Cours n° 10
13/4/2021

Chapitre 4 : Développements limités (3/3)

MDD151
Calcul Intégral
L1DD
IM/EM/MSV

II Applications des D.L. (suite)

2) Etude locale du graphe d'une fonction autour de 0

I intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$; notons $\mathcal{C}$ le graphe de f.

Si f dérivable en x_0 alors $\mathcal{C}$ possède en $(x_0, f(x_0))$ une tangente dont $f'(x_0)$ est le coefficient directeur et qui a pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Question : quelle est la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de sa tangente au voisinage de x_0 ?

Supposons $x_0 = 0$ (pour simplifier).

Supposons que f possède un DL de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_p x^p + o(x^p)$$

avec $p \geq 2$ et $\boxed{a_p \neq 0}$.

si $p \geq 3$ il y a des termes $x^2, x^3, \ldots, x^{p-1}$ dont le coefficient est nul.

((exemple : $f(x) = \sin x$ $\rightsquigarrow$ $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

donc $p = 3$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_3 = \dfrac{-1}{6}$))

<u>Alors</u> :

(i) L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 (i.e. au point $(0, f(0))$) est :

$$y = a_0 + a_1 x$$

En effet on a vu que si $f(x) = a_0 + a_1 x + a_p x^p + o(x^p)$ alors $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$ est le DL à l'ordre 1 de f en 0, et que dans ce cas on a

$f(0) = a_0$, f dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

Donc une équation de la tangente est bien :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = f'(0)x + f(0) = a_1 x + a_0.$$

(ii) On va déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ et de sa tangente au voisinage du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0. En effet on a :

$$f(x) - (a_0 + a_1 x) = a_p x^p + o(x^p)$$

$$\underset{x \to 0}{\sim} a_p x^p \quad \text{car } a_p \neq 0$$

((en effet $a_p \neq 0$ donc $a_p x^p + o(x^p) = a_p x^p + o(a_p x^p) \sim a_p x^p$))

donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - (a_0 + a_1 x)}{a_p x^p} = 1$

donc pour x suffisamment proche de 0 on a :

$$\frac{f(x) - (a_0 + a_1 x)}{a_p x^p} > 0$$

i.e. $\boxed{f(x) - (a_0 + a_1 x) \text{ est du signe de } a_p x^p.}$

<u>1er cas</u> <u>p pair et $a_p > 0$</u>.

Alors pour tout $x \neq 0$ on a : $a_p x^p > 0$

donc pour tout x assez proche de 0 on a :

$$f(x) - (a_0 + a_1 x) > 0$$

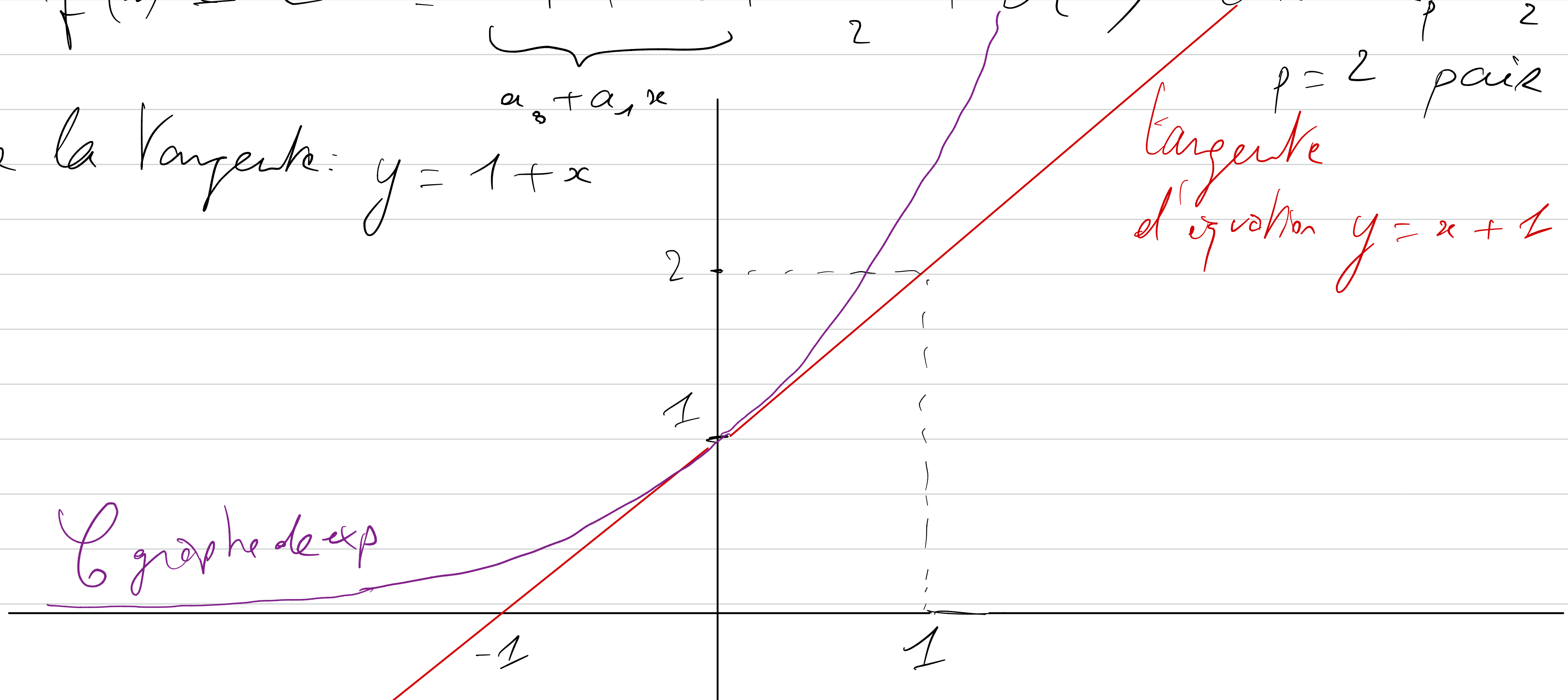
i.e. $f(x) > a_0 + a_1 x$.

Donc la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0.

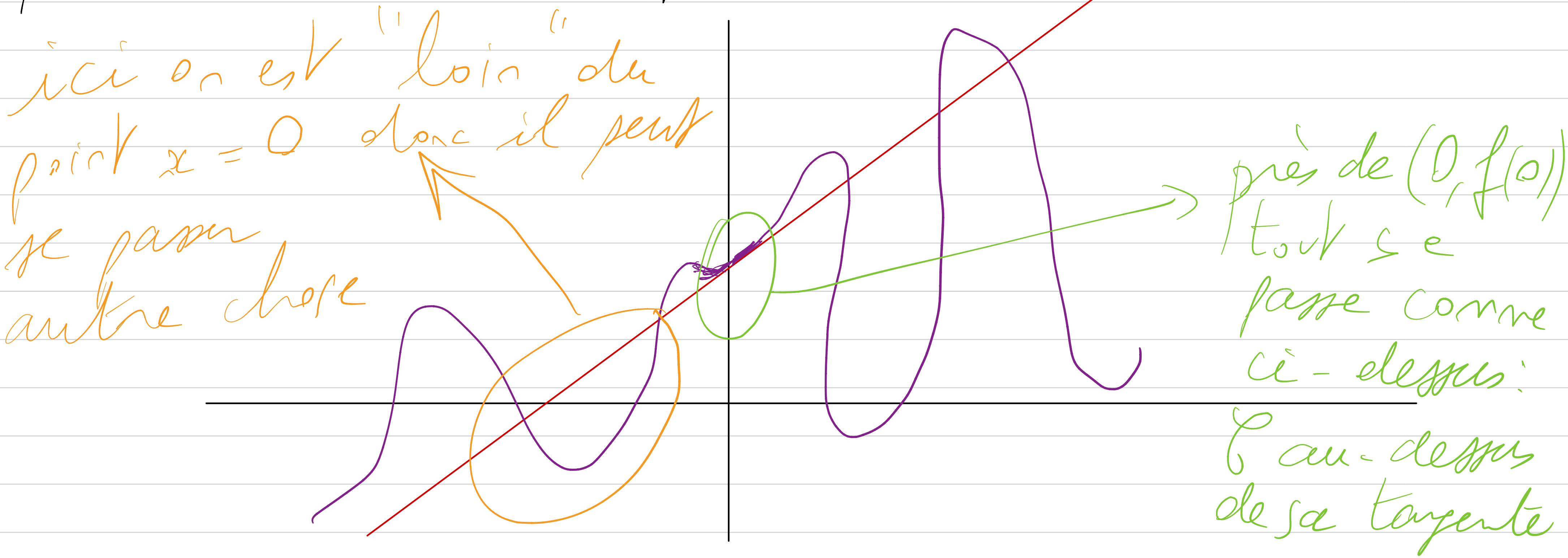
Ex : $f(x) = e^x = \underbrace{1 + x}_{a_0 + a_1 x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $a_p = \frac{1}{2} > 0$

$p = 2$ pair

Eq de la tangente : $y = 1 + x$



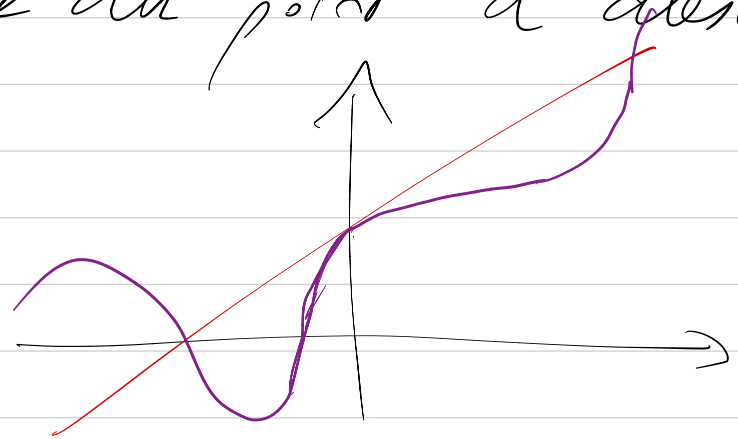
NB : ce qu'on obtient dans ce paragraphe est un comportement local près du point $(0, f(0))$: quand on s'éloigne de ce point il peut se passer n'importe quoi, par exemple :



2ᵉ cas : p pair, $a_p < 0$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $a_p x^p < 0$ donc pour x assez proche de 0 on a $f(x) < a_0 + a_1 x$:

la courbe $\mathcal{C}$ est en-dessous de sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0.



3ᵉ cas : p impair, $a_p > 0$.

Alors $\begin{cases} a_p x^p > 0 & \text{pour } x > 0 \\ a_p x^p < 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$

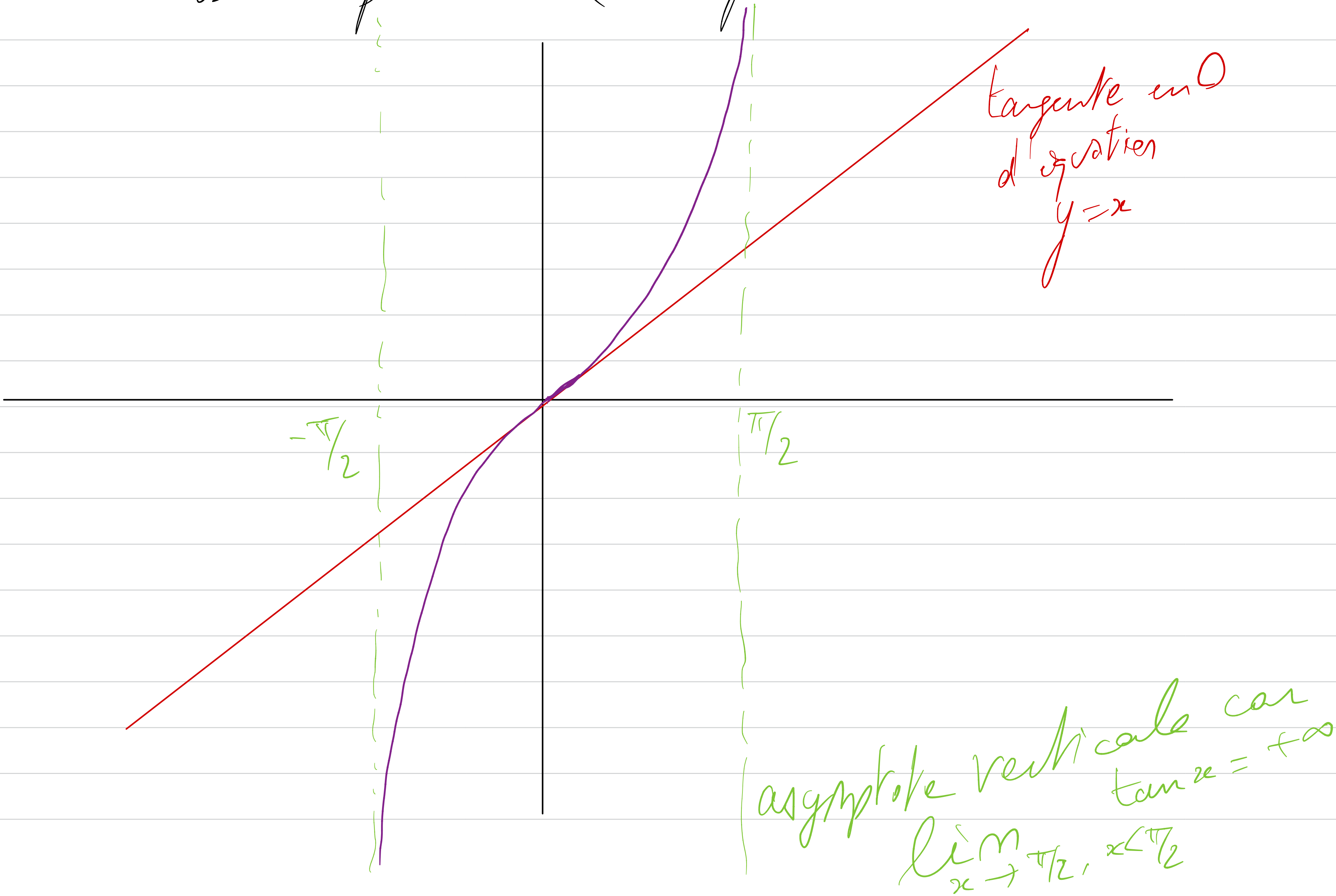
Donc pour x assez proche de 0, $f(x) - (a_0 + a_1 x)$ est du signe de x. Alors la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente, on dit que le point $(0, f(0))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

Ex : on a vu que $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

donc $p = 3$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$

On a bien p impair et $a_p > 0$.

$\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente pour $x > 0$ proche de 0 et en-dessous pour $x < 0$ proche de 0.

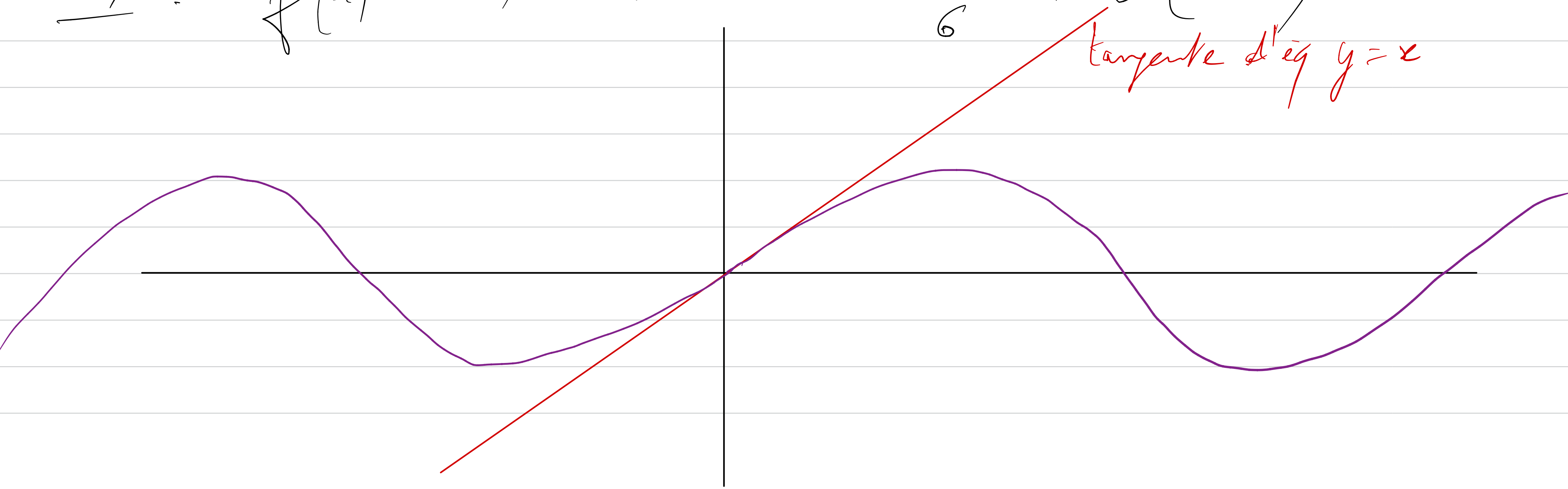


4ème cas : p impair, $a_p < 0$.

On a aussi un point d'inflexion : $\mathcal{C}$ traverse sa tangente.

$\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente pour $x < 0$ proche de 0 et en-dessous pour $x > 0$ proche de 0.

Ex : $f(x) = \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.



3) Étude locale et DL en $x_0 \neq 0$.

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Un développement limité de f en x_0 à l'ordre n est une expression de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

où x tend vers x_0.

c'est-à-dire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

⚠ ici x tend vers x_0

Point déf : ceci est un DL de f en x_0

si et seulement si

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$$

est un DL en 0 à l'ordre n de la fonction $h \longmapsto f(x_0+h)$.

⚠ ici h tend vers 0

En pratique on utilisera toujours cette remarque, qui revient à faire un changement de variable :

$$x = x_0 + h \quad \text{i.e.} \quad h = x - x_0$$

de telle sorte que

$$x \longrightarrow x_0 \iff h \longrightarrow 0.$$

"TOUTES" LES PROPRIETES DES DL en 0 SONT ENCORE VALABLES en x_0 GRACE A CETTE REMARQUE.

Exemple : $f(x) = \sqrt{2+x}$; on cherche le DL de f en $x_0 = 2$ à l'ordre 2.

Posons

$$g(h) = f(2+h) \quad \text{c'est-à-dire } f(x)$$

avec $x = x_0 + h = 2 + h$

$$g(h) = \sqrt{2+(2+h)} = \sqrt{4+h}$$

On veut comparer les DL mais celui qu'on connaît est $\sqrt{1+\varepsilon}$ avec $\varepsilon \to 0$.

Il faut avoir $\sqrt{\text{quelque chose}}$ avec quelquechose $\to 1$.

Comme $4+h$ ne tend pas vers 1 (quand $h \to 0$)

on va le factoriser par un équivalent simple.

Ici $4+h \to 4$ donc $4+h \sim 4$ (puisque $4 \neq 0$)

On écrit $4+h = 4\left(1+\frac{h}{4}\right)$ d'où :

$$g(h) = \sqrt{4+h} = \sqrt{4\left(1+\frac{h}{4}\right)} = \sqrt{4}\sqrt{1+\frac{h}{4}}$$

$$= 2\sqrt{1+\frac{h}{4}} \quad \text{avec} \quad \frac{h}{4} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

donc on peut composer les DL :

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{h}{4}\right)^2 + o\left(\left(\frac{h}{4}\right)^2\right)\right)$$

$$= 2\left(1 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{32} + o\left(h^2\right)\right)$$

$$\underset{f(2+h)}{\overset{\|}{g(h)}} = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{16} + o\left(h^2\right)$$

Pour conclure on repasse en x avec $x = 2 + h$ c'est-à-dire $h = x - 2$:

$$f(x) = 2 + \frac{x-2}{4} - \frac{(x-2)^2}{16} + o\left((x-2)^2\right)$$

quand $x \longrightarrow 2$.

Application à l'étude locale :

On suppose que quand $x \to x_0$ on a un DL de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o\left((x - x_0)^p\right)$$

avec $p \geq 2$, $a_p \neq 0$.

Alors la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est tangente au point d'abscisse x_0 à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f, car $a_0 = f(x_0)$ et f dérivable en x_0 avec $a_1 = f'(x_0)$.

La position relative de $\mathcal{C}$ et de sa tangente est donnée, au voisinage du point d'abscisse x_0, par le signe de $a_p (x-x_0)^p$.

On a 4 cas exactement comme lorsque $x_0 = 0$.

4) Recherche d'asymptotes.

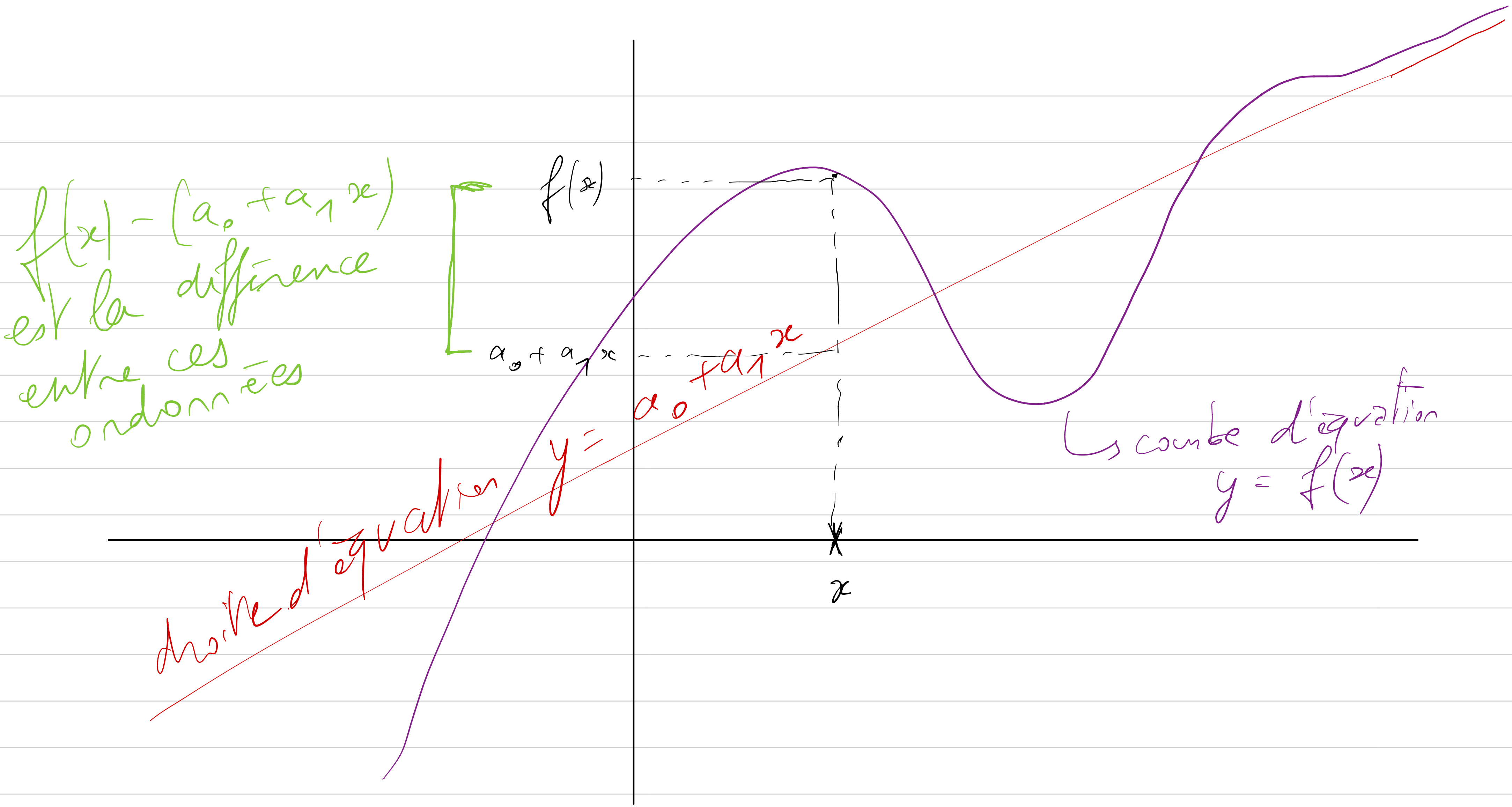
Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

__Rappel__ : si $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la droite horizontale d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathcal{C}$ "au voisinage de $+\infty$" (ou "en $+\infty$").

<u>**Déf**</u> : Une droite d'équation $y = a_0 + a_1 x$ est dite <u>asymptote</u> à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ (ou : en $+\infty$) si

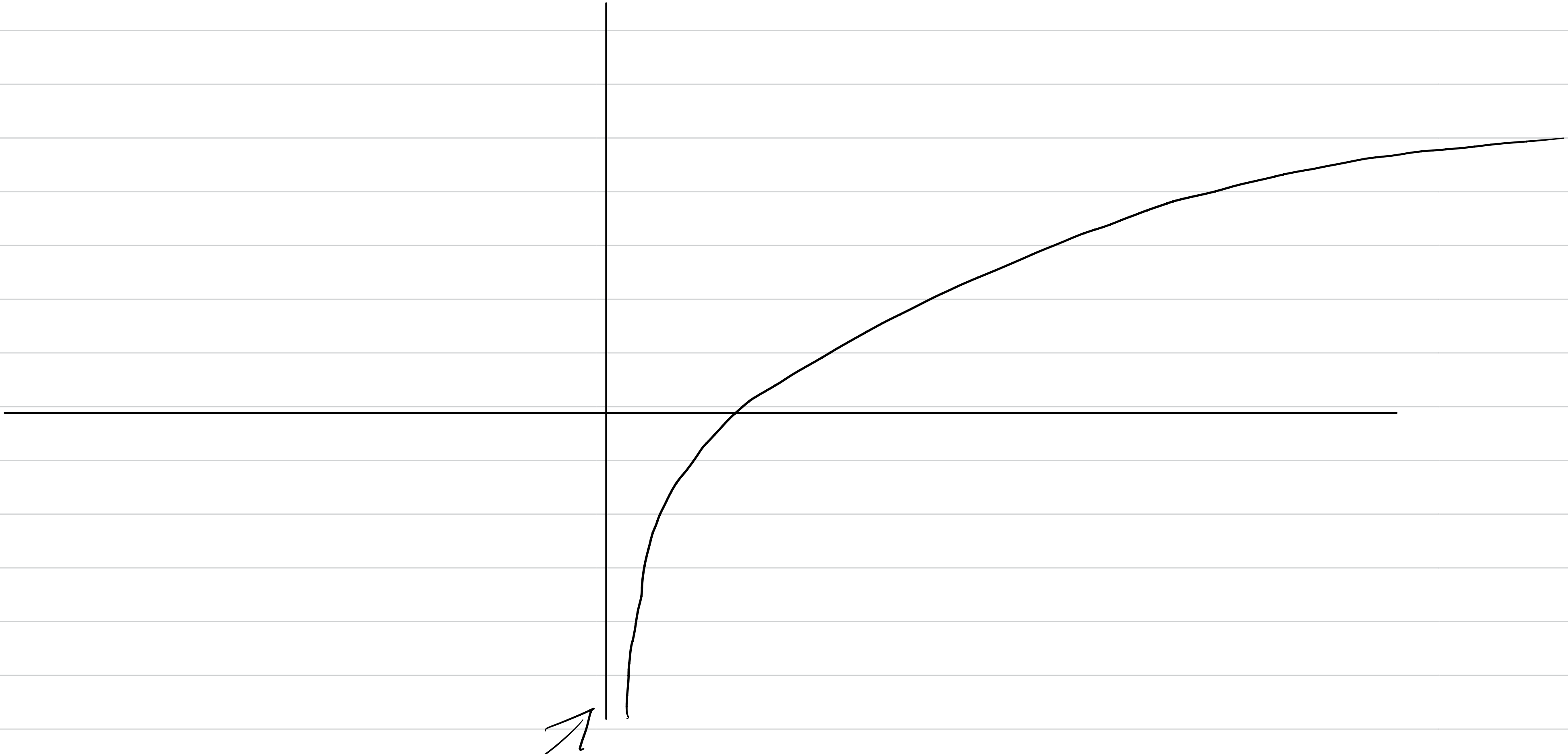
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (a_0 + a_1 x) = 0.$$

<u>NB</u> : Si $a_1 = 0$ on retrouve la déf précédente et on parle d'asymptote horizontale.
Si $a_1 \neq 0$ on dit qu'il s'agit d'une <u>asymptote oblique</u>.



NB : une fonction définie sur $[a, +\infty[$ ne possède pas toujours d'asymptote (en $+\infty$) ; par exemple avec

$f(x) = \ln x$ on a le graphe suivant :



en 0 on a une asymptote verticale qui est l'axe (Oy), d'équation $x = 0$, mais ce qu'on étudie ici ce sont uniquement les asymptotes quand $x \to +\infty$ (ou $-\infty$).

NB : la courbe représentative de $x \mapsto \ln x$ a tendance à être de plus en plus plate quand $x \to +\infty$ mais elle n'a pas d'asymptote. (On dit qu'elle a une direction asymptotique.)

Position relative : supposons que lorsque $x \to +\infty$ on a une expression de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{b}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$$

avec $p \geq 1$ et $b \neq 0$. Une telle expression s'appelle un développement asymptotique. Plus généralement un développement asymptotique quand $x \to +\infty$ est une expression de la forme :

$$f(x) = c_{-n} x^{n} + c_{-n+1} x^{n-1} + \dots + c_{-1} x + c_0 + \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$$

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{p} \frac{c_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^p}\right) \quad \text{avec } \begin{cases} p \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On peut avoir des termes qui $\xrightarrow[x \to +\infty]{} \pm\infty$ (les $\frac{c_k}{x^k} = c_k x^{-k}$ avec k compris entre -1 et $-n$), un terme constant c_0, des termes qui $\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ (les $\frac{c_k}{x^k}$ avec $1 \leq k \leq p$), et un terme d'erreur $o\left(\frac{1}{x^p}\right)$.

⚠ le terme "développement asymptotique" est très général alors que "DL" est très précis (x tend vers un <u>réel</u> x_0 et on a un <u>polynôme</u> en $x - x_0$).

Exemple de développement asymptotique qu'on obtient en pratique :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

quand $x \longrightarrow +\infty$.

Position relative : supposons que lorsque $x \to +\infty$ on a une expression de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{b}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$$

avec $p \geq 1$ et $b \neq 0$.

Alors : (i) la droite d'équation $y = a_0 + a_1 x$ est asymptote en $+\infty$ à $\mathcal{C}$, puisque

$$f(x) - (a_0 + a_1 x) = \frac{b}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \text{ car } p \geq 1.$$

(ii) la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote découle du signe de b :

$$f(x) - (a_0 + a_1 x) = \frac{b}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$$

$$\sim \frac{b}{x^p} \quad \text{puisque } b \neq 0$$

donc $f(x) - (a_0 + a_1 x)$ est du signe de $\frac{b}{x^p}$ pour x assez grand.

Si $x \to +\infty$ et $b > 0$ on a $f(x) > a_0 + a_1 x$

$\mathcal{C}$ est au-dessus de son asymptote.

Si $x \to +\infty$ et $b < 0$ $\mathcal{C}$ est en-dessous

⚠ Si $x \to -\infty$ on adapte en tenant compte de la parité de b.

<u>Lemme</u> : Soit f et g deux fonctions telles que

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \quad (\text{avec } x_0 \in \mathbb{R} \text{ ou } x_0 = \pm\infty)$$

Alors $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe pour tout x assez proche de x_0.

<u>Preuve</u> : En supposant $g(x) \neq 0$ pour tout x assez proche de x_0 on a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc pour x assez proche de x_0 on a $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$: $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

Exemple : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ avec $x \to +\infty$.

On cherche à faire un développement asymptotique de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ en utilisant des DL.

On veut utiliser le DL de $\sqrt{\ }$: $\sqrt{1+\varepsilon} = \dots$ quand $\varepsilon \to 0$. On factorise par un équivalent simple de $\dfrac{x^3}{x-1}$: on a $\dfrac{x^3}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$

d'où :

$$f(x) = \sqrt{x^2 \frac{x}{x-1}} = \underbrace{\sqrt{x^2}}_{= x \text{ car } x > 0 \text{ car } x \to +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

Problème : écrire $\dfrac{x}{x-1} = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \to 0$.

Solution (facile !) : $\varepsilon = \dfrac{x}{x-1} - 1$ donc :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-1}} = x\sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{x}{x-1} - 1\right)}_{\text{tend bien vers 0 quand } x \to +\infty}}$$

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{x-(x-1)}{x-1}}$$

↳ on simplifie cela au maximum

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{1/2}$$

On peut composer les DL car $\dfrac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$:

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{x-1}\right)^2\right)\right)$$

ici $x \to +\infty$

donc $\dfrac{1}{x-1} \sim \dfrac{1}{x}$

$\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2 \sim \dfrac{1}{x^2}$ d'après $\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2 \sim \dfrac{1}{x^2}$

donc

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$o\left(\left(\frac{1}{x-1}\right)^2\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{x}{x-1}} - \frac{1}{8}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

↳ ce terme n'est pas sous la bonne forme

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$= 1 + \frac{1}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= 1 + \frac{1}{x}\times\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$

on a $\frac{x}{x-1} \sim 1$

donc $\frac{x}{x-1} = 1 + o(1)$

mais si on remplace directement dans l'expression on va trouver un développement $f(x) = x + \frac{1}{2} + o(1)$ ce qui n'est pas assez précis.

$$= 1 + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

en appliquant le DL $\frac{1}{1-u} = 1+u+o(u^2)$ avec $u = \frac{1}{x} \longrightarrow 0$

Donc $$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On remplace :

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x-1} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x} + \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{rentrent dans le } o\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Conséquence : la droite d'éq. $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, et la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de son asymptote (car $\frac{3}{8}\frac{1}{x} > 0$ pour $x \to +\infty$).

NB : on aurait pu trouver plus rapidement ce développement asymptotique en écrivant

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x-1}} = x\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$$

$$= x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2} \quad (\text{cf. poly}).$$