Quelques éléments pour raisonner avec logique

La logique est la discipline – dont les bases ont été jetées par Aristote – permettant de comprendre ce qu'est un raisonnement, et en particulier de savoir si un raisonnement est juste ou faux. Elle est donc un prérequis essentiel à de nombreuses disciplines, telles que les mathématiques, l'informatique, la philosophie ou encore la rhétorique.

Ce document constitue une petite introduction informelle à la logique, en particulier sous l'angle mathématique. Attention, il ne s'agit en aucun cas d'un exposé rigoureux des fondements de la logique formelle.

1. Proposition

Définition 1 (Proposition). Une proposition est un énoncé déclaratif dont on peut dire s'il est vrai ou s'il est faux, indépendamment de tout contexte de lieu, de temps, ou de personne qui le prononce. Un énoncé qui est à la fois vrai et faux n'est pas une proposition.

Remarque : en mathématiques une proposition est dite vraie si elle est démontrable.

2. Les connecteurs logiques

A partir d'une ou plusieurs propositions, on peut créer de nouvelles propositions à l'aide de connecteurs logiques.

Définition 2. (Négation, « non »). La négation d'une proposition est une proposition qui est vraie si celle-ci est fausse et vice-versa. Elle peut se traduire par « non », « il est faux que ...», « ne ... pas ».

Exemple : (a) Le facteur n'est pas passé ce matin.
(b) Il est faux que nous soyons des privilégiés.

Définition 3. (Conjonction, « et »). La conjonction de deux propositions est une proposition qui est vraie si les deux propositions sont simultanément vraies. Elle est fausse dès que l'une au moins des deux propositions est fausse. Elle peut se traduire par « et », « mais », « bien que ».

Exemples : (a) Céline est un grand écrivain mais c'est un personnage controversé.
(b) Son point de vue est intéressant bien que je ne le partage pas.
(c) $n \in \mathbb{N}$: $(n \in \mathbb{Z})$ et $(n \geq 0)$.

Définition 4. (Disjonction, « ou »). La disjonction de deux propositions est une proposition qui est vraie dès que l'une au moins des deux propositions est vraie. Elle est fausse si les deux propositions sont simultanément fausses. Elle peut se traduire par « ou », «à moins que », « quoique ». Attention, il s'agit du « ou inclusif », c'est-à-dire que p et q peuvent être toutes deux vraies dans le cas où p ou q est vraie.

Exemples : (a) Ce médicament peut provoquer des troubles de l'équilibre ou de la vue.
(b) Simon viendra à moins qu'il soit malade.
(c) $n \in \mathbb{Z}$: $(n \geq 0)$ou$(n \leq 0)$.

Définition 5. (Implication, « si ... alors »). Si p et q sont deux propositions, alors l'implication « si p alors q » est une proposition qui est vraie si p est faux, ou bien si p et q sont simultanément vrais. Cette implication est fausse uniquement si p est vraie et q est fausse.

L'implication est à la base du raisonnement mathématique. En partant d'une proposition P, une démonstration aboutit à un résultat Q : si cette démonstration est faite sans erreur, alors P implique Q est vraie et on notera P $\implies$ Q (ce qui signifie que si P est vraie alors Q est vraie). Dans ce cas, on dit que P est une condition suffisante pour Q, et Q est une condition nécessaire pour P.

Exemples : (a) Fais de bonnes études, tu auras un bon travail.
(b) Si Jupin a de bons avocats alors il n'ira pas en prison.
(c) $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (n \geq 0)$.

L'implication est transitive : c'est-à-dire que si p implique q et q implique r, alors p implique r :
(p $\implies$ q) et (q $\implies$ r) $\implies$ (p $\Rightarrow$ r)

Exemples :
(a) Les deux implications « Si Jean avait été là, le fusil n'aurait pas été chargé » et « Si le fusil n'avait pas été chargé, Martin ne serait pas mort » donnent « Si Jean avait été là, Martin ne serait pas mort ».
(b)$(X = a \Rightarrow Y = b)et(Y = b \Rightarrow Z = c) \Rightarrow (X = a \Rightarrow Z = c)$.

Définition 6. (Equivalence, « si et seulement si »). Si p et q sont des propositions, l'équivalence de p et q, notée p $\Leftrightarrow$ q, est vraie uniquement si p implique q et q implique p. L'équivalence peut se traduire par « p si et seulement si q », ce qui signifie « p si q » et « p seulement si q ».

En langage mathématique, si P $\Leftrightarrow$ Q est vraie on dit que P et Q sont équivalentes.

Exemples : (a) Nous irons à la plage sauf s'il pleut.
(b) $(n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (n \in \mathbb{Z})$ et $(n \geq 0)$.

4. Equivalences

Associativité :
(p ou q) ou r $\Leftrightarrow$ p ou (q ou r)
(p et q) et r $\Leftrightarrow$ p et (q et r)

Commutativité :
p ou q $\Leftrightarrow$ q ou p
p et q $\Leftrightarrow$ q et p

Distributivité :
(p ou q) et r $\Leftrightarrow$ (p et r) ou (q et r)
(p et q) ou r $\Leftrightarrow$ (p ou r) et (q ou r)

Négation d'une négation : non (non p) $\Leftrightarrow$ p

Négation d'une conjonction : non (p et q) $\Leftrightarrow$ (non p) ou (non q)

Exemples :
(a) La négation de « la vie est belle mais elle est courte » est « la vie n'est pas belle à moins qu'elle

ne soit pas courte ».
(b) Le négation de $(x \geq 0)$ et $(y \leq 0)$ est $(x < 0)$ ou $(y > 0)$.

Négation d'une disjonction : non (p ou q) $\Leftrightarrow$ (non p) et (non q)

Exemples :
(a) La négation de « Un homme doit être beau ou intelligent » est « Un homme ne doit être ni beau ni intelligent. ».
(b) La négation de $(x \geq 0)$ ou $(y \leq 0)$ est $(x < 0)$ et $(y > 0)$.

Equivalence entre une implication et sa contraposée : (p $\Rightarrow$ q) $\Leftrightarrow$ (non q $\Rightarrow$ non p)

Exemples :
(a) La proposition « S'il n'y a pas d'essence dans le réservoir de la voiture, cette dernière ne démarre pas » implique sa contraposée. « La voiture démarre donc il y a de l'essence dans le réservoir de la voiture ». De même, la proposition « Si la voiture démarre alors il y a de l'essence dans le réservoir de la voiture » implique sa contraposée « Il n'y a pas d'essence dans le réservoir de la voiture, donc cette dernière ne démarre pas. »
(b) $(X \geq a \Rightarrow Y \geq b) \Leftrightarrow (Y < b \Rightarrow X < a)$

5. Quelques types de démonstrations

Modus Ponens
Il s'agit du type de démonstration la plus courante, correspondant à la déduction naturelle :

$$(\text{ p et (p} \Rightarrow \text{q))} \Rightarrow \text{q.}$$

Un exemple classique : Tout homme est mortel. Socrate est un homme. Donc Socrate est mortel.

Contraposition ou *Modus tollens*
Il s'agit d'utiliser l'équivalence : (p $\Rightarrow$ q) $\Leftrightarrow$ (non q $\Rightarrow$ non p). Il est parfois plus facile de démontrer la contraposée d'un théorème plutôt que le sens direct.

Raisonnement par l'absurde
Ce type de démonstration consiste, pour démontrer une proposition p, à montrer que non p est faux. Elle repose sur l'équivalence suivante : (non p $\Rightarrow$ Faux) $\Leftrightarrow$ p.