Calcul intégral feuille de TD 1

Exercice 1

1. (i) la fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$, dérivable sur $]0;+\infty[$. Comme $x^2+1>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(ii) on déduit immédiatement du point (i) que la fonction

$g : x\mapsto x+\sqrt{x^2+1}$ est elle aussi définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(iii) $\forall x\in\mathbb{R} :\ x+\sqrt{x^2+1} > x+\sqrt{x^2} = x+|x| \geq 0$

car $x+|x|=0$ si $x<0$ et $x+|x| = 2x\geq 0$ si $x\geq 0$.

Ainsi, on a $g(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

(iv) la fonction $x\mapsto \ln(x)$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. Comme $f=\ln\circ g$ et $g>0$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = g'(x)\times \ln'(g(x)).$$

Or : • $\forall y > 0$, $\ln'(y) = 1/y$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 + \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = 1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$= \left(\frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}+x}}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$= 1 / \sqrt{1+x^2}.$$

② Comme f est continue, il suffit de montrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Et comme f est dérivable, on regarde le signe de sa dérivée. D'après la question 1 :

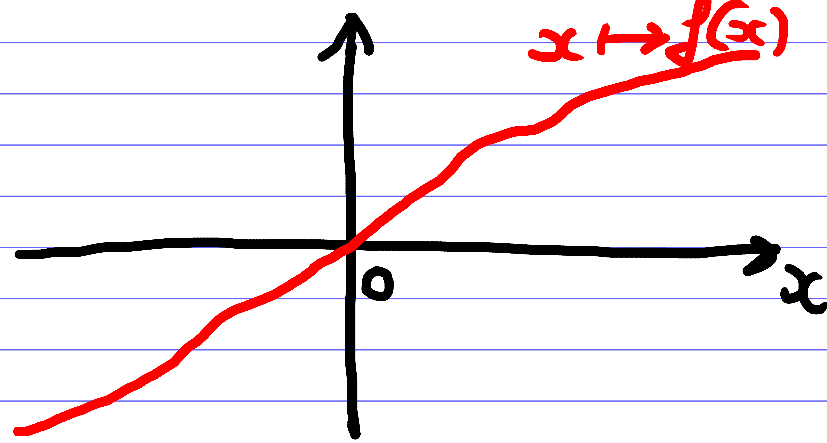
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0 .$$

Ainsi, $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ f strictement croissante.

<u>Conclusion</u> : f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème 1.9 du poly, f réalise donc une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\left] \lim\limits_{-\infty} f \,;\, \lim\limits_{+\infty} f \right[$.

Reste à calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.



• <u>limite en $+\infty$</u> : on a $\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=+\infty$ et $\lim_{y\to+\infty}\ln(y)=+\infty$.

Par composition des limites, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=+\infty.$$

• <u>limite en $-\infty$</u> :

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$

<u>ASTUCE</u> : $x+\sqrt{1+x^2}=\dfrac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)}{x-\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x^2-(1+x^2)}{x-\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{-1}{x-\sqrt{1+x^2}}$.

Or : $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-|x|\sqrt{1+1/x^2}}$

car $x=-|x|$ en $-\infty$ $\longrightarrow$ $=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-|x|-|x|\underbrace{\sqrt{1+1/x^2}}_{\to 1}}=0.$

Ainsi : $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=0$.

Comme $\lim_{y\to 0}\ln(y)=-\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ par composition des limites.

<u>Conclusion</u> : f réalise bien une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

③ ⓐ On a montré que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même.
De plus, f est dérivable et $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème 1.14 de dérivabilité de la bijection réciproque, on en déduit que f^{-1} (la réciproque de f) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \sqrt{1+(f^{-1}(x))^2}$$

D'après la formule de dérivation d'un produit de fonctions dérivables, on obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ g'(x) = e^x f^{-1}(x) + e^x \sqrt{1+(f^{-1}(x))^2}$$

$$= e^x \times \left(f^{-1}(x) + \sqrt{1+(f^{-1}(x))^2}\right)$$

$$= e^x e^{\underbrace{\ln\left(f^{-1}(x)+\sqrt{1+(f^{-1}(x))^2}\right)}_{= f(f^{-1}(x))}} = e^x e^{\underbrace{f(f^{-1}(x))}_{=x}} = e^{2x}.$$

(b) Les primitives de $x \mapsto e^{2x}$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} + C$ pour $C \in \mathbb{R}$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Remarquons maintenant que $f(0) = 0$. Donc $f^{-1}(0) = 0$.

$$\Rightarrow g(0) = e^0 f^{-1}(0) = 0 = \frac{1}{2}e^{2\times 0} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{C = -1/2}$$

On obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^x f^{-1}(x) = 1/2\, e^{2x} - 1/2$

En divisant par $e^x > 0$, ceci implique que :

$$f^{-1}(x) = 1/2\, e^{x} - 1/2\, e^{-x}. \text{ Donc on a } \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

et $\boxed{b = -\frac{1}{2}}$

(c) f^{-1} est la fonction sinus hyperbolique.

f est donc sa réciproque argsh (voir p85 du poly).