

Processus de naissance et mort : rappels d'équations différentielles

Gabriel Lang

Université Paris-Saclay, AgroParisTech

MAEE, master BEE
Math 1, master EvoGem

Convergence d'une suite réelle

Une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si il existe un réel ℓ tel que la distance entre ℓ et les termes de la suite tend vers 0 au delà d'un certain rang :

Pour tout écart $\varepsilon > 0$, il existe un indice N tel que pour tout indice $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Cette définition nécessite de connaître ℓ . On aura parfois besoin de prouver la convergence sans pouvoir calculer ℓ , d'où l'utilité du critère suivant :

Critère de Cauchy de convergence d'une suite réelle

Une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si la distance entre deux termes tend vers 0 au delà d'un certain rang : Pour tout écart $\varepsilon > 0$, il existe un indice N tel que pour tout indice $n \geq m$, $|u_m - u_n| < \varepsilon$.

Cette propriété est fausse dans l'ensemble des fractions : on peut trouver une suite de fractions vérifiant le critère de Cauchy dont la limite n'est pas une fraction (mais π ou $\sqrt{2}$).

Série réelle convergente

Une série est une somme infinie de termes réels $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Elle est définie comme la limite des sommes des n premiers termes.

Série réelle convergente

Une série $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ est convergente si la suite des sommes $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ a une limite finie l . On note alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = l$.

Remarque : les sommes sont faites dans l'ordre croissant des indices des a_n . On ne peut pas permuter les termes sauf s'ils sont tous positifs ou tous négatifs.

Série réelle absolument convergente

Absolue convergence

Une série $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ est absolument convergente si la suite des sommes de valeurs absolues $S_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$ est convergente.

Propriété

Une série absolument convergente est convergente.

Par l'inégalité triangulaire (répétée), on a

$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = S_m - S_n$. Comme S_n est une suite convergente, elle vérifie le critère de Cauchy donc s_n aussi. s_n est donc convergente.

Norme pour les vecteurs

Pour définir la convergence des séries de vecteurs, il faut remplacer la valeur absolue qui apparaît dans les définitions de limite par une nouvelle distance mesurant les écarts. On utilise la norme vectorielle $\|\vec{u}\|$, qui peut être considéré comme la "longueur" de $\vec{u}$. La norme permet de définir une distance entre vecteurs par $d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Norme dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Une norme est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que

- Pour tout $\vec{u}$, $\|\vec{u}\| \geq 0$.
- Pour tout $\vec{u}$, $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.
- Pour tout $\vec{u}$, pour tout λ réel, $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$.
- Pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Remarque : la dernière propriété correspond à l'inégalité triangulaire des distances.

Exemples de normes dans $\mathbb{R}^n$

Soit $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$, les normes les plus courantes sont

- $\|\vec{u}\|_\infty = \max_i |u_i|$.
- $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{\sum_i u_i^2}$ (norme de la distance euclidienne).
- $\|\vec{u}\|_1 = \sum_i |u_i|$.

On a les relations $\|\vec{u}\|_\infty \leq \|\vec{u}\|_2 \leq \|\vec{u}\|_1 \leq n\|\vec{u}\|_\infty$. Les normes ne diffèrent que d'une constante, on dit qu'elles sont équivalentes. La convergence d'une suite ne dépend pas de la norme choisie pour mesurer.

Convergence d'une suite de vecteurs

Une suite $(\vec{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que la distance entre $\vec{u}$ et les termes de la suite tend vers 0 au delà d'un certain rang :

Pour tout écart $\varepsilon > 0$, il existe un indice N tel que pour tout indice $n \geq N$, $\|\vec{u}_n - \vec{u}\| < \varepsilon$.

On a également le critère :

Critère de Cauchy de convergence d'une suite de vecteurs

Une suite $(\vec{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si la distance entre deux termes tend vers 0 au delà d'un certain rang : Pour tout écart $\varepsilon > 0$, il existe un indice N tel que pour tout indice $n \geq m$, $\|\vec{u}_m - \vec{u}_n\| < \varepsilon$.

La convergence d'une suite de vecteurs est équivalente à la convergence de leurs coordonnées (suite de réels) ce qui permet de démontrer le critère.

Un espace normé dans lequel le critère de Cauchy permet de reconnaître les suites convergentes est appelé espace normé **complet**.

Série de vecteurs convergente

Une série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \vec{u}_k$ est convergente si la suite des sommes $\vec{s}_n = \sum_{k=0}^n \vec{u}_k$ a une limite finie $\vec{u}$. On note alors $\sum_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k = \vec{u}$.

Remarque : les sommes doivent être faites dans l'ordre croissant des indices des $\vec{u}_n$.

Série de vecteurs absolument convergente

Une série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \vec{u}_k$ est absolument convergente si la suite des sommes des normes $S_n = \sum_{k=0}^n \|\vec{u}_k\|$ est convergente.

Propriété

Une série absolument convergente est convergente.

On remarque que $\|\vec{s}_m - \vec{s}_n\| = \|\sum_{k=m+1}^n \vec{u}_k\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|\vec{u}_k\| = S_m - S_n$. Comme S_n est une suite convergente, elle vérifie le critère de Cauchy donc $\vec{s}_n$ aussi. $\vec{s}_n$ est donc convergente.

Norme pour les matrices

Les matrices de dimensions données forment un espace vectoriel, on peut donc définir des normes, et étudier la convergence des suites et séries de matrices. Mais pour définir des séries particulières sur les matrices, nous allons définir des normes qui possèdent une propriété supplémentaire relative à la multiplication matricielle :

Norme d'algèbre dans un espace de matrices

Une norme est une norme d'algèbre si elle vérifie :

Pour tout A et B , $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. On a donc $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

Exemples de norme d'algèbre dans un espace de matrice

Soit une matrice $A = (a_{i,j})$, les normes d'algèbre les plus courantes sont

- $\|A\|_1 = \max_i \sum_j |a_{i,j}|$.
- $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_i a_{i,j}^2} = \sqrt{\text{tr}(AA^t)}$.

Pour ces normes, le critère de Cauchy s'applique et l'espace normé de matrice est complet.

Une série entière correspond à un polynôme de degré infini : les termes de la série sont de la forme $a_n x^n$.

Un exemple : la série géométrique

Soit x un réel. La série géométrique associée est $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

On sait que cette série est convergente dès que $|x| < 1$ et sa limite est $\frac{1}{1-x}$.

Série entière sur $\mathbb{R}$

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. La série entière associée est $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Comme pour la série géométrique, la convergence et la limite de cette série dépendent de la valeur de x choisie.

Critère d'absolue convergence

S'il existe un réel $R > 0$ et un indice N tels que pour tout $n > N$, $|a_{n+1}/a_n| < 1/R$, alors la série est absolument convergente pour $|x| < R$.

Il suffit de remarquer que pour $n > N$,

$|a_n x^n| < |a_N| \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \right| |x|^N |x|^{n-N} < |a_N| |x|^N |x|/R^{n-N}$ avec $0 < q = |x|/R < 1$. La série des valeurs absolues est plus petite qu'une série géométrique convergente donc elle est convergente.

Opérations sur les séries entières

Addition et multiplication des séries entières

On peut additionner et multiplier deux séries entières convergentes. Les règles sont les mêmes que pour les polynômes : rassembler les termes de même degré.

Dérivation et intégration par rapport à x

Soit une série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ convergente pour tout x tel que $|x| < R$. Alors si on note $f(x)$ la limite $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$,

- la fonction f est continue
- la fonction f est dérivable et sa dérivée f' se calcule en dérivant les termes comme pour un polynôme. La fonction dérivée est également une série entière convergente pour tout x tel que $|x| < R$
- les dérivées sont donc dérivables de sorte que la fonction f est infiniment dérivable
- on peut calculer une primitive de f en intégrant chacun des termes comme pour un polynôme et la primitive est une série entière convergente pour tout x tel que $|x| < R$

Série entière dans $\mathbb{C}$ et dans les algèbres de matrices

On peut étendre les séries entières en prenant x complexe ou matrice.

Extension des séries entières

Soit une série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, convergente pour $|x| < R$. Alors

- si z est un complexe de module inférieur à R , $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ est une série absolument convergente dans $\mathbb{C}$.
- si M est une matrice de norme d'algèbre inférieure à R , $\sum_{k=0}^{\infty} a_k M^k$ est une série absolument convergente vers une matrice.

Soit $S_n = \sum_{k=0}^n |a_k z^k|$. On a $|a_k z^k| = |a_k| |z^k| = |a_k| |z|^k$, où $|z|$ est un réel inférieur à R . Donc la série S_n est convergente.

Pour les matrices, on remarque que $S_n = \sum_{k=0}^n \|a_k M^k\| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \|M\|^k$ où $\|M\|$ est un réel inférieur à R . Donc la série S_n est convergente.

Dans les deux cas, les séries sont absolument convergentes donc convergentes par la même démonstration que pour les vecteurs (critère de Cauchy et inégalité triangulaire).

Définition

On définit pour x appartenant à $\mathbb{R}$, la série entière $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, alors

- Cette série est convergente pour tout x .
- Elle est égale à sa dérivée : c'est donc la fonction exponentielle.
- On a également directement $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Le rapport des coefficients a_{k+1}/a_k est égal à $1/(k+1)$. Pour $R > 0$, dès que $k+1 > R$ ce rapport devient inférieur à $1/R$. Il n'y a pas de R maximum pour lequel cette relation est vraie, donc la série est toujours absolument convergente.

La dérivée terme à terme est $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{x^{k'}}{k'!}$ en posant $k' = k-1$;

On a

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} x^i y^{k-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{y^{k-i}}{(k-i)!} = f(x)f(y).$$

Série entière de l'exponentielle pour les complexes et les matrices

L'avantage de la série entière est qu'elle s'étend directement aux complexes et aux matrices.

Exponentielle complexe et matricielle

- Soit z appartenant à $\mathbb{C}$, on définit $\exp(z)$ par la série entière $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$.
- Soit M une matrice, on définit $\exp(M)$ par la série entière $f(M) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k$.

Remarques :

- pour z_1, z_2 complexes, on a bien $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$ comme c'est dans le cas pour les réels.
- pour l'exponentielle de matrice, $\exp(M_1 + M_2) = \exp(M_1) \exp(M_2)$ uniquement si $M_1 M_2 = M_2 M_1$ car on utilise le binôme de Newton.
- pour l'exponentielle de matrice, on a mis en évidence que le terme M^0 correspond à la matrice identité I .

Semi groupe de matrices stochastiques

Matrices stochastiques

Une matrice est stochastique si ses coefficients sont tous compris entre 0 et 1 et si les sommes des coefficients par ligne sont toutes égales à 1. La multiplication de deux matrices stochastiques donne une matrice stochastique.

Pour définir un processus de sauts markovien homogène en temps continu, on a besoin de la matrice $P(t)$ de transition pour tout intervalle de temps t . La propriété de Markov homogène impose que les matrices de transition soient stochastiques et satisfassent $P(t + s) = P(t)P(s)$.

Semi groupe de matrices de transition

On appelle semi groupe de matrices de transition une famille $(P(t))_{t \geq 0}$ de matrices stochastiques telles que $P(0) = I$ et pour tout t et s réels positifs, $P(t + s) = P(t)P(s)$. Les coefficients de $P(t)$ sont des fonctions dérivables $p_{i,j}(t)$.

Génératrice du semi-groupe

Si on dérive la relation $P(t+s) = P(t)P(s)$ par rapport à t , on obtient $P'(t+s) = P'(t)P(s)$. Pour $t = 0$, on obtient $P'(s) = P'(0)P(s)$.

Génératrice d'un semigroupe

On appelle génératrice du semi groupe la matrice $Q = P'(0)$. Tous les coefficients **hors diagonale** sont positifs. La somme de ces coefficients non diagonaux $q_{i,j}$, $j \neq i$ sur la ligne i vaut l_i . Le coefficient diagonal $m_{i,i}$ vaut $-l_i$ de sorte que la somme selon les lignes est toujours nulle pour toutes les lignes.

Au temps $t = 0$, la matrice de transition vaut l'identité ; les coefficients diagonaux sont égaux à 1, les autres à 0. Les diagonaux ne peuvent que décroître donc leur dérivée est négative ou nulle; les autres coefficients ne peuvent que croître donc leur dérivée est positive ou nulle. Enfin on a $\sum_i p_{i,j}(t) = 1$ donc $\sum_i p'_{i,j}(t) = 0 = \sum_i q_{i,j}(t)$.

Exponentielle de la matrice génératrice

Soit $Q = P'(0)$ la matrice génératrice du semi groupe $(P(t))_{t \geq 0}$; on définit l'exponentielle $\exp(tQ)$ par la série entière; alors $P_t = \exp(tQ)$.

Appelons $R(t) = \exp(tQ)$. Les matrices sQ et tQ commutent donc $\exp((t+s)Q) = \exp(tQ)\exp(sQ)$. De plus $R(0) = I$. Donc les $R(t)$ forment un semi groupe. Calculons la dérivée de $R(t)$ par la série entière : $R(t) = I + \sum_{k=1} \frac{Q^k}{k!} t^k$ donc

$$R'(t) = \sum_{k=1} \frac{Q^k}{(k-1)!} t^{k-1} = Q + \sum_{k=2} \frac{Q^k}{(k-1)!} t^{k-1} = QR(t).$$

$R(t)$ et $P(t)$ vérifient la même équation différentielle avec la même condition à l'origine donc ils sont égaux.

Lien avec les matrices de transition à temps discret

Un processus à temps continu observé aux temps $n \in \mathbb{N}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $P(1)$.

Inversement pour une chaîne de Markov de probabilité de transition P , si tous les coefficients diagonaux sont supérieurs à $1/2$, on peut définir une matrice génératrice Q engendrant un semi-groupe $P(t)$ tel que $P(1) = P$. La chaîne de Markov coïncide avec le processus de Markov observé aux temps entiers.

Soit $P = P(1)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P^n$. Donc le processus à temps continu coïncide avec la chaîne de transition P

On écrit $P(n+1) = P(n)P(1)$ par la relation de semi-groupe et on conclut par une récurrence immédiate.

On utilise la série entière $\ln(1-x) = \sum_{k=1} \frac{x^k}{k}$ qui converge pour $|x| < 1$. On pose $P = I - R$ et $Q = \ln(P) = \sum_{k=1} \frac{R^k}{k}$. Comme $R = I - P$, $r_{i,i} = 1 - p_{i,i} = \sum_{j \neq i} p_{i,j}$ et les autres coefficients sont ceux de P changés de signe. Donc $\sum_j |r_{i,j}| = 2(1 - p_{i,i}) < 1$. On a $\|R\| < 1$

Extension aux matrices de dimension infinie

On considère des matrices avec une infinité de lignes et de colonnes, correspondant aux modèles de Markov à espace d'état non borné (en général $\mathbb{N}$).

Définition

On définit $P = (p_{i,j})_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}}$. L'addition et la multiplication par un réel se font terme à terme. On définit une multiplication matricielle par $(PQ)_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{i,k} q_{k,j}$.

Remarque : bien que les matrices aient des dimensions compatibles avec la multiplication, celle-ci n'est pas toujours possible car les coefficients du produit sont définis par une série qui doit être convergente.

Matrices stochastiques de dimension infinie

Une matrice est stochastique si ses coefficients sont tous compris entre 0 et 1 et si les séries correspondant aux sommes des coefficients par ligne sont toutes égales à 1. La multiplication de deux matrices stochastiques est possible et donne une matrice stochastique.

Si P et Q sont stochastiques, $(PQ)_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{i,k} q_{k,j}$. On remarque que $0 \leq p_{i,k} q_{k,j} \leq p_{i,k}$

Norme d'algèbre des matrices de dimension infinie

Norme vectorielle pour les vecteurs de dimension infinie

On définit sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des vecteurs $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la norme $\|u\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |u_i|$;

On ne considère l'ensemble ℓ_1 des vecteurs telles que la norme précédente est convergente. Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. L'espace normé ℓ_1 est complet.

Norme d'algèbre

On définit sur les matrices infinies la norme d'algèbre $\|P\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{\infty} |p_{i,j}|$;

On observe que la norme des matrices stochastiques est toujours égale à 1. L'espace normé des matrices stochastiques est complet. On peut donc définir l'exponentielle de matrice de dimension infinie.