11ᵉ cours 20/4/21

Calcul Intégral MDD 1S1 L1 DD iM/EM/MSV

Chapitre 5

Equations différentielles linéaires (2/3)

<u>Th</u> Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors les solutions de l'équation différentielle

$$\boxed{y'(t) = a(t)\, y(t),} \qquad t \in I,$$

sont exactement les fonctions de la forme

$$y(t) = \lambda\, e^{A(t)}$$

où A est une primitive fixée de a sur I et λ est un réel quelconque.

NB : L'espace des solutions est un e.v. de dim 1 dont $t \mapsto e^{A(t)}$ est une base.

I Éq. Diff. d'ordre 1

1) Le cas homogène : $y' = ay$ (suite).

Ex : résoudre $y'(t) = \frac{1}{t} y(t)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

On a : $a(t) = \frac{1}{t}$

On choisit $A(t) = \ln(t)$ et les solutions sont :

$$y(t) = \lambda e^{\ln t} = \lambda t \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1 au lieu de $\ln(t)$ on aurait pu choisir $A(t) = \ln t + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ à notre convenance.

On aurait trouvé $y(t) = \lambda e^{\ln t + c} = \lambda t e^{c}$
$= \lambda' t$ avec $\lambda' = \lambda e^{c}$.

On trouve le même ensemble de solutions (heureusement !) mais paramétré différemment.

Par ex la fonction $y(t) = 2t$ est obtenue avec $\lambda = 2$ en prenant $A(t) = \ln t$, et avec $\lambda = \frac{2}{e^5}$ en prenant $A(t) = (\ln t) + 5$.

Remarque 2 : dans ce Th il est crucial d'être sur un intervalle. Si on veut résoudre $y'(t) = \frac{1}{t} y(t)$ sur $\mathbb{R}^*$

(avec $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ qui n'est pas un intervalle) : on la résout séparément sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ ce qui donne :

$$y(t) = \begin{cases} \lambda_1 t & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+^* \\ \lambda_2 t & \text{pour } t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

⚠ ici λ_1 et λ_2 n'ont aucune raison d'être égales si on cherche $y : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ solution de l'éq différentielle.

2) Avec second membre (toujours ordre 1 linéaires)

C'est $(E) \quad y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$

i.e. $(E) \quad y'(t) - a(t)\,y(t) = \underbrace{b(t)}$

s'appelle le second membre

Prop : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$

$a, b : I \to \mathbb{R}$ continues

y_0 une solution particulière de (E).

Alors les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme

$$y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_0(t) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

où A est une primitive fixée de a sur I.

Idée : y solution de $(E) \iff y = \tilde{y} + y_0$
avec $\tilde{y}$ une solution de l'éq homogène associée à (E)
i.e $y'(t) - a(t)y(t) = 0$.

Preuve : $\Leftarrow$ Si $y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_0(t)$ alors

$$y'(t) - a(t)y(t) = \cancel{\lambda a(t) e^{A(t)}} + y_0'(t) - \cancel{a(t)\lambda e^{A(t)}} \cdots \left(\lambda e^{A(t)} + y_0(t)\right)$$

$$= y_0'(t) - a(t)\, y_0(t) = b(t)$$

$\Rightarrow$ Soit y tq $y'(t) - a(t)\,y(t) = b(t)$.

On sait que : $y_0'(t) - a(t)\, y_0(t) = b(t)$.

On soustrait membre à membre :

$$\left(y'(t) - y_0'(t)\right) - a(t)\left(y(t) - y_0(t)\right) = 0.$$

$\underbrace{\hspace{4em}}_{\text{dérivée de } y-y_0}$

Donc $y - y_0$ est solution de l'éq homogène associée à (E). Par le Th du 1), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $y(t) - y_0(t) = \lambda e^{A(t)}$. OK

<u>Problème</u> : comment trouver une solution particulière ?

<u>Parfois</u> : chercher une sol. partic. qui ressemble au 2^{nd} membre $b(t)$. [plutôt rare]

<u>Ex</u> : $y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + 1$, $t \in \mathbb{R}_+^*$

ici $a(t) = \frac{1}{t}$ et $b(t) = 1$.

Sur cet exemple on voit mal quelle solution particulière on pourrait trouver !

3) Méthode de la variation de la constante.

C'est une méthode qui permet de trouver une solution particulière d'une eq diff linéaire d'ordre 1 avec 2nd membre. Elle fonctionne à tous les coups (sous réserve de savoir calculer une certaine primitive).

__Principe :__ on va chercher une solution particulière sous la forme

$$y(t) = \lambda(t) e^{A(t)}$$

c'est la constante λ dans le Th du I 1) qui donne sol. éq. homi; on fait varier cette constante

avec λ fonction $I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On remplace $y(t)$ par $\lambda(t) e^{A(t)}$ dans (E), et on obtient une condition sur λ pour que ce soit une solution. On trouve ainsi une telle fonction λ, donc une solution de (E).

__De façon générale :__

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \Longleftrightarrow \lambda'(t)e^{A(t)} + \cancel{\lambda(t)a(t)e^{A(t)}} = \cancel{a(t)\lambda(t)e^{A(t)}} + b(t)$$

$$\Longleftrightarrow \lambda'(t)\, e^{A(t)} = b(t)$$

$$\Longleftrightarrow \lambda'(t) = b(t)\, e^{-A(t)}$$

$\Longleftrightarrow$ λ est une primitive sur I de la fonction $t \longmapsto b(t)\, e^{-A(t)}$.

<u>En pratique</u> on calcule une telle primitive et on obtient que $y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$ est une solution particulière de (E).

<u>Exemple</u> : $y'(t) = \frac{1}{t}y(t) + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution générale de l'éq hom associée :

$$y(t) = \lambda t \qquad \text{(vu au 1)) avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution sous la forme

$$y(t) = \lambda(t)\, t \quad \text{avec} \quad \lambda : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathcal{C}^1.$$

On remplace :

$$\lambda'(t)\, t + \cancel{\lambda(t)} = \cancel{\underbrace{\frac{1}{t}\lambda(t)\, t}_{=\lambda(t)}} + 1$$

(à retenir : on doit toujours avoir une simplification de ce type à cet endroit)

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda'(t) = \frac{1}{t}.$$

On peut choisir $\lambda(t) = \ln t$

ce qui donne comme solution particulière

$$y(t) = t \ln t.$$

La Prop donne alors toutes les sol de

$y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$: ce sont les

fonctions $y(t) = \lambda_1 t + t \ln t$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

4) Problème de Cauchy.

On appelle problème de Cauchy la donnée d'une

équation différentielle linéaire d'ordre 1
(homogène ou avec second membre) et
d'une condition initiale de la forme $y(t_0) = y_0$
avec $y_0 \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in I$.

Ex : résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$t_0 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$

$y_0 = 2 \in \mathbb{R}$

Pour résoudre ce problème de Cauchy
on suit la méthode générale de

résolution : on obtient

$$y(t) = \lambda_1 t + t\ln t \quad \text{avec } \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

On évalue alors en $t=1$ pour trouver λ_1 :

$$2 = y(1) = \lambda_1 + 1\ln(1) = \lambda_1$$

donc $\lambda_1 = 2$ et $\boxed{y(t) = 2t + t\ln t.}$

<u>Th</u> Tout problème de Cauchy [pour une éq diff linéaire d'ordre 1] possède 1 et 1 seule solution.

<u>Preuve</u> : les solutions de $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$

sont de la forme $y(t) = \lambda e^{A(t)} + y_0(t)$
avec $y_0(t)$ une sol. particulière (qui existe toujours grâce à la variation de la constante). La constante λ doit vérifier :

$$y_0 = y(t_0) = \lambda e^{A(t_0)} + y_0(t_0)$$

ie : $$\lambda = \frac{y_0 - y_0(t_0)}{e^{A(t_0)}}$$

Il y a bien 1 et 1 seule valeur de λ qui convient.

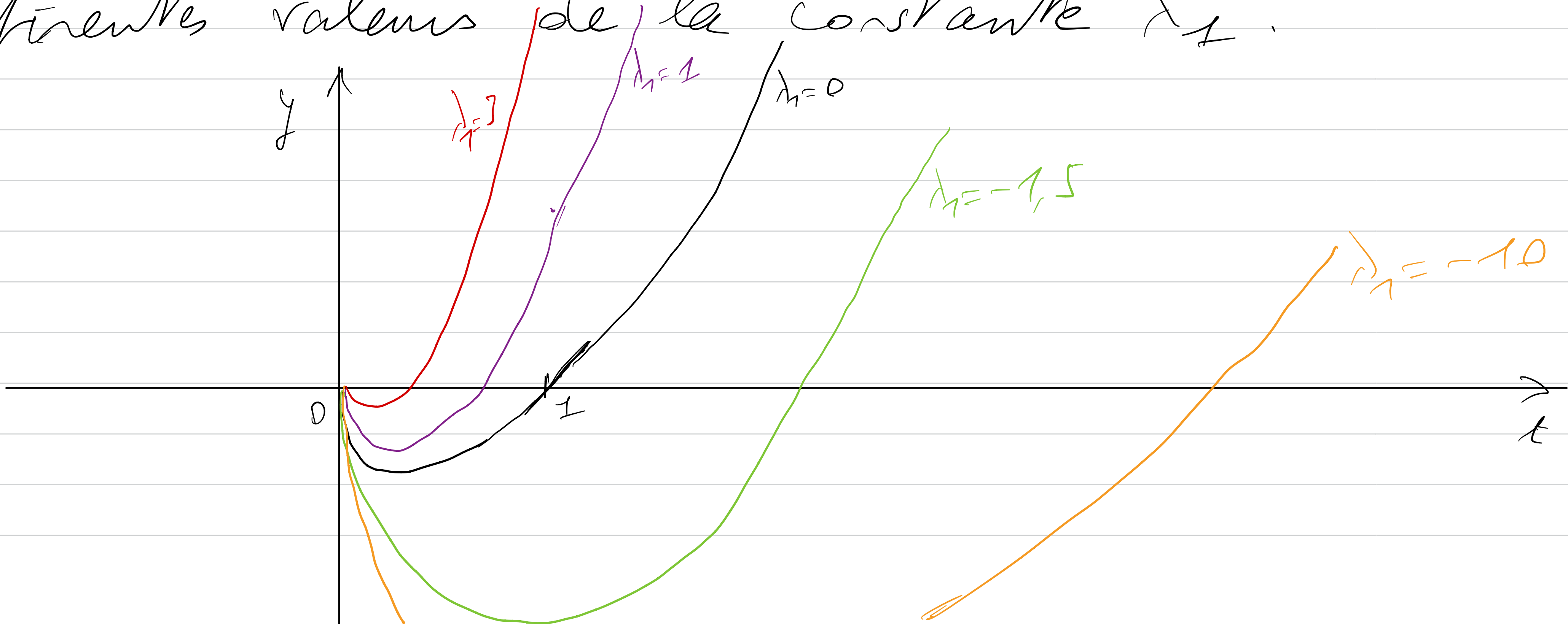
Interprétation graphique des solutions d'une éq diff linéaire d'ordre 1 :

par ex avec $y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + 1$

les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions

$$y(t) = \lambda_1 t + t \ln t \quad \text{avec } \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

On dessine le graphe de ces fonctions pour différentes valeurs de la constante λ_1.



On peut considérer les courbes $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ qui représentent les fonctions $y(t) = \lambda_1 t + t \ln t$.

On voit que :

- $\forall \lambda_1 \neq \lambda_1'$ les courbes $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{C}_{\lambda_1'}$ ne se coupent pas
- Tout point (t, y) avec $x > 0$ est sur l'une de ces courbes : elles remplissent le demi-plan $\{t > 0\}$.

$\forall (t_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \exists! \, \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad (t_0, y_0) \in \mathcal{C}_{\lambda_1}$.

Cela signifie exactement que pour tout

$(t_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ le problème de Cauchy associé possède 1 et 1 seule solution.

Ce sera toujours le cas avec n'importe quelle éq diff linéaire d'ordre 1.

II Eq. Diff linéaires d'ordre 2.

C'est une équation de la forme :

$$\underbrace{y''(t) + a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = c(t)}_{}, \quad t \in I$$

↳ second membre

où $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues. Les fonctions a et b s'appellent les coefficients de l'éq diff.

Eq homogène : $c(t) = 0$. Les solutions forment alors un espace vectoriel.

1) Problème de Cauchy.

On appelle <u>problème de Cauchy</u> la donnée d'une équation différentielle d'ordre 2 linéaire, et de conditions initiales :

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$ avec $t_0 \in I$, $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$.

Th [admis] Tout problème de Cauchy possède une et une seule solution.

Ex : on lance une bille verticalement.
On note $y(t)$ l'altitude de la bille au bout de t secondes.
Accélération $y''(t)$

$\underbrace{\sum \text{Forces exercées}} = m\, y''(t)$ avec m masse de la bille

↳ si il n'y a que le poids : mg
(en orientant l'axe vers le bas)

y en mètres m en kg et $g = 9{,}8$ (unités S.I.)

$\leadsto$ équation différentielle $\quad m y''(t) = mg$

$$y''(t) = g.$$

Données initiales à l'instant $t=0$ on lâche la bille à l'altitude y_0 avec une vitesse y_0'

y vérifie :

$$\begin{cases} y''(t) = g \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_0' \end{cases}$$

on a bien un problème de Cauchy

Corollaire : L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 est un espace vectoriel de dimension 2.

$$E = \{ y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}),\ \forall t \in I\ y''(t) + a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = 0 \}$$

Preuve : E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

Fixons $t_0 \in I$. Considérons $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$y \longmapsto (y(t_0), y'(t_0)).$$

φ est linéaire

φ est bijective : $\forall (y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2\ \exists !\, y \in E$ tq $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$

↳ c'est l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

On a φ linéaire bijective $E \longrightarrow \mathbb{R}^2$

et $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

donc $\dim E = 2$.

<u>NB</u> : plus généralement, les solutions d'une éq diff linéaire homogène d'ordre n forment un espace vectoriel de dimension n.

Dans la suite on se restreint au cas où les coefficients sont constants.

2) Equations homogènes à coefficients constants

On veut résoudre $y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = 0$

a et b sont des réels
(= des constantes)
et pas des fonctions.

pas de second membre : éq. homogène

Astuce pour résoudre cette éq : chercher des solutions sous la forme $y(t) = e^{rt}$.

$r \in \mathbb{R}$

$y'(t) = r\,e^{rt}$

$y''(t) = r^2\,e^{rt}$

$$y''(t)+ay'(t)+by(t)=0 \iff r^2e^{rt}+are^{rt}+be^{rt}=0$$

$$\iff (r^2+ar+b)e^{rt}=0$$

$$\iff \underbrace{r^2+ar+b=0}_{\text{s'appelle l'équation caractéristique de l'éq. diff.}}$$

Th $\overbrace{(i)}^{\Delta=a^2-4b>0}$ Si l'équation $r^2+ar+b=0$ possède 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors les solutions de $y''(t)+ay'(t)+by(t)=0$ sont exactement les fonctions de la forme

$$y(t)=\lambda e^{r_1t}+\mu e^{r_2t} \text{ avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

$\Delta = 0$

(ii) Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ possède une racine double $r_0 = \frac{-a}{2}$ alors les solutions sont les fonctions de la forme

$$y(t) = \lambda e^{r_0 t} + \mu t e^{r_0 t} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$\Delta < 0$

(iii) Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ possède 2 racines complexes non réelles $\frac{-a \pm i\delta}{2}$ avec $\delta = \sqrt{-\Delta} = \sqrt{|\Delta|}$, alors les solutions sont les fonctions de la forme :

$$y(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\left(\lambda \cos\left(\frac{\delta}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\delta}{2}t\right)\right)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

FACULTATIF

D'où vient la forme (ccc) ? Pour le comprendre on va temporairement chercher des solutions à valeurs complexes de notre éq diff.

$y : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est de la forme

$$y(t) = y_1(t) + i\, y_2(t)$$

avec $y_1, y_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Supposons $\Delta < 0$: alors en prenant

$$r_1 = \frac{-a - i\delta}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-a + i\delta}{2}$$

les fonctions $y(t) = e^{r_1 t}$ et $y(t) = e^{r_2 t}$

sont des solutions à valeurs complexes de $y''(t) + a\, y'(t) + b\, y(t) = 0$

⚠ pour r complexe, $r = u + iv$ avec $u, v \in \mathbb{R}$,

$$e^{rt} = e^{(u+iv)t} = e^{ut}\, e^{ivt}$$

$$e^{rt} = e^{ut} \left(\cos(vt) + i \sin(vt)\right).$$

On peut vérifier que la dérivée de cette fonction est bien $r\, e^{rt}$.

Donc en posant $y(t) = e^{r_1 t}$ ou $e^{r_2 t}$ on a bien une solution (à valeurs complexes) de l'éq diff. De la même façon qu'en (i), il est raisonnable de penser que les solutions à valeurs complexes de l'éq diff sont les fonctions de la forme

$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Cela revient à dire que les fonctions $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ forment une famille génératrice (en fait une base) de l'espace vectoriel des solutions à valeurs complexes de l'éq différentielle.

Rappel

$$r_1 = \frac{-a}{2} + i\frac{\delta}{2} \qquad \text{avec } \delta = \sqrt{|\Delta|}$$

$$r_2 = \frac{-a}{2} - i\frac{\delta}{2}$$

$$\begin{cases} e^{r_1 t} = e^{-\frac{a t}{2}} \left(\cos\left(\frac{\delta}{2} t\right) + i \sin\left(\frac{\delta}{2} t\right)\right) \\ e^{r_2 t} = e^{-\frac{a t}{2}} \left(\cos\left(\frac{\delta}{2} t\right) - i \sin\left(\frac{\delta}{2} t\right)\right) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \dfrac{e^{r_1 t} + e^{r_2 t}}{2} = e^{-\frac{a t}{2}} \cos\left(\frac{\delta}{2} t\right) \\ \dfrac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2i} = e^{-\frac{a t}{2}} \sin\left(\frac{\delta}{2} t\right) \end{cases}$$

On en déduit que

$$\left(e^{-\frac{at}{2}}\cos\left(\frac{\delta}{2}t\right),\ e^{-\frac{at}{2}}\sin\left(\frac{\delta}{2}t\right)\right)$$ forme une

base de l'e.v. des solutions (à valeurs complexes) de l'éq diff. Toute solution s'écrit :

$$\lambda e^{-\frac{at}{2}}\cos\left(\frac{\delta}{2}t\right)+\mu e^{-\frac{at}{2}}\sin\left(\frac{\delta}{2}t\right)$$

$$= e^{-\frac{at}{2}}\left(\lambda\cos\left(\frac{\delta}{2}t\right)+\mu\sin\left(\frac{\delta}{2}t\right)\right)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Parmi ces solutions, celles qui sont à valeurs réelles sont celles pour lesquelles $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Preuve du Th : $\boxed{\text{Partie facile}}$: on vérifie que les fonctions du Th sont bien des solutions de l'éq diff.

(i) $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$: OK

(on a vu que $t \mapsto e^{rt}$ est solution pour toute racine r du polynôme $X^2 + aX + b$)

Puis linéarité.

(ii) $\Delta = 0$, r_0 racine double de X^2+aX+b.

Il suffit, par linéarité, de vérifier que $y(t) = te^{r_0 t}$ est solution.

$$y'(t) = e^{r_0 t} + r_0 t e^{r_0 t}$$

$$y''(t) = r_0 e^{r_0 t} + r_0 e^{r_0 t} + r_0^2 t e^{r_0 t}$$

$$= 2 r_0 e^{r_0 t} + r_0^2 t e^{r_0 t}.$$

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = (2r_0 + r_0^2 t) e^{r_0 t} + (a + a r_0 t) e^{r_0 t} + b t e^{r_0 t}$$

$$= e^{r_0 t}\left(\underbrace{(r_0^2 + a r_0 + b)}_{=0} t + \underbrace{(2r_0 + a)}_{} \right)$$

$= 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = e^{i} \cos 1_0 = \dfrac{a}{2}$

donc y est bien solution de l'équation différentielle.

(iii) exercice.

Partie délicate : montrer que ce sont les seules solutions.