

Exercice 6

On cherche $x, y > 0$ autres tels que $x^y = y^x$.

- Comme la fonction \ln est une bijection entre $]0; +\infty[$ et \mathbb{R} , on a :

$$x^y = y^x \Leftrightarrow \ln(x^y) = \ln(y^x)$$

$$\Leftrightarrow y \ln(x) = x \ln(y)$$

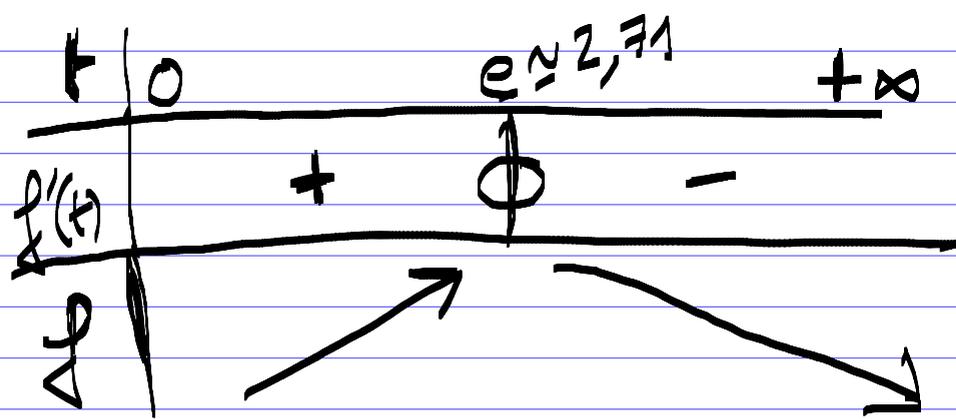
$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y} \quad (x, y > 0)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

on en définit f par : $\forall t > 0, f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$.

- La fonction f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\text{On a : } \forall t > 0, f'(t) = \frac{1 - \ln(t)}{t^2} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) \geq 0 & \text{si } t \leq e = e^1 \\ f'(t) < 0 & \text{si } t > e = e^1 \end{cases}$$



Rappelons que nous cherchons α, y entiers > 0 tels que $f(\alpha) = f(y)$.

Bien sûr, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\alpha = y$ est solution de l'équation.

• Supposons maintenant que $\alpha < e$ et $y < e$

Alors nécessairement $\alpha = y$ car f est strictement croissante (donc bijective) sur $]0, e[$.

• De même, f étant strictement décroissante sur $]e, +\infty[$, on a $\alpha = y$ si $\alpha > e$ et $y > e$.

- Supposons maintenant $x < e$ et $y > e$.

Comme $e \approx 2,71$ et x est un entier, on a $x = 1$ ou $x = 2$.

Si $x = 1$, $f(x) = 0$, mais comme $f > 0$ sur $]e; +\infty[$, il n'existe pas de $y > e$ tel que $f(y) = f(x) = 0$.

Si $x = 2$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{2}$. On remarque que $f(4) = \frac{\ln(4)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2} = f(x)$.

Ainsi, $(x=2, y=4)$ est une solution de l'équation.

Il n'y a pas d'autre solution avec $x=2$ et $y > e$ car f est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$.

- De même, si $y < e$ et $x > e$, l'unique solution possible est alors $y=2$ et $x=4$.

Pour résumer, l'ensemble des solutions de l'équation

$$x^y = y^x \text{ avec } x, y \text{ entiers } > 0$$

est :

$$\{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(2, 4), (4, 2)\}.$$