

Module MDD151 : Calcul intégral
Feuille d'exercices numéro 5
Equations différentielles

On notera, tout au long de la feuille, y' pour $y'(t)$.

Equations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1.— Déterminer toutes les fonctions y , ainsi que les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels elles sont $\mathcal{C}^1$, vérifiant les équations homogènes suivantes :

$$\begin{array}{lll} a) \ y' - y = 0 & b) \ t y' - 2y = 0 & c) \ (1 + t^3) y' + 3 t^2 y = 0 \\ d) \ y' + t \sin(t) y = 0 & e) \ (1 + t^2) y' + 2y = 0 & f) \ (e^t + 1) y' - e^t y = 0. \end{array}$$

Exercice 2.— Déterminer toutes les fonctions y , ainsi que les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels elles sont $\mathcal{C}^1$, vérifiant les équations suivantes (avec second membre) :

$$\begin{array}{llll} a) \ y' + y = \frac{1}{1 + e^t} & b) \ t y' - y = t^2 & c) \ y' + y = \sin t & d) \ y' + 2y = t^2 + 2t \\ e) \ y' + 2t y = 2t e^{-t^2} & f) \ y' + 3t^2 y = (3t^2 - 1) e^{-t} & g) \ y' + 2y = t^2 + 2t & h) \ y' + t^2 y = t^2. \end{array}$$

Exercice 3.— Parmi toutes les solutions y de l'équation $t^2 y'(t) - y(t) = 0$, en existe-t-il qui soient $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Même question avec l'équation $(1 - t) y'(t) + y(t) = t$.

Exercice 4.— On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y'(t) + (t - 1)y(t) = t^2.$$

1. Trouver une solution particulière affine en t .
2. Déterminer l'unique $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ solution de (E) vérifiant la condition $y(2) = 2$.

Exercice 5.— Trouver la solution $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ de chacun des problèmes de Cauchy suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' - y = 0, \\ y(1) = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y' - t e^{t^2} y = 0, \\ y(0) = 1. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y' - \sin(t) y = 0, \\ y(\pi/3) = -2. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 + t^2) y' - y = 0, \\ y(\sqrt{3}) = 1. \end{array} \right.$$

Equations différentielles linéaires, à coefficients constants, d'ordre 2

Exercice 6.— Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + y' - 2y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' - 2y' + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + y' + y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' + y' = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' - 8y' + 16y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{array} \right.$$

Exercice 7.— Soit l'équation $y'' + y' + 2y = (\cos(t) - \sin(t))e^{-t}$.

1. Rechercher une solution particulière sous la forme $y_0(t) = (a \cos(t) + b \sin(t))e^{-t}$.
2. Résoudre l'équation homogène associée.
3. En déduire toutes les solutions $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de l'équation proposée.

Exercice 8.— Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = e^t$, on cherchera une solution particulière y_0 sous la forme

$$y_0(t) = b t^2 e^t$$

.

2. $y'' - 4y' + y = (2t + 1)e^{-t}$, on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y_0(t) = (a t + b)e^{-t}$$

.

3. $y'' - 4y' + 3y = (2t + 1)e^t$, on cherchera une solution particulière sous la forme

$$y_0(t) = (a t^2 + b t)e^t$$

.

Equations à variables séparables

Exercice 9.— L'équation différentielle $p'(t) = rp(t) \left(1 - \frac{p(t)}{k}\right)$ modélise l'évolution d'une population biologique $p(t)$ dont la quantité de nourriture est limitée. La constante r s'appelle le *taux de croissance idéal* et k la *capacité de l'environnement*.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. On suppose que $p(0) = \frac{k}{2}$. Donner l'allure du graphe de p . Quelle interprétation peut-on en déduire pour le modèle ?

Exercice 10.— Résoudre les équations différentielles à variables séparées suivantes :

1. $(1 + \exp(x))yy' = \exp(x)$
2. $\exp(x) = \frac{y'}{y \log y}$
3. $(1 + y) - (1 - x)y' = 0$
4. $x(y^2 - 1) - y(x^2 - 1)y' = 0$
5. $(x - 1)^2y + x^2(y + 1)y' = 0$, avec la condition initiale $y(1) = 1$
6. $\rho' + \rho \tan(\theta) = 0$, où $\rho = \rho(\theta)$ est une fonction de θ

Exercices d'approfondissement

Exercice 11.— L'équation de Newton pour un corps de masse m attiré par un champ gravitationnel stationnaire et homogène de valeur g est

$$mx''(t) = mg - kx'(t).$$

La constante k est la *constante de frein*. Typiquement, t désigne le temps et x représente l'altitude d'une masse m en train de tomber et soumise uniquement à son poids (terme mg) et à la force de frottement de l'air (terme $-k.x'$).

1. Résoudre cette équation. On pourra introduire $v_0 = x'(0)$ la vitesse à l'instant initial et $x_0 = x(0)$ l'altitude à l'instant initial.
2. Faire une esquisse du graphe de x . Si on laisse un objet sous l'action d'un tel champ gravitationnel (avec une vitesse nulle au départ), quelle est sa vitesse limite ? Comment peut-on interpréter cela sur le graphe de x ?

Exercice 12.— Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de

$$y'' + ay' + by = 0$$

soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 13.— Soit $\alpha > 0$. On recherche le plus grand intervalle I , contenant 0 et non réduit à $\{0\}$, pour lequel il existe une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs strictement positives de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$(*) \quad \begin{cases} (t^2 + 1)y'(t) - 2y(t) = -2\sqrt{y(t)}, & t \in I, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

1. On pose $z(t) = \sqrt{y(t)}$. Montrer que $z \in \mathcal{C}^1(I)$ vérifie l'équation

$$z'(t) + a(t)z(t) + b(t) = 0,$$

où a et b sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

2. Expliciter l'unique solution $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ du problème suivant :

$$\begin{cases} \phi'(t) + a(t)\phi(t) + b(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ \phi(0) = \sqrt{\alpha}. \end{cases}$$

3. Etudier le signe de ϕ : montrer qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $\alpha \geq \alpha_0$ alors ϕ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, mais que si $\alpha < \alpha_0$ alors ϕ peut s'annuler.

4. En déduire, en fonction de la valeur de α , l'intervalle maximal I et la solution y du problème (*).

5. Dans le cas $\alpha < \alpha_0$, montrer que l'on peut prolonger par 0 la solution $y \in \mathcal{C}^1(I)$ trouvée ci-dessus pour obtenir une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14.— En effectuant le changement de fonction inconnue $z(t) = (1 + e^t)y(t)$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(1 + e^t)y'' + 2e^t y' + (2e^t + 1)y = t e^t.$$