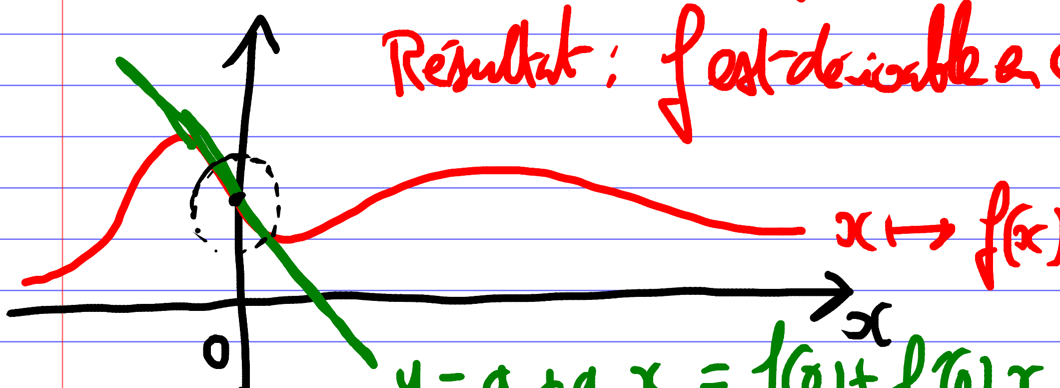
Séance du 22 avril 2021 — Développements limités — Programme : Ex 7-9-10

Rappels : tangente en 0 et position relative

On calcule un DL à un ordre $p \geq 2$ en 0 d'une fonction f :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x}_{\text{donne l'équation de la tangente en 0 à } f} + a_p x^p + o(x^p) \quad \text{avec } a_p \neq 0$$



Résultat : f est dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f admet un DL d'ordre ≥ 1 en 0.

$a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$

Position relative

$$f(x) - (a_0 + a_1 x) = a_p x^p + o(x^p)$$

$\Rightarrow$ $f(x) - (a_0 + a_1 x)$ est du signe de $a_p x^p$ quand $x \to 0$

On avait calculé la dernière fois que :

(exo 7) $f_1(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x^2} = \underbrace{x}_{} - x^2 + o(x^2)$.

$\Rightarrow y = x$ équation de la droite tangente en 0

$\Rightarrow f_1(x) - x = \underbrace{-x^2 + o(x^2)}_{}$

< 0 quand x est suffisamment proche de 0

Le graphe de f_1 est en dessous de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

$\boxed{f_3(x) = e^{2x-x^2}}$ On a le DL en 0 : $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.

On compose ce DL avec $u = 2x - x^2 \xrightarrow{x \to 0} 0$:

$$e^{2x-x^2} = 1 + (2x-x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2} + o\left((2x-x^2)\right)$$

$$= 1 + 2x - x^2 + \frac{(2x)^2 - 2\times(2x)\times x^2 + x^4}{2} + o\left((2x-x^2)^2\right)$$

$$= 1 + 2x - x^2 + 2x^2 \underbrace{- 2x^3 + \frac{x^4}{2}}_{o(x^2)} + \underbrace{o\left((2x-x^2)^2\right)}_{o(x^2)}$$

On a $2x - x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 2x \Rightarrow (2x-x^2)^2 \underset{x\to 0}{\sim} (2x)^2 = 4x^2$

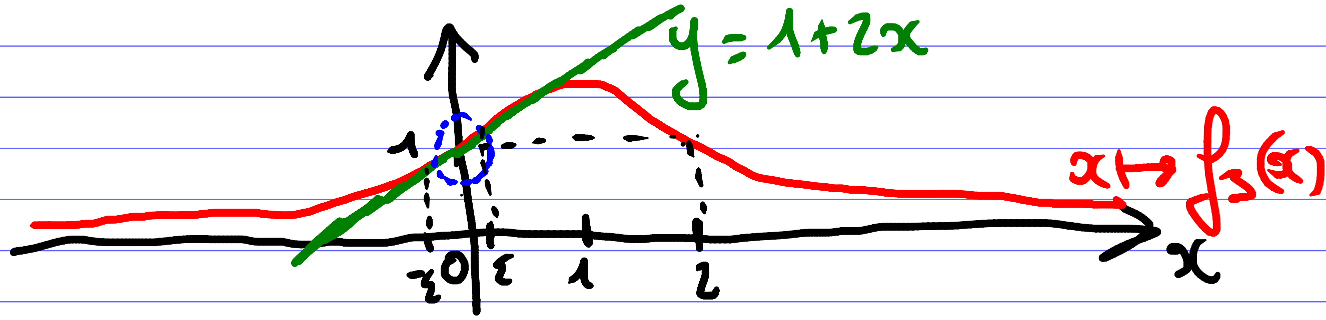
$$\Rightarrow o\left((2x-x^2)^2\right) = o(x^2).$$

Ainsi : $\boxed{e^{2x-x^2} = 1 + 2x + x^2 + o(x^2)}$

Equation de la tangente en 0 : $y = 1 + 2x$

Position relative : L'écart entre f_3 et la tangente en 0 est donné par $x^2 + o(x^2) \} > 0$ quand x est suffisamment proche de 0.

$\Rightarrow$ Le graphe de f_3 est au dessus de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.



⚠ Le graphe de f_3 n'est pas au dessus de sa tangente à 0 partout, seulement localement autour de 0.

$\boxed{f_2(x) = \arccos(x) + \cos(x)}$ $\quad \arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
- On avait vu (exercice 3) que $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Ainsi : $\arccos'(x) = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= -1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$\Longrightarrow$ (par intégration) $\arccos(x) = \underbrace{\arccos(0)}_{=\frac{\pi}{2}} - x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

$= \dfrac{\pi}{2} - x - \underbrace{\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}_{= o(x^2)}$

$= \dfrac{\pi}{2} - x + o(x^2)$.

On obtient : $\arccos(x)+\cos(x) = \frac{\pi}{2} - x + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$= \underbrace{1+\frac{\pi}{2} - x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Equation de la tangente : $\boxed{y = 1+\frac{\pi}{2} - x}$

Position relative : l'écart entre f_2 et la tangente en 0 est $-\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $\Big\}$ < 0 lorsque x est suffisamment proche de 0

Le graphe de f_2 est en dessous de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

$$\boxed{f_1(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt}$$

À l'ex 3, nous avions calculé que

$$f_1(x) = \underline{x} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

<u>Équation de la tangente</u> : $y = x$

<u>Position relative</u> : Rq : On a ici besoin d'un DL à l'ordre 3. Un DL à l'ordre 2 $\left(f_1(x) = x + o(x^2)\right)$ n'aurait pas suffi.

L'écart entre f_1 et sa tangente en 0 est $\underbrace{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}$ du signe de x lorsque $x \to 0$.

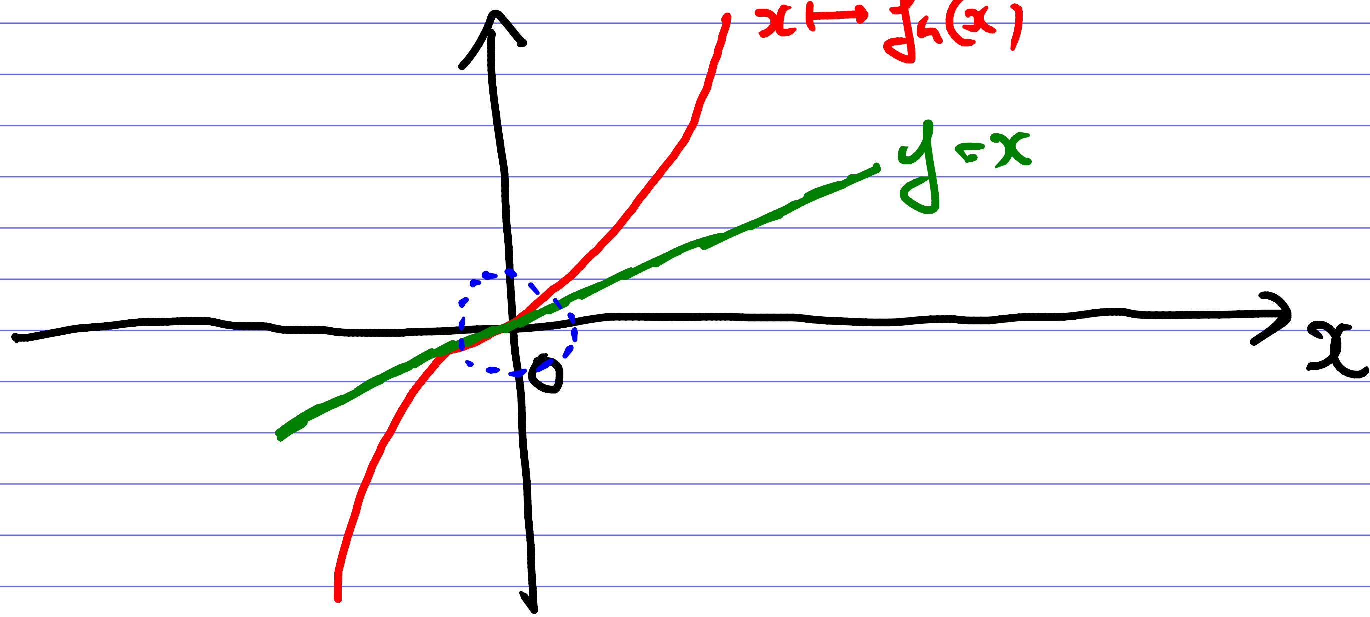
< 0 lorsque $x < 0$ et proche de 0

> 0 lorsque $x > 0$ et proche de 0

• Quand $x<0$ et suffisamment proche de 0, le graphe de f_1 est en dessous de sa tangente en 0.

• —— $x>0$ ——————, ——————
au dessus ——————.

$\Longrightarrow$ 0 est un **point d'inflexion** de f_1.



DL en un point $x_0 \neq 0$

- f admet un DL à l'ordre n en x_0 si :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \times (x-x_0) + \dots + a_n \times (x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \\ &= a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n) \quad \text{avec } h = x - x_0 \\ &= f(x_0+h). \end{aligned}$$

écrire un DL en x_0 pour $f(x)$ $\Longleftrightarrow$ écrire un DL en 0 pour $g(h) = f(x_0+h)$

- Si $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_p(x-x_0)^p + o\left((x-x_0)^p\right)$

$\left[\begin{array}{l} p \geq 2 \\ a_p \neq 0 \end{array}\right.$ l'équation de la tangente à f en x_0 est $y = a_0 + a_1(x-x_0)$.

La position relative du graphe de f par rapport à cette tangente est donnée par le signe de $a_p(x-x_0)^p + o\left((x-x_0)^p\right)$.

<u>Stratégie systématique</u> : Poser $x = x_0 + h$

$x \to x_0 \iff h \to 0$

On fait l'étude en 0 de $h \mapsto f(x_0+h)$.

Enfin, on se ramène au cas $x_0 \neq 0$ en se rappelant que $h = x - x_0$.

Ex 10

$$\boxed{f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}}$$

En posant $x = 1+h$, l'étude en $x=1$ est équivalente à l'étude en $h=0$.

$$f(x) = f(1+h) = (1+h) + 2\sqrt{1+h} - \sqrt{3+1+h}$$

$$= 1 + h + 2\sqrt{1+h} - \sqrt{4+h}$$

Calculons un DL à l'ordre (au moins) 2 en 0 de $h \mapsto f(1+h)$

- $\sqrt{1+h} = (1+h)^{1/2} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)$.
- $\sqrt{4+h} = \underbrace{\sqrt{4\left(1+\frac{h}{4}\right)}} = 2\sqrt{1+\frac{h}{4}} = 2\left(1 + \frac{\left(\frac{h}{4}\right)}{2} - \frac{\left(\frac{h}{4}\right)^2}{8} + o(h^2)\right)$

pour obtenir une expression de la forme $\sqrt{1+u}$ avec $u \to 0$.

$\frac{h}{4} \to 0$

on compose avec le DL à l'ordre 2 de $(1+u)^{1/2}$

$$= 2\left(1 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{16 \times 8} + o(h^2)\right)$$

$$= 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} + o(h^2).$$

Ainsi : $f(1+h) = 1 + h + 2\left(\cancel{1} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8}\right) - \cancel{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{64} + o(h^2)$

$$= 1 + \frac{7}{4}h - \frac{15}{64}h^2 + o(h^2).$$

On écrit maintenant $h = x - 1$:

$$f(x) = 1 + \frac{7}{4}(x-1) - \frac{15}{64}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$

On a obtenu le DL à l'ordre 2 de f en $x = 1$.

Équation de la tangente : $\boxed{y = 1 + \frac{7}{4}(x-1)}$

Position relative : L'écart entre f et sa tangente en $x=1$

$$\text{est } \underbrace{-\frac{15}{64}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)}_{< 0 \text{ quand } x \text{ est suffisamment proche de } 1.}$$

Le graphe de f est au dessous de sa tangente en $x=1$, au voisinage de ce point.

$\boxed{\text{Ex 9}}$ $\quad f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x+3}}{x-1}$.

Q1 : **Domaine de déf. de f :**

$$\left.\begin{array}{l} x+3 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x \geq -3 \\ \Rightarrow x \neq 1 \end{array}$$

Donc f est définie sur $[-3,1[\cup]1;+\infty[$

On va montrer que f est toutefois "prolongeable par continuité en $x=1$" = "$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existe et n'est pas infinie".

On doit calculer $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2-\sqrt{3+x}}{x-1}$

Comment faire ? En faisant un DL en $x=1$ du numérateur et du dénominateur de f.

(même méthode que celle vue pour $x=0$ à l'ex 5)

En fait, on se ramène au cas où $x=0$ en posant $x=1+h$ (car $x \to 1 \Leftrightarrow h \to 0$ si $x=1+h$).

Posons donc $x=1+h$ et calculons $\lim_{h \to 0} f(1+h)$ à l'aide de DL en 0 du numérateur et du dénominateur de $f(1+h)$.

$$f(1+h) = \frac{2-\sqrt{3+1+h}}{1+h-1} = \frac{2-\sqrt{4+h}}{h}$$

On nous demande de calculer un DL à l'ordre 1 du numérateur.

On a calculé (ex 10) $\sqrt{4+h} = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} + o(h^2)$

$$= 2 + \frac{h}{4} + o(h)$$

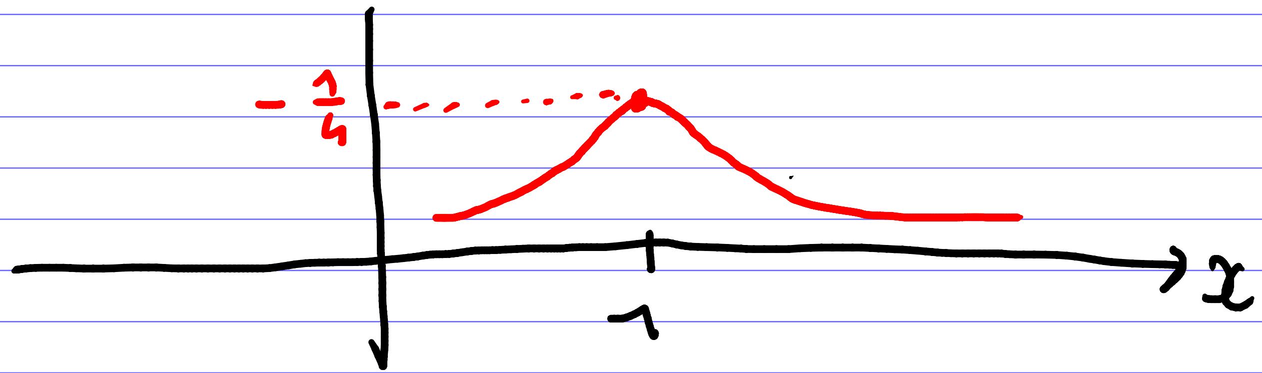
$$\Rightarrow 2 - \sqrt{4+h} = \cancel{2} - \left(\cancel{2} + \frac{h}{4} + o(h)\right) = -\frac{h}{4} + o(h).$$

$$\Rightarrow f(1+h) = \frac{-\frac{h}{4} + o(h)}{h} = -\frac{1}{4} + \underbrace{\frac{o(h)}{h}}_{o(1)} = -\frac{1}{4} + o(1)$$

Ainsi $\lim_{h \to 0} f(1+h) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ f est prolongeable par continuité en $x = 1$

en posant $f(1) = -\frac{1}{4}$



f est maintenant définie par :

$$f(x) \begin{cases} = -\frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \\ = \frac{2-\sqrt{3+x}}{x-1} & \text{si } x \geqslant -3 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$$

On a montré que f, ainsi définie, est continue sur $[-3, +\infty[$.

$$\underbrace{f(1+h) = -\frac{1}{4} + a_1 h}_{\text{donne l'éq. de la tangente}} + o(h)$$

$$f(1+h) = -\frac{1}{4} + a_1 h + a_2 h^2 + o(h^2)$$

vous donne la position relative par rapport à la tangente.