Séance du 20 mai

ED d'ordre 1 avec 2nd membre

$$y'(t) = ay(t) + b(t)$$

Solutions = solutions de l'ED homogène associée $y'(t) = a(t)y(t)$ + solution particulière

calculée grâce à la méthode de la variation de la constante

ED d'ordre 2 avec 2nd membre : $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$

Solutions = solutions de l'ED homogène associée $y'' + ay' + by = 0$ + solution particulière

on ne peut plus appliquer la variation de la constante

On trouve une solution particulière en fonction des indications de l'énoncé.

$\boxed{\text{Ex 7}}$ $y'' + y' + 2y = (\cos(t) - \sin(t))e^{-t}$.

Soit $y_0(t) = (a\cos(t) + b\sin(t))e^{-t}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ solution particulière.

$$\iff y_0''(t) + y_0'(t) + 2y_0(t) = (\cos(t) - \sin(t))e^{-t}.$$

On calcule :

$$y_0'(t) = (-a\sin(t) + b\cos(t))e^{-t} - (a\cos(t) + b\sin(t))e^{-t}$$
$$= (-a\sin(t) + b\cos(t))e^{-t} - y_0(t).$$

$$y_0''(t) = ((-a\sin(t) + b\cos(t))e^{-t})' - y_0'(t)$$
$$= (-a\cos(t) - b\sin(t))e^{-t} - \underbrace{(-a\sin(t) + b\cos(t))e^{-t}}_{y_0'(t) + y_0(t)} - y_0'(t)$$

$$= (-a\cos(t) - b\sin(t))e^{-t} - 2y_0'(t) - y_0(t).$$

Ainsi : $y_0''(t) + y_0'(t) + 2y_0(t)$

$$= \left(-a\cos(t) - b\sin(t)\right)e^{-t} - 2y_0'(t) - y_0(t) + y_0'(t) + 2y_0(t)$$

$$= \left(-a\cos(t) - b\sin(t)\right)e^{-t} - y_0'(t) + y_0(t)$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} - \left(-a\sin(t) + b\cos(t)\right)e^{-t} + 2y_0(t)$$

$$= \left(-a\cos(t) - b\sin(t)\right)e^{-t} - \left(-a\sin(t) + b\cos(t)\right)e^{-t} + 2\left(a\cos(t) + b\sin(t)\right)e^{-t}$$

$$= \left((a-b)\cos(t) + (a+b)\sin(t)\right)e^{-t}$$

$$= \left(\cos(t) - \sin(t)\right)e^{-t}.$$

y_0 est solution particulière

On cherche donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases}$

On trouve $a = 0$ et $b = -1$.

Ainsi : $y_0(t) = -\sin(t)\,e^{-t}$ est solution particulière de l'équation avec 2nd membre.

* On cherche maintenant les solutions de l'ED homogène associée

$$y'' + y' + 2y = 0$$

On cherche les racines de l'éq. caractéristique associée

$$X^2 + X + 2 = 0.$$

On calcule le discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 = -7 < 0.$

L'équation admet 2 solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \qquad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Les solutions de l'ED homogène s'écrivent

$$\tilde{y}(t) = e^{-\frac{t}{2}} \times \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Conclusion : Toutes les solutions de l'ED s'écrivent

$$y(t) = -\sin(t)\, e^{t} + e^{-\frac{t}{2}} \times \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right)\right)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Q1 : $y'' - 2y' + y = e^{t}$

Soit $y_0(t) = b t^2 e^{t}$ avec $b \in \mathbb{R}$ solution particulière.

$\Longleftrightarrow y_0''(t) - 2y_0'(t) + y_0(t) = e^{t}$

On calcule : $y_0'(t) = (bt^2 e^{t})' = (bt^2)' e^{t} + bt^2 (e^{t})'$
$= 2bt e^{t} + bt^2 e^{t}$
$= 2bt e^{t} + y_0(t)$

$y_0''(t) = \left(2bte^{t} + y_0(t)\right)'$
$= (2bte^{t})' + y_0'(t) = 2be^{t} + 2bte^{t} + 2bte^{t} + y_0(t)$.
$= 2be^{t} + 4bte^{t} + y_0(t)$

Ainsi ; $y_0''(t) - 2y_0'(t) + y_0(t)$
$= 2be^{t} + \cancel{4bt}e^{t} + \cancel{y_0(t)} - \cancel{4bt}e^{t} - \cancel{2y_0(t)} + \cancel{y_0(t)}$
$= 2be^{t}$
$= e^{t}$ car y_0 est solution particulière.

$\Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$ Ainsi $y_0(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{t}$ est solution particulière.

On cherche maintenant les solutions de l'ED homogène associée

$$y'' - 2y' + y = 0$$

(Calculées dans l'exercice 6) Elles s'écrivent

$$\tilde{y}(t) = (\lambda t + \mu) e^{t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Conclusion : Les solutions de l'ED s'écrivent

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{t} + (\lambda t + \mu) e^{t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$= \left(\frac{1}{2} t^2 + \lambda t + \mu\right) e^{t}.$$

Q2 : Résultats à chercher :

1. Solution particulière : on doit trouver $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{2}$.
2. Solutions de l'ED homogène associée $y'' - 4y' + y = 0$

$$\tilde{y}(t) = \lambda e^{(2+\sqrt{3})t} + \mu e^{(2-\sqrt{3})t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. **Conclusion** : les solutions de l'ED s'écrivent

$$y(t) = \left(\frac{t}{3} + \frac{1}{2}\right) e^{t} + \lambda e^{(2+\sqrt{3})t} + \mu e^{(2-\sqrt{3})t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Équations différentielles à variables séparables

$$y'(t) = F(y(t))\, g(t) \quad \text{avec } F, g \text{ continues}$$

(ED linéaire d'ordre 1) cas particulier $y'(t) = a(t)\,y(t)$ $\Big\{$ donc $F(X) = X$

Méthode de résolution

① Chercher les solutions constantes, càd :

$$y(t) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

On a $y'(t) = 0 = F(y(t))\, g(t) = F(y_0)\, g(t)$.

Si on suppose que g ne s'annule pas, on cherche donc y_0 tels que $F(y_0) = 0$.

② Chercher les solutions non constantes.

Soit $y(t)$ une solution sur un intervalle I telle que

$$F(y(t)) \neq 0 \text{ sur } I.$$

$$\boxed{\frac{y'(t)}{F(y(t))} = g(t)}$$

On introduit ϕ primitive de $\frac{1}{F}$.

Pourquoi ? Car $(\phi(y(t)))' = y'(t) \times \phi'(y(t))$

$$= \frac{y'(t)}{F(y(t))} = g(t)$$

$$\Rightarrow \phi(y(t)) = G(t) + C$$

où G primitive de g
et C constante.

Ex 9 : $y'(t) = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{k}\right)$ avec $r > 0$, $k > 0$.

$$= F(y(t)) \times g(t).$$

Question : F ? g ?

Methode pour trouver F et g :

① Remplacer $y(t)$ par une variable X.

② Tout ce qui ne dépend que de X est la fonction F.
Tout ce qui ne dépend que de t est la fonction g.

$$y'(t) = \underbrace{r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{k}\right)}_{= rX\left(1 - \frac{X}{k}\right)} \quad \Bigg\} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} F(X) = rX\left(1 - \frac{X}{k}\right) \\ g(t) = 1 \end{array}\right.$$

On observe que $y'(t) = F(y(t))\, g(t) = F(y(t))$

avec $\begin{cases} F(X) = rX\left(1 - \dfrac{X}{k}\right) \\ g(t) = 1 \end{cases}$

<u>Résolution de l'ED</u>

<u>Étape n°1</u> : Trouver les solutions constantes, càd $y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $F(y_0) = 0$.

$$\iff r y_0 \left(1 - \frac{y_0}{k}\right) = 0$$

$$\iff y_0 = 0 \text{ ou } y_0 = k$$

<u>Conclusion</u> : $y(t) = 0$ et $y(t) = k$ sont les solutions constantes de l'équation.

Étape n°2 : Trouver les solutions non constantes.

Soit $y(t)$ solution sur un intervalle I

pour l'instant inconnu

telle que $F(y(t)) \neq 0$ càd

$y(t) \neq 0$ et k sur l'intervalle I.

Sur l'intervalle I, on a : $\dfrac{y'(t)}{F(y(t))} = 1$

$\Rightarrow \Phi(y(t)) = t + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

si Φ est une primitive de $\dfrac{1}{F}$.

<u>Objectif</u> : Trouver une primitive de $\frac{1}{F}$.

$$\frac{1}{F(X)} = \frac{1}{rX\left(1-\frac{X}{k}\right)} = \frac{A}{rX} + \frac{B}{1-\frac{X}{k}} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

décomposition en éléments simples

$$= \frac{A\left(1-\frac{X}{k}\right) + BrX}{rX\left(1-\frac{X}{k}\right)}$$

$$= \frac{A + X\left(Br - \frac{A}{k}\right)}{rX\left(1-\frac{X}{k}\right)}$$

Par identification, on doit avoir

$$1 = A + X\left(Br - \frac{A}{k}\right)$$

$$\Rightarrow A = 1 \text{ et } Br - \frac{A}{k} = 0$$

$$\Rightarrow A = 1 \text{ et } Br - \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow \boxed{A = 1 \text{ et } B = \frac{1}{rk}}$$

Ainsi : $\dfrac{1}{F(X)} = \dfrac{1}{rX} + \dfrac{1}{rk\left(1-\frac{X}{k}\right)}$.

On en déduit une primitive de $\dfrac{1}{F}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0 ; k\}$:

$$\Phi(X) = \frac{1}{r}\ln|X| - \frac{1}{r}\ln\left|1-\frac{X}{k}\right|$$

On obtient : $\Phi(y(t)) = t + C$ où C constante réelle

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\ln|y(t)| - \frac{1}{r}\ln\left|1-\frac{y(t)}{k}\right| = t + C$$

je multiplie par r et je passe à l'exponentielle

$$\Rightarrow \frac{|y(t)|}{\left|1-\frac{y(t)}{k}\right|} = e^{rt+rC} = e^{rC} \times e^{rt}$$

Cherchons les solutions $y(t)$ telles que

$$0 < y(t) < k \quad \forall t \in I.$$

On a alors :

$$\frac{y(t)}{1-\frac{y(t)}{k}} = e^{rC} e^{rt}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = e^{rC} e^{rt} \left(1 - \frac{y(t)}{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{e^{rC} e^{rt}}{1 + \frac{1}{k} e^{rC} e^{rt}}}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{\tilde{C} e^{rt}}{1 + \frac{\tilde{C}}{k} e^{rt}}} \text{ avec } \tilde{C} = e^{rC} > 0$$

Le dénominateur $1+\frac{\tilde{C}}{k}e^{rt}$ ne s'annule jamais.

Donc on a trouvé une solution sur $I=\mathbb{R}$.

Réciproquement, en remontant les calculs, on trouve que

$$y(t)=\frac{\tilde{C}e^{rt}}{1+\frac{\tilde{C}}{k}e^{rt}}$$ est solution sur $\mathbb{R}$ telle que

avec $\tilde{C}>0$ $\qquad 0<y(t)<k \quad \forall t\in\mathbb{R}$.

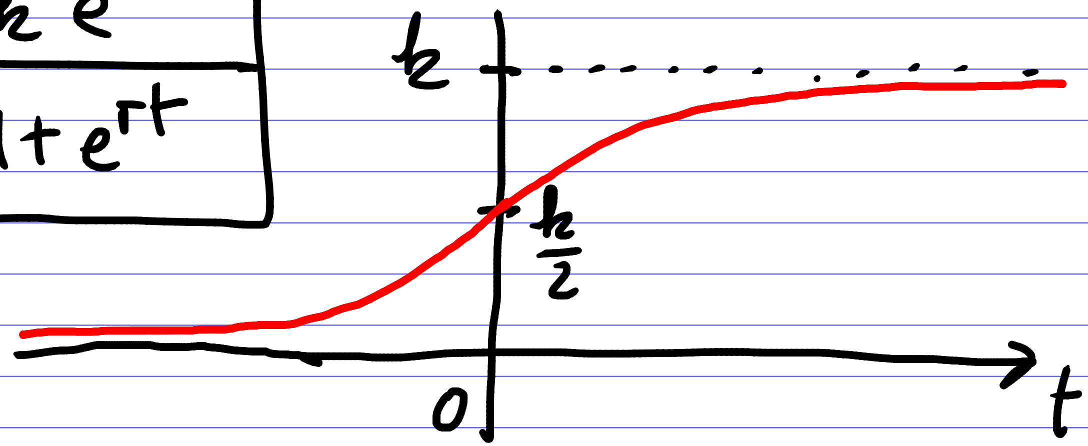
On a ainsi trouvé toutes les solutions non constantes comprises entre 0 et k et définies sur $\mathbb{R}$.

On suivant la même méthode pour trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ telles que $y(t) < 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$ ou $y(t) > k \; \forall t \in \mathbb{R}$.

- Cherchons l'unique solution $y(t)$ t.q $y(0) = \frac{k}{2}$.

$$\Longleftrightarrow \frac{\tilde{C}}{1+\frac{\tilde{C}}{k}} = \frac{k}{2} \Longleftrightarrow \boxed{\tilde{C} = k}$$

Ainsi : $\boxed{y(t) = \frac{k e^{rt}}{1+e^{rt}}}$



$$y'(t) = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{k}\right)$$ } équation logistique

$y(t)$ = nbre de personnes ayant été contaminées au temps t
(dans une population de k personnes)

Lorsqu'on est début de l'épidémie, $y(t)$ est petit devant k
$y(t) \ll k$

Ainsi : $y'(t) \approx r\,y(t) \Rightarrow y(t) \approx e^{rt}$ } croissance exponentielle au début de l'épidémie

Quand $y(t)$ devient grand. Par exemple, $y(t) \approx \frac{k}{2}$
$\Rightarrow$ le terme $1 - \frac{y(t)}{k}$ n'est plus négligeable.
$y(t)$ ne croît plus exponentiellement.