Exercice 2

(1) f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin(x) + 1 \geq 0.$$

En particulier, $f'(x) > 0\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

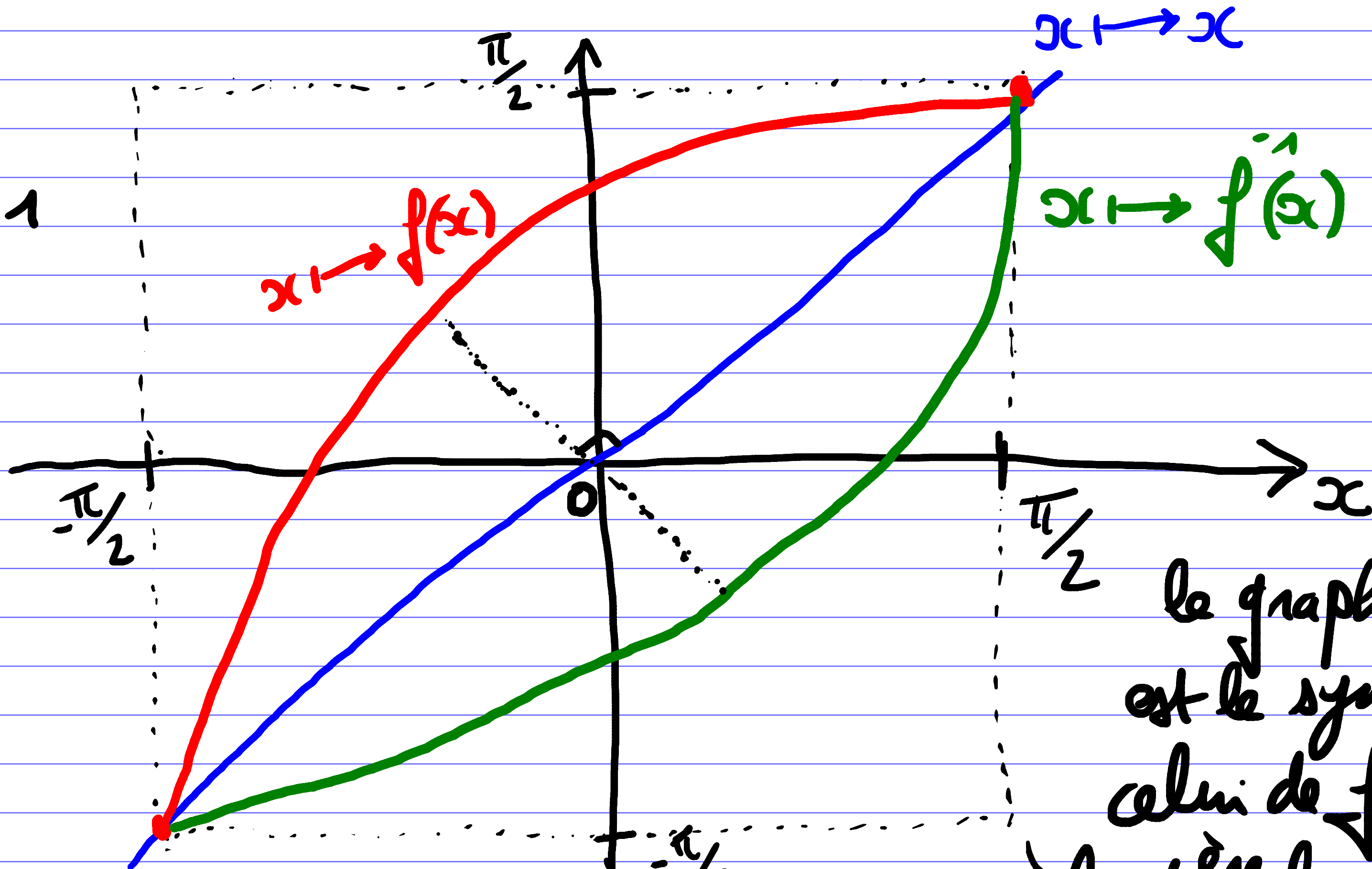
Par ailleurs, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

D'après le théorème 1.9, f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ sur lui-même.

(2) D'après la question 1, f est une bijection continue et strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur lui-même. D'après le théorème 1.13, c'est aussi le cas de sa bijection réciproque f^{-1}.

$f'(-\frac{\pi}{2}) = 2 > 1$

$f'(\frac{\pi}{2}) = 0$



le graphe de f^{-1} est le symétrique de celui de f par rapport à la 1ère bissectrice (en bleu)

③ Comme $f' > 0$ sur $J =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, d'après le théorème 1.14, f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1-\sin(f^{-1}(x))}. \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1} \text{ est continue sur } J \\ \text{la fonction sinus est continue sur } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow x \mapsto \sin(f^{-1}(x)) \text{ est continue sur } J.$$

De plus, $-\frac{\pi}{2} < f^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$ sur J, donc $\sin(f^{-1}(x)) \neq 1$ sur J.

On déduit de l'expression $(*)$ que $(f^{-1})'$ est continue sur J.

f^{-1} est donc $\mathcal{C}^1$ sur J.

En utilisant les mêmes arguments, on montre aussi que $(f^{-1})'$ est dérivable sur J.

Ainsi : $\forall x \in J$, $(f^{-1})''(x) = \left(\dfrac{1}{1-\sin(f^{-1}(x))}\right)'$

$$= \frac{-(1-\sin(f^{-1}(x)))'}{(1-\sin(f^{-1}(x)))^2}$$

$$= \frac{(f^{-1}(x))' \times \cos(f^{-1}(x))}{(1-\sin(f^{-1}(x)))^2} = \frac{\cos(f^{-1}(x))}{(1-\sin(f^{-1}(x)))^3}.$$

$x \mapsto \cos(f^{-1}(x))$ étant continue sur J, on obtient que $(f^{-1})''$ est continue sur J, donc f^{-1} est $\mathcal{C}^2$ sur J.

- D'après l'expression $(*)$, on a $(f^{-1})'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{1-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}$.

Etudions maintenant la dérivée de f^{-1} en $\frac{\pi}{2}$. Comme f^{-1} est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour tout $x \in J$:

(Théorème des accroissements finis)

$$\frac{f^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - f^{-1}(x)}{\pi/2 - x} = \left(f^{-1}\right)'(a) \quad \text{où} \quad a \in \left]x, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\underset{(*)}{=} \frac{1}{1 - \sin\left(f^{-1}(a)\right)}$$

Quand $x \to \frac{\pi}{2}$, on a aussi $a \to \frac{\pi}{2}$ (car $x < a < \frac{\pi}{2}$)

Comme $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$, on a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin\left(f^{-1}(x)\right) = 1$.

Ainsi : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{f^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - f^{-1}(x)}{\pi/2 - x} = \lim\limits_{a \to \frac{\pi}{2}} \left(f^{-1}\right)'(a) = +\infty$.

<u>Conclusion</u> : f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$.