Suite du 10è cours 13/4/21

Calcul Intégral
MDD 151
L1 DD
IM/EM/MSV

Chapitre 5

Équations différentielles linéaires (1/3)

I Équations différentielles d'ordre 1.

Équation différentielle : équation dont l'inconnue est une fonction f et qui fait intervenir ses dérivées successives $(f, f', f'', \ldots)$.

Ex : $f''(x) - 3e^{x} f'(x)^2 - \sqrt{f(x)+5} = 2x+5$

est une équation différentielle. Une solution est une fonction f dérivable 2 fois sur un intervalle pour laquelle cette relation est satisfaite.

Ordre d'une éq. diff : ordre maximal de dérivation qui apparait :

ordre 1 : on a seulement f et f'

ordre 2 : on a f'', et éventuellement f et f'

ordre 3 : on a f''', et éventuellement f, f', f''.

Dans ce paragraphe : seulement d'ordre 1.

Equation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$f'(t) = a(t)\, f(t) + b(t) \qquad (E)$$

avec $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et I intervalle.

Cette éq. est dite homogène si $\forall t \quad b(t) = 0$.

NB : l'application $f \longmapsto f' - af$ est linéaire
ce qui donne son nom à ce type d'équations.

1) le cas homogène : $y' = ay$

NB : on note souvent y la fonction inconnue, plutôt que f.

Th Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $a : I \to \mathbb{R}$
une fonction continue sur I. Alors

Les solutions de l'équation différentielle

$$\boxed{y'(t) = a(t)\, y(t),} \quad t \in I,$$

sont exactement les fonctions de la forme

$$y(t) = \lambda\, e^{A(t)}$$

où A est une primitive fixée de a sur I et λ est un réel quelconque.

Ex : Si $\forall t \in I$ $a(t) = 1$, on peut prendre $A(t) = t$ et les solutions de $y'(t) = y(t)$ sont les fonctions $y(t) = \lambda e^t$.

Preuve : ⊗ Si $y(t) = \lambda e^{A(t)}$ alors y est dérivable sur I

et $y'(t) = \lambda A'(t) e^{A(t)} = a(t) y(t)$ OK

⊗ Soit y dérivable sur I tq $\forall t \in I$ $y'(t) = a(t) y(t)$.

Posons $\lambda(t) = y(t) e^{-A(t)}$. Alors λ est dérivable sur I

et $\forall t \in I$: $\lambda'(t) = y'(t) e^{-A(t)} + y(t)\left(-a(t) e^{-A(t)}\right)$

$$= \left(y'(t) - a(t) y(t)\right) e^{-A(t)}$$

$$= 0 \quad \text{car } y' = ay$$

Donc λ est constante sur l'intervalle I, et on a

$$y(t) = \lambda e^{A(t)}.$$