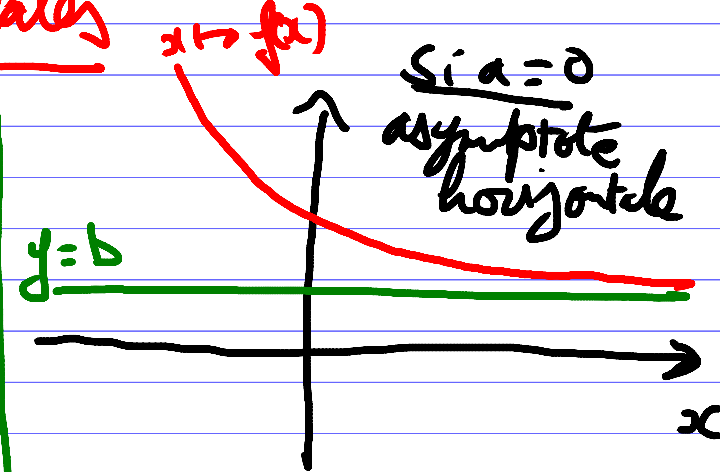
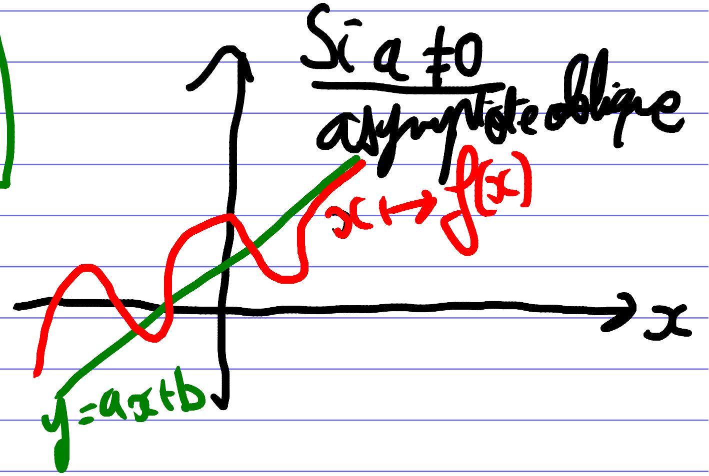
Séance du 23 avril 2021

Asymptotes en $\pm\infty$: asymptotes obliques, horizontales

Déf : Une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote d'une fonction f en $+\infty$ et/ou en $-\infty$

si :
$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$$
et/ou
$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$$





Objectif : utiliser ce qu'on connaît des DL pour calculer les asymptotes d'une fonction et la position relative de cette fonction par rapport à son asymptote.

Méthode : ① Trouver un équivalent "simple" de f.

cas ⓐ : $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} ax$ avec $a \neq 0$

$\Rightarrow$ asymptote oblique

cas ⓑ : $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} b$ avec $b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ asymptote horizontale

② On écrit $f(x) = ax \cdot g(x)$ ou $f(x) = b \cdot g(x)$ (cas ⓑ)

(cas ⓐ)

où $g(x) = \dfrac{f(x)}{ax}$ ou $\dfrac{f(x)}{b} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1$

Puis on cherche à écrire, en utilisant les DL :

cas ⓐ : $g(x) = 1 + a_1 \cdot \dfrac{1}{x} + a_2 \cdot \dfrac{1}{x^2} + \dots + a_n \cdot \dfrac{1}{x^n} + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$

avec $n \geqslant 2$.

cas ⓑ : $g(x) = 1 + a_1 \dfrac{1}{x} + \dots + a_n \dfrac{1}{x^n} + o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$

avec $n \geqslant 1$.

Etude de la position relative : $f(x) - (ax+b) = \underbrace{\dfrac{a_i}{x^i} + o\left(\dfrac{1}{x^i}\right)}_{}$

est du signe de $\dfrac{a_i}{x^i}$.

Ex 12

$$\boxed{f_1(x) = x\sqrt{\frac{x+2}{x}}}$$

f_1 n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

En revanche, f_1 est définie lorsque $x \to \pm\infty$.

On va donc étudier les asymptotes de f_1 en $+\infty$ et $-\infty$.

1ère étape : asymptote oblique/horizontale ?

$$f_1(x) = x\sqrt{\frac{x+2}{x}} = x\underbrace{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}_{\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x$$

: asymptotes obliques en $+\infty$ et $-\infty$.

2ème étape : $f_1(x) = x\,g(x)$ avec $g(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1$

Ici, $g(x) = \sqrt{1+\frac{2}{x}}$.

On cherche un développement asymptotique de g au moins d'ordre 2.

On utilise le DL en 0 de la fonction $\sqrt{1+u}$.

On écrit le DL en 0 à l'ordre 2 :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2).$$

On compose avec $u(x) = \frac{2}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$ (autorisé) :

$$\sqrt{1+\frac{2}{x}} = 1 + \frac{2}{2x} - \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{8} + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi : $f(x) = x\sqrt{1+\frac{2}{x}} = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ quand $x \to \pm\infty$

$$= \underbrace{x + 1}_{\text{équation de l'asymptote}} \underbrace{- \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{écart par rapport à l'asymptote}}.$$

On a obtenu un développement asymptotique de f.

L'équation de l'asymptote oblique à f en $+\infty$ et $-\infty$

est $y = x+1$.

L'écart entre f et son asymptote est $\underbrace{-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$.

< 0 quand $x \to +\infty$

> 0 quand $x \to -\infty$

Ainsi, le graphe de f est en dessous

de son asymptote au voisinage de $+\infty$

et au dessus ——— $-\infty$.

$$\boxed{f_2(x) = \sqrt{x(1+2x)}\, e^{1/x}}$$ f_2 est définie lorsque $x \to +\infty$ ou $-\infty$.

On va chercher ses asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.

Asymptotes obliques/horizontales ?

- $f_2(x) = \underbrace{\sqrt{x+2x^2}}_{\underset{x\to\pm\infty}{\sim} 2x^2} \underbrace{e^{1/x}}_{\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,|x|$

$$\underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}\,x$$

$$\underset{x\to-\infty}{\sim} -\sqrt{2}\,x$$

deux cas à distinguer

On a deux asymptotes obliques en $+\infty$ et $-\infty$.

- $f_2(x) = \sqrt{2}\,|x| \times g(x)$ où $g(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$.

On a $g(x) = \sqrt{1+\frac{1}{2x}}\; e^{1/x}$

On va calculer un développement asymptotique de g au moins à l'ordre 2.

On écrit le DL en 0 de $\sqrt{1+u}$ et e^u, puis on composera avec $\frac{1}{2x}$ et $\frac{1}{x}$.

On les écrit à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} \sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + o(u^2) \\ e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2) \end{cases}$$

On compose maintenant avec $u(x) = \frac{1}{2x}$ et $u(x) = \frac{1}{x}$;

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{1+\frac{1}{2x}} &= 1 + \frac{1}{4x} - \frac{\left(\frac{1}{2x}\right)^2}{8} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ e^{1/x} &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}\right.$$

On obtient : $\sqrt{1+\frac{1}{2x}}\, e^{1/x} = \left(1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{32x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{5}{4x} + \frac{23}{32x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En $+\infty$: $f_2(x) = \sqrt{2}\, x \times \left(1 + \frac{5}{4x} + \frac{23}{32x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$$= \sqrt{2}\, x + \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{23}{32x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

L'équation de l'asymptote oblique de f en $+\infty$

est $y = \sqrt{2}\, x + \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

L'écart entre f_2 et son asymptote est $\underbrace{\frac{23}{32x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{>0 \text{ quand } x \to +\infty}$

$\Longrightarrow$ le graphe de f_2 est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

$\underline{\text{En } -\infty}$: $f_2(x) = -\sqrt{2}x\left(1 + \frac{5}{4x} + \frac{23}{32x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

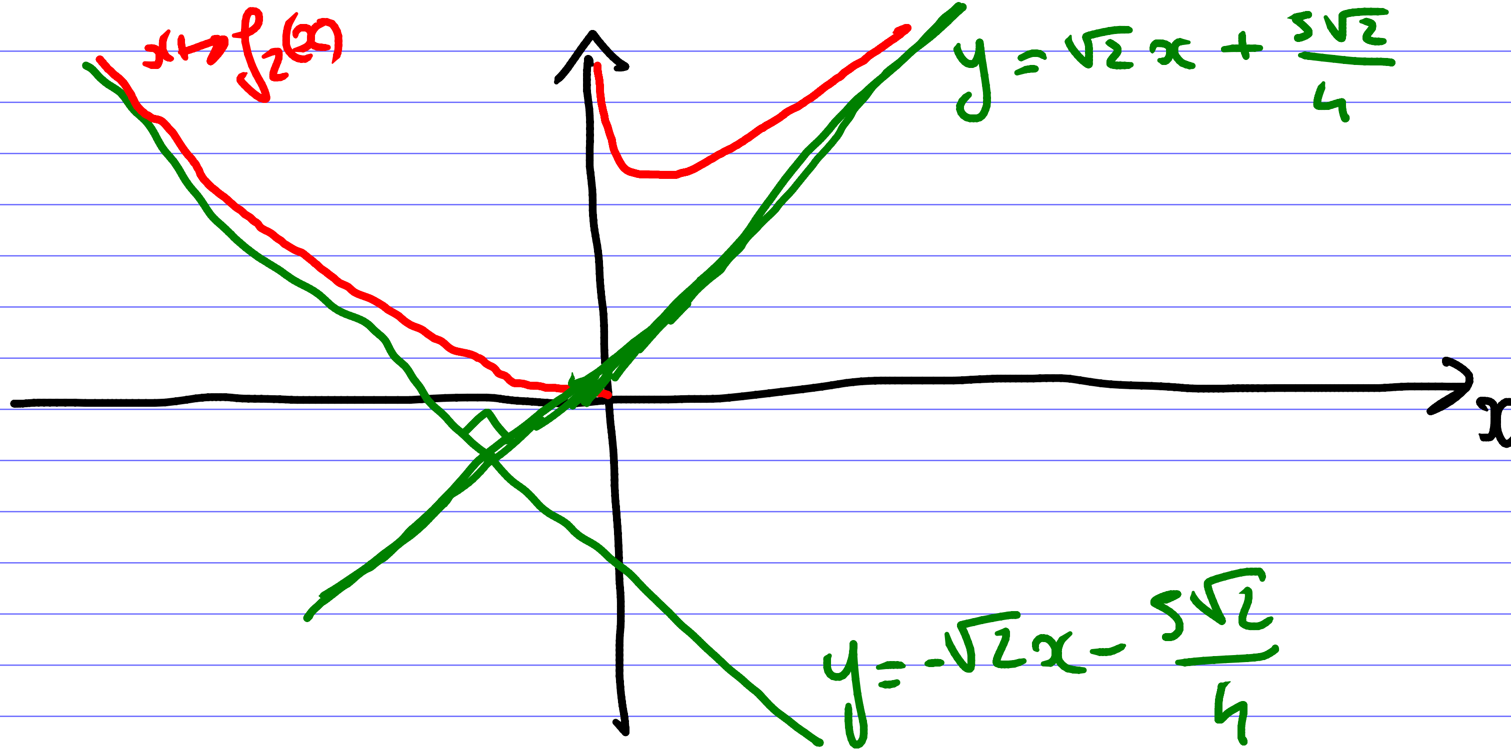
$$= -\sqrt{2}x - \frac{5\sqrt{2}}{4} - \frac{23\sqrt{2}}{32x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

L'asymptote oblique de f_2 en $-\infty$ a pour équation

$$y = -\sqrt{2}x - \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

L'écart entre f_2 et son asymptote est $\underbrace{-\frac{23\sqrt{2}}{32x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{>0 \text{ quand } x \to -\infty}$

Donc le graphe de f_2 est au dessus de son asymptote au voisinage de $-\infty$.



$$\boxed{f_3(x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x}\right)}$$

⚠ f_3 n'est pas définie pour les $x < 0$.

f_3 a une asymptote horizontale $y = \ln(2)$ en $+\infty$.

L'écart entre f_3 et cette asymptote est $\frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\Rightarrow$ le graphe de f_3 est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Jeudi 6 mai : interro ≈ 30 min sur les DL

programme : ce qu'on a fait dans la feuille 4.

Feuille 5 : Équations différentielles

Équation diff. (ED) = équation dont les solutions sont des fonctions.

ED d'ordre 1 : Soit a une fonction continue sur un intervalle I.

ED d'ordre 1 : $y'(t) = a(t)\,y(t)$

Vous avez vu que les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda e^{A(t)}$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A(t)$ une primitive sur I de la fonction $a(t)$.

$t \mapsto y(t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

<u>exemple</u> : $y'(t) = y(t) = a(t)y(t)$ avec $a(t) = 1$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de $\underbrace{t \longmapsto 1}_{a}$ est $\underbrace{t \longmapsto t}_{A}$

Les solutions de l'ED sont donc les f^{o} $y(t) = \lambda e^{t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On observe que y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ <u>$\forall \lambda$</u>.

Ex1 :

(d) $y'(t) + t\sin(t)y(t) = 0 \iff y'(t) = -t\sin(t)y(t)$
$= a(t)\,y(t)$

où $a(t) = -t\sin(t)$.

La fonction a est continue sur $\mathbb{R}$, on va donc résoudre l'ED sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On doit trouver une primitive de a sur $\mathbb{R}$, par exemple la fonction A telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) = \int_0^t a(u)\,du = \int_0^t -u\sin(u)\,du \underset{(IPP)}{=} t\cos(t) - \sin(t).$$

Ainsi, les solutions de l'ED sont les fonctions y t.q :

$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{A(t)} = \lambda e^{t\cos(t)-\sin(t)}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les solutions sont C^1 sur $\mathbb{R}$.

(e) $(1+t^2)y'(t) + 2y(t) = 0 \iff (1+t^2)y'(t) = -2y(t)$

$$\underset{\underline{\substack{1+t^2>0 \\ \forall t\in\mathbb{R}}}}{\iff} y'(t) = -\frac{2}{1+t^2}y(t)$$

$$\iff y'(t) = a(t)y(t)$$

avec $a(t) = -\dfrac{2}{1+t^2}$. a est continue sur $\mathbb{R}$ donc on peut résoudre l'ED sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On cherche une primitive sur $\mathbb{R}$ de a.

On remarque que $a(t) = -2 \times \dfrac{1}{1+t^2} = -2\arctan'(t)$

$\Rightarrow$ la fonction $A : t\in\mathbb{R} \longrightarrow -2\arctan(t)$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, toutes les solutions y de l'ED s'écrivent :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \lambda e^{A(t)} = \lambda e^{-2\arctan(t)}.$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les solutions sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Rq : Sur le même principe, vous pouvez résoudre (P)

$$(e^t+1)y'(t) - e^t y(t) = 0 \iff y'(t) = \frac{e^t}{e^t+1} y(t)$$

car $e^t+1>0$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Une primitive de $a(t) = \frac{e^t}{e^t+1}$ est $A(t) = \ln(e^t+1)$.

On peut résoudre sur $\mathbb{R}$: $y(t) = \lambda e^{\ln(e^t+1)}$

$= \lambda(e^t+1)$.

b) $ty'(t) - 2y(t) = 0 \iff ty'(t) = 2y(t)$

$$\iff \left[\begin{array}{l} y'(t) = \frac{2}{t} y(t) \quad \forall t \neq 0 \ (*) \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$$

On doit résoudre $(*)$ sur $I_1 =]-\infty ; 0[$ et $I_2 =]0 ; +\infty[$.

On a sur I_1 et I_2 $y'(t) = a(t) y(t)$ avec $a(t) = \frac{2}{t}$.

<u>Une</u> primitive de a sur $\mathbb{R}^* = I_1 \cup I_2$ est $A : t \mapsto 2 \ln|t|$

(<u>voir ex 1 de la feuille 3</u>)

Ainsi, les solutions de $(*)$ sur I_1 vérifient :

$$\forall t \in I_1, \ y(t) = \lambda_1 e^{2\ln|t|} = \lambda_1 |t|^2 = \lambda_1 t^2$$

et sur I_2 : $\forall t \in I_2, \ y(t) = \lambda_2 e^{2\ln|t|} = \lambda_2 t^2$.

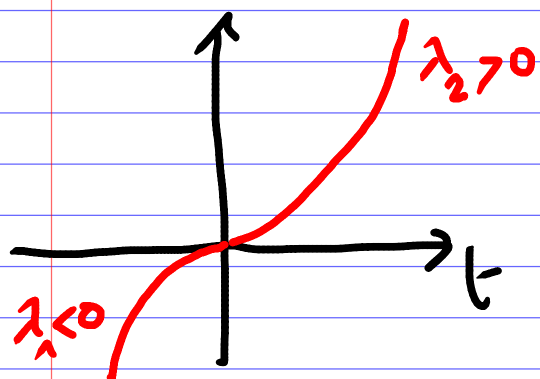
Donc les solutions y de notre ED sont telles que :

$$y(t) = \begin{cases} \lambda_1 t^2 & \forall t<0 \\ \lambda_2 t^2 & \forall t>0 \\ 0 & \text{si } t=0 \end{cases}$$

On a $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} y(t) = \lim_{t\to 0} \lambda_2 t^2 = 0 = y(0) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t<0}} \underbrace{y(t)}_{\lambda_1 t^2}$

$\Rightarrow$ y est continue à 0.

De la même manière, $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} y'(t) = \lim_{t\to 0} 2\lambda_1 t = 0 = \lim_{t\to 0} 2\lambda_2 t = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t<0}} y'(t)$



$\Rightarrow$ y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.