Raisonner avec logique

1 Logique mathématique

Exercice 1. 1. $x \in \mathbb{R}$ $x^2 = 4$ car $x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C}$ $z = \bar{z}$ car et donc $z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ $x = \pi$ donc $e^{2ix} = 1$;

1. $x \in \mathbb{R}$ $x^2 = 4 \Leftarrow x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C}$ $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ $x = \pi \Rightarrow e^{2ix} = 1$;

Exercice 2. 1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0.$ 2. $\exists x \in \mathbb{R},\ x > x^2.$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists n^* \in \mathbb{N}$ tq $n^* > n.$ 4. $\exists x \in \mathbb{R}$ tq $\forall (n,d) \in \mathbb{N}^2,\ |x| \neq \frac{n}{d}.$
5. $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $\forall m \in \mathbb{N},\ n = \alpha m,\ \alpha \in \mathbb{N}.$ 6. $\forall x_1 < x_2 \in \mathbb{R},\ \exists q \in \mathbb{Q}$ tq $x_1 < q < x_2.$
7. $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ x_1x_2 \geq 0$ ou $x_1x_3 \geq 0$ ou $x_2x_3 \geq 0.$

Exercice 3. 3. Il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $q \in Q^{*+}$, $q \leq 0$ ou $q \geq \epsilon$;
4. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 < 0$.

Exercice 4. 1. non ; 2. oui ; 3. non.

Exercice 5. Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. f est majorée :
$$\exists M > 0,\ f(x) \leq M\ \forall x \in \mathbb{R}.$$
2. f est bornée :
$$\exists M > 0,\ |f(x)| \leq M\ \forall x \in \mathbb{R}.$$
3. f est paire :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x).$$
4. f est impaire :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x).$$
5. f ne s'annule jamais :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| > 0.$$
6. f est périodique :
$$\exists T > 0,\ f(x+T) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}.$$
7. f est croissante :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$
8. f est strictement décroissante :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

9. f n'est pas la fonction nulle :
$$\exists x \in \mathbb{R},\ |f(x)| > 0.$$

10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = n.$$

Exercice 6. Le but de cet exercice est de définir par contraposition la propriété P suivante pour $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$:
P : Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Définir la contraposée d'une implication $A \Rightarrow B$, A et B représentant des assertions.
2. Ecrire la contraposée de la proposition P.
3. Démontrer q'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$, avec $k \in N$ et $r \in \{1, 3\}$.
4. Prouver alors la contraposée de P.
5. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Exercice 7. Soit n un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$ de $[0,1]$. On veut montrer par l'absurde la propriété P suivante :
(P) : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$.

1.
$$\text{(P)} : \exists\, i \in [1,n] \text{ tq } |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1}{n}.$$

2.
$$\text{(non P)} : \forall i \in [1,n],\ |x_i - x_{i-1}| > \frac{1}{n}.$$

3. Supposons que (non P) est vraie. Alors $\forall i \in [1,n],\ |x_i - x_{i-1}| > \frac{1}{n}$. Ceci entraîne que
$$|x_n - x_0| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| > 1,$$
ce qui est absurde puisque x_0 et $x_n \in [0,1]$.

Exercice 8.
— $(\mathcal{P}_1)$ $\forall x \in B,\ T(x) \geq 2$m.

— $(\mathcal{P}_2)$ $\exists x \in B,\ T(x) \geq 2.40$m.

— (non $\mathcal{P}_1$) $\exists x \in B,\ T(x) < 2$m.

— (non $\mathcal{P}_2$) $\forall x \in B,\ T(x) < 2.40$m.

— $(\mathcal{P}_1)$ $x \in B \ \Rightarrow T(x) \geq 2$m.

— $(\mathcal{P}_1)$ $x \notin B$ ou $T(x) \geq 2$m.

— (non $\mathcal{P}_1$) $x \in B$ et $T(x) < 2$m.

2 Formaliser : le langage propositionnel

Exercice 9. 1.
(a) $\forall a,\ \texttt{mange}(\texttt{moi},\texttt{a}) \Rightarrow \texttt{aime}(\texttt{moi},\texttt{a})$.
(b) $\exists a,\ \texttt{mange}(\texttt{moi},\texttt{a})$ et non$(\texttt{aime}(\texttt{moi},\texttt{a}))$.
(c) $\forall p,\ \text{non}(\texttt{aime}(\texttt{p},\texttt{legumes})) \Rightarrow \forall a,\ \text{non}\texttt{mange}(\texttt{p},\texttt{a})$.
(d) $(\forall p, \exists a, \text{non}(\texttt{aime}(\texttt{p},\texttt{a}))$ et $\texttt{mange}(\texttt{p},\texttt{a})) \Rightarrow \texttt{mange}(\texttt{moi},\texttt{legumes})$.

2. Exprimer sous forme de phrase en langage naturel les propriétés correspondant aux formules suivantes :
(a) Tout le monde mange aux moins un aliment qu'il aime.
(b) Il y a un aliment que tout le monde aime et mange.

Exercice 10. 1.
(a) $\forall x,\ \texttt{pense}(\texttt{moi},\texttt{x}) \Rightarrow \text{non}(\texttt{dit}(\texttt{moi},\texttt{x}))$.
(b) $(\forall x,\ \texttt{pense}(\texttt{moi},\texttt{x}) \Rightarrow \texttt{triste}(\texttt{x})) \Rightarrow \forall \texttt{x},\ \text{non}(\texttt{dit}(\texttt{moi},\texttt{x}))$.
(c) $\forall x,\ \texttt{dit}(\texttt{moi},\texttt{x})$ et $\texttt{triste}(\texttt{x}) \Rightarrow \texttt{pense}(\texttt{moi},\texttt{x})$.
(d) $\forall (x,y),\ \texttt{pense}(\texttt{moi},\texttt{x})$ et $\texttt{pense}(\texttt{moi},\texttt{y}) \Rightarrow \texttt{x} = \texttt{y}$.

2.
(a) Je pense à tous ceux qui pensent à moi.
(b) Lorsque toutes mes pensées sont tristes, je me tais.
(c) Tout le monde a quelque chose qu'il pense mais qu'il ne dit pas.
(d) Il y a quelque chose que tout le monde pense mais que personne ne dit.

3 Le langage propositionnel pour y voir plus clair

Exercice 11. 1. Il existe au moins une voiture qui n'est pas rouge.
2. Les moutons écossais n'ont aucun côté noir ;
3. Il existe au moins une écurie avec un cheval qui n'est pas blanc ;
4. Il existe au moins un étudiant qui se réveille tous les jours de la semaine après 8h ;
5. Il existe au moins une prison avec un détenu qui ne déteste pas tous les gardiens ;
6. L'un au moins des habitants aux yeux bleus de la rue du Havre ne gagnera pas au loto ou prendra sa retraite après 50 ans.

Exercice 12. 1. Pierre n'aime pas Marie ou Marie n'aime pas Pierre.
2. Pierre aime Marie ou Marie aime Pierre.
3. Pierre n'aime pas Marie ou Marie aime Pierre.
4. Maire aime Pierre et n'en est pas aimée.
5. Marie n'aime pas Pierre, ou Pierre et Marie s'aiment mutuellement.
6. Marie est aimée de Pierre et elle l'aime aussi.
7. Pierre et maire s'aime mutuellement.
8. Marie aime Pierre ou elle en est aimée.

Exercice 13. Les 4 raisonnements sont valides.

Exercice 14. 1. On introduit les variables suivantes : b : il boit ; c : il est content ; m : il mange ; d : il dort.

Les formules se traduisent de la manière suivante :
1 : (non(b) et d) $\Rightarrow$ non(c)
2 : $b \Rightarrow$ (non(c) et d)
3 : non(m) $\Rightarrow$ (non(c) ou d)
4 : $m \Rightarrow$ (c ou b)
5 : c.
2.
(a) c est vraie, la contraposée de l'affirmation 2. nous permet de déduire que b est fausse (il ne boit pas).
(b) La contraposée de l'affirmation 1. permet alors de dire que d est fausse, donc qu'il n'a pas dormi. Et la contraposée de l'affirmation 3 permet enfin de dire qu'il n'a pas mangé.

Exercice 15. ([C] $\Rightarrow$ [N]) et [W] $\Rightarrow$ non [C]
il manque : [W] $\Rightarrow$ non [N]
en ajoutant cette implication on obtient
([C] $\Rightarrow$ [N]) et ([W] $\Rightarrow$ non [N]) et [W] $\Rightarrow$ non [C]

Il s'agit en fait d'un enthymème : une proposition qui semble logiquement vraie mais qui ne l'est pas car elle contient un implicite de l'esprit. Lorsque l'on complète cette proposition avec l'argument implicite manquant, on obtient une tautologie, c'est-à-dire une proposition logiquement vraie.

4 Trouver l'erreur

Exercice 16.

1. Il s'agit d'un *faux dilemme* puisqu'on peut être contre les deux.

2. Ce raisonnement est faux car il se base sur le fait que ($non(p) \Rightarrow q$) implique ($p \Rightarrow non(q)$), ce qui est bien sûr faux.

3. Ce raisonnement contient déjà l'acceptation de la conclusion. C'est ce qu'on appelle une *pétition de principe.*

4. *Tous ceux qui ont gagné ont joué. Donc si tu joues, tu gagnes.* La deuxième proposition est la réciproque de la première, qui est fausse dans ce cas-ci.

5. Il y a ici (au moins) un *faux dilemme.* En effet, le sondage ne propose que 2 solutions à cette situation, et ne laisse donc d'autre choix aux personnes interrogées que de choisir celle qui va leur porter le moins préjudice à première vue, c'est-à-dire la première. Or il y a plein d'autres possibilités pour faire face à la crise économique et trouver des sous pour financer les dépenses publiques, qui leur porteront moins préjudice que les deux propositions formulées : par exemple, augmenter les charges des grandes entreprises, taxer les revenus financiers, faire payer plus d'impôts aux quelques pourcents les plus aisés, etc.
   Voir à ce sujet l'article d'Acrimed : http ://www.acrimed.org/Presentation-tronquee-d-un-sondage-biaise-Le-Figaro-et-le-consensus-liberal-sur

5 Prêts pour résoudre des énigmes !

Exercice 17. On introduit les deux variables propositionnelles :
- (G) : il y a une oasis à gauche,
- (D) : il y a une oasis à droite.

1. Les données se traduisent par les formules propositionnelles suivantes :
A. G ou D
B. non D
C. G ou $D \Leftrightarrow$ non D

2) On regarde dans quels cas la formule C est vraie : ce n'est le cas que lorsque G est vraie et D est fausse. L'oasis est donc au bout de la route de gauche.

Exercice 18. Introduisons les variables propositionnelles suivantes :
P_1 : le portrait est dans le coffre ; P_2 : le portrait est dans le coffre 2 ; P_3 : le portrait est dans le coffre 3.

Les inscriptions se traduisent de la manière suivante :
A. P_1 ;
B. non P_2 ;
C. non P_1.

Un seul coffre contient le portrait, ce qui se traduit par :
$P_1 \Leftrightarrow$ non P_2 et $P_3 \Leftrightarrow$ non$(P_1$ou$P_2)$.

Si le portrait se trouve dans le coffre 1, alors A est vraie, ce qui implique que B est vraie et C est fausse.
Si le portrait se trouve dans le coffre 2, alors B est fausse et C est vraie, ce qui implique que A est fausse.
Si le portrait se trouve dans le coffre 3, alors A est fausse, B est vraie et C est vraie.

Une seule des trois inscriptions étant vraie, le portrait se trouve dans le coffre 2.

Exercice 19. Une solution est de poser la question suivante : “Si je vous demandais si la route de gauche mène vers Paris, que me répondriez-vous ?”. Dans les deux cas il répondra la vérité.