Cours n° = 1
26/1/2001

Stéphane FISCHLER
Calcul intégral en S2
L1 DD
2020/2021
Univ. Paris-Saclay

Chapitre 1 : Fonctions réciproques.

I Théorème de la bijection.

1) Rappels sur les bijections.

Rappels : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur I

$f : I \to \mathbb{R}$.

On dit que f réalise une bijection de I dans J

si : (i) $\forall x \in I \quad f(x) \in J$

(ii) $\forall y \in J \quad \exists!\, x \in I \quad f(x) = y$.

(i) signifie qu'on peut voir f comme une fonction de I dans J
$$f : I \to J$$
(ii) signifie que cette fonction $I \to J$ est bijective.

Exemple : $f(x) = x^2$.

On peut voir f comme une fonction $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

$I = \mathbb{R}_+$.

On sait que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Donc (i) est vérifié avec $J = \mathbb{R}_+$.

Donc on peut considérer $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto x^2$.

Commentaires sur l'axiome (ii) : il signifie que tout élément de J possède <u>un et un seul</u> antécédent par f. Autrement dit :

Pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ possède une et une seule solution $x \in I$.

Ex : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^2$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ (preuve : cf. plus bas). Donc :

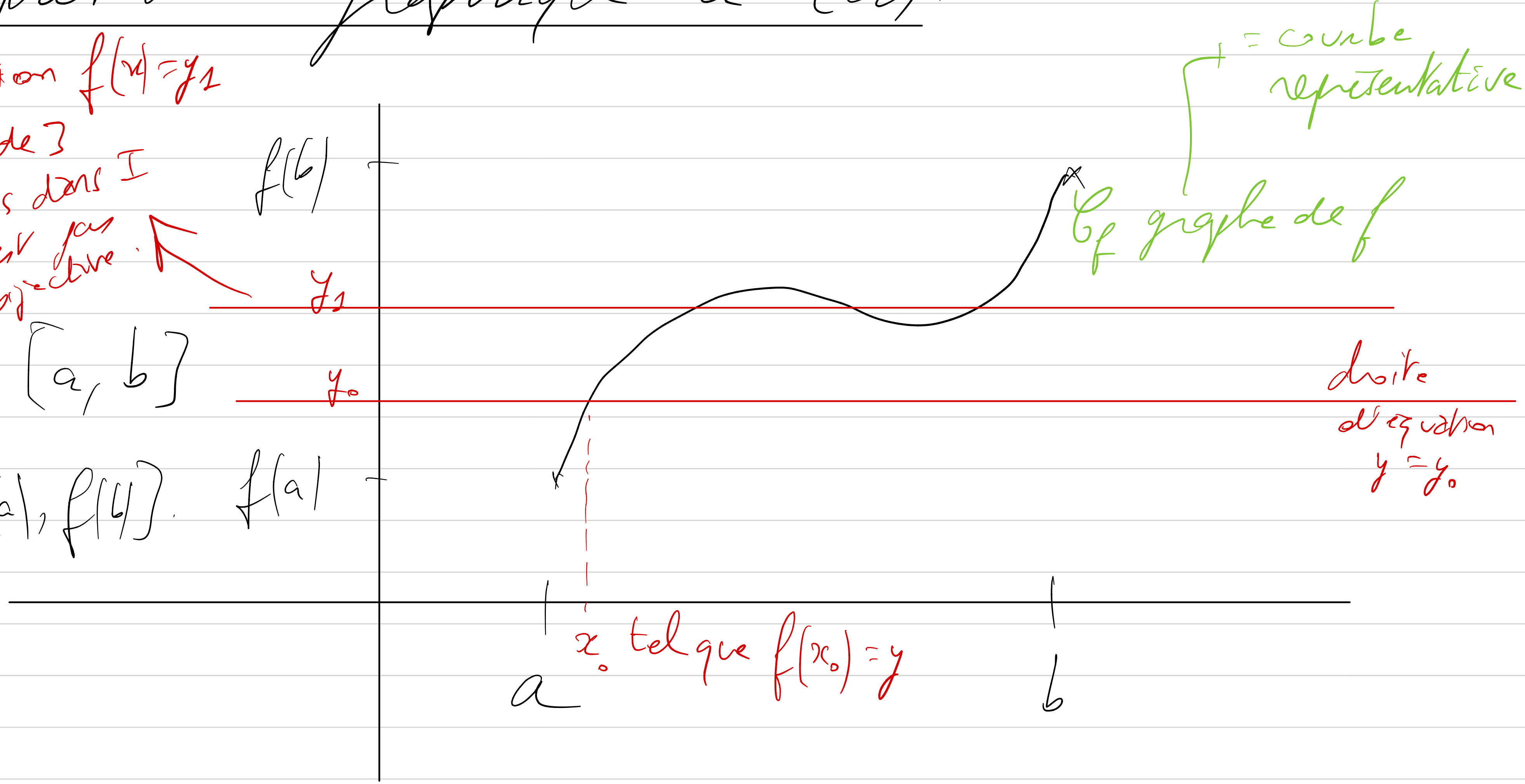
pour tout <u>réel positif y</u>, l'équation $x^2 = y$ possède une et une seule solution $\underline{\underline{x \in \mathbb{R}_+}}$.

Interprétation graphique de (ii):

l'équation $f(x)=y_1$ possède 3 solutions dans I donc f n'est pas bijective.

$I = [a, b]$

$J = [f(a), f(b)]$.



$f : I \to J$

Étant donné $y_0 \in J$, résoudre l'équation $f(x) = y_0$ revient à trouver les abscisses des points d'intersection de C_f avec la droite horizontale d'équation $y = y_0$.

(ii) $\Longleftrightarrow$ toute droite horizontale d'équation $y = y_0$ (avec $y_0 \in J$) coupe le graphe de f en <u>exactement</u> un point.

2) Le Th de la bijection (cas d'un segment avec f strictement croissante)

<u>Th</u> [de la bijection] [aussi appelé Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires]:

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que:

(i) f est continue sur $[a, b]$

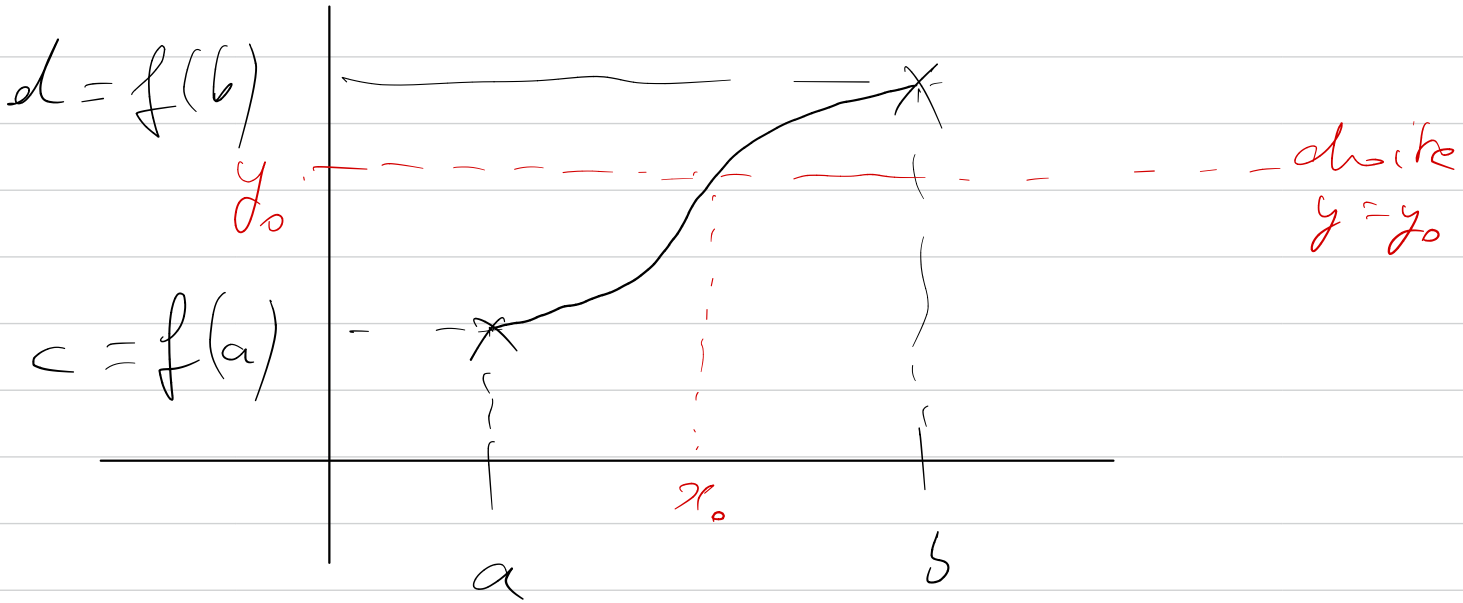
(ii) f est strictement croissante sur $[a, b]$

(iii) $f(a) = c$ et $f(b) = d$.

Alors f réalise une bijection de $[a,b]$ dans $[c,d]$, c'est-à-dire :

cf. Rappels au 1) ci-dessus

- (*) $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \in [c,d]$
- (*) $\forall y \in [c,d] \quad \exists!\, x \in [a,b] \quad f(x) = y$.



__Application__ : notamment $f : [\underset{a}{2}, \underset{b}{5}] \to [\underset{c}{4}, \underset{d}{25}],\ x \mapsto x^2$ est bijective.

Différences entre ce Th et le TVI :

① Dans le Th de la bijection on suppose f strictement croissante alors que dans le TVI cette hypothèse n'apparait pas.

② Dans le Th de la bijection la conclusion est

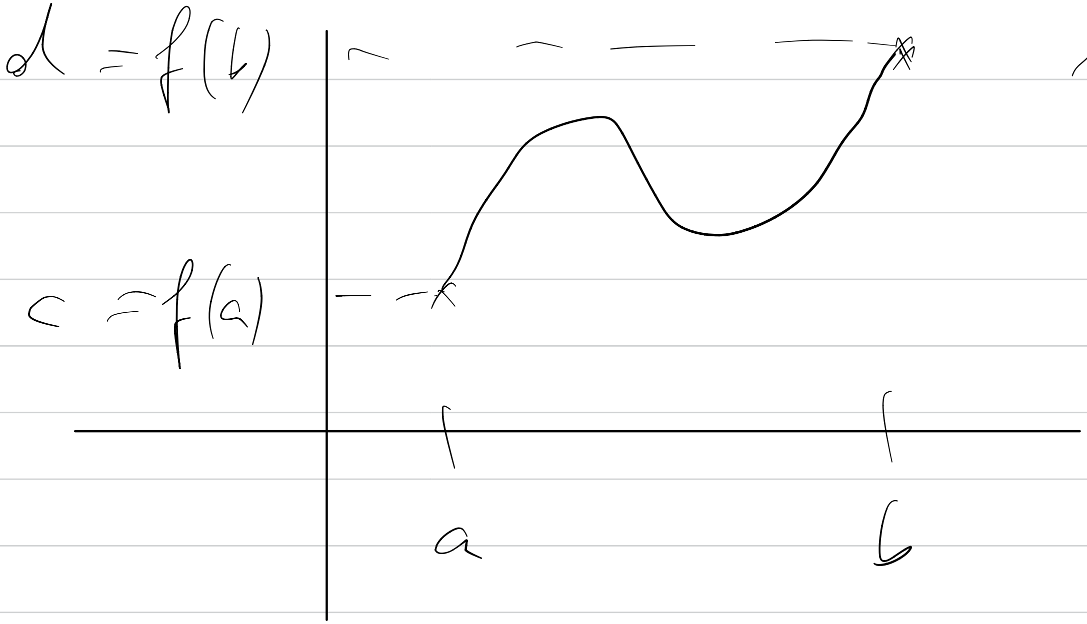
$$\forall y \in [f(a), f(b)] \quad \exists ! \, x \in [a,b] \quad f(x) = y$$

alors que dans le TVI la conclusion est

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \quad \exists \, x \in [a,b] \quad f(x) = y$$

Rappel (TVI) : si f continue sur $[a,b]$ alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

si $y = 0$ cette hypothèse $\Leftrightarrow f(a) f(b) \leq 0$



le TVI s'applique mais pas le Th de la bijection.

Preuve du Th de la bijection :

- Soit $x \in [a,b]$. Alors $a \leq x \leq b$

  donc $c = f(a) \leq f(x) \leq f(b) = d$ car f est croissante.

  donc $f(x) \in [c,d]$.

- Soit $y \in [c,d]$. Par le TVI il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$. Il reste qu'à montrer l'unicité d'un tel x. Supposons que x_1 et x_2 conviennent avec $x_1 \neq x_2$. Quitte à permuter x_1 et x_2 on peut supposer $x_1 < x_2$. Comme f est strictement croissante on a :

$$y = f(x_1) < f(x_2) = y$$

D'où $y < y$, contradiction.

3) Comment vérifier les hypothèses en pratique ?

* f continue sur $[a,b]$: somme, produit, composée, $\underbrace{\text{quotient}}_{\text{avec dénominateur qui ne s'annule pas}}$ de fonctions continues

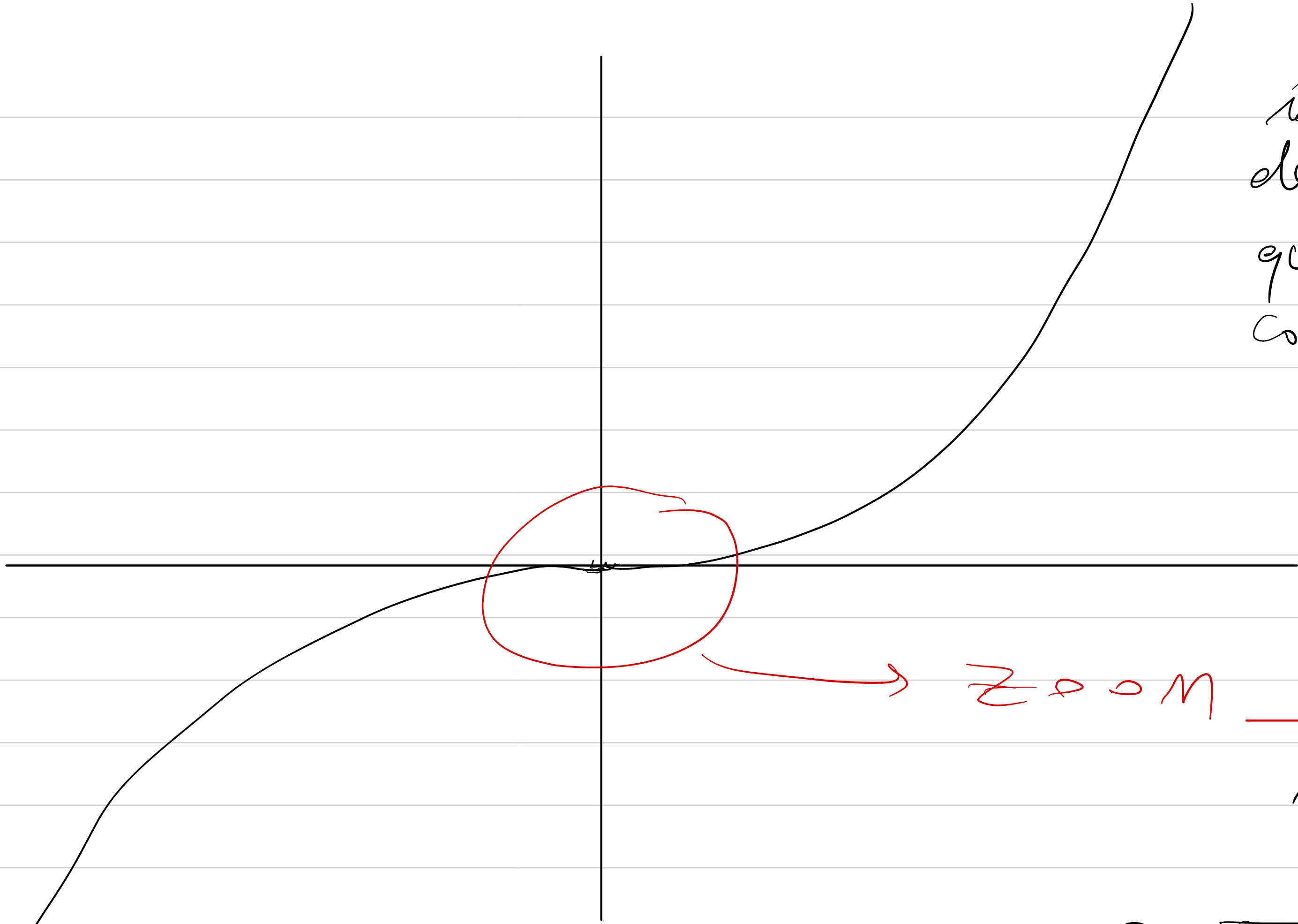
(*) f est strictement croissante : on utilise ceci :

<u>Propriété</u> : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que

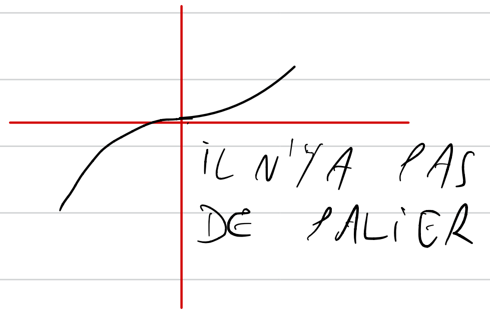
$f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x).

Alors f est strictement croissante sur I.

<u>Exemple</u> : $f(x) = x^3$ définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



il n'existe pas de $\varepsilon > 0$ telle que f soit constante sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$.



f est-elle strictement croissante ? $\boxed{\text{OUI}}$

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite strictement croissante sur l'intervalle I si $\forall x, x' \in I \ \left[(x < x') \Longrightarrow (f(x) < f(x')) \right]$

Ex : $f(x) = x^3$ vérifie $f'(x) = 3x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ mais $f'(0) = 0$. On est dans le cas où :

$f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (sauf pour une valeur de x : la valeur 0).

La propriété ci-dessus montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

ici f' s'annule en 2 points et $f'(x) > 0$ pour tous les autres $x \in \mathbb{R}$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) Les variantes du Th de la bijection.

1ère variante : f peut être strictement décroissante.

Si $f(a) = b$ et $f(c) = d$

alors on a $d < b$

et f réalise une bijection de $[a, c]$

dans $[d, b]$.

en fait c'est évident

Autrement : si f est strictement décroissante on permute les bornes de l'intervalle d'arrivée pour qu'elles soient dans le bon sens.

par rapport à l'énoncé ci-dessus.

Ex : $f(x) = x^2$ sur $[a,b] = [-3,-2]$.

f est continue et str^t décroissante sur $[a,b]$ avec $f(a) = 9$ et $f(b) = 4$. Donc f réalise une bijection de $[-3,-2]$ dans $[4,9]$.

(et pas $[9,4]$, évidemment !)

Dans la 2^e variante on va revenir à f strictement croissante (pour que ce soit plus clair) mais on peut combiner les variantes entre elles.

2è variante : f n'est pas définie en a.

f est continue et strictement croissante sur $]a, b]$.

On remplace l'hypothèse "$f(a) = c$"

par "$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$". (c'est une limite à droite)

sous entendu : $x \to a$ avec $x \in]a, b]$

On a comme conclusion que f réalise une bijection de $]a, b]$ dans $]c, d]$.

Dans cette variante on autorise à ce que
$\left.\begin{array}{l} a = -\infty \\ c = -\infty \end{array}\right]$ car les intervalles sont ouverts en a et en c.

on ouvre en c car au départ c'est ouvert en a

Exemple : $\exp :]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$

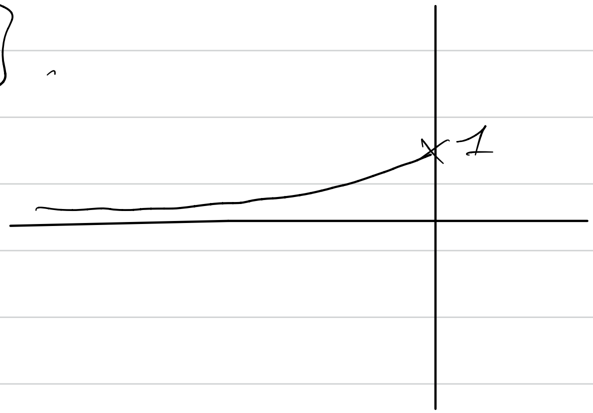
est continue et strictement croissante sur $]\underbrace{-\infty}_{a}, \underbrace{0}_{b}]$ et on a :

$$\lim_{x \to \underbrace{-\infty}_{a}} \exp(x) = 0 = c$$

$$\exp(\underbrace{0}_{b}) = 1 = d$$

donc exp réalise une bijection de $]\underbrace{-\infty}_{a}, \underbrace{0}_{b}]$

dans $]\underbrace{0}_{c}, \underbrace{1}_{d}]$.



3ᵉ variante : f continue et strictement croissante sur $[a,b[$, avec $f(a)=c$ et $\lim_{x\to b} f(x) = d$.

Alors f réalise une bijection de $[a,b[$ dans $[c,d[$.

On autorise $b=+\infty$, $d=+\infty$.

Les variantes se cumulent :

(1) $\exp :]-\infty,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$

donc exp réalise une bijection de $\underbrace{]-\infty, +\infty[}_{=\mathbb{R}}$ dans $]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

(*) $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

On a $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

donc ln réalise une bijection de $]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

(*) $i : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ ~~avec~~ :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(sous-entendu $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc c'est une limite à droite, quand $x \to 0^+$)

Donc i réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$.

II Bijections réciproques.

1) Définition et premières propriétés.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$

et f une bijection de I dans J.

<u>Déf</u> : On appelle <u>bijection réciproque de f</u> (ou alors <u>réciproque</u>, ou parfois <u>inverse</u>) la fonction de J dans I qui à tout $y \in J$ associe l'unique antécédent de y par f. On note $f^{-1} : J \to I$ cette bijection réciproque.

<u>Ex</u> : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est bijective (cf. ci-dessus). Sa bijection réciproque est $\ln$.

A retenir : par définition de f^{-1} :

$$\forall x \in I \ \forall y \in J \quad (y = f(x)) \Longleftrightarrow (x = f^{-1}(y)).$$

Ici : $\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad (y = e^x) \Longleftrightarrow (x = \ln y).$

Propriété Si $f : I \to J$ est bijective

alors $f^{-1} : J \to I$ est bijective elle aussi

et la bijection réciproque de f^{-1} est f :

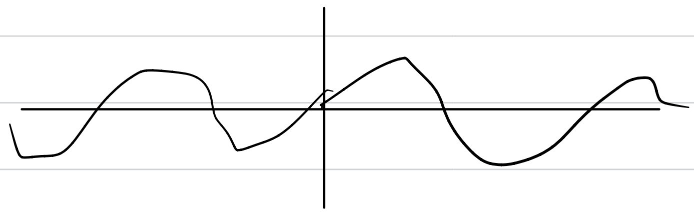
$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

On dit que f et f^{-1} sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Ex : $x \mapsto x^2$ est bijective $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et sa bijection réciproque est $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto \sqrt{x}$.

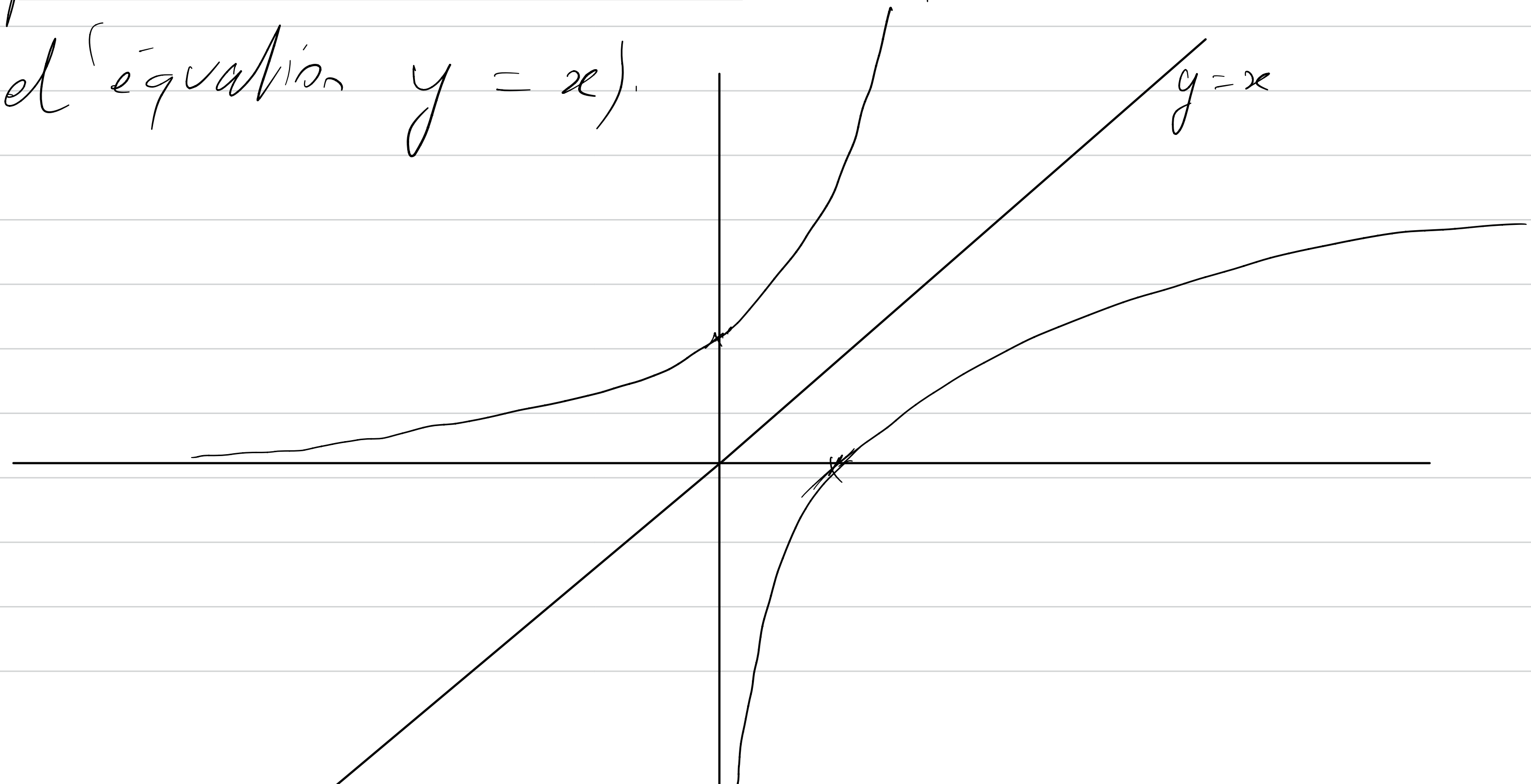
⚠ La notation f^{-1} (et la notion de bijection réciproque) n'ont AUCUN SENS si f n'est pas bijective.

Ex : $\sin^{-1}$ n'a aucun sens car $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective

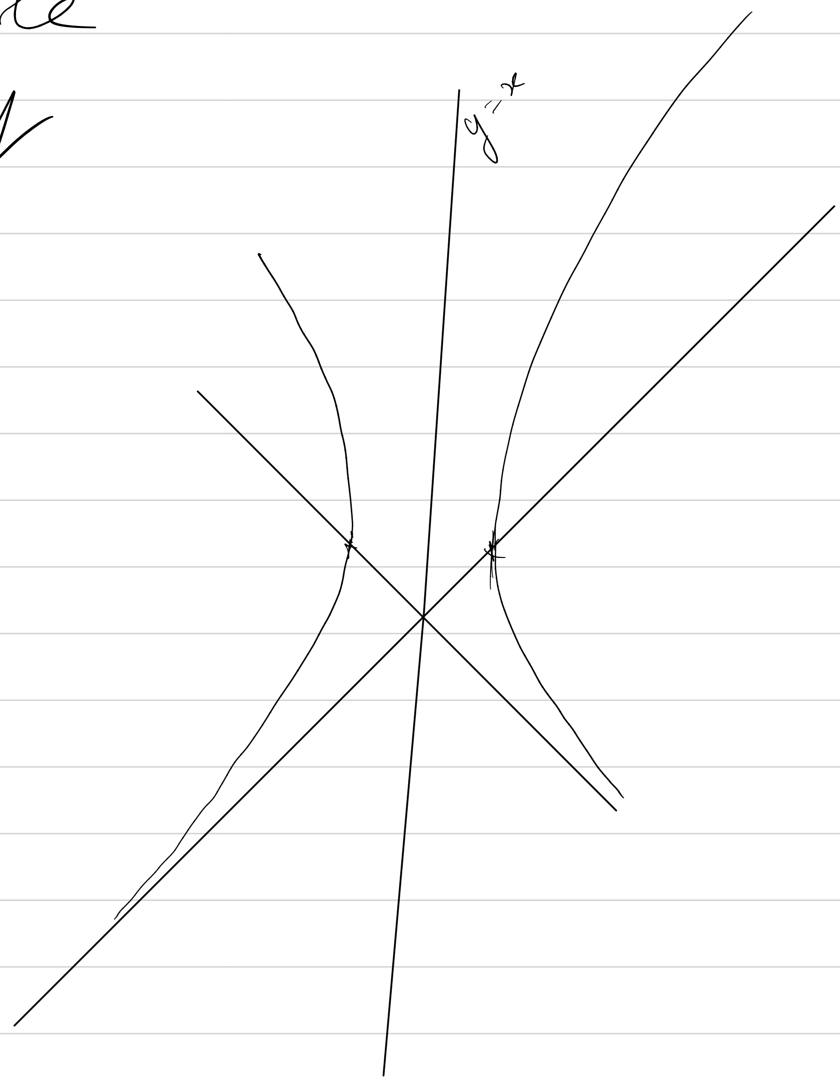


[On verra plus loin qu'en restreignant sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ elle est bijective et alors on peut parler de sa réciproque].

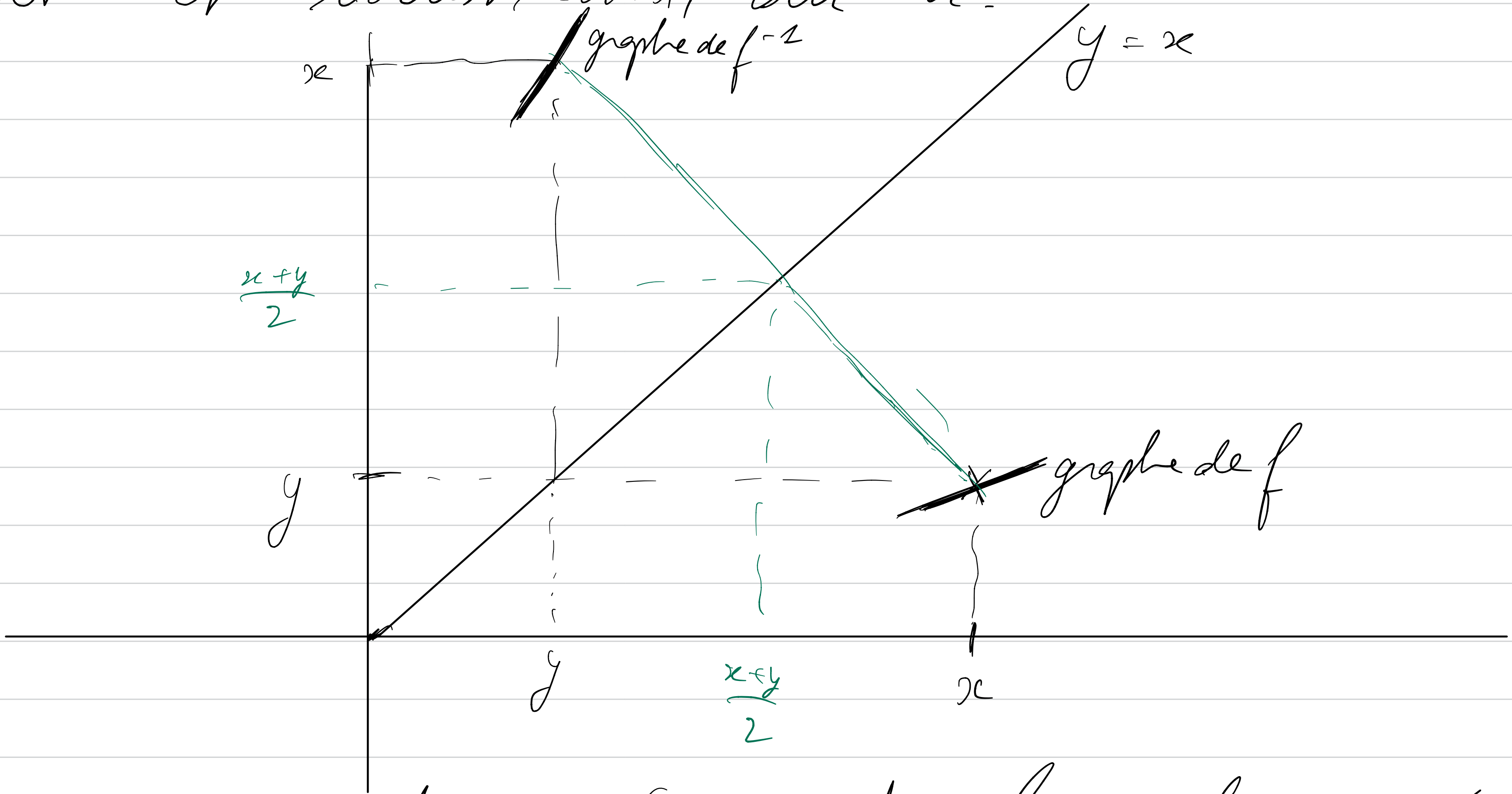
<u>Th</u> : Dans un repère orthonormal, le graphe d'une bijection f et celui de sa réciproque sont symétriques par rapport à la "<u>première bissectrice</u>" (qui est la droite d'équation $y = x$).



Si on tourne le dessin précédent on voit mieux la symétrie:



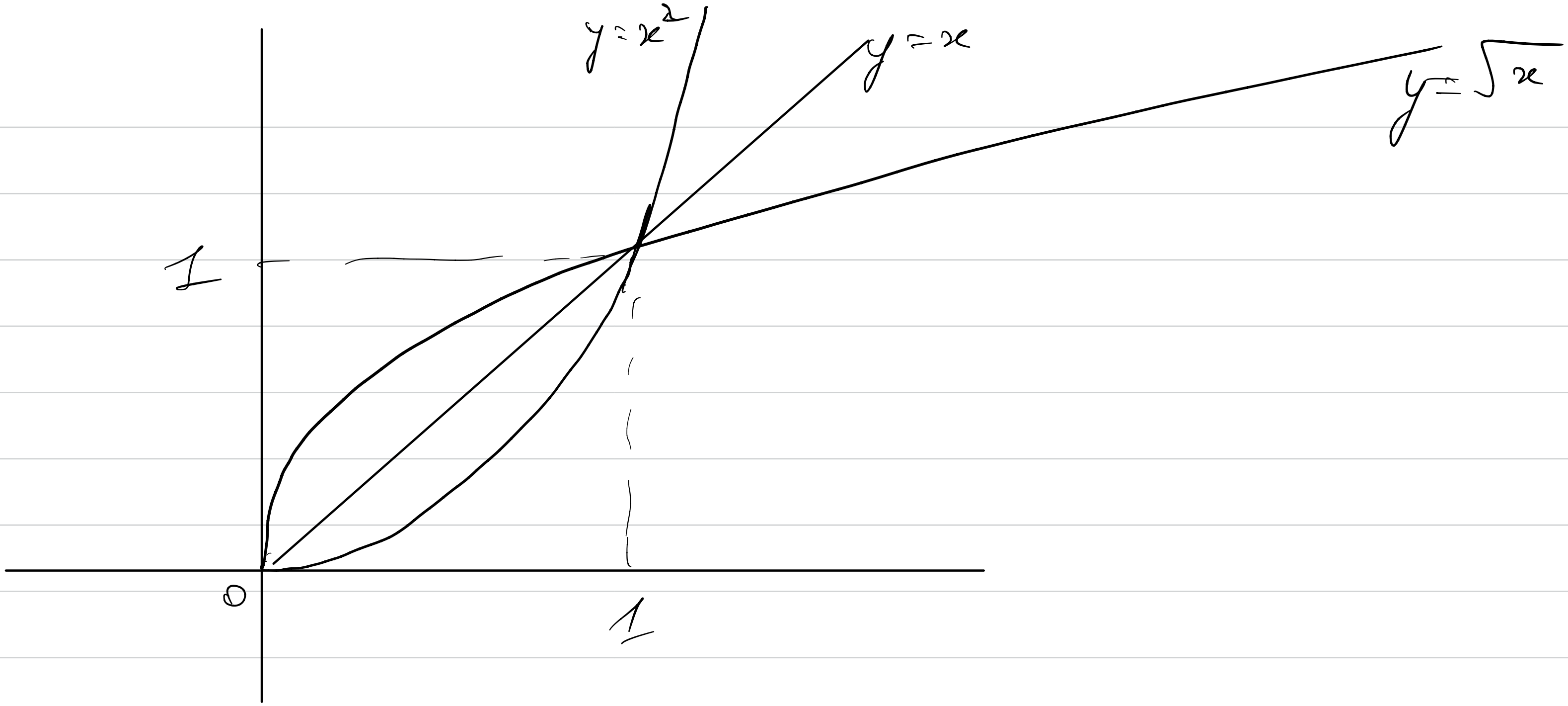
Preuve et illustration du Th :



Le point de coordonnées (x, y) et celui de coordonnées (y, x) sont symétriques par rapport à la 1è bissectrice.

<u>Si $y = f(x)$</u> le point (x, y) décrit le graphe de f et le point (y, x) décrit le graphe de f^{-1}.
car $f^{-1}(y) = x$.

Exemple :



2) Continuité.

Th Soit f continue, strictement monotone, et bijective de I dans J. Alors :
f^{-1} est continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

Preuve: ⊛ Stricte monotonie : pour simplifier supposons f strictement croissante.

Soient $y_1, y_2 \in J$ tel que $y_1 < y_2$.

Montrons que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ par l'absurde :

on suppose $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$.

Or f est croissante donc :

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2.$$

$y_1 \geq y_2$ contradiction.

⊛ Continuité : Supposons encore que f est strictement croissante sur I.

Soit $\tilde{y} \in J$. Montrons que f^{-1} est continue en $\tilde{y}$,

i.e. $$\lim_{y \to \tilde{y}^+} f^{-1}(y) = \lim_{y \to \tilde{y}^-} f^{-1}(y) = f^{-1}(\tilde{y}).$$

Montrons seulement $\lim_{y \to \tilde{y}^+} f^{-1}(y) = f^{-1}(\tilde{y})$ (analogue en $\tilde{y}^-$).

<u>Critère séquentiel</u> : il suffit de montrer que pour toute suite strictement décroissante (y_n) de points de J qui tend vers $\tilde{y}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(\tilde{y}).$$

Soit (y_n) une telle suite. Posons $x_n = f^{-1}(y_n)$.
Alors (x_n) est strictement décroissante car f^{-1} est strictement décroissante.

Posons aussi $\tilde{x} = f^{-1}(\tilde{y})$. Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad y_n \geqslant \tilde{y}$$

donc en appliquant f^{-1} qui est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n \geqslant \tilde{x}.$$

La suite (x_n) est décroissante et minorée (par $\tilde{x}$)
donc elle converge vers un réel $l \geqslant \tilde{x}$.

On a $x_n \geqslant l \geqslant \tilde{x}$ avec $\tilde{x}, x_n \in I$

donc $l \in I$.

On a $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et f est continue en l

donc $y_n = f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(l)$.

Par définition on a $\lim_{n\to+\infty} y_n = \tilde{y}$.

Par unicité de la limite : $\tilde{y} = f(\ell)$

donc $\ell = f^{-1}(\tilde{y}) = \tilde{x}$.

<u>Bilan</u> Pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in J^{\mathbb{N}}$ strictement décroissante qui tend vers $\tilde{y}$, on a montré que $f^{-1}(y_n) = x_n$ tend vers $f^{-1}(\tilde{y}) = \tilde{x} = \ell$.

Ceci termine la preuve.

3) Dérivabilité.

Motivation : Supposons que f est bijective $I \to J$, dérivable sur I, et que f^{-1} est dérivable sur J. Alors pour tout $x \in I$ on a :

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Par hypothèse on peut dériver cette relation :

$$(f^{-1})'(f(x)) \times f'(x) = 1$$

Rappel : la dérivée de $g \circ f$ est $(g' \circ f) \times f'$.

On en déduit que $f'(x) \neq 0$ (et $(f^{-1})'(f(x)) \neq 0$).

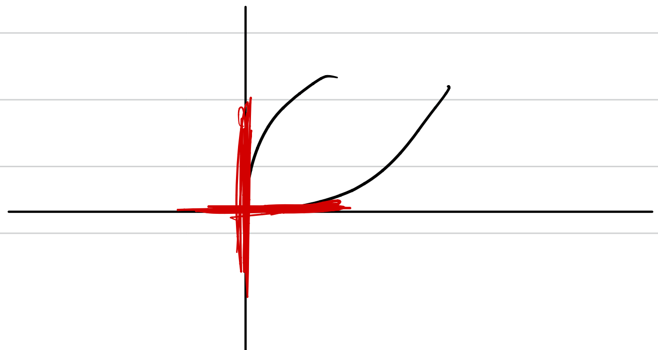
A retenir : si f et f^{-1} sont dérivables sur I et J respectivement

alors f' ne s'annule pas ~~sur~~ sur I,

et $$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ex : $f : x \mapsto x^2$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$

mais $f'(0) = 0$. Donc sa bijection réciproque $f^{-1} = \sqrt{\ }$ n'est pas dérivable en 0.



Prochain cours :

Implication réciproque.