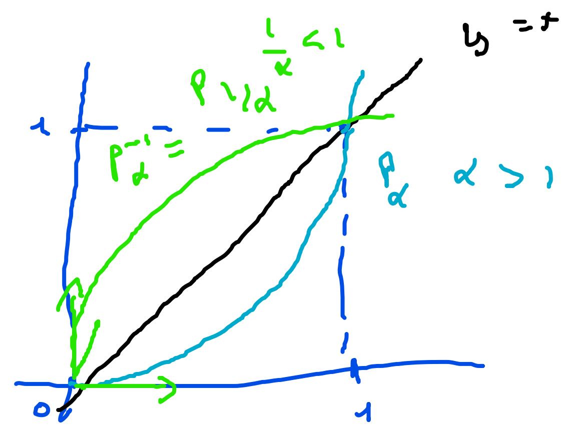
et $\boxed{P_\alpha^{-1} = P_{\frac{1}{\alpha}}}$

Si $\underline{\alpha < 0}$ $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} P_\alpha(x) = +\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} P_\alpha(x) = 0$

Si $\underline{\alpha > 0}$ $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} P_\alpha(x) = 0$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} P_\alpha(x) = +\infty$



Dérivée : $\boxed{f_\alpha'(x) = \alpha \frac{f_\alpha(x)}{x} \iff (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$

$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[}$

1-5 : Fonction logarithme

Def : une fonction définie comme primitive de $\frac{1}{x}$ et nulle en $x = 1$, sur $\forall x \in]0, +\infty[$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$

Th Alors :
- $\ln$ existe et est unique
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\quad \forall x, y \in]0, +\infty[$
- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$ $\quad \forall x \in]0, +\infty[\ \alpha \in \mathbb{Q}$
- $\ln(x) \nearrow$, $\mathcal{C}^\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

  $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$(\ln(2^N) = N \ln 2 \to +\infty)$

Donc $\ln$ est bijective donc possède une réciproque :

$x \mapsto \exp x$. $\boxed{1-02}$

($x \mapsto \ln(xy)$: on dérive p.r à x : $\frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}$ a la m̂ dérivée que $\ln$

$\Rightarrow \ln(xy) - \ln x = cte \quad \forall x \in]0, +\infty[$

si $x = 1$ on obtient $cte = \ln y$

d'où $\ln(xy) = \ln x + \ln y$)

Important : Récapitulatif des propriétés des fonctions usuelles.

$\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$: $\mathcal{C}^\infty$ et strictement croissante $\Rightarrow$ admet une bijection réciproque $\left(\ln' x = \frac{1}{x} > 0 \ \forall x > 0 \right)$ est la fonction exp :

$\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ aussi strictement croissante.

$$]0,+\infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \qquad \forall x \in]0,+\infty[\quad \exp(\ln x) = x$$
$$]0,+\infty[\xleftarrow[\exp]{} \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp x) = x$$

à savoir

$\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$

$\ln(1) = 0 \qquad \exp 0 = 1$

$(\exp x)' = \dfrac{1}{\ln'(\exp x)} = \dfrac{1}{\frac{1}{\exp x}} = \exp x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ Important

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}}$$

à savoir

$$\boxed{\ln(X \cdot Y) = \ln X + \ln Y \quad (X, Y > 0)}$$

Cela vient du fait que

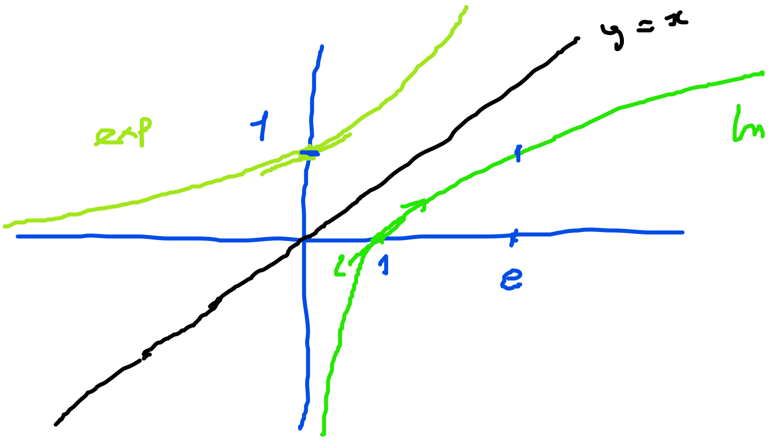
$\ln(\exp(x+y)) = x+y$

$\ln(\exp x \cdot \exp y) = \ln(\exp x) + \ln(\exp y) = x + y$

$\Rightarrow \ln(\exp(x+y)) = \ln(\exp x \cdot \exp y)$: or ln est injective

donc $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$

graphe:



à connaître

Propriété : $\exp \alpha \cdot x = (\exp x)^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{Q} \qquad \left(\ln X^\alpha = \alpha \ln X \right)$ $X > 0$

on note $e = \exp 1$

donc $e^\alpha = \exp \alpha = (e)^\alpha$: le nombre e à la puissance rationnelle α $(e > 0)$

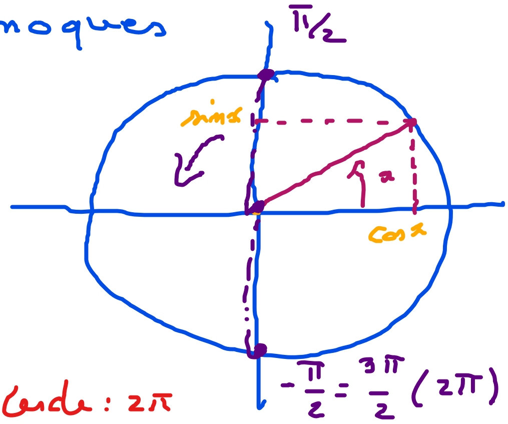
définition

d'où notation : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp x = e^x$

donc $\boxed{\forall a > 0 \quad a^x = e^{x \ln a}}$ définition pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$

(propriété vraie pour $\mathbb{Q}$, qu'on étend comme définition à tous les nombres réels x)

1-6 : Fonctions trigonométriques réciproques



1-6-1 : tan :

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\tan(x+\pi) = \tan x$ π-périodique

(donc tan n'est pas injective sur $\mathbb{R}$)

$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$

Cercle : 2π

i.e. tan est défini $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$\sin(x+2\pi) = \sin x$

$\cos(x+2\pi) = \cos x$

sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tan est bien définie et est dérivable :

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x > 0 \quad \boxed{\forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[}$$

tan est strictement croissante donc bijective

de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow]\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} \tan x,\ \lim\limits_{x \underset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \tan x[=]-\infty, +\infty[$

donc tan possède une bijection réciproque : notée arctan

$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: strictement croissante

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\tan(\underbrace{\arctan x}_{\in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}) = x \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\boxed{\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[}$

Remarque : $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ $\tan(\frac{\pi}{4}+\pi) = \tan\frac{5\pi}{4} = 1$

$\arctan(\tan\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ $\arctan(\tan\frac{5\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4} \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ or $\tan\frac{5\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

ainsi $\arctan(\tan\theta) = \theta \iff \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

et $= \theta_0$ si $\theta \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ mais $\tan\theta_0 = \tan\theta$

Résumé : $\arctan x$ est l'angle unique $\in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tq
$x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$

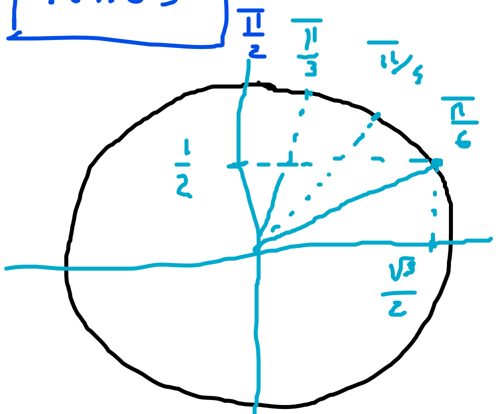
graphe cf poly $\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

Dérivée d'arctan : $\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}}$ à savoir $\forall x \in \mathbb{R}$

11h03

$$\begin{cases} \tan\frac{\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{cases}$$ cf poly !



1-6-2 Fonction arcsin :

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sin est strictement croissante

$(\sin x)' = \cos x$: $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $\cos x = 0 \iff x = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$

i.e. sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ seules deux valeurs annulent $(\sin x)'$

$\Rightarrow x \to \sin x$ est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

donc possède une bijection réciproque notée arcsin :

$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \arcsin(\sin x) = x & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin(\arcsin x) = x & \forall x \in [-1, 1] \end{array}}$$

$\arcsin x$ est l'unique angle $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tq $\sin(\arcsin x) = x$

arcsin est croissante et dérivable sur $]-1, 1[$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \quad \text{si } \cos(\arcsin x) \neq 0$$

donc $\arcsin x$ doit être $\neq -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$ i.e. $x \neq -1$ ou 1.

$\theta = \arcsin x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos\theta > 0$

or $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow |\cos\theta| = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

or $\cos\theta > 0 \Rightarrow$ on a $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$$\Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

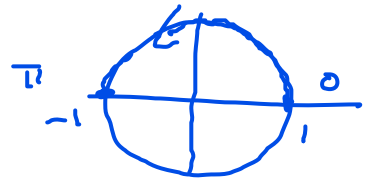
donc $\boxed{\forall x \in]-1,1[\quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ ← savoir

On a toujours $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: le graphe de arcsin a des tangentes verticales en $x = -1$ et $x = 1$

graphe : cf poly.

1-6-3 : même schéma d'étude pour cos :

$(\cos x)' = -\sin x$: $\forall x \in [0,\pi]$ cos est strictement décroissant : $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ admet $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ la bijection réciproque



$$\cos(\arccos(x)) = x \quad \forall x \in [-1,1]$$
$$\arccos(\cos(x)) = x \quad \forall x \in [0,\pi]$$

arccos x est l'unique angle $\in [0,\pi]$ t.q $\cos(\arccos x) = x$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)}$$

$X \in]0,\pi[$ $\quad \sin X > 0$ donc $\sin X = \sqrt{1-\cos^2 X}$

or si $x \in]-1,1[$ alors $\arccos x \in]0,\pi[$ donc

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\boxed{(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

NB. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \forall x \in]-1,1[$

$\Rightarrow \arccos x + \arcsin x = \text{cte} = \frac{\pi}{2} = \arccos 0.$ $\quad \forall x \in]-1,1[$

A connaître : ces fonctions usuelles :

Chapitre 2 : Intégration

2-1 Primitives

Def : $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle, f possède une primitive F ssi $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

Ainsi :

	$x \to \frac{1}{1+x^2}$	possède	$\arctan x$	comme primitive	
	$x \to e^x$	"	e^x	"	"
	$x \to \frac{1}{x}$	"	$\ln x$	"	$x > 0$
	$x \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	"	$\arcsin x$	"	$x \in]-1,1[$
	$x \to \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	"	$\arccos x$	" "	$x \in]-1,1[$
$\alpha \in \mathbb{Q}$	$x \to x^\alpha$	"	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	"	$x > 0$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$: $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{(\alpha+1)x^\alpha}{\alpha+1} = x^\alpha$ $\quad \alpha \in \mathbb{Q}$

Remarque : • Si F est une primitive de f $\Rightarrow$ $F + \text{cte}$ est aussi une primitive, car dériver une cte donne 0.

• Si F et G sont deux primitives de f

$\Rightarrow F - G = \text{cte}$

Ex : toutes les primitives de exp : sont $x \to e^x + k$, $k \in \mathbb{R}$

• Si f possède une primitive, F, unique telle qu'en

un point $c \in I$, $F(c) = k_0$ avec k_0 fixé $\in \mathbb{R}$
(la constante est alors fixée)

Ex. la primitive de exp qui en 0 vaut 1 est :

$$x \mapsto e^x + k \quad \text{où} \quad e^0 + k = 1 \iff k = 0$$

donc exp est l'unique primitive de exp qui vaut 1 en 0.

En pratique : Important

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, shift left, "\text{dérivée de } \partial"] & f = (F)' \arrow[l, shift left, "\text{primitive } \int"] \end{tikzcd}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{tikzcd} \exp \arrow[r, bend left, "\partial"] & \exp \arrow[l, bend left, "\text{primitive}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \ln x \arrow[r, bend left, "\text{dérivée}"] & \frac{1}{x} \arrow[l, bend left, "\text{primitive}"] \end{tikzcd} \quad x > 0$$

$$\begin{tikzcd} \cos x \arrow[r, bend left, "\partial"] & -\sin x \arrow[l, bend left, "\text{primitive}"] \end{tikzcd} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

. Technique de calcul comme "réciproque" de calcul de dérivée : Intégration par parties.

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I ($\forall x \in I$)

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)' = u'(x)\, v(x) + u(x) \cdot v'(x) = u'v + uv'$$

alors donc une primitive de $\big(u(x) \cdot v(x)\big)'$ est $u(x) \cdot v(x)$

donc $u(x) \cdot v(x)$ = une primitive de $\big(u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)\big)$

et on a la propriété suivante :

une primitive de $f + g$ = une primitive de f
+ une primitive de g

Donc $u(x)\cdot v(x)$ = une primitive de $u'(x)\,v(x)$
+ une primitive de $u(x)\cdot v'(x)$

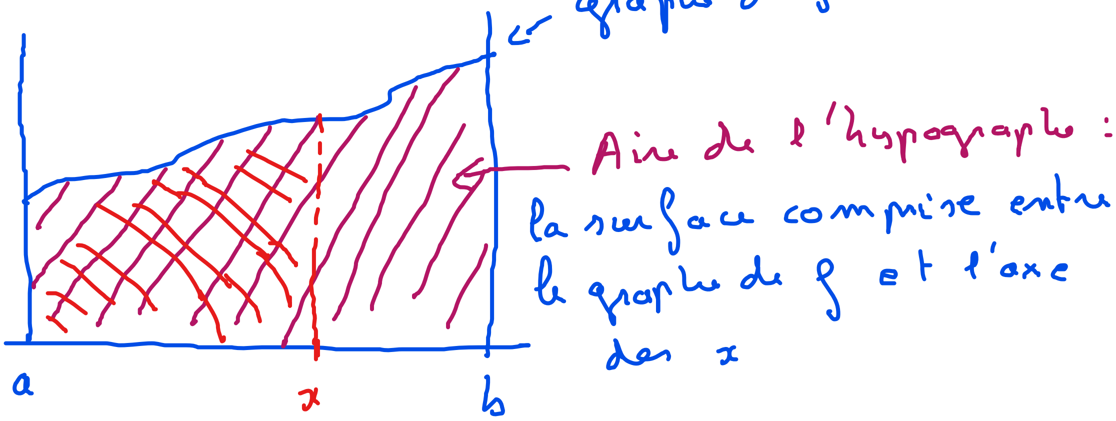
$$\Rightarrow \underbrace{\int u(x)\,v'(x)\,dx}_{\text{= primitive de } u(x)\,v'(x) \text{ qu'on cherche à calculer}} = u(x)\,v(x) - \int \underbrace{u'(x)\,v(x)}_{\text{primitive de } u'(x)\cdot v(x) \text{ qu'on connait}}\,dx$$

08/02

Bonjour à tous !

Rapport entre primitive et calcul d'Aire.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue



Théorème : 2.4 Si f est continue sur $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$
alors $\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$ est une primitive de f et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

et si G est une primitive de f alors

Aire de l'hypographe $= \int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$

Notation : on note $\int f(t)\,dt$ une primitive de f

en référence : $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$ (G = primitive)

2.5.1 : Inégalité des A.F

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$: f' est continue sur $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\, m, M \in \mathbb{R}$ t.q $\quad m \le f'(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$

or $\displaystyle\int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{t décrit } [a,b]}}{f'(t)}\,dt$ (dérivée de f à droite de a à gauche de b)

$$= \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du \quad \text{notation}$$

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

Or on a 3 propriétés très importantes de l'intégrale

1°] Relation de Chasles :

$\forall\, a, b, c \in I$, f continue sur I

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

2°] Linéarité de l'intégrale :

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f, g$ continues sur I, $\quad a, b \in I$

$$\int_a^b \big(\lambda.f(t) + g(t)\big)\,dt = \lambda.\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

3°] positivité de l'intégrale :

Soit f, g continues sur I, $\quad a, b \in I$

si $\quad f(t) \le g(t) \quad \forall t \in I$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b g(t)\,dt$$

Retour sur l'inégalité des A.F :

$m \le f'(t) \le M \quad \forall t \in [a,b]$ donc par positivité de l'intégrale :

$$\int_a^b m\,dt \leq \int_a^b f'(t)\,dt \leq \int_a^b M\,dt$$

or $\int m\,dt = m\cdot t + cte$ donc $\int_a^b m\,dt = m(b-a)$

or $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$ $\Rightarrow$ $\boxed{m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)}$

2.6 : Intégration par parties (I.P.P)

Thm : $\int_a^b \underline{u(t)v'(t)\,dt} = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b \underline{u'(t)v(t)\,dt}$

avec u', v' continues sur $[a,b]$

+ simple à calculer

Notation : $G(t)\Big]_a^b \overset{def}{=} G(b) - G(a)$

Exemple : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot \cos t\,dt$

Qui joue le rôle de u ? qui joue le rôle de v ?

$u(t) = t$ $\qquad v(t) = \sin t$

$u'(t) = 1$ $\qquad v'(t) = \cos t$

Appliquons la formule : $I = u(t)v(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\sin t\,dt}$

or $\underline{\int \sin t\,dt =} - \cos t + cte$

$I = u(\frac{\pi}{2})v(\frac{\pi}{2}) - u(0)v(0) - (-\cos t\Big]_0^{\pi/2}$

$= \frac{\pi}{2} - 0 - (0 + 1) = \frac{\pi}{2} - 1$.

$-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= (-\cos\frac{\pi}{2}) - (-\cos 0)$

Même exemple : $I = \int_0^{\pi/2} t \cos t\,dt$

$u(t) = \cos t$ $\qquad v(t) = \frac{1}{2}t^2$

$u'(t) = -\sin t$ $\qquad v'(t) = t$

$I = \cos t \times \frac{1}{2}t^2\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} -\sin t\cdot\frac{1}{2}t^2\,dt}_{\text{coincé !}}$

+ difficile

Si $u = \frac{1}{2}t^2$ $\quad v = \cos t$

$u' = t$ $\quad v' = -\sin t$

$$\int_0^{\pi/2} -\sin t \, \frac{1}{2}t^2 dt = \frac{1}{2}t^2 \cos t \Big]_0^{\pi/2} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} t \cos t \, dt}_{\text{on retrouve } I}$$

Exemple typique :

$I = \int_a^b t^2 e^t dt$: idée repose sur le fait $\int e^t dt = e^t$

$\Rightarrow$ on dérive $t \mapsto t^2$

$u = t^2$ $\quad v = e^t$

$u' = 2t$ $\quad v' = e^t$

$$\underline{I} = t^2 e^t \Big]_a^b - \int_a^b 2t e^t dt = t^2 e^t \Big]_a^b - 2\int_a^b t e^t dt$$

On recommence avec $\int_a^b t e^t dt$

$u = t$ $\quad v = e^t$

$u' = 1$ $\quad v' = e^t$

$$\int_a^b t e^t dt = t e^t \Big]_a^b - \int_a^b 1 \cdot e^t dt$$

$$= t e^t \Big]_a^b - e^t \Big]_a^b \quad \square$$

Même technique pour toute intégrale du genre :

$\int_a^b P(t) e^t dt$ où $P(t)$ = fonction polynomiale

calculs longs pour $\int t^{17} e^t$: 17 I.P.P

<u>Autre idée</u> : Si F une primitive de f alors $F' = f$

cela permet de vérifier les calculs

et parfois de deviner.

<u>Exemple</u> important (à savoir refaire) .

$$\int_1^x dt = t\Big]_1^x$$

$\int_1^x \ln t \, dt$: I.P.P $\quad \left((\ln t)' = \frac{1}{t} \quad t > 0 \right)$

$(\ln|t|)' = \frac{1}{t} \quad t < 0$

$u = \ln t$ $\quad v = t$

$u' = \frac{1}{t}$ $\quad v' = 1$

$$\int_1^x \ln t \, dt = t \cdot \ln t \Big]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \cdot t \, dt$$

$$= x \ln x - 0 - \int_1^x 1 \, dt = x \ln x - x + 1$$

$\int_1^x \ln t\,dt$ = la primitive de $\ln x$ qui s'annule en $x = 1$

$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + cte$ $\qquad (x\ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

Reprend $\boxed{11h10}$

2.7 : Changement de variable dans l'intégrale.

Thm 2.12 : Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$

$\varphi : J \to I$ fonction $\mathcal{C}^1$

$f : I \to \mathbb{R}$ fonction $\mathcal{C}^0$ (continue)

$a, b \in J$ alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$$

N.B. $\varphi(a), \varphi(b) \in I$, φ' est continue, $f\circ\varphi$ aussi $\Rightarrow$ le produit aussi sur $[a, b]$ $\Rightarrow$ tout est bien défini

Dem : f est continue sur I $\Rightarrow$ possède une primitive F sur I, $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

posons $G = F\circ\varphi$ $\quad G$ est dérivable sur J : $\varphi : J \to I$, $F : I \to \mathbb{R}$

$F\circ\varphi : J \to \mathbb{R}$

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \quad \forall t \in J$$

$$G'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

donc $\quad G(b) - G(a) = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

Appliquer la formule : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\underbrace{dt} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\underbrace{du}$

pour mémoriser : on pose $u = \varphi(t)$

et remplacer $\underline{du} = \varphi'(t)\,\underline{dt}$ et $f(u) = f(\varphi(t))$

remplacer les bornes.

NB vous utiliser $\frac{du}{dt} = u'(t) = \varphi'(t)$ notation

Exemple : $I = \int_1^3 \frac{(\ln t)^7}{t} dt$: $u = \varphi(t) = \ln t$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$

$du = \varphi'(t)\, dt = \frac{1}{t} \cdot dt$

$I = \int_{\varphi(1)}^{\varphi(3)} (u)^7 \cdot du = \int_0^{\ln 3} u^7 du = \left.\frac{u^8}{8}\right]_0^{\ln 3} = \frac{(\ln 3)^8}{8}$

Reprendre : $\int_1^3 \underbrace{(\ln t)^7}_{= u} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{t} dt}}_{= du}$

on pose $u = \ln t = \varphi(t)$

donc $du = (\ln t)' \cdot dt = \varphi'(t) dt$

$du = \frac{1}{t} \cdot dt$

$= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(3)} u^7 du$

Autre exemple : $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\pi/4} \tan t \, dt$

$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$

et $(\cos t)' = -\sin t$

posons $u = \cos t = \varphi(t)$

$\boxed{du = \varphi'(t)\, dt = -\sin t \cdot dt}$

$I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\frac{1}{\cos t}}_{\frac{1}{u}} \cdot -1 \cdot \underbrace{-\sin t\, dt}_{= du} = \int_{\varphi(-\frac{\pi}{6})}^{\varphi(\frac{\pi}{4})} \frac{1}{u} \cdot -1 \cdot du$

d'accord ?

$I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{u} du = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u}$ (permuter les bornes : à expliquer)

$= \left.\ln u\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\sqrt{3} - \ln 2 - \ln\sqrt{2} + \ln 2$

$= \ln\sqrt{3} - \ln\sqrt{2} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$

$= \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

($\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$; $\ln a^\alpha = \alpha \ln a$)

4ème propriété de l'intégrale :

$$-\int_a^b f(t)\,dt = \int_b^a f(t)\,dt$$: si F est une primitive de f

$$-\int_a^b f(t)\,dt = -\left(F(b)-F(a)\right) = F(a)-F(b) = \int_b^a f(t)\,dt$$

Autre exemple : $\displaystyle\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx$: on cherche une primitive de $\dfrac{4x^3}{1+x^4}$.

On remarque que $(1+x^4)' = 4x^3$.

on pose $u = 1+x^4$ $\quad du = 4x^3 . dx$

$$\Rightarrow \int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + cte$$

$$= \ln|1+x^4| + cte = \text{les primitives}$$

de $\dfrac{4x^3}{1+x^4}$: cô $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 1+x^4 > 0$ $\quad \ln|1+x^4| = \ln(1+x^4)$

Exemple : $\displaystyle\int \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx$ où $\sin x \geq 0$.

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad u = \sin x$

$du = \cos x\,dx$

$$\int \underbrace{\sqrt{\sin x}}_{\sqrt{u}}\ \underbrace{\cos x\,dx}_{du} = \int \underbrace{\sqrt{u}}_{u^{1/2}}\,du = \frac{2}{3}u^{3/2} + cte = \frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} + cte$$

$\sin x \geq 0$

$\Rightarrow$ Les primitives de $\sqrt{\sin x}\,\cos x$ sont $\dfrac{2}{3}(\sin x)^{3/2} + cte$

Autre type d'exemple

$$I = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$: $\boxed{\text{posons } x = \cos t}$

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\arcsin x)'$; $\quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$\Rightarrow \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t|$

$dx = -\sin t\,dt$

i.e. on pose $x = \varphi(t)$ donc $dx = \varphi'(t)\,dt$

$$\boxed{\int_{0=\varphi(a)}^{1=\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} 0=\varphi(a) \\ 1=\varphi(b) \end{array}}$$

$dx = \varphi'(t)\,dt$

- $x = \varphi(t)$
- φ est C^1 sur $[a,b]$

pb trouver a et b : $0 = \cos a$ $\quad a = \frac{\pi}{2}$

$1 = \cos b$ $\quad b = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \cos t \\ dx = -\sin t\,dt \end{array}}$$

$\varphi(t) = \cos t$ $\quad \varphi$ C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\cos t)^2 \cdot (-\sin t)\,dt}{\sqrt{1-\cos^2 t}}$$

: à suivre

bonnes vacances

15/02

Bonjour à tous !

$\sqrt{1-\cos^2 t}$: $\quad \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \iff \sin^2 t = 1-\cos^2 t$

$\iff |\sin t| = \sqrt{1-\cos^2 t}$

or si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\quad \sin t \geq 0$ donc $|\sin t| = \sin t$

donc $\sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t$

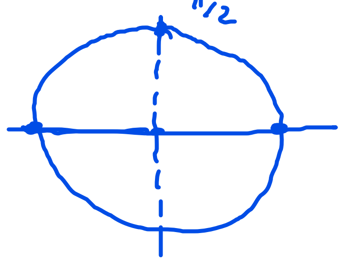
$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^2 t \cdot (-1) \cdot \sin t\,dt}{\sin t} = -1 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$$

linéarisation de $\cos^2 t$ (ou pour toute puissance de cos, et de sin)

$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 \implies \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2t}{2}\,dt = \left[\frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$(\sin 2t)' = 2\cos 2t$



$I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(0-0) = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ ok ?

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

: $(\tan t)' = 1 + \tan^2 t$ $\qquad x = \varphi(t) = \tan t$

$dx = (1+\tan^2 t)\,dt = (1+x^2)\,dt$

$$\boxed{\frac{dx}{1+x^2} = dt} \qquad \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{dt}{1+x^2}$$

$0 = \tan t$: $t = 0$

$1 = \tan \frac{\pi}{4}$: $t = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ or sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ φ est C^1 $\qquad$ donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\tan^2 t}$$ or $1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow \frac{1}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t$

donc $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \, dt$

$(\tan t)' = \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)' = 1+\tan^2 t$; $\tan t = x$

$\varphi(t) = \tan t$ $\quad x = \varphi(t)$ $\quad dx = \varphi'(t)\,dt$

$= (1+\tan^2 t)\,dt$

$dx = (1+x^2)\,dt$

$\frac{dx}{1+x^2} = dt$: ce sera justifié plus tard dans le cours sur les différentielles.

$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2t \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\, t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\, \sin 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

<u>Exemple</u> : $\int \operatorname{Arctan} x \, dx$: trouver une primitive d'Arctan :

• <u>Faire une I.P.P.</u> $\quad \int u v' = u \cdot v - \int u' v$

$u(x) = \operatorname{Arctan} x \qquad v(x) = x$

$u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad v'(x) = 1$

donc $\int \operatorname{Arctan} x = x \operatorname{Arctan} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$

• <u>Si on pose $w = 1+x^2$</u> $\quad dw = (1+x^2)'\,dx = 2x\,dx$

donc $\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}\ln|w|$

donc $\int \operatorname{Arctan} x = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + cte$

$= x \operatorname{Arctan} x - \ln\sqrt{1+x^2} + cte$

$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ $\quad \alpha$

$\alpha \ln(1+x^2) = \ln(1+x^2)^{\alpha}$

$-\ln\sqrt{1+x^2} = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

<u>2.7.3</u> : Exemple important :

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$: posons $t = \tan\frac{x}{2}$ $\qquad dt = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx$

$dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\,dx$

$\boxed{\frac{2dt}{1+t^2} = dx}$

écrire $\sin x$ en fonction de t, i.e en fonction de $\tan\frac{x}{2}$

$$\sin x = \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}\left(2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x/2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$: or $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ $x \to \tan\frac{x}{2}$ est $\mathcal{C}^1$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\cdot dx = \int_{\tan\frac{\pi}{6}} \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dt}{t} = \ln t\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = 0 - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3}$$

$\tan\frac{\pi}{4}$

$\gg t = \tan\frac{x}{2}$

Le changement de variable fonctionne pour tout calcul de primitive de fractions rationnelles en sin et cos :

une fraction rationnelle = $\frac{\text{f. Polynomiale}}{\text{f. Polynomiale}} = \frac{P}{Q}$

$\int \frac{\sin^2 x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$: écrire sin et cos en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$

écrire $\cos x$ en fonction de t :

$$\cos x = \cos 2\cdot\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}(1-t^2)}{\cos^2\frac{x}{2}(1+t^2)}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\text{donc } \frac{\sin^2 x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+2t}{1+t^2}} = \frac{\frac{4t^2}{1+t^2} - 1 + t^2}{1-t^2+2t}$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \Rightarrow \int \frac{\sin^2 x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int \frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{\frac{4t^2}{1+t^2} - 1 + t^2}{1-t^2+2t}\,dt$$

$\to$ $\boxed{11h24}$

Pour le calcul de primitive ou d'intégrale de fraction rationnelle $\frac{P(t)}{Q(t)}$ il faut faire une décomposition en éléments simples

voir poly : 2-8 : - faire une division de P par Q

$$P = E\cdot Q + R \qquad \deg R < \deg Q$$

$$\text{donc } \frac{P(t)}{Q(t)} = E(t) + \frac{R(t)}{Q(t)} :$$

$\underline{\text{Th}}$: Si $Q(t) = \prod_{i=1}^{e} (t - \alpha_i)$ alors $\frac{P(t)}{Q(t)} = E(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{t-\alpha_i}$

$\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\qquad A_i \in \mathbb{R}$

décomposition en éléments simples

Ainsi on sait calculer $\int \frac{P(t)}{\varphi(t)}\,dt$: on sait calculer une primitive de $E(t)$, et $\int \frac{A_i}{t-\alpha_i}\,dt = A_i \ln|t-\alpha_i| + cte$

Regarder dans le poly.

Exemples : $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \frac{1}{1-t^2}\,dt$ $\quad \frac{1}{1-t^2}$ est une fraction rationnelle $= P/\varphi$

$P(t) = -1$

et $\varphi(t) = 1+t^2 = (t-1)(t+1)$

$= \underline{(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)}$ $\quad \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$

$\deg P < \deg \varphi$ on a donc $\frac{1}{1-t^2} \Rightarrow \frac{-1}{t^2-1} = \underline{\frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{t+1}}$ (vraie $\forall t$)

calculer A_1 et A_2 : astuce $\times$ par $t-1$ l'égalité et faire $t=1$

$$\frac{-1 \times (t-1)}{t^2-1} = A_1 + (t-1)\cdot\frac{A_2}{t+1}$$

$$\frac{-1}{t+1} = A_1 + \underbrace{(t-1)\frac{A_2}{t+1}}_{t=1 \Rightarrow =0} \quad \text{vraie pour } t=1$$

$$\frac{-1}{1+1} = A_1 \qquad A_1 = -\frac{1}{2}$$

de m̂ pour A_2 : on $\times$ par $t+1$ et on fait $t=-1$:

$$\frac{(-1)\cdot(t+1)}{t^2-1} = (t+1)\cdot\frac{A_1}{t-1} + A_2 \iff \frac{(-1)}{t-1} = \underbrace{(t+1)\frac{A_1}{t-1}}_{0} + A_2$$

$t=-1$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1-t^2} = -\frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)}$$

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1|$$

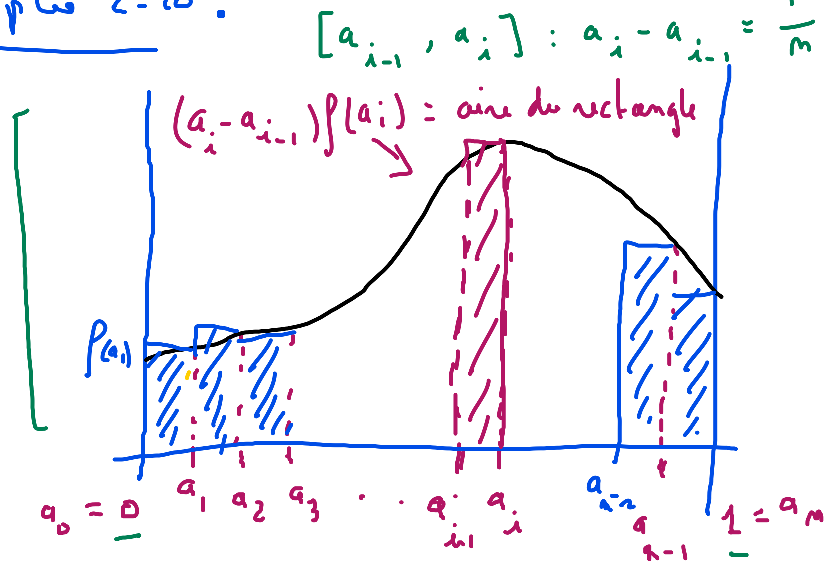
$$= \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|^{1/2} + cte.$$

$\deg\varphi \geq 5$: $\deg\varphi$ racines réelles $\neq$ ne sont pas faciles à calculer voire impossible.

N'oubliez pas $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$.

Intégrale de Riemann et sommes de Riemann :

- Regardez paragraphe 2-9 p38-40 : construction de l'intégrale
- Paragraphe 2-10 :



découper $[0, 1]$ en segments de longueur $\frac{1}{n}$

$n \in \mathbb{N}^*, n > 2$

$a_0 = 0$

$a_1 = a_0 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

$a_2 = a_1 + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$

⋮

$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$

$f(a_0)\cdot(a_1 - a_0)$ = l'aire de la surface du rectangle jaune : de base $[a_{i-1}, a_i]$ hauteur $f(a_i)$

de m̄ $f(a_1)(a_2 - a_1)$ etc...

On additionne toutes les aires de ces rectangles

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(a_i) = \text{s}\bar{\text{o}} \text{ de Riemann}$$

: pas loin de l'aire de l'hypographe

et qd $n \to +\infty$, si f est continue alors

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i)(a_i - a_{i-1}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$$

A suivre la prochaine fois

Bon courage.

La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(a_i)(a_i - a_{i-1})$ est une somme de Riemann

et $= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(a_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$ sur l'intervalle $[0, 1]$

De même sur l'intervalle $[a, b]$: écrire $a_0 = a$; $a_1 = a + \frac{b-a}{n}$

$a_i = a_{i-1} + \frac{b-a}{n} = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, ..., $a_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$

On dit que la suite $(a_0, a_1, \dots, a_n = b)$ est une subdivision (régulière) de l'intervalle $[a,b]$: la surface du rectangle

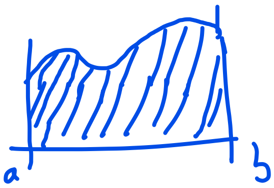
$[a_{i-1}, a_i] \times f(a_i)$ vaut $(a_i - a_{i-1}) f(a_i)$

$$= \frac{b-a}{n} f(a_i)$$

donc la somme de Riemann associée à cette subdivision est

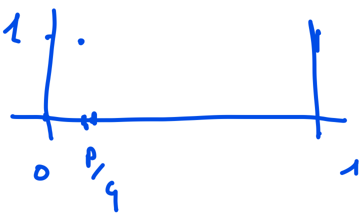
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$ et si f est continue

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a_i) = \int_a^b f(t)\,dt$$



Contre exemple : $1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$: non continue

$1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$ et vaut 0 sinon



impossible de calculer l'intégrale par limite qd $n \to +\infty$

Exemple d'application : Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$

jeu : deviner dans l'écriture de la somme, une somme de Riemann d'une fonction continue.

$$\frac{k}{k^2+n^2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{k}{\frac{k^2}{n^2}+1}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\right)$$

: reconnaître l'expression $(a_k - a_{k-1}) f(a_k)$ sur $[0,1]$ où $a_k = 0 + \frac{k}{n}$

$(a_k - a_{k-1}) = \frac{1}{n}$ $\quad \boxed{\frac{\frac{k}{n}}{(k/n)^2+1} = f(a_k)}$ où $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

f est continue sur $[0,1]$ de primitive :

Reconnaître : $\frac{k}{k^2+n^2} = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

donc $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} = \int_0^1 f(x)\,dx$$

reconnaître une somme de Riemann

Primitive de f : $\frac{x}{x^2+1}$: $\sim \frac{u'}{u}$ $\quad (x^2+1)' = 2x$ $\quad u(x) = x^2+1$

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}$$

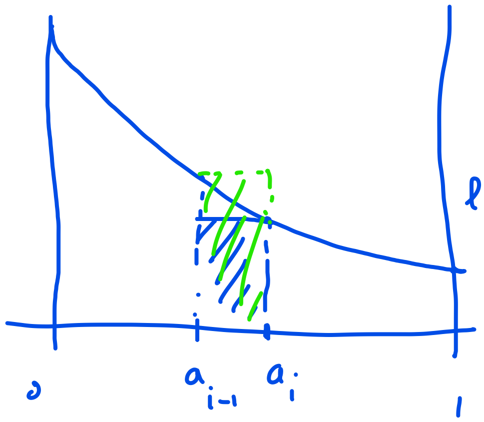
donc $\int f\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{u'}{u}\,du = \frac{1}{2} \ln|u| + cte$ $\quad x^2+1 > 0$

$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + cte$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2} = \int_0^1 f(x)\,dx = \left.\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}\ln 2 \quad (\ln 1 = 0)$

__Remarque__ : Si f est monotone : $a_i = \frac{i}{n} \quad i = 0, \dots n$



$(a_i - a_{i-1}) f(a_i)$

$(a_i - a_{i-1}) f(a_{i-1})$

l'aire de l'hypographe entre a_{i-1} et a_i est comprise entre ces 2 valeurs

et + généralement : $f(a_i) \le f(x) \le f(a_{i-1}) \quad \forall x \in [a_{i-1}, a_i]$

$$\underset{(\text{positivité de l'}\int)}{\Rightarrow} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(a_i)\,dx \le \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx \le \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(a_{i-1})\,dx$$

On somme de $i=1$ à n

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(a_i)\,dx \le \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(a_{i-1})\,dx$$

(par relation de Chasles)

$a_0 = a$, $a_n = b$ $\quad \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(a_i) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(a_{i-1})$

$a = 0$, $b = 1$

$a_i - a_{i-1} = \frac{1}{n}$: $\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_{i-1})$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a_i = \frac{i}{n}$ $\dots$ Pause : → __11h10__

Chapitre 3 : Théorèmes de Taylor

3-1 : Taylor Lagrange avec reste intégral à l'ordre n.

$I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$ et f une fonction C^{n+1}

$n \in \mathbb{N}$: f est dérivable $n+1$ fois en tout point de I et que la dérivée $(n+1)$-ième est continue.

Alors : $$f(b) = \underbrace{f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)}_{\text{polynôme de Taylor de degré} \leq n \text{ en } (b-a)}$$

$$+ \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}_{\text{le reste intégral : bien défini car } f^{(n+1)} \text{ est continue}}$$

i.e. si f est $C^{n+1} \Rightarrow f(b)$ s'écrit comme un polynôme de degré $\leq n$ en $(b-a)$ + un reste intégrale.

Si on prend $b = x$ et $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Démonstration :

$n = 0$: f est C^1 ; f' est continue : $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$

c'est la formule lorsque $n = 0$: $\displaystyle f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt$

le polynôme de Taylor est de degré $= 0$, c'est $f(a)$

et le reste est $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt$.

Démonstration par récurrence : on suppose f est C^{n+1} et que la formule est vraie à l'ordre $n-1$:

i.e. $$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)$$

il suffit juste de faire une I.P.P. du reste intégral :

$$\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(t)\,dt : \quad u = f^{(n)}(t) \qquad v = -\frac{(b-t)^{n-1+1}}{(n-1)!\cdot n} = -\frac{(b-t)^n}{n!}$$

$$u' = f^{(n+1)}(t) \qquad v' = \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

donc $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = u\cdot v\Big]_a^b - \int_a^b u'v$

$\displaystyle\int v'\cdot u$

$$= f^{(n)}(t)\cdot\left(-\frac{(b-t)^n}{n!}\right)\Bigg]_a^b - \int_a^b f^{(n+1)}(t)\cdot\left(-\frac{(b-t)^n}{n!}\right)dt$$

$$= 0 \,\cancel{-}\!+\, \underbrace{f^{(n)}(a)\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{\text{bien défini}}\,dt$$ d'où la formule.

on a ajouté ce terme : terme de degré n du polynôme de Taylor : on s'arrête ici car on ne peut dériver $f^{(n+1)}$

à l'ordre 1 : on part de

$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt$, où f est C^{n+1}.

on fait une I.P.P. de $\int_a^b f'(t)\,dt$: $u = f'(t)$, $\boxed{v = -(b-t)}$

$u' = f''(t)$, $v' = 1$

ainsi $$\int_a^b f'(t)\,dt = f'(t)\times(-(b-t))\Big]_a^b + \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt$$

$$= \underbrace{(b-a)f'(a)}_{\text{de degré}\leq 1 \text{ en } (b-a)} + \underbrace{\int_a^b (b-t)\, f''(t)\,dt}_{\text{Reste intégrale}}$$

On itère l'I.P.P. du reste intégrale jusqu'à dériver $n+1$ fois f.

Exemple : que devient la formule de Taylor, si la fonction f est une fonction polynomiale : de degré $\leq n$:

i.e. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

si $a_n \neq 0$ alors degré de $f = n$

Remarque : $(x^n)^{(n)} =$

$(x^n)^{(1)} = n x^{n-1}$

$(x^n)^{(2)} = n\cdot (n-1)\cdot x^{n-2}$

$k \leq n$ $\quad\boxed{(x^n)^{(k)} = n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k}}$

si $(x^n)^{(m)} = 0$ $\quad m > n$

$(x^n)^{(n)} = n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 1 \cdot x^{n-n}$

$(x^n)^{(n)} = n! \cdot 1$

Calculons les dérivées successives de f en 0 :

$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k x^k)' = (a_0)' + (a_1 x)' + (a_2 x^2)' + \cdots + (a_n x^n)'$

$= 0 + \underbrace{a_1} + \underbrace{2a_2 x + \cdots k a_k x^{k-1} + \cdots + n a_n x^{n-1}}_{\text{degré} \geq 1}$

donc $f'(0) = a_1$

$f''(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k x^k)^{(2)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x^k)^{(2)} = \underbrace{2a_2} + \underbrace{\cdots + a_k \cdot k \cdot k-1 \cdot x^{k-2} + \cdots + a_n n \cdot n-1\, x^{n-2}}_{n-2 \geq \text{degré} \geq 1}$

$f^{(2)}(0) = 2a_2$

$= 1.2\, a_2 + 3.2 . a_3 x + \cdots$

$f^{(3)}(0) = ? = 3.2. a_3 = 3! a_3$

d'une manière générale $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$: A suivre dans 2 semaines

Bon courage.

On applique la formule :

$(x^n)^{(k)} = 0$ si $k > n$

$= n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k}$ si $k < n$

$= k!\, 1$ si $k = n$: tout polynôme de degré ≥ 1 s'annule en $x = 0$ $\Rightarrow f^{(k)}(0) = k!\, a_k$

calculs importants pour études futures

que devient la formule de Taylor à l'ordre n ? entre x et 0

$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) +$

$+ \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$ or comme f est un polynôme de degré $\leq n$ $\Rightarrow f^{(n+1)}(t) = 0 \Rightarrow f =$ son polynôme de Taylor $\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ou $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$

Si on écrit la formule de Taylor de f entre $a = 3$ et $b = x$

on a $f(x) =$ un polynôme en $(x-3)$ de degré $\leq n$

le coeff devant $(x-3)^k$ est $\frac{f^{(k)}(3)}{k!}$

Remarque importante : par changement de variable, on peut écrire le reste intégral de manière différente. Avec les mêmes hypothèses que le thm : Reste $:= \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$ (f C^{n+1} sur I, $a, b \in I$)
I = intervalle

changement de variable affine : $t = a + s(b-a)$ ainsi $dt = (b-a)ds$

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}}_{\leftarrow \text{ facteur } (b-a)^{n+1}} \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+s(b-a))\,ds \qquad b-t = (b-a)(1-s)$$

Exemple d'application du Théorème : il s'agit d'étudier le signe du reste ainsi de comparer ($\leq$ ou $\geq$) $f(x)$ à son polynôme de Taylor en x

si $f(x) = \cos x$: $f'(x) = -\sin x$; $f''(x) = -\cos x$; $f^{(3)}(x) = +\sin x$

$f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$: f est C^∞ sur $\mathbb{R}$

($f^{(n)}(x)$: $n = 4p + r$ et $f^{(n)}(x) = f^{(r)}(x)$ $\quad r \in \{0, 1, 2, 3\}$)

Appliquons le thm Taylor à $f(x)$ entre x et 0, à l'ordre 3 :

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t)\,dt$$

$$= 1 + x \cdot 0 + \frac{x^2}{2}(-1) + \frac{x^3}{3!}\, 0 + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \cdot (\cos t)\,dt$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} (\cos t)\,dt$$

signe de $\cos t$:

si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\cos t \geq 0$

or $t \in [0, x]$ donc $(x - t) \geq 0$ donc

$(x-t)^3 \cos t \geq 0$

donc $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} (\cos t)\,dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale

(si $x < 0$ $\int_0^x = -\int_x^0 \dots$)

donc $\boxed{f(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]}$

NB : positivité de l'intégrale : si $a < b$, $f(t) \geq g(t)$ si $t \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b g(t)\,dt$

Attention : si $b < a$ $\quad \int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$ avec $b < a$
$= \int_b^a -f(t)\,dt$

Exemple dans le poly + exo de feuille de TD.

exp est C^{∞} et $(e^x)^{(k)} = e^x$ Alors le thm de Taylor à l'ordre n entre 0 et x, donne :

$$e^x = e^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot e^0 + \int^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$$

Si $x \geq 0$, $(x-t) \geq 0$ car $t \in [0, x]$ et $e^t \geq 0$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

(par positivité de l'intégrale) $(\forall n \in \mathbb{N})$

or exp est croissante $\Rightarrow \forall t \in [0, x]$ $e^t \leq e^x$

donc $\frac{(x-t)^n}{n!} e^t \leq \frac{(x-t)^n}{n!} e^x$

donc $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^x \, dt = e^x \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt$

or $t \to \frac{(x-t)^n}{n!}$ a une primitive $= -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$

ainsi $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

or $e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$

$$\boxed{e^x \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} . \rightarrow \boxed{11h12}$$

3.2 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Thm : f est C^{n+1} sur I (intervalle de $\mathbb{R}$), $a, b \in I$ si

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M \quad M \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

alors $\left| f(b) - \left(f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

Dem : Appliquer le Thm de Taylor lagrange à f entre a et b à l'ordre n puis trouver une majoration de $\left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt \right|$

i.e $\left| \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+s(b-a))\, ds \right|$

Il faut utiliser l'inégalité triangulaire :

si $a < b$ alors $\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$ (positivité de l'intégrale)

(en effet $-|f(t)| \le f(t) \le |f(t)|$)

Alors $\left| \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(a+s(b-a))\, ds \right| \le \frac{|b-a|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-s)^n |f^{(n+1)}(a+s(b-a))|\, ds$

or $|f^{(n+1)}(a+s(b-a))| \le M$ donc

$\le \frac{|b-a|^{n+1}}{n!} M \int_0^1 (1-s)^n ds$ or $\int_0^1 (1-s)^n ds = \left[-\frac{(1-s)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$

$= \frac{1}{n+1}$

$\le \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$.

polynôme de Taylor entre 0 et x à l'ordre 4

Exemple : on montre que $\left| \sin x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) \right| \le \frac{|x|^5}{120}$

par l'inégalité de Taylor-Lagrange

$|\cos t| \le 1$

prendre $M = 1$

Si $x = 0{,}1$, on a une valeur approchée de $\sin(0{,}1)$ à une erreur $\le \frac{10^{-5}}{120} < 10^{-6}$

cette valeur $= 0{,}1 - \frac{1}{6} \cdot 10^{-3}$.

(Faites le ! Si problème, on le voit la prochaine fois)

3.3 : Notations o et ~ : Important !

Définition : I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$

$x_0 \in I$ ou un bord de I (x_0 peut être $= \pm\infty$)

$f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x)) \iff$ il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$

(ou ε est définie sur un voisinage de x_0)

telle $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ et telle que $\boxed{f(x) = \varepsilon(x) \cdot g(x)}$

multiplication

si g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0

cela donne $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

exemple : $x_0 = 0$ $\quad x^3 = o(x^2)$ car $x^3 = x \cdot x^2$ et $x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$x_0 = +\infty$ $\quad x^2 = o(x^3)$ car $x^2 = \frac{1}{x} \cdot x^3$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$

si $a > 0$ et $x_0 = 0$, $x > 0$ $\quad \ln(x) = o(x^{-a})$

$$\ln(x) = \underbrace{x^a . \ln x}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \cdot x^{-a}$$

$a > 0$ $\quad x^a \underset{x\to 0}{=} o(\ln x)$ en effet $x^a = \frac{x^a}{\ln x} \cdot \ln x$

avec $\frac{x^a}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ $\quad \varepsilon(x) = \frac{x^a}{\ln x}$

propriétés : • si $f(x) = o(h(x))$ $\quad g(x) = o(h(x))$

$\Rightarrow \lambda f(x) + \mu g(x) = o(h(x))$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

• si $f_1(x) = o(h_1(x))$, $f_2(x) = o(h_2(x))$ $\Rightarrow f_1(x) \cdot f_2(x) = o(h_1(x) \cdot h_2(x))$

$\left(f_1(x) \cdot f_2(x) = \varepsilon_1(x) h_1(x) \cdot \varepsilon_2(x) h_2(x) \right)$ $\quad \varepsilon_1(x) \to 0 \quad \varepsilon_2(x) \to 0$

• "composition" ou transitivité

$f(x) = o(g(x))$ $\quad g(x) = o(h(x))$

alors $f(x) = o(h(x))$

A connaître absolument.

Autre notation voisine : $\sim$.

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in I$ ou est un bord de I (intervalle)

$f \underset{x\to x_0}{\sim} g \iff \exists$ une fonction $\eta : I \to \mathbb{R}$ (ou au voisinage de x_0)

telle que $\eta(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$.

i.e. si g ne s'annule pas au voisinage de x_0

$f \underset{x \to x_0}{\sim} g \iff \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1$

par exemple : $x^2 + x^5 \underset{x \to 0}{\sim} x^2 + x^{10}$ car $\dfrac{x^2 + x^5}{x^2 + x^{10}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$

Ainsi il faut faire attention car $\sim$ n'est pas stable par combinaison linéaire : si $f_1 \underset{x \to x_0}{\sim} g_1$, $f_2 \underset{x \to x_0}{\sim} g_2$ on a pas facilement $f_1 + f_2 \underset{x \to x_0}{\sim} g_1 + g_2$

Propriété : $\sim$ est une relation d'équivalence :

$$\begin{cases} f \sim g \iff g \sim f \\ f \sim f \\ f \sim g \text{ et } g \sim h \Rightarrow f \sim h \end{cases}$$

Attention aussi : si $f \sim g$ cela n'implique pas que $\varphi(f) \sim \varphi(g)$ φ fonction

ex : $x \underset{x \to +\infty}{\sim} x+1$ mais e^x n'est pas $\sim$ à e^{x+1}

en effet $\dfrac{e^{x+1}}{e^x} = e$ donc ne tend pas vers 1 qd $x \to +\infty$

Autre Théorème de Taylor : le théorème de Taylor Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (I un intervalle) et $\mathcal{C}^n$ sur I, soit $a \in I$

alors $\forall x \in I$, $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{\text{polynôme de Taylor en } (x-a) \text{ degré} \leq n} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{Reste = petit o}}$

la suite la semaine prochaine : Bon courage pour la reprise