

Module MDD151 : Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 1

Bijections réciproques

Exercice 1.— On définit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout x réel

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$.
2. Montrer que la fonction f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même.
3. On va montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$f^{-1}(x) = ae^x + be^{-x}.$$

Pour cela, on considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = e^x f^{-1}(x).$$

- a. Calculer la dérivée $g'(x)$ en fonction de x .
- b. Conclure, en précisant les valeurs de a et b .
- c. Bonus : où se trouve la fonction f dans le poly, et comment s'appelle-t-elle ?

Exercice 2.— Soit $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x + x$.

1. Montrer que f définit une bijection entre $[-\pi/2, \pi/2]$ et un intervalle I que l'on précisera.
2. On note $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f . Quel est le sens de variation de g ?
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intérieur de I . Etudier ses dérivées à droite (ou à gauche) aux bornes de I .
4. Tracer le graphe de f et celui de g sur une même figure.

Exercice 3.— Donner (si elles existent) les fonctions réciproques des fonctions f_1 et f_2 définies comme suit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0; 1] \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{x}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 4.— Montrer que $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$ est une bijection de $[1 + \infty[$ dans $[\ln 2, \infty[$. Calculer la fonction réciproque f^{-1} et sa dérivée. Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1} sur une même figure.

Exercice 5.— Déterminer les réels m pour lesquels la fonction définie par $f(x) = \ln(x^3 + x^2 + mx)$ est une bijection de $]0, +\infty[$ dans un intervalle que l'on précisera.

Exercice 6.— Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers > 0 , en se ramenant à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.

Exercice 7.— Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + x.$$

Montrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle I à préciser, et que f^{-1} est continue et dérivable sur I .

Exercice 8.— Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (en précisant le domaine de validité du calcul). En déduire une nouvelle expression plus simple pour la fonction initiale.

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right), \quad g(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Exercice 9.— Donner le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \arccos(x^2 + 2x - 1).$$

Calculer la dérivée de f , en précisant le domaine de validité de ce calcul.

Exercice 10.— Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\arctan 2x + \arctan x = \pi/4$.
2. $\arcsin 2x - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x$.
3. $\arctan x + \arctan(x\sqrt{3}) = 7\pi/12$.

Exercice 11.— Résoudre les équations suivantes :

1. $\arcsin x = \arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$.
2. $\arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4}$.
3. $\arctan x = 2 \arctan \frac{1}{2}$.

Exercice 12.— Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $3 \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.
2. $\sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) = 1$.
3. $\sin x - 2 \cos(2x) = 0$.

Exercice 13.— On veut résoudre l'équation suivante :

$$(*) \quad \arctan x + \arctan x^3 = \frac{3\pi}{4}.$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan x + \arctan x^3$.
 - (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
 - (b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ en précisant les limites aux bornes.
 - (c) Montrer que l'équation $(*)$ admet une unique solution réelle que l'on notera α .
 - (d) Montrer que $\alpha > 1$.
2. Calcul de α .
 - (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ on a

$$\frac{x + x^3}{1 - x^4} = \frac{x}{1 - x^2}.$$

En déduire l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ tels que

$$\frac{x + x^3}{1 - x^4} = -1.$$

- (b) En calculant $\tan f(\alpha)$ de deux façons différentes, trouver la valeur exacte de α .

Exercice 14.— Soient $x < 0$ et $y \geq 0$ des réels. Justifier la bonne définition de l'expression suivante puis la simplifier :

$$\cos \left[\pi - \arcsin \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right].$$

Exercice 15.— Simplifier les expressions suivantes puis dessiner le graphe de la fonction :

1. $f_1(x) = \arccos(\cos x)$ et $f_2(x) = \arccos(\sin x)$ pour $x \in [0, 4\pi]$;
2. $f_3(x) = \arctan(\tan 2x)$ pour $x \in [0, \pi]$.
3. $f_4(x) = \sin(\arccos x)$, $f_5(x) = \cos(\arcsin x)$, $f_6(x) = \sin(3 \arctan x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16.— Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée (en précisant le domaine de validité du calcul). En déduire une nouvelle expression plus simple pour la fonction initiale et tracer son graphe.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right) & f_2(x) &= \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \\ f_3(x) &= \arctan\frac{1}{x} & f_4(x) &= \arctan\frac{2x}{1-x^2} \end{aligned}$$

Exercice 17.— Montrer que $\arcsin(4/5) = 2 \arctan(1/2)$.

Exercice 18.— Soit $f(x) = \arccos \cos x$ et $g(x) = \arcsin \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est périodique de période 2π . Simplifier $f(x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. Dessiner le graphe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est périodique de période 2π . Simplifier $g(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$. Dessiner le graphe de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19.— Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p . A quelle distance doit se placer un observateur — dont la taille est supposée négligeable — pour voir la statue sous un angle maximal ? On pourra commencer par faire un dessin.