Raisonner avec logique

1 Logique mathématique

Exercice 1. Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : car, donc.
1. $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \ldots\ldots x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{z} \ldots\ldots\ z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \ldots\ldots\ e^{2ix} = 1$;

Compléter maintenant les mêmes pointillés par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$.

Exercice 2. Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :
1. Le carré de tout réel est positif. 2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres. 4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entier.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres. 6. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
7. Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

Exercice 3. Ecrire la négation des propositions suivantes :
3. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $q \in Q^{*+}$ tel que $0 < q < \epsilon$;
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$.

Exercice 4. Soit P, Q et R des propositions. Dans chacun des cas suivants, les propositions citées sont-elles la négation l'une de l'autre ?
1. $(P\ et\ Q)$; $(non\ P\ et\ non\ Q)$; 2. $(P\ ou\ Q)$; $(non\ P\ et\ non\ Q)$; 3. $(P \Rightarrow Q)$; $(non\ P \Rightarrow non\ Q)$.

Exercice 5. Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :
1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n'est pas la fonction nulle ;
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

Exercice 6. Le but de cet exercice est de définir par contraposition la propriété P suivante pour $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$:
P : Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Définir la contraposée d'une implication $A \Rightarrow B$, A et B représentant des assertions.
2. Ecrire la contraposée de la proposition P.
3. Démontrer q'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$, avec $k \in N$ et $r \in \{1, 3\}$.
4. Prouver alors la contraposée de P.
5. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Exercice 7. Soit n un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$ de $[0, 1]$. On veut montrer par l'absurde la propriété P suivante :
P : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$.

1. Ecrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété P.
2. Ecrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété.

Exercice 8. Considérons les deux affirmations suivantes :
- $\mathcal{P}_1$ « Les basketteurs de ce tournoi mesurent tous au moins deux mètres.»
- $\mathcal{P}_2$ « Un au moins de ces basketteurs fait plus de $2,40$ m.»

1. En notant B l'ensemble des basketteurs du tournoi et T(x) la taille du basketteur x, réécrire ces deux propositions sous forme mathématique en utilisant les quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
2. Donner leurs négations.
3. Ecrire la proposition $\mathcal{P}_1$ à l'aide d'une implication. En donner une forme équivalente à l'aide d'une disjonction et vérifier qu'elle est bien équivalente à celle donnée en 1).

2 Formaliser : le langage propositionnel

Exercice 9. On considère un langage avec une constante `moi` (la personne qui parle, "je") et une constante `légumes` qui représente l'aliment correspondant, et deux relations binaires `mange` et `aime` : `mange(p,a)` représente la propriété "p mange a", et `aime(p,a)` représente la propriété "p aime a".

1. Donner des formules logiques qui correspondent aux expressions suivantes :
(a) J'aime tout ce que je mange.
(b) Il y a des choses que je n'aime pas mais que je mange quand-même.
(c) Ceux qui n'aiment pas les légumes ne mangent rien.
(d) Si tout le monde accepte de manger quelque chose qu'il n'aime pas alors je mange des légumes.

2. Exprimer sous forme de phrase en langage naturel les propriétés correspondant aux formules suivantes :
(a) $\forall x, \exists y$, `aime(x,y)` et `mange(x,y)`
(b) $\exists y, \forall x$, `aime(x,y)` et `mange(x,y)`

Exercice 10. On considère un langage avec une constante `moi` (la personne qui parle, "je"), une relation unaire et trois relations binaires :

- `triste(x)` : x est triste ;
- `pense(x,y)` : la personne x pense à y (y pouvant être une personne, un objet ou une pensée) ;

— `dit(x,y)` : la personne x dit y ;
— `x=y` : x et y sont égaux.

1. Donner des formules logiques qui correspondent aux expressions suivantes :
(a) Je ne dis jamais ce que je pense.
(b) Lorsque toutes mes pensées sont tristes, je me tais.
(c) Je ne dis jamais rien de triste, sauf si je le pense.
(d) Je ne peux pas penser à deux choses à la fois.

2. Exprimer sous forme de phrase en langage naturel les propriétés correspondant aux formules suivantes :
(a) $\forall x$, `pense(x,moi)` $\Rightarrow$ `pense(moi,x)`
(b) $\forall x$, `pense(moi,x)` et `triste(x)` $\Rightarrow$ non(`dit(moi,x)`)
(c) $\forall x, \exists y$, `pense(x,y)` et non(`dit(x,y)`)
(d) $\exists y, \forall x$, `pense(x,y)` et non(`dit(x,y)`)

3 Le langage propositionnel pour y voir plus clair

Exercice 11. Ecrire la négation des propositions suivantes, en s'aidant si nécessaire d'une formalisation en langage propositionnel :
1. Toutes les voitures sont rouges ;
2. Il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir ;
3. Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont blancs ;
4. Tout étudiant se réveille au moins un jour par semaine avant 8h ;
5. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens ;
6. Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans.

Exercice 12. Ecrire la négation des propositions suivantes, en s'aidant si nécessaire d'une formalisation en langage propositionnel (P : Pierre aime Marie ; Q : Marie aime Pierre) :
1. Pierre et Marie s'aiment l'un l'autre.
2. Pierre et Marie ne s'aiment ni l'un ni l'autre.
3. Pierre aime Marie, mais Marie ne lui rend pas.
4. Il est faux que Marie aime Pierre et n'en soit pas aimée.
5. Pierre est aimé de Marie, mais il est faux que Pierre et Marie s'aiment mutuellement.
6. Marie n'est pas aimée de Pierre ou elle ne l'aime pas.
7. Il est faux que Pierre soit aimé de Marie et Marie de Pierre.
8. Il est faux que Marie aime Pierre ou qu'elle en soit aimée.

Exercice 13. Les raisonnements suivants sont-ils valides ? Si nécessaire, traduire les énoncés en formules propositionnelles.

1. Si les poules ont des dents, alors les poules sont des mammifères. Or les poules ne sont pas des mammifères. Donc les poules n'ont pas de dents.
2. Pour que Pierre réussisse le cours de logique, il est nécessaire et suffisant que premièrement, il assiste au cours, que, deuxièmement il cesse de bavarder avec sa voisine, et, finalement qu'il écoute le professeur. Mais s'il écoute le professeur, c'est qu'il assiste au cours et qu'il cesse de bavarder avec sa voisine. Donc, il est nécessaire et suffisant que Pierre écoute le professeur pour qu'il réussisse le cours de logique.

3. Si Pierre vient à la fête, alors Marie est triste. Si Marie est triste, Jean ne vient pas à la fête. Mais si Jean ne vient pas à la fête, Pierre ne vient pas non plus. Donc Pierre ne vient pas à la fête.

Exercice 14. Un homme qui semble divaguer déclare à toute la clientèle d'un café :

— (i) Le jour où je ne bois pas et où je dors, je ne suis pas content.
— (ii) Le jour où je bois, je ne suis pas content et je dors.
— (iii) Le jour où je ne mange pas, ou bien je ne suis pas content, ou bien je dors ou les deux.
— (iv) Le jour où je mange, ou bien je suis content, ou bien je bois ou les deux.
— (v) Aujourd'hui, je suis content.

Questions :

1. Introduire des variables propositionnelles pour représenter les principales notions et donner les formules correspondantes à chacune des affirmations précédentes.
2. On considère que toutes les affirmations précédentes sont vraies.
   (a) Par raisonnement élémentaire à partir de ces affirmations, montrer qu'il n'a pas bu.
   (b) Répondre en les justifiant par un raisonnement ou une table de vérité aux questions suivantes : a-t-il mangé ? a-t-il dormi ?

Exercice 15. *Attention aux implicites de l'esprit !*
Ce raisonnement vous semble-t-il logiquement valide ?

L'accusé n'a pu se rendre coupable du crime [C] que s'il était à New-York à 18 heures le 1er janvier [N]. Mais il a été établi qu'il était à ce moment-là à Washington [W]. Donc il n'est pas coupable du crime.

Mettez-le en formule. Vous semble-t-il logiquement valide maintenant ? Si non, que faut-il rajouter pour qu'il le soit ?

4 Trouver l'erreur

Exercice 16. Pourquoi les raisonnements suivants ne sont-ils pas logiquement valides ?

— *Ou vous êtes pour la guerre en Irak, ou vous êtes pour les terroristes. George W. Bush.*

— *On m'a dit « Si tu ne manges pas ta soupe, tu finiras en prison », or je mange ma soupe, donc je n'irai pas en prison.*

— *Nous ouvrons aujourd'hui le procès d'un ignoble meurtrier.*

— Une célèbre publicité de la Française des Jeux *«100% des gagnants auront tenté leur chance.»* était basée sur le raisonnement suivant : Tous ceux qui ont gagné ont joué. Donc si tu joues, tu gagnes.

— *Le Figaro du 28/01/10* présente en une le titre *« 9 Français sur 10 pour une réduction des dépenses publiques »*

L'article fait référence à un sondage de l'IFOP et indique que «pour faire face à la situation actuelle (crise économique, déficits publics élevés) 92% des personnes interrogées privilégient de réduire les dépenses de l'État et celles des collectivités locales (villes, départements, régions)».
En consultant les détails de ce sondage sur le site de l'IFP, on constate que la question a été formulée de la façon suivante :
« Pour faire face à la situation actuelle (crise économique, déficits publics élevés) quelle solution faut-il selon-vous privilégier ?»
1/ «Réduire les dépenses de l'État et celles des collectivités locales (villes, départements, régions) »,
2/ « Augmenter les prélèvements obligatoires (impôts locaux, impôts sur le revenu) ».

5 Prêts pour résoudre des énigmes !

Exercice 17. Un voyageur perdu dans le désert arrive à une bifurcation à partir de laquelle sa piste se sépare en deux. Chaque piste peut soit mener à une oasis, soit se perdre dans un désert profond. Chaque piste est gardée par un sphinx. Les données du problème sont les suivantes :
A. Le sphinx de droite dit : "'Une au moins des deux pistes conduit à un oasis".
B. Le sphinx de gauche dit : "La piste de droite se perd dans le désert".
C. Soit les deux sphinx disent la vérité, soit ils mentent tous les deux.

Le voyageur aimerait bien savoir s'il y a un oasis au bout de l'un des deux chemins et si oui, quelle direction prendre.

Questions :

1. Introduire deux variables propositionnelles pour modéliser le problème et traduire les trois données en formules propositionnelles.
2. Résoudre l'énigme en justifiant la réponse.

Exercice 18. Une femme qui cherche un mari présente à ses prétendants 3 coffres numérotés d 1 à 3. Un seul de ces coffres contient son portrait qu'il faut découvrir. Chaque coffre comporte une inscription :
A. Le portrait est dans ce coffre.
B. Le portrait n'est pas dans ce coffre.
C. Le portrait n'est pas dans le coffre 1.

Sachant qu'une seule de ces inscriptions est vraie, en déduire dans quel coffre est caché le portrait.

Exercice 19. Un habitant X se tient à l'embranchement de deux routes. Une des deux routes va vers Paris (route gauche ou route droite). X est soit menteur (systématiquement), soit sincère (systématiquement), et ne répond que par oui ou par non. Quelle question peut-on poser à X pour déterminer la route conduisant à la capitale ?
Indication : Si P est "X dit la vérité" et Q est "la route de gauche va à Paris", constuire une formule φ sur $\{P, Q\}$ telle que la réponse de X à la question "φ est-elle vraie ?" est oui ssi Q est vraie.

Exercice 20. Les trois personnes X, Y, Z sont assises à une table. X dit la vérité, Y ment, Z est lunatique. Les personnes ne répondent que par oui ou par non. Poser deux questions à ces personnes de façon à en déduire qui est X, qui est Y et qui est Z. La première question peut être posée aux trois personnes.