

Module MDD151 : Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 3

Formules de Taylor

Exercice 1.— Démontrer les encadrements suivants :

1. $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
2. $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
3. $1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$ pour tout $x \geq 0$.
4. $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 2.—

1. Démontrer la majoration suivante pour tout réel x :

$$\left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right| \leq \frac{|x|^5}{5!}$$

et en déduire une valeur approchée de $\cos(1/2)$ à 10^{-3} près.

2. Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3},$$

et en déduire une approximation de $\ln(1,1)$ à 10^{-3} près.

Exercice 3.— On se propose de démontrer le théorème suivant. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $|f|$ et $|f''|$ soient bornées sur $\mathbb{R}$; on note M_0 et M_2 des réels tels que $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors la dérivée f' est aussi bornée sur $\mathbb{R}$, et on a l'inégalité :

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction f entre x et $x+h$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+$, et en déduire que :

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

2. Etudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

et en déduire la valeur de $\inf_{h \in \mathbb{R}_+^*} g(h)$.

3. Conclure la preuve en démontrant que

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 4.— Le but de cet exercice est de donner une autre expression du reste dans la formule de Taylor-Lagrange.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et ϕ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Notons $m = \inf_{x \in [a, b]} \phi(x)$ et $M = \sup_{x \in [a, b]} \phi(x)$ (rappeler pourquoi m et M existent!).

1. Démontrer que

$$m \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} \leq \int_a^b (b-t)^n \phi(t) dt \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}.$$

2. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire de la question précédente qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b (b-t)^n \phi(t) dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} \phi(c).$$

3. En déduire le résultat suivant, appelé *égalité de Taylor-Lagrange*. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Exercice 5.— Dans cet exercice on pose $f(x) = \ln(1+x)$ pour $x \in]-1, +\infty[$ et

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

1. Calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in]-1, +\infty[$. *Indication : mener le calcul pour les premières valeurs de k , deviner une formule générale puis la démontrer par récurrence.*

2. En appliquant une formule de Taylor, démontrer que $|\ln(2) - u_n| \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire que la suite (u_n) tend vers $\ln(2)$.

Exercice 6.— Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . Démontrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

Exercice 7.—

1. Pour chacune des relations de négligeabilité suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant) quand $x \rightarrow 0$:

$$a) x^2 = o(x^3) \quad b) x^3 = o(x^2) \quad c) x = o(1) \quad d) 1 = o(x) \quad e) x^2 = o(x^2)$$

$$f) x^2 = o(e^x) \quad g) e^x = o(x^2) \quad h) x^2 = o(\ln x) \quad i) \ln x = o(x^2)$$

2. Reprendre la question précédente quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 8.—

1. Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes quand $x \rightarrow 0$:

$$f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad g(x) = \frac{2x^3 - 5x}{e^x}, \quad h(x) = \sqrt{2x^2 + 1 + \frac{1}{x}}, \quad i(x) = \frac{x^2 + e^x}{x + 5}.$$

2. Reprendre la question précédente quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 9.— Soit a un réel. En fonction de a , déterminer un équivalent simple quand $x \rightarrow +\infty$ de $\frac{\arctan(x)}{1+x^a}$. Même question avec $x^a \sin x$ quand $x \rightarrow 0$.