$\boxed{\text{Exercice 6}}$ On cherche $x, y > 0$ <u>entiers</u> tels que $x^y = y^x$.

- Comme la fonction $\ln$ est une bijection entre $]0;+\infty[$ et $\mathbb{R}$, on a :

$$
\begin{aligned}
x^y = y^x &\iff \ln(x^y) = \ln(y^x) \\
&\iff y\ln(x) = x\ln(y) \\
&\iff \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y} \quad (\underline{x, y > 0}) \\
&\iff f(x) = f(y)
\end{aligned}
$$

où on définit f par : $\forall t > 0,\ f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t}$.

- La fonction f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

On a : $\forall t > 0,\ f'(t) = \dfrac{1 - \ln(t)}{t^2} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) \geq 0 \text{ si } t \leq e = e^1 \\ f'(t) < 0 \text{ si } t > e = e^1 \end{cases}$

t	0		$e \simeq 2,71$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Rappelons que nous cherchons x, y entiers > 0 tels que
$$f(x) = f(y).$$
Bien sûr, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $x = y$ est solution de l'équation.

- Supposons maintenant que $x < e$ et $y < e$.
  Alors nécessairement $x = y$ car f est strictement croissante (donc bijective) sur $]0;e[$.
- De même, f étant strictement décroissante sur $]e;+\infty[$, on a $x = y$ si $x > e$ et $y > e$.

- Supposons maintenant $x < e$ et $y > e$.
  Comme $e \simeq 2{,}71$ et x est un entier, on a $x = 1$ ou $x = 2$.
  Si $x = 1$, $f(x) = 0$, mais comme $f > 0$ sur $]e; +\infty[$, il n'existe pas de $y > e$ tel que $f(y) = f(x) = 0$.
  Si $x = 2$, $f(x) = \frac{\ln(2)}{2}$. On remarque que $f(4) = \frac{\ln(4)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2} = f(x)$.
  Ainsi, $(x = 2, y = 4)$ est une solution de l'équation.
  Il n'y a pas d'autre solution avec $x = 2$ et $y > e$ car f est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$.
- De même, si $y < e$ et $x > e$, l'unique solution possible est alors $y = 2$ et $x = 4$.

Pour résumer, l'ensemble des solutions de l'équation

$$x^y = y^x \text{ avec } x, y \text{ entiers} > 0$$

est : $\{(x,x) \mid x \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(2,4),(4,2)\}$.