

Module MDD151 : Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 2

Intégrales

Exercice 1.— Préciser l'ensemble de définition et déterminer les primitives des fonctions :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \tan^2 x, & f_2(x) &= \tan x, & f_3(x) &= \frac{1}{\sqrt{2-x}}, & f_4(x) &= \frac{ax+b}{cx+d}, \\ f_5(x) &= |x^2 - 1|, & f_6(x) &= \frac{1}{(x-5)^3}, & f_7(x) &= \ln(4-x), & f_8(x) &= |x|^{2/5}. \end{aligned}$$

Exercice 2.— En utilisant une intégration par parties calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \int_0^{\pi/2} t \sin t \, dt & \text{b. } \int_0^1 t e^t \, dt & \text{c. } \int_0^1 x \arctan x \, dx \\ \text{d. } \int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \, dx & \text{e. } \int_0^x \arctan u \, du & \text{f. } \int_1^x \frac{\ln u}{u^n} \, du \text{ avec } n \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Exercice 3.— Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (x \cos x + \sin x) \ln x \, dx, & I_2 &= \int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x) \, dx, & I_3 &= \int_1^e (\ln x)^3 \, dx, \\ I_4 &= \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx, & I_5 &= \int_0^{\pi/3} x \cos(2x) \, dx, & I_6 &= \int_0^{1/2} \arcsin x \, dx. \end{aligned}$$

Exercice 4.— A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur leur intervalle de définition :

$$f(x) = (x^2 - x)(\ln x - 1), \quad g(x) = 2x^3 e^{x^2+1}, \quad h(x) = \frac{x+1}{e^x}.$$

Exercice 5.— A l'aide du changement de variable $u = x + 2$ puis d'une intégration par parties déterminer les primitives de la fonction f définie par :

$$f(x) = (x+2) \arctan \left(\sqrt{\frac{x+3}{x+1}} \right).$$

Exercice 6.— Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{x^4}{x^2+1}$ et en déduire la valeur de

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \ln(x^2 + 1) dx$$

Exercice 7.— Calculer les intégrales suivantes (en reconnaissant, le cas échéant, une fonction de la forme $f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$) :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/4} \cos x \sin^4 x dx, & I_2 &= \int_0^2 (1 + |x-1|^3) dx, & I_3 &= \int_{\pi/4}^0 \tan x dx, \\ I_4 &= \int_0^{\pi/6} (\cos^3 x + \sin^3 x) dx, & I_5 &= \int_{-1}^2 \frac{x^2}{4+x^3} dx, & I_6 &= \int_0^{1/2} \frac{e^{\arctan(2x)}}{1+4x^2} dx, \\ I_7 &= \int_{1/2}^0 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}, & I_8 &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & I_9 &= \int_0^{-1} x\sqrt{1+x^2} dx, & I_{10} &= \int_{-1}^2 |x| dx. \end{aligned}$$

Exercice 8.— **1.** Trouver une primitive de $\phi(x) = x^2 \sin x$ en effectuant des intégrations par parties.

2. Grâce au changement de variables $u = \pi x^{1/3}$, en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sin(\pi x^{1/3}) dx.$$

Exercice 9.— Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser des changements de variables) ; lorsque les bornes sont omises il s'agit de trouver des primitives.

$$A = \int_0^1 x\sqrt{3x+1} dx \quad (\text{poser } z = 3x+1), \quad B = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}, \quad C = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}} \quad (\text{poser } u = \sqrt{1+x}),$$

$$D = \int_{1/2}^1 \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx \quad (\text{poser } v = \frac{x}{x+1}), \quad E = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^3+1)} \quad (\text{poser } \alpha = x^3+1),$$

$$F = \int_{-1}^0 \frac{x^3 dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, \quad G = \int_0^3 \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx, \quad H = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (\text{poser } x = \sin t),$$

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx \quad (\text{poser } t = \sqrt{e^x-1}), \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3+2\cos(x)} dx \quad (\text{poser } u = \tan(x/2)),$$

$$K = \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx \quad (\text{poser } u = e^{-x}), \quad L = \int \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)} dx, \quad M = \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Exercice 10.— En utilisant la règle de Bioche, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1 + \cos x} dx, \quad I_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\sin 2x} dx, \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{6 - 5 \sin(x) + \sin^2(x)} dx.$$

Exercice 11.— 1. Soit $f(x) = \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}$. Déterminer les primitives de f .

2. Même question avec $g(x) = \cos^3(x) \sin^4(x)$ puis avec $h(x) = \frac{1}{2+\sin x}$.

Exercice 12.— 1. Soient deux réels $a < b$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. En utilisant le théorème fondamental de l'analyse, démontrer la propriété suivante (appelée formule de la moyenne) :

$$\exists c \in [a, b] \quad \text{tel que} \quad \int_a^b f(t) dt = (b-a) f(c).$$

2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer à l'aide de la question précédente la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Exercice 13.— Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Calculer les dérivées des fonctions φ_1 , φ_2 et φ_3 définies par :

$$\varphi_1(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt, \quad \varphi_2(x) = \int_x^{\sin x} f(t) dt, \quad \varphi_3(x) = \int_x^{x^2} f(tx) dt.$$

Montrer que φ_1 , φ_2 et φ_3 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14.— On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt.$$

1. Pourquoi f est-elle bien définie ? Montrer qu'il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $f'(x)$. En déduire que f est constante et calculer sa valeur.

Exercice 15.— Soit la fonction $I :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $\alpha > 0$ par

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

1. Déterminer des réels a, b, c tels que

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

2. En utilisant une intégration par parties, calculer $I(\alpha)$ et en déduire $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha)$.

Exercice 16.— Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}.$$

1. Déterminer des réels a, λ et μ tels que

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{\lambda(2x+2) + \mu}{x^2 + 2x + 5}.$$

2. En constatant que $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$, en déduire une primitive de f .

Exercice 17.— Développer en éléments simples chacune des fractions rationnelles suivantes, et en déduire leurs primitives (en précisant sur quels intervalles) :

$$f_1(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1}, \quad f_2(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 3x + 2}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)}.$$

Exercice 18.— En remarquant que $\frac{3x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+4x^2}$, calculer

$$I(X) = \int_0^X \frac{3x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)} dx$$

pour un réel $X > 0$ et en déduire $\lim_{X \rightarrow +\infty} I(X)$.

Exercice 19.— Déterminer les limites de $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{1/n}$ et de $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \right)^{1/n}$. *Indication : prendre le logarithme pour transformer les produits en sommes.*

Exercice 20.— 1. En utilisant les sommes de Riemann, déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) ,$

b) et pour $\alpha > 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p^\alpha} .$

2. Montrer successivement les inégalités suivantes pour tout $x \geq 0$:

$$\text{pour tout } x \geq 0 : \quad \sin x \leq x , \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \quad \text{et} \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x .$$

Indication : On pourra montrer la première inégalité puis intégrer entre 0 et y.

3. Dédurre de ce qui précède la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \sin \left(\frac{1}{p} \right) .$$

Exercice 21.— 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Déterminer une primitive sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto (\tan x)^n + (\tan x)^{n+2}$.

2. On pose $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n dx$. Calculer I_0 et I_1 . Déterminer en général la valeur de $I_n + I_{n+2}$.

3. Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

4. Dédurre de ce qui précède les valeurs limites quand $n \rightarrow \infty$ de l'expression suivante

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} .$$

5. En constatant que $\frac{1}{k+1} = \frac{2}{2k+2}$, montrer que

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$$

tend vers $\ln 2$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 22.— **1.** Après avoir justifié l'existence de primitives de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$, déterminer une telle primitive (par exemple en intégrant par parties).

2. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$, où l'on rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

a) Établir l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 23.— Pour tout entier $n \geq 0$ on note :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

1. Montrer que $I_n = J_n$.

2. Établir pour tout $n \geq 2$ la relation $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

3. En déduire que pour tout $p > 0$ on a les égalités suivantes :

$$I_{2p} = \left(\prod_{i=1}^p \frac{2i-1}{2i} \right) \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \prod_{i=1}^p \frac{2i}{2i+1}.$$

4. Montrer que l'on a les inégalités $I_{2p+1} < I_{2p} < I_{2p-1}$.

5. Démontrer que I_{2p-1}/I_{2p+1} tend vers 1 lorsque $p \rightarrow +\infty$.

6. En déduire que I_{2p}/I_{2p+1} tend vers 1 lorsque $p \rightarrow +\infty$.

7. Établir la formule de Wallis :

$$\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^n \frac{2i}{2i-1} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2}.$$