

Tutoriel pour calculer une limite par composition

On veut calculer $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, avec g une fonction, et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dans l'expression de $g(x)$, il apparaît à un moment une expression $f(x)$ qu'on voudrait remplacer par x . Par exemple, dans ce qu'on a fait vendredi, on voulait remplacer $x - 3$ par x ou πx par x , dans ce cas on a $f : x \mapsto x - 3$ ou $f : x \mapsto \pi x$. Pour le faire, il faut suivre les étapes suivantes :

1. Trouver h une "réciproque" de f . Par exemple une réciproque de $x \mapsto x - 3$ serait $x \mapsto x + 3$, une réciproque de $x \mapsto \pi x$ serait $x \mapsto \frac{x}{\pi}$, une réciproque de $x \mapsto \sqrt{x}$ serait $x \mapsto x^2 \dots$
2. Trouver un $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = a$.
3. Par composition, on a alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(h(x))$.

Exemple Je veux calculer $\lim_{x \rightarrow 9} g(x)$. Supposons qu'il y a dans l'expression de $g(x)$ une apparition de $\sqrt{x}$, et que je veux remplacer cela par x . J'applique alors la méthode :

1. Je cherche une réciproque de $x \mapsto \sqrt{x}$. On va prendre $x \mapsto x^2$.
2. Je cherche un $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que $\lim_{x \rightarrow b} x^2 = 9$. On va prendre $b = 3$.
3. Par composition, on a $\lim_{x \rightarrow 9} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} g(x^2)$.