Bonjour à tous !

Suite du Cours Analyse MDD 151 pour L1 MPSI
Bruno Vallet

3-4 : Formule de Taylor Young.

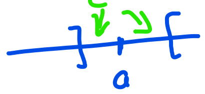
I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in I$

Thm : (3-5) Thm de Taylor-Young à l'ordre n en a.

soit $f : I \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^n$ sur I alors quand $x \to a$ (I ouvert)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underbrace{o\left((x-a)^n\right)}_{\text{reste : sens qd } x \to a, \text{ i.e } (x-a) \to 0.}$$

$\in I \Rightarrow I$ doit être ouvert



en $k=0$: $\dfrac{(x-a)^0}{0!} f^{(0)}(a) = f(a)$

(pour la dem voir le poly)

1°) 4 Exemples importants (à savoir par coeur)

$\sin, \cos, \exp, x \to \dfrac{1}{1-x}$: connaître les formules de Taylor-Young en 0.

Elles sont $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert contenant 0 :

pour $\sin, \cos, \exp$ c'est $\mathbb{R}$, pour $x \to \dfrac{1}{1-x}$: $]-\infty, 1[$

On applique la formule à tout ordre, $n \in \mathbb{N}$; car les dérivées successives de ces 4 fonctions sont faciles à calculer.

- $\sin$: $(\sin x)' = \cos x$
  $(\sin x)^{(2)} = -\sin x$
  $(\sin x)^{(3)} = -\cos x$
  $(\sin x)^{(4)} = +\sin x$
- $\cos$: $((\cos x))' = -\sin x$
  $(\cos x)^{(2)} = -\cos x$
  $(\cos x)^{(3)} = +\sin x$
  $(\cos x)^{(4)} = \cos x$

ainsi si $n = 4.k + r$ avec $0 \leq r < 4$

$(\sin x)^n = \cos x$ si $r = 1$
$= -\sin x$ si $r = 2$
$= -\cos x$ si $r = 3$
$= \sin x$ si $r = 0$

de même $(\cos x)^{(n)} = -\sin x$ si $r = 1$
$= -\cos x$ si $r = 2$
$= \sin x$ si $r = 3$
$= \cos x$ si $r = 0$

Ainsi la formule de Taylor Young à l'ordre n en 0 de :

$$\sin x = \sin 0 + x.(\cos 0) + \frac{x^2}{2!}(-\sin 0) + \frac{x^3}{3!}(-\cos 0) + \frac{x^4}{4!}(\sin 0) + \frac{x^5}{5!}(\cos 0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\left(\sin^{(n)}(0)\right) + o(x^n)$$

$(\sin 0) = 0$

si r est pair $\sin^{(r)}(0) = 0$
si r est impair : $\sin^{(r)}(0) = \pm 1$. où $n = 4.k + r$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}} + \cdots + \underbrace{(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\text{terme général}} + \cdots + o(x^n)$$

terme général : que des puissances impaires

de même pour cos : seuls les termes de degré pair apparaissent :

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \underbrace{(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\text{terme général de la somme}} + \cdots + o(x^n)$$

Pour exp : $(e^x)^{(n)} = e^x$ $n \in \mathbb{N}^*$ et $e^0 = 1$: tous les coefficients de la formule sont égaux à 1 :

$$\underbrace{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}}_{\text{polynôme de Taylor}} + o(x^n) \quad \left(\frac{o(x^n)}{x^n} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \right)$$

$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$: $f'(x) = -1 \times (-1) \times (1-x)^{-2} = (1-x)^{-2}$

$f^{(2)}(x) = -2 \times (-1) \times (1-x)^{-3} = 2 \times 1 \times (1-x)^{-3}$

$f^{(3)}(x) = 3!\,(1-x)^{-4}$; $f^{(4)}(x) = 4!\,(1-x)^{-5}$; $f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-n-1}$

en $x = 0$ $f^{(n)}(0) = n!$: la formule donne :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \times 2! + \frac{x^3}{3!} \times 3! + \cdots + \frac{x^k}{k!} \times k! + \cdots + \frac{x^n}{n!} \times n! + o(x^n)$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots + x^n + o(x^n)}$$

$o(x^n) = \,?$ (reste de la somme géométrique $- \frac{1}{1-x}$)

on peut l'écrire explicitement.

Une utilisation : calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$:

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$: $x\cos x = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} + o(x^5)$ car $x \cdot o(x^4) = o(x^5)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$

$$\Rightarrow \quad x\cos x - \sin x = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + o(x^5)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) x^3 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) x^5 + o(x^5)$$

$$\underbrace{\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{5!}x^2 + o(x^2)}\ \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

la notation $o(f(x))$ pour désigner une fonction qui s'écrit : $\varepsilon(x)\cdot f(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$: petit o de $f(x)$

la notation $\circ$: " rond " La composition de 2 fonctions :
$(f\circ g)(x) = f(g(x))$

Pour bien comprendre la notation o il faut de la pratique :

Pourquoi $o(x^5) - o(x^5) = o(x^5)$: la définition

$o(x^5) = \varepsilon(x)\cdot x^5$: avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

ainsi $x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} + \underline{\varepsilon(x)\, x^5}$

or $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underline{\varepsilon_1(x)\, x^5}$ est $= o(x^5)$ mais différent de $\varepsilon(x)\, x^5$

$$\Rightarrow \varepsilon(x) x^5 - \varepsilon_1(x) x^5 = \underbrace{(\varepsilon(x) - \varepsilon_1(x))}_{\to 0 \text{ qd } x\to 0} x^5 = o(x^5)$$

$\boxed{o(x^n) \text{ n'est pas une fonction particulière.}}$

Autre exemple : $f(x) = x + x^3 - x^6 = x + x^3 + \underbrace{o(x^3)}_{= -x^6}$: car $\frac{x^6}{x^3} \to 0$

$\varphi(x) = -x + x^3 - x^5 = -x + x^3 + \underbrace{o(x^3)}_{= -x^5}$ car $\frac{x^5}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$(f+\varphi)(x) = 2x^3 + \underbrace{o(x^3)}_{= -x^6 - x^5}$

2°) Autre exemple important : minimum et maximum local.

Si f C^2 sur I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $\underline{f'(a) = 0}$ et $f^{(2)}(a) > 0 \Rightarrow a$ est un minimum local pour f.

Dem : Formule de Taylor Young :

$$f(x) = f(a) + (x-a)\times 0 + \frac{(x-a)^2}{2} f^{(2)}(a) + o((x-a)^2)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2} f^{(2)}(a) + o(1) \quad \text{i.e. } o(1) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

donc qd $x \to a$ $\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} \to \frac{1}{2} f^{(2)}(a) > 0$

donc qd x est proche de a, $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} > 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$

$\Rightarrow$ a = minimum local

Reprend à 11h20

Chapitre : Les développements limités en 0

Déf : (5.1)

Soit f définie sur I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$

f possède un développement limité en 0 à l'ordre n si

$\exists\ a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ t.q

$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{\text{polynôme de deg} \leq n} + o(x^n)$: ce polynôme est le développement limité à l'ordre n en 0 de f.

On a vu que sin, cos, exp, $x \to \frac{1}{1-x}$ possèdent un développement limité en 0 à tout ordre.

ex : $f(x) = x + x^2 + x^3 \ln x$ $\qquad x^3 \ln x = x^2 \times x \ln x$ et $x \ln x \underset{x \to 0}{\to} 0$

$\Rightarrow x^3 \ln x = o(x^2)$

$f(x) = x + x^2 + o(x^2)$: $x + x^2$ est le dev^t limité de f à l'ordre 2 en 0.

Remarque : Si f est $\mathcal{C}^n$ sur I, $0 \in I$ alors par la th— de Taylor Young f possède un dev^t limité (D.L.) à l'ordre n en 0 : ce DL (développement limité) est le polynôme de Taylor de f en 0.

Propriété : unicité du DL

Si f possède un DL en 0, alors ce DL est unique :

i.e. si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$

et $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$ alors $a_k = b_k \quad \forall k = 0 \dots n$

(voir la dem de le poly)

proposition : Si f est paire i.e. $f(-x) = f(x)$ et si f possède un DL en 0 à l'ordre n alors ce DL ne contient que des termes de puissance paire ($\cos x$)

si f est impaire i.e. $f(-x) = -f(x)$ et f possède un DL en 0 à l'ordre n alors ce DL ne contient que des termes de puissance impaire ($\sin x$)

(cf le poly)

<u>proposition</u> : Opérations sur les DL

(Remarque si f possède un DL à l'ordre n en 0 $\Rightarrow f$ possède un DL à un ordre $m < n$ en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \underbrace{x^{m+1}(\varphi(x)) + o(x^n)}_{= o(x^m)}$$
)

1°) Somme : soit f et g deux fonction possédant un DL d'ordre n en 0 :

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$
$$g(x) = \varphi(x) + o(x^n)$$

alors $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = P(x) + \varphi(x) + o(x^n)$

$\Rightarrow$ le DL de $f+g$ est $P + \varphi$

2°) Produit : f et g possèdent un DL d'ordre n en 0

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$
$$g(x) = \varphi(x) + o(x^n)$$

alors le produit $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$ possède un DL à l'ordre n : $f(x) \cdot g(x) = R(x) + o(x^n)$

$R(x)$ = polynôme $P(x) \cdot Q(x)$ dont on ne garde que les termes de degré $\leq n$

<u>ex</u> $f(x) = 1 + x^2 + o(x^4)$ $\qquad g(x) = x - x^3 + x^4 + o(x^4)$

$$f(x) \cdot g(x) = (1 + x^2 + o(x^4)) \cdot (x - x^3 + x^4 + o(x^4))$$

$\Rightarrow$ le DL de $f \cdot g$ est d'ordre 4, ne peut pas être d'ordre plus grand car $1 \cdot o(x^4)$ intervient dans le calcul du produit

et $x^2 \cdot x^3 = o(x^4)$; $x^2 \cdot x^4 = o(x^4)$; $x^2 \cdot o(x^4) = o(x^4)$, $x^3 \cdot o(x^4) = o(x^4)$

$$f(x) \cdot g(x) = x - x^3 + x^4 + x^2(x) + o(x^4) = x + x^4 + o(x^4)$$

3°) <u>Composition</u> : $f(x) = P(x) + o(x^n)$ DL en 0 à l'ordre n

$u(x) = \varphi(x) + o(x^n)$ $\varphi(0) = 0$, $\deg \varphi \leq n$

alors $(f \circ u)(x) = f(u(x)) = R(x) + o(x^n)$

R = polynôme de degré $\leq n$ dont les termes s'obtiennent en ne gardant que les termes de degré $\leq n$ de la composée $P(\varphi(x))$.

<u>exemple</u> : $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 5 : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$

$$= 1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) = u(x)$$

or $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^5 + o(x^5) = f(x)$

donc $\frac{1}{\cos x}$ = la composée $f\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) = f(1 - \cos x) = f(u(x))$

$$\boxed{\frac{1}{\cos x} = 1 + u(x) + (u(x))^2 + \cdots + (u(x))^5 + o(x^5)}$$

prendre termes de degré ≤ 5

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^3 + \cdots + o(x^5)}_{= o(x^5)}$$

de m̂ $(u(x))^4 = o(x^5)$; $(u(x))^5 = o(x^5)$

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4!}\right)}_{= \frac{5}{4!} = \frac{3!-1}{4!}} x^4 + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4!}x^4 + o(x^5)$$

A la prochaine fois !
dans 2 semaines le 12 avril.

or $\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}_{\text{polynôme de degré } \leq 5 \text{ = le DL}} + o(x^5)$ DL en 0 à l'ordre 5

donc $\sin x \times \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4!}x^4 + o(x^5)\right)$

$$= 1.x + 0x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + 0.x^4 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2.3!} + \frac{5}{4!}\right)x^5 + o(x^5)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\frac{1}{5!} - \frac{10}{5!} + \frac{25}{5!} = \frac{16}{5!}$$

donc $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

(Autre technique : faire une division euclidienne par puissances croissantes de polynômes)

Prop 4.1 : Intégration des DL.

Si I un intervalle de $\mathbb{R}$, ouvert, $0 \in I$ $f : I \to \mathbb{R}$ est continue possède un DL en 0 à l'ordre n $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Alors toute primitive de f, F, possède un DL en 0 à l'ordre $n+1$ qui est : $F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$

N.B: on intègre chaque monôme : $\int x^k = \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Exemples importants : à l'ordre 6

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + o(x^6)$$

$\int \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)$ donc le DL de $\ln(1+x)$ qd $x \to 0$, ou DL de $\ln y$ qd $y \to 1$

$$\ln(1+x) = \ln(1) + \int (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6)\,dx + o(x^7)$$
$$= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + o(x^7)$$

On obtient le DL à l'ordre 7 en 0 de $\ln(1+x)$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$: $\arctan x = \arctan 0 + \int (1 - x^2 + x^4 - x^6)\,dx + o(x^6)$

$$= 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$$

Prop : Dérivation des DL (plus délicat), il faut une hypothèse supplémentaire. Soit f $\mathcal{C}^1$ sur I, $0 \in I$, telle f' possède un DL à l'ordre $n-1$ en 0, alors f a un DL à l'ordre n en 0 :

$f(x) = P(x) + o(x^n)$ alors $f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$

⚠ $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \sin\frac{1}{x^2}$: f est $\mathcal{C}^1$, possède un DL ordre 3

$x^4 \sin\frac{1}{x^2} = x^3 \times x \sin\frac{1}{x^2}$ avec $x \sin\frac{1}{x^2} \to 0$

mais f' est continue mais n'est pas dérivable en 0 $\Rightarrow$ n'a pas de DL d'ordre ≥ 0.

$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \sin \frac{1}{x^2} - x^4 \times \frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2}$: $\lim_{x \to 0} f'(x) = 1 = f'(0)$

$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$ = lim du τ d'accroissement de f' en 0 : $\notin \mathbb{R}$ ⚠

<u>Rappel</u> : • Si f est continue en 0 $\Rightarrow$ f possède un DL en 0 à l'ordre 0 : $f(x) = \underbrace{a_0}_{= f(0)} + o(1)$ $\quad o(1) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} a_0 = f(0)$

• Si f est dérivable en 0 $\Rightarrow$ f possède un DL en 0 à l'ordre 1 : $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$ où $a_0 = f(0)$

$\frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1 + o(1)$ $\Rightarrow$ $f'(0) = a_1$: $f(x) = \underbrace{a_0}_{f(0)} + \underbrace{a_1}_{f'(0)} x + o(x)$

ensuite : une fonction peut avoir un DL d'ordre n ($n \geq 2$) sans être 2 fois dérivable en 0.

• Si f est $\mathcal{C}^n$ en 0 $\Rightarrow$ f possède un DL ordre n en 0 (c'est Taylor-Young) : il n'y a pas d'équivalence.

<u>4.6 : Applications au calcul de limites en 0</u>

<u>ex</u> $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$: limite en 0 ? avec les DL.

1^∞ : F.I.

$\left(\frac{0}{0}\right)^\infty$

pour que $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ soit bien définie, il faut que $\frac{\sin x}{x} > 0$

pour $x \to 0$: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2)$ $\Rightarrow$ $\frac{\sin x}{x} > 0$ qd $x \to 0$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{déf}}{=} e^{\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{3!} + o(x^2)$

$\left(\ln(1+u) \underset{u \to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right)$ $\quad \Rightarrow \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{3!} + o(1)$

donc $\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \to -\frac{1}{6}$ qd $x \to 0$ donc

$e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} \to e^{-\frac{1}{6}}$ qd $x \to 0$ car exp est continue.

$\underline{\underline{ex}}$ $\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$: $\lim_{x \to 0}$: F.I. $\frac{0-0}{0}$

$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$\tan x - \sin x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)$

$= 0.x + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3!}\right)x^3 + o(x^3)$

$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + o(1) = \frac{1}{2} + o(1)$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$

Pause : $\boxed{11h20}$

4.7 : Application à l'étude <u>local</u> des graphes de fonctions <u>en x_0</u>.

Soit f dérivable en $x_0 \in I$, alors le graphe de f possède une tangente (non verticale) d'équation $y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$

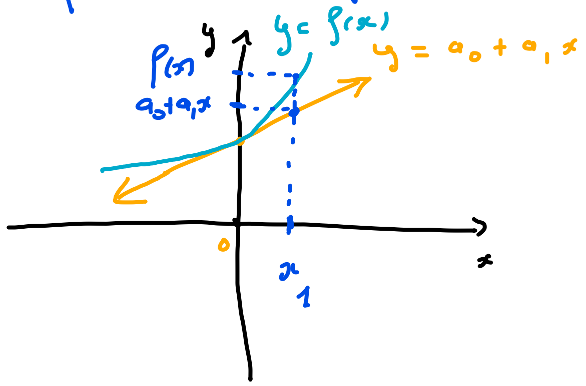
En $x_0 = 0$ l'équation de la tangente : $y = f(0) + f'(0) \cdot x$

(c'sont les 2 premiers termes du DL de f en 0) : $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + o(x^n)$

avec $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

$\Rightarrow$ l'équation de la tangente du graphe de f en 0 est donnée par le DL de f en 0 (par ses 2 premiers termes)

On veut pouvoir représenter le graphe p.r à sa tangente : quel est sa position p.r à sa tangente : au-dessus, traverse...



Le graphe est au-dessus de la tangente si $f(x) - (a_0 + a_1 x) > 0$ (si $x > 0$)

Il faut donc chercher le signe de $f(x) - (a_0 + a_1 x)$: on utilise le DL de f en 0 à l'ordre p, $p \geq 2$: $f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x}_{\text{eq de la tangente}} + a_p x^p + o(x^p)$

avec $a_p \neq 0$

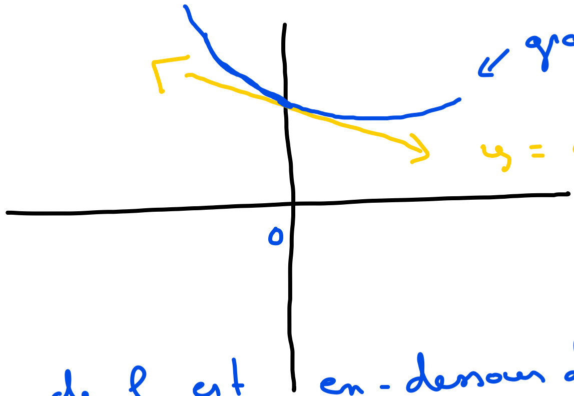
donc le signe de $f(x) - (a_0 + a_1 x)$ est donné par celui de $a_p \cdot x^p$.

Car : $\dfrac{f(x) - (a_0 + a_1 x)}{x^p} = a_p + o(1)$ $\Rightarrow$ qd $x \to 0$ $\dfrac{f(x) - (a_0+a_1 x)}{x^p}$

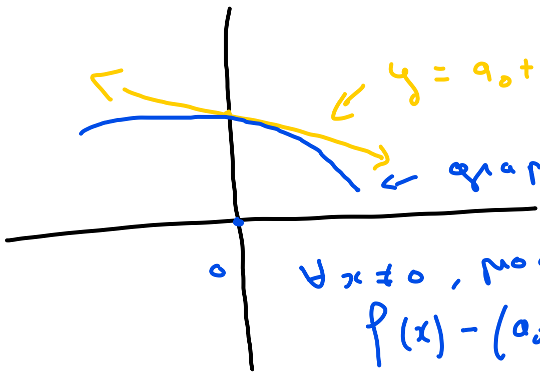
est du même signe que a_p.

si <u>p est pair</u> $x^p > 0$ $\forall x \neq 0$, $x \to 0$ $\Rightarrow$ le signe de $f(x) - (a_0 + a_1 x)$ est celui de a_p

si $a_p > 0$: le graphe de f est au-dessus de sa tangente :



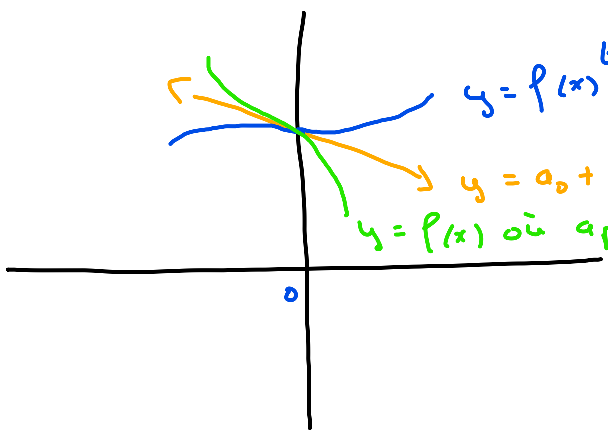
si $a_p < 0$: le graphe de f est en-dessous de sa tangente



$\forall x \neq 0$, proche de 0
$f(x) - (a_0 + a_1 x) < 0$

Cas où p est impair :
alors $x^p > 0$ si $x > 0$ et $x^p < 0$ si $x < 0$
donc le graphe de f traverse sa tangente : $f(x) - (a_0 + a_1 x) = a_p x^p + o(x^p)$

si $a_p > 0$



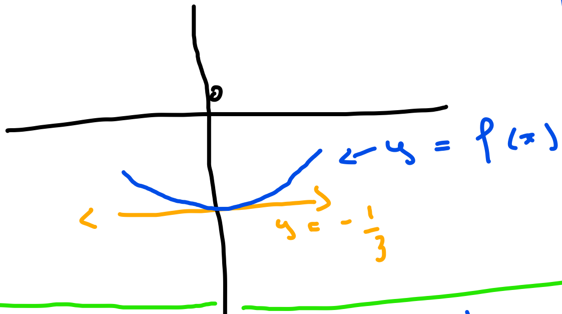
si $a_p < 0$

<u>Ex</u> : $f(x) = \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ en 0 f possède un DL :

$$f(x) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{5!}x^2 + o(x^2)$$

donc l'eq de la tangente de f en 0 est $y = -\frac{1}{3}$

$$f(x) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{30}x^2 + o(x^2)$$



Bilan : un DL à l'ordre ≥ 2 donne la tangente du graphe en 0 et la position du graphe par rapport à sa tangente : on fait un dessin localement en 0.

A la semaine prochaine avec du courage !
portez vous bien

4.8 : Développements limités en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 non nec^t nul.

Chercher un DL de f en x_0 revient à chercher un DL de la fonction : $h \mapsto f(x_0+h)$, quand $h \to 0$:
en effet $x_0 + h \to x_0 \iff h \to 0$

Ex : DL de $\frac{1}{x}$ quand $x \to 1$: on pose $x = 1+h$ $\quad x \to 1 \iff h \to 0$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3) \quad (\text{DL à l'ordre } 3) \quad h = x-1$$

$$\boxed{\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right)}.$$

Ex : $\sqrt{2+x}$ quand $x \to 2$ à l'ordre 3.

on pose $x = 2+h$ $\quad x \to 2 \iff h \to 0$

$$\sqrt{2+x} = \sqrt{2+2+h} = \sqrt{4+h} \; : \qquad (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}u^3 + o(u^3)$$

$$(4+h)^{1/2} = 4^{1/2}\left(1+\frac{h}{4}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{u = \frac{h}{4} \to 0}, \quad \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

$$4+h = 4\left(1+\frac{h}{4}\right) \qquad h \to 0 \iff \frac{h}{4} \to 0$$

donc
$$\boxed{\sqrt{4+h} = 2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{4} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{h}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{h}{4}\right)^3 + o(h^3)\right)}$$

$2^{2\times 3}$

$$\sqrt{4+h} = 2\left(1+\frac{1}{2^3}h - \frac{1}{2^5}h^2 + \frac{3}{3\cdot 2^{10}}h^3 + o(h^3)\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2^2}h - \frac{1}{2^4}h^2 + \frac{1}{2^9}h^3 + o(h^3) \qquad \square$$

$$\sqrt{2+x} = 2 + \frac{1}{2^2}(x-2) - \frac{1}{2^4}(x-2)^2 + \frac{1}{2^9}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right).$$

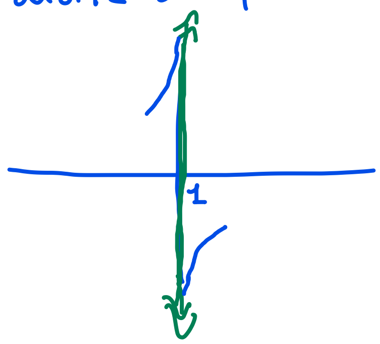
4.9 : Recherche d'asymptote.

Quand $x \to +\infty$ (ou $-\infty$) on dit que la droite d'équation $y = a_0 x + a_1$ est asymptote au graphe de f (f définie sur $]a,+\infty[$) si $f(x) - (a_0x+a_1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
$a \in \mathbb{R}$.

N.B. Si $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \pm\infty$ alors $x = b$ est une droite asymptote au graphe de f.

ex $f(x) = \frac{1}{1-x}$: $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} -\infty$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote au graphe de f



Si f est telle que : $f(x) - (a_0x+a_1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

$f(x) - (a_0x+a_1) = o(1)$ qd $x \to +\infty$

et pour avoir la position du graphe p.r à la droite $y = a_0x + a_1$ il faut connaître le signe de $f(x) - (a_0x+a_1)$ qd $x \to +\infty$

i.e : si $\boxed{f(x) - (a_0x+a_1) = \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)}$ alors le signe de a_p donne la position du graphe de f p.r à son asymptote

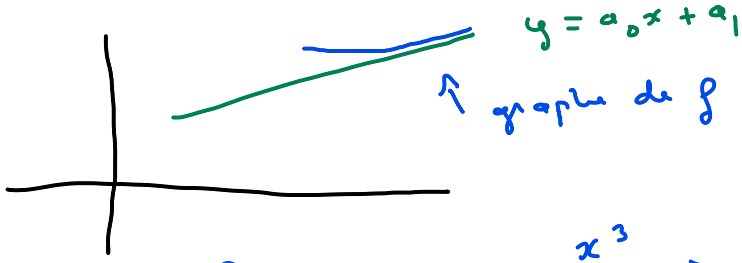
$\frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$ est un DL en $\frac{1}{x}$ qd $x \to +\infty$ à l'ordre p de $f(x) - (a_0x+a_1)$: $p \geq 1$. qd $x \to +\infty$ $\frac{1}{x} \to 0$

Ce qu'il faut faire : Trouver a_0, a_1 puis chercher un DL en 0 de la variable $\frac{1}{x}$ de $f(x)-(a_0x+a_1)$ $(x\to+\infty)$

On dira que $a_0x+a_1+\frac{a_p}{x^p}+o(\frac{1}{x^p})$ est un développement asymptotique de f quand $x\to+\infty$

qd $x\to+\infty$ le graphe de f "ressemble" à la droite $y=a_0x+a_1$

si $a_p>0$:



Ex $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ $\quad \underline{\underline{x\to+\infty}}$ $\quad f(x)\to+\infty$: $\frac{x^3}{x-1}>0$ sur $]1,+\infty[$

$\frac{x^3}{x-1}=\frac{x^3}{x(1-\frac{1}{x})}=x^2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ $\quad$ et qd $x\to+\infty$ $\frac{1}{x}\to0$

l'objectif à atteindre

$\boxed{f(x)=\sqrt{x^2}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}}$: comme $x\in]1,+\infty[$ $\sqrt{x^2}=x$

(si x était <0 $\sqrt{x^2}=-x$)

or $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$ possède un DL en $\frac{1}{x}$ qd $x\to+\infty$, à tout ordre.

$(1+u)^{\alpha}=1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+o(u^2)$ avec : $u=-\frac{1}{x}$; $\alpha=-\frac{1}{2}$

$u\to0 \Leftarrow x\to+\infty$.

donc $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2^3}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$f(x)=x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=x\cdot\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$$\boxed{f(x)=\underbrace{\boxed{x+\frac{1}{2}}}_{a_0x+a_1}+\underbrace{\frac{3}{8}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}_{=o(1)\text{ car }\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}}$$

donc $y=a_0x+a_1$ est l'équation de l'asymptote $\quad \boxed{x\to+\infty}\longrightarrow+\infty$

et $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ or $\frac{3}{8}>0\Rightarrow$ le graphe de f est au-dessus de son asymptote.

$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$: que se passe-t-il en $\underline{\underline{+\infty}}$ i.e qd $\underline{\underline{x\to+\infty}}$

pas de tangente en $+\infty$.

par contre quand $x \to 0$ est un autre problème.
on cherche un DL en 0 pour connaître la tangente en $x=0$.

N.B : On peut chercher un DL à droite d'un point x_0
et avoir l'écriture de la demi-tangente en ce point.

$\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$: à droite de 0 : $[0,1[$

calcul important

Autre exemple : $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+1} = \dfrac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = x \cdot \dfrac{1-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}$

Si on pose $h = \frac{1}{x}$ et on calcule le DL en 0 de à l'ordre 2.

$$\frac{1-h^3}{1+h^2} = (1-h^3)(1-h^2+o(h^2)) = \underline{1-h^2+o(h^2)} \quad h \to 0 \iff x \to +\infty$$

$$\frac{1}{1+h^2} = 1-h^2+o(h^2)$$

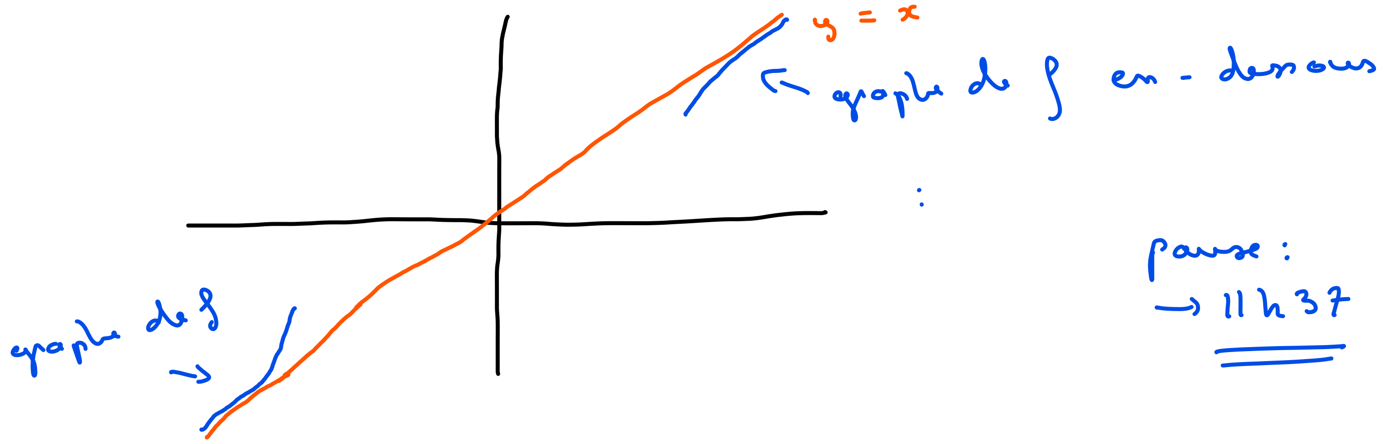
donc $\dfrac{1-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1 - \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \Rightarrow f(x) = x \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$

$$\boxed{f(x) = \boxed{x} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ donc $y = x$ est l'asymptote du graphe de f qd $x \to +\infty$: le signe de $f(x) - x$ donne la position du graphe p.r à $y = x$.

$f(x) - x = -\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ qd $x \to +\infty \Rightarrow$ le graphe est en-dessous de la droite $y = x$

et $f(x) - x > 0$ qd $x \to -\infty \to$ le graphe est au-dessus de $y = x$



pause :
→ 11h37

Chapitre 5 : Equations Différentielles Ordinaires et Linéaires.

5.1 : Equations D.O. Linéaire d'ordre 1 sont des équations du type : $f'(t) = a(t) \cdot f(t) + b(t)$ avec $t \in I$ I est un intervalle, $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ continues

et f est l'inconnue de l'équation : on cherche toutes les fonctions f définies sur I satisfaisant l'équation.

$f'(t)$ = dérivée de f : 1er ordre car on dérive une fois

Notation : on note y l'inconnue plutôt que f :

$$y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)$$

5.1.1. Résolvons E.D.O.L. d'ordre 1 homogène :

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t) \qquad t \in I \quad I \text{ intervalle}$$

Prop Toutes les solutions de $y'(t) = a(t)\, y(t)$ où $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ sont sous la forme : $y(t) = \lambda \cdot e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

et $A(t)$ est une primitive de $a(t)$.

NB. a est continue sur $I \Rightarrow$ possède des primitives.

Si $y' = a \cdot y$, a continue, y continue $\Rightarrow y'$ continue

$\Rightarrow y$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

Dem de prop : (i) Si $y(t) = \lambda e^{A(t)}$ alors y est solution :

On dérive $y(t)$: $y'(t) = \lambda \cdot \left(e^{A(t)}\right)' = \lambda \cdot A'(t) \cdot e^{A(t)}$

$$= \lambda \cdot a(t)\, e^{A(t)}$$

$$= a(t) \cdot \left(\lambda \cdot e^{A(t)}\right)$$

$$y'(t) = a(t)\, y(t)$$

$\Rightarrow y$ est sol de l'équation.

(ii) Si y est t.q. $y'(t) = a(t)\, y(t)$

Soit A une primitive de a.

$$y'(t) = a(t)\, y(t) \iff y'(t) - a(t)\, y(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\iff \left(y'(t) - a(t)\, y(t)\right) e^{-A(t)} = 0 \quad \forall t \in I$$

car $t \to e^{-A(t)}$ ne s'annule jamais

or $\left(y'(t) - a(t)y(t)\right)e^{-A(t)} = y'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t)e^{-A(t)}$

$$\left(y(t)e^{-A(t)}\right)' = y'(t)e^{-A(t)} + y(t)\cdot\left(e^{-A(t)}\right)'$$
$$= y'(t)e^{-A(t)} - (A(t))' y(t)\cdot e^{-A(t)}$$
$$= y'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t)e^{-A(t)}$$

donc $\boxed{y'(t) = a(t)y(t)} \iff \left(y(t)e^{-A(t)}\right)' = 0$

a est $\mathcal{C}^0$ sur I intervalle

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q $y(t)e^{-A(t)} = \lambda$

A = une primitive de a sur I

$\Rightarrow \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q } y(t) = \lambda\cdot e^{+A(t)}}$

Forme générale de toutes les solutions de $y'(t) = a(t)y(t)$

calculer une primitive de a : (a étant continue sur I)

La semaine prochaine = vacances

On se retrouve : le 3 mai

ex $y'(t) = \frac{1}{t}y(t)$ (E): $a(t) = \frac{1}{t}$ a est $\mathcal{C}^0$ sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

Sur $]-\infty,0[$ on cherche une primitive de a : $A(t) = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|$
$= \ln(-t)$
si $t<0$

donc les solutions de (E) sont sous la forme :

$$y(t) = \lambda e^{\ln|t|} = \lambda|t| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

i.e. $y(t) = \lambda.t \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.\ \forall t \in]-\infty,0[$

De même sur $]0,+\infty[$ une primitive de $\frac{1}{t}$ est $\ln t$

donc les solutions de (E) définies sur $]0,+\infty[$ sont sous la forme : $y(t) = \lambda_1 t \quad \forall t \in]0,+\infty[,\ \lambda_1 \in \mathbb{R}$

Remarque : écrire λ ou $-\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque c'est la même chose.

Résumant : l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \left\{ y :]-\infty,0[\cup]0,+\infty[,\ \begin{array}{ll} t \to \lambda_0 t & \text{si } t \in]-\infty,0[,\ \lambda_0 \in \mathbb{R} \\ t \to \lambda_1 t & \text{si } t \in]0,+\infty[,\ \lambda_1 \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Remarque : toutes les solutions y sont $\mathcal{C}^0$ en 0 :
$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ > 0}} y(t) = 0 = \lim_{\substack{t \to 0 \\ < 0}} y(t)$$

par contre $\displaystyle\lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} \frac{y(t) - 0}{t} = \lambda_0$ $\quad \displaystyle\lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{y(t) - 0}{t} = \lambda_1$

y est $\mathcal{C}^1$ en 0 ssi $\lambda_0 = \lambda_1$

Il y a des solutions qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: à condition que $\lambda_0 = \lambda_1$

même si la fonction a, $a(t) = \frac{1}{t}$ n'est pas définie en 0.

5 : $y'(t) = \dfrac{1}{t(t-1)} \cdot y(t)$ $\qquad a(t) = \dfrac{1}{t(t-1)}$

a est $\mathcal{C}^0$ sur $]-\infty, 0[\cup]0,1[\cup]1, +\infty[$

Calculons une primitive de a sur chacun des intervalles :

$\forall t \in]-\infty, 0[$; $\dfrac{1}{t(t-1)} = -\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t-1}$: $\left(= \dfrac{-(t-1) + 1 \cdot t}{t(t-1)} = \dfrac{-t+1+t}{t(t-1)} \right)$

donc $\displaystyle\int \frac{dt}{t(t-1)} = -\ln|t| + \ln|t-1|$

NB : $\dfrac{1}{t(t-1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-1}$: calculer a et b.

$\displaystyle\int \frac{dt}{t(t-1)} = \ln \frac{|t-1|}{|t|} = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| = A(t)$ ainsi toutes les solutions de l'équation s'écrivent $y(t) = \lambda_0 \cdot e^{\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|}$ $\quad \lambda_0$ quelconque $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

$\forall t \in]-\infty, 0[$

soit $y(t) = \lambda_0 \left|\dfrac{t-1}{t}\right| = \lambda\left(\dfrac{t-1}{t}\right)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $t \in]-\infty, 0[$

Même calcul sur $]0,1[$: $y(t) = \lambda_1' \left|\dfrac{t-1}{t}\right|$, $\lambda_1' \in \mathbb{R}$ quelconque

$= \lambda_1 \dfrac{t-1}{t}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ quelconque

de même sur $]1, +\infty[$ $\quad y(t) = \lambda_2 \dfrac{t-1}{t}$ $\quad \lambda_2 \in \mathbb{R}$ quelconque.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation, S

$S = \{ y :]-\infty, 0[\cup]0,1[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $y(t) = \lambda_0 \dfrac{t-1}{t}$ si $t \in]-\infty, 0[$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y(t) = \lambda_1 \frac{t-1}{t} & \text{si } t \in]0,1[\\ y(t) = \lambda_2 \frac{t-1}{t} & \text{si } t \in]1,+\infty[\end{cases}$$

5.1.2 Equation avec second membre : est de la forme :

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \iff y'(t) - a(t)y(t) = \underbrace{b(t)}_{\text{second membre}} \quad (E)$$

avec $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ I intervalle.

On dit que $\boxed{y'(t) - a(t)y(t) = 0}$ est l'équation homogène

Prop 5.2 : Si $y_1 \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est une solution particulière de (E) alors l'ensemble des solutions de (E), S :

$S = \{y_0 + y_1$, où $y_0 =$ solution de l'équation homogène$\}$

On peut écrire : si $S_0 =$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène, $S = S_0 + y_1$

Dem : ds le poly.

Méthode pour trouver une solution particulière de (E) : méthode de variation de la constante :

$t \in I$, a, b $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

(E) : $y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$

(E_0) : $y'(t) - a(t)y(t) = 0$: Eq homogène

On calcule A une primitive de a ainsi les solutions de E_0 sont sous la forme : $\lambda e^{A(t)}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière sous la forme :

$$y_1 : t \to \lambda(t) e^{A(t)}$$

alors $y_1'(t) = \lambda'(t) e^{A(t)} + \lambda(t) \left(e^{A(t)}\right)'$

$$= \lambda'(t) e^{A(t)} + \lambda(t) . A'(t) e^{A(t)}$$

$$= \lambda'(t) e^{A(t)} + \lambda(t) a(t) e^{A(t)}$$

or $y_1'(t) - a(t)y_1(t) = b(t)$ donc

$$\lambda'(t) e^{A(t)} + \underbrace{\lambda(t)a(t)e^{A(t)} - a(t)\lambda(t)e^{A(t)}}_{=0} = b(t)$$

$$\iff \boxed{\lambda'(t) e^{A(t)} = b(t)} \iff \lambda'(t) = b(t) e^{-A(t)}$$

i.e. $t \to \lambda(t)$ est une primitive $b(t)\, e^{-A(t)}$.

3. Exemple : $y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + 1 \iff y'(t) - \frac{1}{t} y(t) = 1$

On a vu que $\forall t \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ les sol de l'eq homogène

sont : $t \mapsto \lambda_0 t$ si $t<0$

$t \mapsto \lambda_1 t$ si $t>0$

Sur $]-\infty, 0[$: cherchons une solution particulière avec la méthode de variation de la constante :

On pose $y_1(t) = \lambda(t).t \quad \forall t \in]-\infty, 0[$

$y_1'(t) = \lambda'(t).t + \lambda(t).1$

$y_1'(t) - \frac{1}{t} y_1(t) = \lambda'(t).t + \underbrace{\lambda(t).1 - \frac{1}{t}.\lambda(t).t}_{=0} = 1 \leftarrow$ second membre

$\iff \lambda'(t).t = 1$

$\iff \lambda'(t) = \frac{1}{t} \quad \forall t \in]-\infty, 0[$

$\lambda(t) = \ln|t|$

donc $y_1(t) = t\ln|t| \quad \forall t \in]-\infty, 0[$, y_1 est une solution particulière sur $]-\infty, 0[$.

Sur $]0, +\infty[$: le calcul est le même, donc $y_1(t) = t\ln|t|$ est sol particulière sur $]0, +\infty[$

Donc l'ensemble S des solutions de l'équation est :

$$S = \left\{ y :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[,\ \begin{array}{ll} t \to \lambda_0 t + t\ln|t| & \text{si } t<0 \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}, \\ t \to \lambda_1 t + t\ln|t| & \text{si } t>0 \quad \lambda_1 \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Toutes les solutions sont continues en 0 : $\lim_{t \to 0} t\ln|t| = 0$

mais aucune n'est dérivable en 0 (tangente verticale)

pause : $\longrightarrow$ 11h20

Exemple : $y'(t) - \frac{1}{t(t-1)} y(t) = \frac{1}{t(t-1)}$: $a(t) = \frac{1}{t(t-1)}$: $b(t) = \frac{1}{t(t-1)}$

a, b C^0 sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$:

On cherche une solution particulière y_1 de l'équation, sous la forme : $y_1(t) = \lambda(t). \frac{t-1}{t} \quad \forall t \in]-\infty, 0[$

$\neq 0$ car $\frac{t-1}{t}$ solution de l'eq donc $y_1'(t) = \lambda'(t) \cdot \frac{t-1}{t} + \left(\frac{t-1}{t}\right)' \cdot \lambda(t)$ homogène

ainsi $y_1'(t) - \frac{1}{t(t-1)} y_1(t) = \lambda'(t) \cdot \frac{t-1}{t} + \left(\frac{t-1}{t}\right)' \cdot \lambda(t) - \frac{1}{t(t-1)} \cdot \lambda(t) \cdot \frac{t-1}{t}$

$$= \lambda'(t) \cdot \frac{t-1}{t} + \lambda(t) \underbrace{\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right)}_{0}$$

$\Rightarrow \lambda'(t) \cdot \frac{t-1}{t} = \frac{1}{t(t-1)} \iff \lambda'(t) = \frac{1}{(t-1)^2}$

or $\frac{-1}{t-1}$ est une primitive de $\frac{1}{(t-1)^2}$ sur $]-\infty, 0[$

on a alors $y_1(t) = -\frac{1}{t-1} \cdot \frac{t-1}{t} = -\frac{1}{t} \quad \forall t \in]-\infty, 0[$

le calcul est le même sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$

donc l'ensemble des solutions de l'équation est S :

$S = \{ y :]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[\to \mathbb{R},\ t \to \lambda_0 \frac{t-1}{t} - \frac{1}{t} \ \forall t < 0$

$t \to \lambda_1 \frac{t-1}{t} - \frac{1}{t} \ \forall t \in]0,1[,\quad t \to \lambda_2 \frac{t-1}{t} - \frac{1}{t},\ \forall t \in]1,+\infty[\}$

5.13 : Problème de Cauchy associé à l'équation différentielle $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$: soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$

$a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

trouver la solution y telle que $y(t_0) = y_0$

<u>Prop 5.3</u> : le problème de Cauchy pour les équations linéaires du 1er ordre a toujours une solution unique

<u>Dem</u> : Si $y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_1(t)$ est solution, soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$

alors $y(t_0) = \lambda e^{A(t_0)} + y_1(t_0)$

On résoud : $\lambda e^{A(t_0)} + y_1(t_0) = y_0 \iff \lambda e^{A(t_0)} = y_0 - y_1(t_0)$

$$\iff \boxed{\lambda = e^{-A(t_0)} (y_0 + y_1(t_0))}$$

On fixe ainsi la valeur du paramètre λ.

<u>Ex 1</u> : $y' = \frac{1}{t}y + 1$ les sol sous la forme : $y(t) = t\ln|t| + \lambda_0 t$

en $t_0 = -1$, $y(t_0) = +2$ pour $t < 0$

$y(-1) = -1 \cdot \ln 1 + \lambda_0 \cdot -1 = -\lambda_0 = 2 \iff \lambda_0 = -2$

donc la solution est $t\ln|t| - 2t$ est la solution définie

$\forall t \in]-\infty, 0[$ t.q $y(-1) = 2$.

5.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 : d'inconnue y

$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ Equation avec second membre

$= 0$: Equation homogène : E_0

$a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, I intervalle.

prop : Si y_1 et y_2 sont deux solutions de E_0 alors

$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$ sont aussi solutions de E_0

(l'ens des sol de E_0 est un s.e.v. de l'ensemble $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$)

On peut écrire : $\varphi : y \longmapsto y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t)$

alors φ est une application linéaire de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

et l'ens des solutions de E_0 $= \ker \varphi$.

prop le Problème de Cauchy pour ces équations est le suivant :

Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_1 \in \mathbb{R}$, trouver y la solution de l'équation telle que $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$

le problème de Cauchy possède toujours une unique solution.

5.3 : On sait résoudre les équations homogènes lorsque :

a et b sont des constantes :

l'équation s'écrit (E) : $\boxed{y''(t) + a.y'(t) + b.y(t) = 0}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Idée : de chercher y sous la forme :

$$y(t) = e^{r.t}$$

alors $y'(t) = r e^{rt}$; $y''(t) = r^2 e^{rt}$ donc l'eq devient :

$$r^2 e^{rt} + a r e^{rt} + b e^{rt} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Longleftrightarrow$ $\underbrace{r^2 + ar + b = 0}_{\text{polynôme caractéristique de l'équation}}$ car $e^{rt} \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Delta = a^2 - 4b$: discussion selon le signe de Δ

Semaine prochaine dernier cours.

prop 5-5 : Soit $r^2+ar+b=0$ l'équation caractéristique associée à (E)
soit $\Delta = a^2-4b$

si (i) $\Delta>0$ il existe deux solutions $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2$ et
l'ensemble des solutions de (E) : est $= \{ \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$
l'ensemble est paramétré par 2 paramètres.
N.B: l'ens des sol de (E) est un s.e.v de l'ens des fonctions
$C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si on écrit $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{r_1 t}$ $\quad \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{r_2 t}$

alors l'ensemble des solution de (E) $= Vect(\{\varphi_1, \varphi_2\})$

(ii) $\Delta<0$ il existe deux solutions de l'eq caractéristique
$r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ $\quad r_1 \neq r_2 \quad r_1 = \alpha + i\beta \quad r_2 = \alpha - i\beta$
l'ensemble des solution de (E) est $= \{ e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos \beta t + \lambda_2 \sin \beta t)$
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$

N.B: $e^{r_1 t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$ à valeurs ds $\mathbb{C}$

(iii) si $\Delta = 0$ l'équation caractéristique possède une racine double r_0. Ainsi l'ensemble des solutions de (E)

$= \{ (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{r_0 t}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$

Preuve : "$\supset$" les solutions énoncées sont bien toutes des sol de (E)
"$\subset$" cas (i) : Soit $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de (E), avec
$\Delta>0$: Δ = discriminant de r^2+ar+b
$\Rightarrow \exists r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2$, t.q $r^2+ar+b = (r-r_1)(r-r_2)$
on a $\quad \Rightarrow a = -r_1 - r_2$
$b = r_1 \cdot r_2$

donc (E) : $y''(t) + a \cdot y'(t) + b y(t) = 0$
$\Leftrightarrow y''(t) - (r_1+r_2) y'(t) + r_1 \cdot r_2 \, y(t) = 0$ $\quad$ idée
$\Leftrightarrow \boxed{(y'(t) - r_1 y(t))' - r_2 (y'(t) - r_1 y(t)) = 0}$

Si on pose $Z(t) = y'(t) - r_1 y(t)$ alors Z vérifie :

$$Z'(t) - r_2 Z(t) = 0$$

donc $Z(t) = \mu_1 e^{r_2 t}$ avec $\mu_1 \in \mathbb{R}$
donc $y'(t) - r_1 y(t) = \mu_1 e^{r_2 t}$ donc y est solution d'une

equation différentiel linéaire du 1^{er} ordre avec second membre.

l'équation homogène donne : $y'(t) - r_1 y(t) = 0$ i.e.

$y(t) = \mu_2 e^{r_1 t}$ est sol de l'éq homogène.

On remarque : $t \mapsto \dfrac{\mu_2 e^{r_2 t}}{r_1 - r_2}$ est solution particulière

$\Rightarrow$ on a la forme de toutes les solutions de l'équation (E) $\square$

Exemples : 1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ polynôme caractéristique est

$r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$

l'ensemble des solutions $= \{ t \mapsto \mu_1 e^{t} + \mu_2 e^{2t} \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \}$

$= \text{vect}(\{ t \to e^{t}, t \to e^{2t} \}) \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2. $y'' + 2y' + 2y = 0$ $\quad r^2 + 2r + 2$: $\Delta = -4 = (2i)^2$

$r_1 = \dfrac{-2-2i}{2} = -1-i$; $r_2 = -1+i$

l'ens des solution $= \{ t \to e^{-t}(\lambda_1 \cos t + \lambda_2 \sin t), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$

3. $y'' - 2y' + y = 0$ $\quad$ Poly caractéristique : $r^2 - 2r + 1$

$= (r-1)^2$

l'ens des solutions $= \{ t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{t}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$

(E)

5-3.2 : Avec second membre : $y''(t) + a y'(t) + b y(t) = c(t) \quad c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

Prop : l'ens des solutions de cette équation est constitué d'une solution particulière + toutes les solution de l'eq homogène :

l'eq homogène est : $y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$

l'ens des solution de l'eq homogène est S_0

y_1 est une solution particulière de (E)

$S_0 + y_1 = \{ y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}), y = y_0 + y_1 \text{ avec } y_0 \in S_0 \}$

$=$ l'ens des sol de (E)

Il faut chercher une solution particulière de (E)

Prop : principe de superposition :

Soit l'eq $y'' + ay' + by = f_1 + f_2 \qquad f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

alors si y_1 est solution de $y'' + ay' + by = f_1$

et y_2 est solution de $y'' + ay' + by = f_2$

$y_1 + y_2$ est solution de $y'' + ay' + by = f_1 + f_2$

<u>Cas</u> particulier : on suppose que la fonction c est une fonction polynomiale : de degré $= m$.

alors on cherche y_1 une solution particulière de (E) sous la forme polynomiale : $\deg(y_1) = m$ si $b \neq 0$

$= m+1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$

$= m+2$ si $a = b = 0$

En effet : si y_1 est une fonction polynomiale

$y_1'' + ay_1' + by_1$ est une fonction polynomiale

qu'il faut identifier à $c(t)$

Exemple : $y'' - 4y' + 3y = 3t + 2 = c(t)$ $\quad \deg(c(t)) = 1$

on cherche une solution particulière sous la forme :

$y_1(t) = \alpha t + \beta$ donc $y_1'(t) = \alpha$ $\quad y_1''(t) = 0$

donc $y_1'' - 4y_1' + 3y_1 = 0 - 4 \cdot \alpha + 3(\alpha t + \beta)$

$= 3\alpha \cdot t + (-4\alpha + 3\beta) \cdot 1$

à identifier avec $c(t) = 3t + 2$

$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 3 \\ -4\alpha + 3\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$ donc $y_1 = t + 2$ est une sol particulière.

Cherchons toutes les sol de l'eq homogène :

$y'' - 4y' + 3y = 0$ de polynôme caractéristique :

$r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-3)$

S_0 = l'ens des sol de l'eq homogène =

$\{t \mapsto \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{3t}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

donc S = l'ens des sol de l'eq (E) est $= \{t \mapsto t + 2 + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{3t}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

S n'est <u>pas un s.e.v</u> (sous espace affine).

pause 5 min :

$\to$ <u>11h11</u>

5.4 : Equations différentielles non linéaires à variables séparables : du 1er ordre (y').

$(E) : y'(t) = f(y(t)) \cdot g(t)$

$\cdot I$ intervalle : g est $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

Méthode pour les résoudre :

- Cherchons les solutions constantes : $y(t) = y_0 \ \forall t \in I$

alors $y'(t) = 0 = f(y(t)) \cdot g(t) = f(y_0) \cdot g(t) = 0 \ \forall t \in I$

$\Leftrightarrow f(y_0) = 0$: les sol constantes annulent f

on cherche donc les zéros de f.

- On cherche les sol y non constantes dérivable sur I ou sur un intervalle $\subset I$, et $f(y(t))$ ne s'annulant pas

alors l'eq (E) $\Leftrightarrow \dfrac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t)$

Si F est une primitive de $\dfrac{1}{f}$ et G une primitive de g

alors l'eq $\Leftrightarrow F(y(t)) = G(t) + c$

Si F est bijective (peut-être doit-on alors réduire l'intervalle d'étude)

on a $y(t) = F^{-1}(G(t) + c)$.

Exemples que vous connaissez :

$y'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ g(t)}}{a(t)} \cdot y(t)$ $\nwarrow = f(y(t))$

ici $f(y(t)) = y(t)$ i.e. $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\end{array}$.

$a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

- Les solution constantes : $y(t) = 0 \quad \forall t \in I$
- Supposons que y ne s'annule pas sur I

l'eq $\Leftrightarrow \dfrac{y'(t)}{y(t)} = a(t)$ une primitive de $\dfrac{1}{f}$ est F ($\ln|x|$)

$\Leftrightarrow \ln|y(t)| = A(t) + c$ $\quad A$ = primitive de a

$\Leftrightarrow |y(t)| = e^c \cdot e^{A(t)}$

donc $y(t) = \varepsilon(t)\, e^c\, e^{A(t)}$ $\quad \varepsilon(t) \in \{-1, 1\}$ et ε continue

$\Rightarrow \varepsilon(t)$ est constante. $\Rightarrow y(t) = +e^c e^{A(t)}$ ou $y(t) = -e^c e^{A(t)}$

i.e. $y(t) = \lambda e^{A(t)}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cas : $y'(t) = a(t)\cdot(y(t))^2$: l'eq n'est plus linéaire :

$= f(y(t))\cdot g(t)$ $\quad f(x) = x^2$, $g(t) = a(t)$

. Sol constantes : 0 annule f.

. Si $y(t) \neq 0$ $\forall t \in I$

Eq $\Leftrightarrow$ $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = a(t) \Leftrightarrow -\frac{1}{y(t)} = A(t) + c \quad c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y(t) = \frac{-1}{A(t)+c}$: t t.q $A(t)+c \neq 0$ $\forall t \in I$

Si $y(0) = y_0$ $\quad -\frac{1}{y_0} - A(0) = c$ (problème de Cauchy : c est fixé par la condition initiale)

Ex : . $y'(t) = t \cdot y^2(t)$: $y(t) = 0$ $\forall t$ est solution

. Si $y(t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Eq $\Leftrightarrow$ $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = t \Leftrightarrow -\frac{1}{y(t)} = \frac{1}{2}t^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y(t) = \frac{-1}{\frac{1}{2}t^2+c}$: si $\frac{1}{2}t^2 + c \neq 0$

or $\frac{1}{2}t^2 + c = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2 = -c \Leftrightarrow t^2 = -2c$ si $c \leq 0$

alors $t = \pm\sqrt{-2c}$

y est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}\}$

c dépendant de la condition initiale.

Autre exemple :

$y'(t) = \frac{1}{\sin(y(t))} \cdot a(t)$ $\qquad t \in I$ t.q $y(t) \notin \pi\mathbb{Z}$.

eq : $\sin(y(t)) \cdot y'(t) = a(t)$

$(-\cos(y(t)))' = \sin(y(t)) \cdot y'(t)$ ainsi

$(-\cos(y(t)))' = a(t)$ $\qquad -\cos(y(t)) = A(t) + c$

Qd le cos est-il bijectif ? lorsque c'est le cas

↑ problème.

$\circ$ $y(t) = \arccos(-A(t) - c)$

$y(t) \in]0, \pi[$ trouver I intervalle t.q $\forall t \in I$, $y(t) \in]0, \pi[$

et $t \in I$ t.q $A(t) + c \in [-1, 1]$

· Exemple :

$y'(t) = t \cdot \exp(-y(t))$

Eq $\Leftrightarrow$ $y'(t)\exp(y(t)) = t$ (exp ne s'annule jamais)

$\Leftrightarrow$ $(\exp(y(t)))' = t$

$\Leftrightarrow$ $\exp(y(t)) = \frac{1}{2}t^2 + c$ avec $c \in \mathbb{R}_+^*$ $t \in \mathbb{R}$

car $\exp(y(t)) > 0$ $\forall t$

(prob de Cauchy : en $t = 0$ $y(0) = y_0$ et y solution de l'eq)

donc $e^{y_0} = \frac{1}{2}0 + c \Leftrightarrow c = e^{y_0}$ donc $c > 0$

donc $\ln(\exp(y(t))) = \ln(\frac{1}{2}t^2 + c)$ ln étant bijectif sur $]0, +\infty[$

i.e $y(t) = \ln(\frac{1}{2}t^2 + c)$

avec $c = e^{y_0}$ où $y_0 = y(0)$.

Sujet à creuser.

Définir une topologie sur $\mathbb{Q}$ (une distance), pour écrire : $x \to x_0$ dans $\mathbb{Q}$?

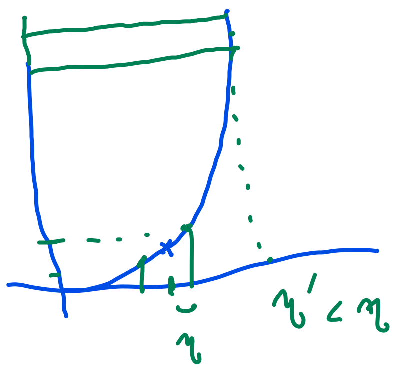
dans $\mathbb{R}$: $|x - x_0| \to 0$

---

f $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$:

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta_{\varepsilon, x_0} > 0$ $|x - x_0| < \eta_{\varepsilon, x_0} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

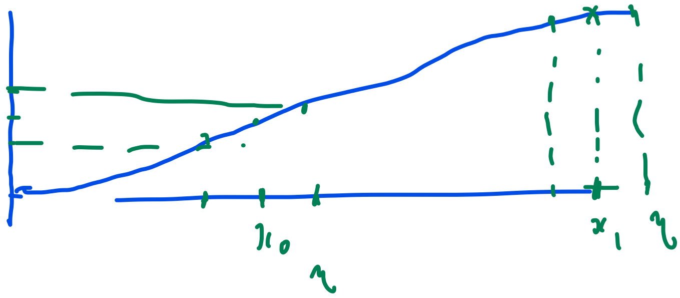
$x \mapsto x^2$ n'est pas unif^t $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$



$\eta' < \eta$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \eta_\varepsilon > 0$ $\forall x_0, \forall x \in \mathbb{R}$ $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

indépendant de x_0



$d(x,y) < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

f C^0 sur $[a,b]$ $\Rightarrow$ f est uniformément C^0.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto 1$ $\qquad$ $d(x,y)$? $\quad |x-y| \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{N}$.

f est une suite. $\qquad$ $A \subset \mathbb{R}$: A intervalle.