

Processus de naissance et mort : rappels d'équations différentielles

Gabriel Lang

Université Paris-Saclay, AgroParisTech

MAEE, master BEE
Math 1, master EvoGem

Une équation différentielle linéaire du premier ordre correspond à

$$n'(t) + an(t) = b(t).$$

Si $b(t) = 0$ (équation homogène), la solution est $n(t) = n(0)e^{-at}$. Si $b(t) \neq 0$ (équation avec second membre), on applique la méthode de la variation de la constante $n(t) = C(t)e^{-at}$. On dérive:

$$n'(t) = -aC(t)e^{-at} + C'(t)e^{-at}.$$

On en déduit que $C'(t)e^{-at} = b(t)$, donc $C'(t) = b(t)e^{at}$. On cherche une primitive $C(t)$ de $b(t)e^{at}$. La solution générale est alors :

$$n(t) = (C(t) + c)e^{-at},$$

où c est une constante quelconque.

Modèle à croissance quadratique

Equation : $n'(t) = \lambda n^2(t)$.

$$\frac{n'(t)}{n^2(t)} = \lambda$$
$$\frac{1}{n(t)} = -\lambda t + c$$

Pour $t = 0$ $n = n_0$ donc $c = \frac{1}{n_0}$.

$$\frac{n_0}{n(t)} = -n_0\lambda t + 1$$
$$n(t) = \frac{n_0}{1 - \lambda n_0 t}$$

Une équation différentielle du premier ordre à variables séparables correspond à

$$n'(t) = g(n(t))h(t).$$

On la résout en séparant les variables n et t de part et d'autre de l'égalité et en intégrant par rapport à t de chaque côté. Les modèles déterministes de population correspondent souvent à ce type d'équation différentielle. Nous présentons deux exemples.

Equation : $n'(t) = \lambda n(t) \left(1 - \frac{n(t)}{n_{max}}\right)$

$$\frac{n'(t)n_{max}}{n(t)(n_{max} - n(t))} = \lambda$$

$$\frac{n'(t)}{(n_{max} - n(t))} + \frac{n'(t)}{n(t)} = \lambda$$

$$\ln \left(\frac{n(t)}{n_{max} - n(t)} \right) = \lambda t + c$$

$$\frac{n(t)}{n_{max} - n(t)} = Ce^{\lambda t}$$

Pour $t = 0$, $n = n_0$ donc $C = \frac{n_0}{n_{max} - n_0}$. On sépare $n(t)$ et on remplace C :

$$n(t) = \frac{Cn_{max}}{e} \frac{e^{\lambda t}}{1 + Ce^{\lambda t}}$$

Modèle à croissance quadratique

Equation : $n'(t) = \lambda n(t)^2$

$$\frac{n'(t)}{n(t)(n^2(t))} = \lambda$$
$$\frac{1}{n(t)} = \lambda t + c$$

Pour $t = 0$ $n = n_0$ donc $C = \frac{1}{n_0}$.

$$\frac{n_0}{n(t)} = n_0 \lambda t + 1$$

$$n(t) = \frac{n_0}{1 - \lambda n_0 t}$$